І. Г. Шебанов

АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ АВІАДВИГУНІВ І ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

1997

621.01
Ш36

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Харківський авіаційний інститут ім. М.Є. Жуковського

І.Г. Шебанов

АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ АВІАДВИГУНІВ І ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Навчальний посібник

ПЕРЕОБЛІК 2005 р.

Научно-техническая библиотека "ХАИ"
mt0056682

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБЛІОТЕКА

Харків ХАІ 1997

УДК 621.01 (075.8) + 621.45.03-2 + 629.7.02-2 (075.8)
621.44 (075.8).

Аналіз механізмів авіадвигунів і літальних апаратів / І.Г. Шебанов. - Навч. посібник. - Харків: Харк. авіац. ін-т, 1997. - 138 с.

Зміст посібника, методика викладання матеріалу, наведені приклади відображають специфіку підготовки фахівців у Харківському авіаційному інституті. Кожний розділ має запитання для самоконтролю при вивченні цього розділу, рекомендовані для розв"язання приклади, перелік пропонованої літератури, яка містить не тільки навчальні, але й наукові видання, що дає можливість поглибити та поширити розуміння питань, які вивчаються. Значне місце займають аналітичні методи розрахунків плоских та просторових механізмів, що дозволяє використовувати ЕОМ при розв"язанні різних задач аналізу механізмів, які трапляються в інженерній практиці.

Призначено для самостійної роботи студентів над першою частиною лекційного курсу "Основи конструювання механізмів і машин" - "Теорія механізмів і машин".

Іл. 82. Табл. 2. Бібліогр.: 13 назв.

Р е ц е н з е н т и: кафедра теорії механізмів і деталей машин Харк. держ. академії залізничного транспорту;
канд. техн. наук, доц. В.В. Бурлака

© Харківський авіаційний інститут, 1997

З М І С Т

ВСТУП..... 5

I. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ..... 7

I.I. Кінематичні пари і кінематичні ланцюги..... 7

I.I.I. Кінематичні пари та їх класифікація..... 7

I.I.2. Кінематичні ланцюги..... 8

I.2. Механізми, їх структура та класифікація..... 9

I.2.I. Основні види механізмів..... 9

I.2.2. Структурні формули просторових і плоских механізмів..... I7

I.2.3. Заміна вищих кінематичних пар четвертого класу кінематичним ланцюгом із парами п"ятого класу..... I9

I.2.4. Класифікація механізмів..... 2I

I.2.5. Послідовність структурного аналізу механізму. 25

2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ..... 29

2.I. Кінематичний аналіз важільних механізмів з нижчими кінематичними парами..... 29

2.I.I. Аналітичні методи..... 30

2.I.2. Векторно-графічний метод..... 46

2.I.3. Метод кінематичних діаграм..... 57

2.2. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів..... 63

2.2.I. Кулачковий механізм із спеціальним профілем кулачка..... 64

2.2.2. Кулачковий механізм із довільним профілем кулачка..... 65

2.3. Кінематичне дослідження зубчастих механізмів..... 68

2.3.I. Прості зубчасті механізми..... 68

2.3.2. Складні зубчасті механізми..... 70

3. ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ..... 80

3.I. Силовий розрахунок механізмів..... 80

3.I.I. Сили, що діють на ланки механізму..... 80

3.I.2. Умови кінетостатичної визначеності кінематичних ланцюгів із кінематичними парами п"ятого класу 83

3.I.3. Послідовність силового розрахунку механізмів другого класу..... 84

3.I.4. Силовий розрахунок плоского механізму другого класу з кінематичними парами п"ятого класу... 85
3.I.5. Визначення зрівноважувальної сили методом М.Є. Жуковського..... 93
3.I.6. Силовий розрахунок просторових механізмів з нижчими кінематичними парами п"ятого класу... 95
3.2. Тертя в кінематичних парах механізмів..... II2
3.2.I. Тертя ковзання у нижчих кінематичних парах... II2
3.2.2. Тертя кочення і ковзання у вищих кінематичних парах..... I2I
3.3. Енергетичні характеристики механізмів..... I27
3.3.I. Режими руху механізмів..... I27
3.3.2. Механічний коефіцієнт корисної дії..... I28
3.4. Дослідження руху механізму під дією позиційних сил..... I29
3.4.I. Формування динамічної моделі..... I29
3.4.2. Визначення законів руху ланок механізму..... I32
3.5. Дослідження руху механізму під дією сил, що залежать від швидкості..... I34

В С Т У П

Машинобудування - провідна галузь сучасної техніки. В її створенні першочергове значення має наука про загальні методи досліджень та утворення механізмів і машин - основи конструювання механізмів і машин.

Механізмом називається система тіл, призначених для перетворення руху або для виконання визначеного руху.

Машиною називається побудова, що відтворює фізичну працю, або властиві людині та живій природі фізіологічні й біологічні процеси. До складу машини може входити один механізм або комплекс механізмів.

Машини розподіляються на такі групи: 1) енергетичні, 2) робочі, 3) інформаційні, 4) кібернетичні.

Енергетичні машини призначені для перетворення різних видів енергії у механічну і навпаки.

У першому випадку вони мають назву машин-двигунів (електродвигуни, турбіни, двигуни внутрішнього згоряння), у другому - машин-генераторів (генератори електричного струму).

Робочі машини призначені для зміни форми тіла, його положення та стану (металообробні верстати, транспортні машини, компресори).

Інформаційні машини використовуються для перетворення інформації (математичні машини, контрольно-керуючі машини).

Кібернетичні машини замінюють або імітують механічні, фізіологічні та біологічні процеси (штучні серце, нирки, кінцівки).

Машини, в яких перетворення енергії, матеріалів та інфор-

маші відбувається без безпосередньої участі людини, називаються машинами-автоматами. Комплекс машин-автоматів, що виконують усі послідовні операції виготовлення виробів складної форми, називається автоматичною лінією.

Двигун, передаточний механізм і робоча машина утворюють машинний агрегат. Іноді до складу машинного агрегату входять контрольно-керуючі та лічильно-вирішувальні пристрої.

Наука "Основи конструювання механізмів і машин" складається з трьох розділів: аналізу, синтезу, конструювання та розрахунків на міцність механізмів і машин.

Аналіз механізмів полягає у дослідженні структурних, кінематичних і динамічних властивостей механізмів за їх заданими схемами, синтез механізмів - у проектуванні схем механізмів за їх заданими властивостями. У розділі "Конструювання та розрахунки на міцність механізмів і машин" розглядаються методи розрахунків і конструювання деталей механізмів і машин. При цьому найбільша увага приділяється механізмам літальних апаратів та авіаційній техніці, з урахуванням профілю підготовки фахівців.

Контрольні запитання

1. Яке призначення механізмів і машин?
2. На які групи розподіляються машини?
3. Які машини називаються машинами-автоматами?
4. Назвіть складові частини машинного агрегату.
5. З яких розділів складається наука "Основи конструювання механізмів і машин"?

I. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

Мета структурного аналізу - вивчення будови механізмів, функцій їх окремих частин і законів утворення механізмів.

На основі структурного аналізу встановлюються методи кінематичного та динамічного дослідження, здійснюється вибір раціональних схем механізмів.

I.I. Кінематичні пари і кінематичні ланцюги

I.I.I. Кінематичні пари та їх класифікація

Кожний механізм налічує багато елементарних частин, виготовлених без застосування складальних операцій, тобто деталей (гайок, болтів, валів, зубчастих коліс, шпонок і т.п.).

Одна деталь або сукупність деталей, між якими відсутній відносний рух, називається ланкою механізму. Наприклад, ведуча ланка конічного редуктора (рис. I.I) складається з вала I, шестірні 2, шпонки 3, шайби 4 і болтів 5.

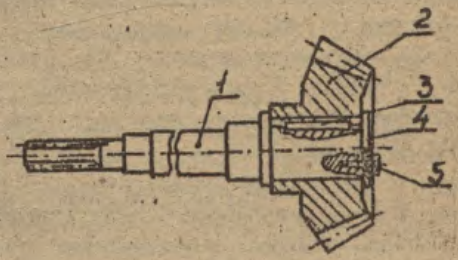


Рис. I.I

Ланки можуть бути не тільки жорсткими, але й гнучкими (паси, троси), пружними (пружини, ресори). Рухоме з"єднання двох стичних ланок називається кінематичною парою.

Кінематичні пари розподіляються на п"ять класів. Клас кінематичної пари визначається кількістю зв"язків, накладених на відносний рух ланок (рис. I.2). Можливий відносний рух ланок на рис. I.2 показано відрізками та дугами зі стрілками.

Залежно від характеру стикання ланок, що утворюють кінематичну пару, розрізняють нижчі та вищі кінематичні пари.

У нижчих кінематичних парах (НКП) ланки стикаються по поверхні (рис. I.2,в,г,д,е), у вищих кінематичних парах (ВКП) -

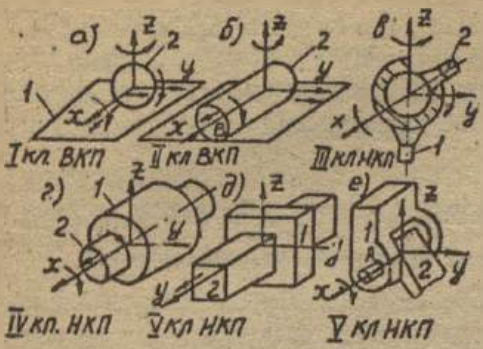


Рис. I.2

по лінії або в точці (рис. I.2,а,б). Нижчі пари мають властивість оборотності, тобто відносні траєкторії збіжних точок ланок, з яких складається нижча пара, тотожні. Наприклад, траєкторія точки А (рис. I.2,в) є колом незалежно від того, яка з ланок цієї кінематичної пари нерухома, а яка обертається. Більшість вищих кінематичних пар властивості оборотності не мають. Наприклад, точка В - контакту основи циліндра з площиною (рис. I.2,б) - при перекочуванні циліндра по площині опише циклоїду, а при перекочуванні площини по циліндру - евольвенту.

За характером замикання кінематичні пари поділяються на пари із силовим і геометричним замиканням. Силове замикання здійснюється за рахунок сили ваги (рис. I.2,а) або сили пружності пружини.

I.I.2. Кінематичні ланцюги

Ланки, з"єднані кінематичними парами, утворюють кінематичний ланцюг (КЛ). Розрізняють ланцюги прості й складні, відкриті й замкнені.

У простих кінематичних ланцюгах кожна ланка входить не більше як до двох кінематичних пар (рис. I.3,а,в); у складних кінематичних ланцюгах є ланка, що має більше двох кінематичних пар (рис. I.3,б,г).

Відкритим називається кінематичний ланцюг, в якому є ланки, що мають лише одну кінематичну пару (рис. I.3,а,б). Замкнений кінематичний ланцюг - це такий ланцюг, в якому кожна ланка входить не менш як до двох кінематичних пар (рис. I.3,в,г).

Кінематичні ланцюги поділяються також на плоскі та просто-

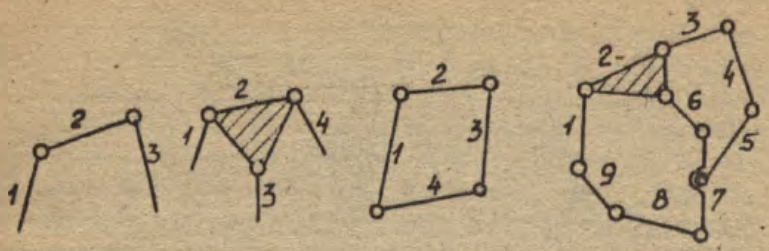


Рис. I.3

рові. Плоским називають ланцюг, точки усіх ланок якого переміщуються в одній площині або в паралельних площинах. У просторовому ланцюзі усі точки ланок описують неплоскі криві або криві, розташовані у пересічних площинах.

I.2. Механізми, їх структура та класифікація

I.2.I. Основні види механізмів

Механізмом називається кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, в якому при заданому русі однієї або кількох ланок усі рухомі ланки здійснюють визначений рух.

Нерухома ланка механізму називається стояком. Поняття "нерухомість" в даному випадку умовне. В стаціонарних механізмах нерухома ланка з"єднана із землею (станини верстатів), в транспортних механізмах нерухомою ланкою є корпус літака, вертольота і т.п.

Ланки, рух яких заданий, називаються вхідними. Вихідні - це такі ланки, що здійснюють рух, для виконання якого призначено механізм. Інші рухомі ланки називаються проміжними, або з"єднувальними. Далі розглядаються найпоширеніші види механізмів з нижчими та вищими парами.

Найпростіший важільний механізм складається з дволанкового відкритого кінематичного ланцюга. Ланці I задано рух, ланка 2 перетворена у стояк (рис. I.4,а). Такий механізм застосовується у турбінах, електродвигунах, вентиляторах і т.п.

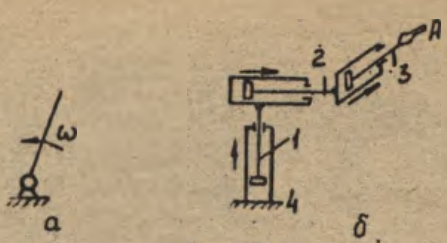


Рис. I.4

Схему важільного механізму, утвореного з відкритого чотириланкового просторового кінематичного ланцюга, зображено на рис. I.4,б. Такий механізм використовується у маніпуляційних роботах. Для визначеності руху схвату A (без урахування переміщення губок) необхідно задати рух трьом ланкам механізму.

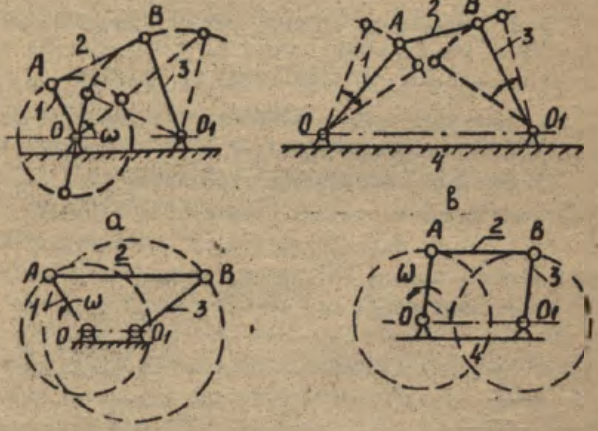
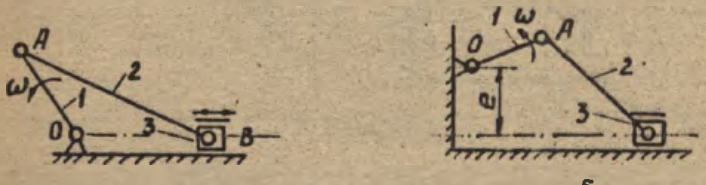


Рис. I.5

Багато важільних механізмів утворено замкненим кінематичним ланцюгом. На рис. I.5,а зображено схему механізму "шарнірний чотириланковик". Вхідна ланка цього механізму OA , що здійснює повний оберт навколо осі O , називається кривошипом; ланка BO_1 , яка здійснює неповний оберт навколо осі O_1, - коромислом; ланка AB , не з"єднана кінематичними парами зі сто

яком, – шатуном.

Шарнірні чотириланковики можуть бути також двокривошипними (рис. I.5,б) и двокоромисловими (рис. I.5,в). Окремим випадком шарнірного чотириланковика є шарнірний паралелограм (рис. I.5,г). Шарнірні чотириланковики використовують для здійснення безперервного обертання або зворотно-обертального руху вихідної ланки. Застосовують також їх у забираних шасі, у механізмах керування літаком, у кранах, довбальних верстатах, кувальних машинах і т.ін.



а б

Рис. I.6

Кривошипно-повзунні механізми (рис. I.6) призначені для перетворення обертального руху кривошипу у поступально-зворотний рух повзуна і навпаки. Якщо вісь поступальної пари проходить через точку 0 (рис. I.6,а), то такий кривошипно-повзунний механізм називається центральним. в іншому випадку – дезаксіальним, а відстань e – дезаксіалом. Кривошипно-повзунні механізми широко використовуються у двигунах внутрішнього згоряння. компресорах, насосах.

До чотириланкових механізмів належать також кулісні механізми (рис. I.7). Кулісою називається рухома ланка 3, яка створює поступальну пару з ланкою 2 – кулісним каменем. Розрізняють такі механізми: з кулісою, яка обертається (рис. I.7,а), з кулісою, що здійснює коливальний рух (рис. I.7,б), з кулісою, що має поступально-зворотний рух (рис. I.7,в).

Кулісні механізми (рис. I.7,а,б) використовуються в ротаційних насосах, довбальних верстатах і т.п. Механізм, зображений на рис. I.7,в,називається синусним. тому що переміщення кулісси 3 пропорційно синусу кута φ . Цей механізм використову-

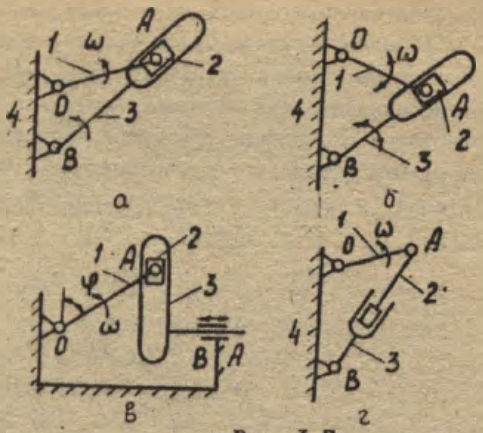


Рис. I.7

ється у компресорах, приладах і т.п. Механізм із циліндром, що коливається (рис. I.7,г), в якому ланка 2 є і шатуном, і поршнем, має поширене застосування у силових приводах шасі, закрилків, тримерів літаків, а також у силових приводах маніпуляційних роботів.

У техніці використовуються також багатоланкові важільні механізми, утворені розвитком чотириланкових механізмів.

На рис. I.8,а,б зображені схеми шестиланкових механізмів стабілізатора і забираного шасі літака.

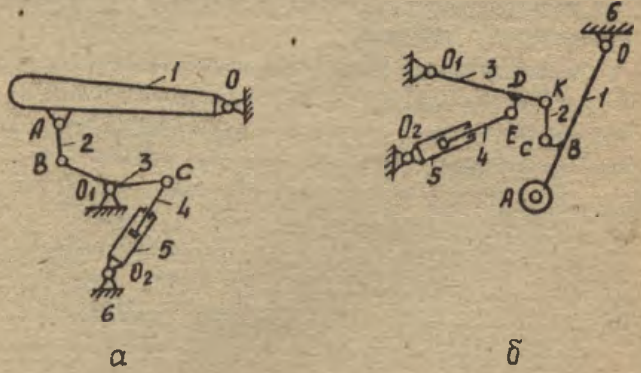


Рис. I.8

До механізмів з нижчими парами належать також гвинтові механізми (рис. I.9,а), які застосовуються для перетворення обертального руху в поступальний. Серед механізмів, до складу яких входять вищі кінематичні пари, розрізняють шарикогвинтові, кулачкові й зубчасті механізми.

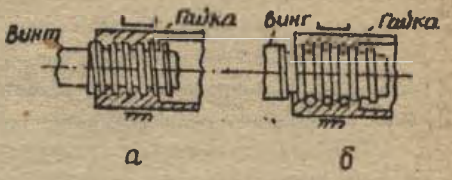


Рис. I.9

У шарикогвинтовому механізмі (рис. I.9,б) гвинт і гайка мають гвинтові канавки, в яких розміщуються шарики, завдяки чому має місце не тертя ковзання, як у гвинтовому механізмі, а тертя кочення.

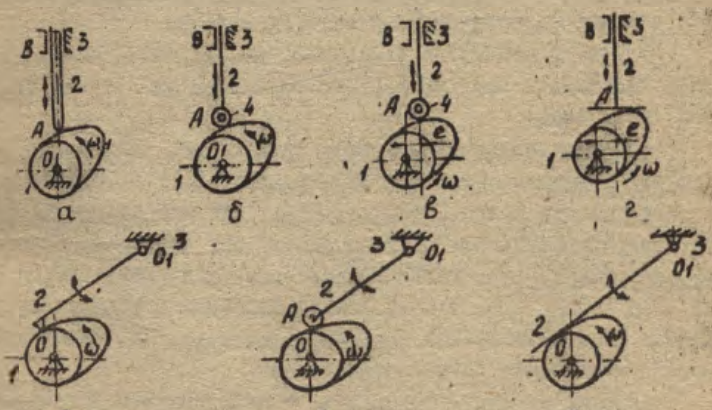


Рис. I.IO

Позитивною якістю кулачкових механізмів є можливість одержання руху вихідної ланки за будь-яким законом. Вхідна ланка I (рис. I.IO) із змінною кривиною профілю називається кулачком, вихідна ланка 2 – штовхачем.

У техніці найбільше поширення мають два види плоских кулачкових механізмів. В механізмах першого виду обертальний рух

кулачка перетворюється на прямолінійно-зворотний рух штовхача (рис. I.IO,а,б,в,г), у механізмах другого виду обертання кулачка перетворюється на обертально-зворотний рух штовхача (рис. I.IO,д,е,є). Кулачкові механізми першого виду можуть бути центральними, коли вісь поступальної пари штовхача проходить через вісь обертання кулачка (рис. I.IO,а,б), і нецентральними, коли вісь поступальної пари штовхача зміщена відносно осі обертання кулачка на величину ексцентриситету e (рис. I.IO,в,г).

Штовхачі кулачкових механізмів залежно від елементів, якими вони дотикаються до кулачка, розподіляються на певні групи. Гострокінцевий штовхач (рис. I.IO,а,д) застосовується у малонавантажених механізмах, частіше у приладах. Використання роликового штовхача (рис. I.IO,б,в,е) зменшує тертя, але при цьому збільшуються габарити механізму. Позитивні якості плоского штовхача (рис. I.IO,г,є) - проста конструкція, добрі умови для змазування робочої поверхні. Загальним недоліком усіх кулачкових механізмів є великий питомий тиск у вищій кінематичній парі, складність виготовлення профілю кулачка.

Зубчасті механізми призначені для передачі обертального руху від одного вала до другого та для зміни кутової швидкості вихідного вала.

Простий зубчастий механізм зовнішнього зачеплення (рис. I.II,в) і внутрішнього зачеплення (рис. I.II,б) складається з двох зубчастих коліс і стояка. Кола, які при обертанні зубчастих коліс обкочуються одне по одному без ковзання, називаються початковими колами. Радіуси початкових кіл позначаються буквами r_{w1} і r_{w2}. Миттьовий центр обертання у відносному русі (точка p) називається полюсом зачеплення. На схемах зубчасті колеса позначають початковими колами.

Складні зубчасті механізми, в яких налічується кілька зубчастих пар, поділяються на зубчасті механізми з нерухомими осями обертання коліс і на зубчасті механізми, в яких є рухомі осі обертання. До перших належать рядні та кратні, до других - диференціальні та планетарні.

У рядному зубчастому механізмі (рис. I.II,в) на кожній осі розміщено по одному колесу і передача руху відбувається

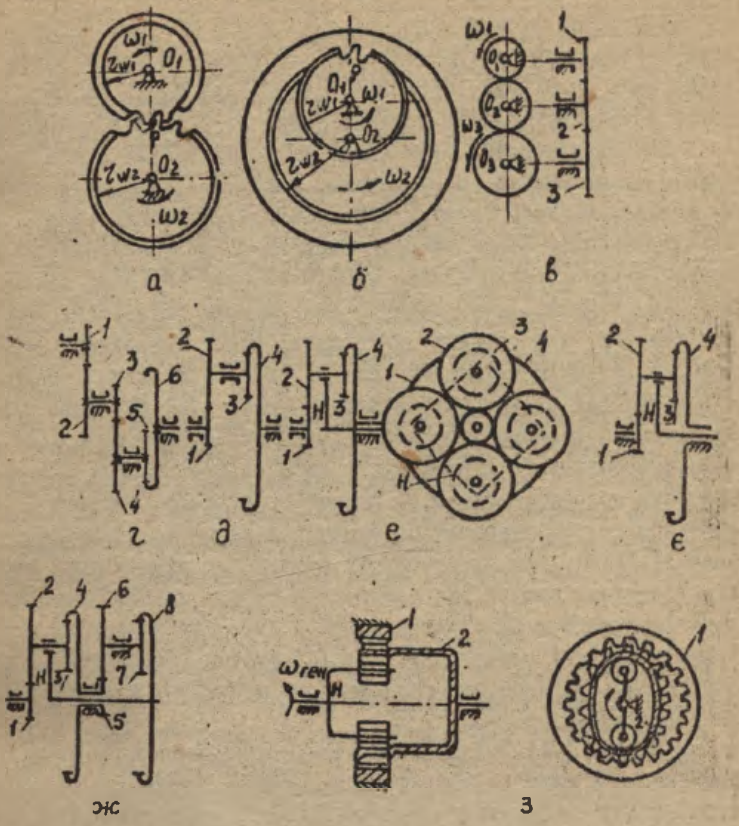


Рис. I.II

послідовно, від першого колеса до другого і т.д.

У кратних зубчастих механізмах (рис. I.II,г,д) перший та останній вали мають по одному колесу, а проміжні - по два. Рух передається від першого колеса до другого, від третього - до четвертого і т.п.

Кратний зубчастий механізм, у якого осі першого та останнього валів збігаються (рис. I.II,д), називається співвісним кратним механізмом.

На рис. I.IГ,е показано схему диференціального зубчастого механізму із жорсткими колесами. Перше і четверте колеса цього механізму називаються центральними, друге і третє колеса, осі яких рухомі,- сателітними. Сателітні колеса разом з валом, на якому вони розміщені, створюють сателітний блок. На рис. I.II,е таких сателітних блоків чотири. Ланка H називається водилом.

Для визначеності руху ланок цього механізму необхідно задати рух яким-небудь двом ланкам, наприклад, першому і четвертому колесам, і тоді їх рухи об"єднаються на водилі. Диференціальний механізм можна використовувати також для розкладу руху однієї вхідної ланки на два незалежні рухи вихідних валів, наприклад, в авіаційному двигуні для привода співвісних повітряних гвинтів. Якщо одно з центральних коліс (наприклад четверте) диференціального механізму (рис. I.II,е) закріпити, то утвориться простий планетарний механізм (рис. I.II,є). Якщо між двома рухомими ланками диференціального механізму (рис. I.II,е) ввести додатковий кінематичний зв"язок (наприклад, з"єднати четверте колесо і водило за допомогою п"ятого, шостого і сьомого коліс), то утвориться замкнений планетарний механізм (рис. I.II,ж). Для визначеності руху ланок планетарних механізмів достатньо задати рух одній якій-небудь ланці. Планетарні механізми широко використовуються в авіаційній техніці. Застосовуються також комбіновані складні зубчасті механізми, наприклад, з"єднання простого планетарного механізму і кратного зубчастого механізму, і т.п.

На рис. I.II,з зображено схему хвильового механізму в планетарному одноступінчастому виконанні. Хвильовий механізм складається з нерухомого колеса із внутрішнім зубчастим вінцем I, зубчастого вінця на пружному тонкостінному стакані 2 та генератора хвиль (водила) H . При обертанні ведучого генератора хвиль його ролики деформують ланку 2, вводячи її зубчастий вінець у зачеплення із зубчастим вінцем нерухомого колеса I. При різних числах зубців коліс I і 2 ($z_2 < z_1$) це призводить до обертання ланки 2 та з"єднаного з нею веденого вала у напрямку, протилежному до напрямку обертання генератора H . Нерухомим може бути як жорстке, так і пружне колесо. Якщо у хви-

льовому механізмі гнучку ланку 2 закріплено, а жорстке колесо I є веденим, генератор І жорстке колесо обертаються в одному напрямку. Хвильові планетарні механізми застосовуються для відтворення великих змін кутового руху в авіаційно-космічній техніці. Хвильові механізми можуть бути й диференціальними.

I.2.2. Структурні формули просторових і плоских механізмів

Структурна формула механізму визначає його ступінь рухомості, тобто число ступенів вільності відносно стояка. Щоб рух ланок механізму був цілком визначеним, число його узагальнених координат повинно дорівнювати ступеню рухомості. Ланка, якій надається одна або кілька узагальнених координат механізму, називається початковою. Початкова ланка необов"язково збігається із вхідною. За початкову можна прийняти вихідну ланку або проміжну, якщо при цьому спрощується дослідження механізму. У механізмі з однією узагальненою координатою ($W = 1$) - одна початкова ланка. У механізмі з $W = 2$ можуть бути або дві початкові ланки, кожній з яких надається одна узагальнена координата, або одна початкова ланка з двома узагальненими координатами.

Якщо у просторовому механізмі n ланок, то загальне число ступенів вільності, які мали ланки до з"єднання їх кінематичними парами, - $6n$. Нехай до складу механізму входять кінематичні пари, починаючи з першого до п"ятого класу, число яких відповідно дорівнює p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 . Тоді число віднятих ступенів вільності (число накладених умов зв"язку) кінематичними парами різних класів дорівнює

$$5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1.$$

Шість ступенів вільності віднімаються при закріпленні однієї з ланок кінематичного ланцюга. Якщо всі умови зв"язку незалежні, то структурна формула просторового механізму має вигляд

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 - 6,$$

або

$$W = 6n' - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \qquad (I.I)$$

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБЛІОТЕКА

де $n' = n - 1$ - кількість рухомих ланок механізму.

Вираз (I.I) називають формулою Сомова-Малишева.

Якщо в плоскому механізмі n ланок, то загальне число ступенів вільності, які мали ланки до з"єднання кінематичними парами, - $3n$.

У складі плоского механізму не можуть існувати кінематичні пари першого, другого і третього класів, тому що вони дозволяють ланкам, які їх утворюють, мати три і більше незалежних відносних рухів. Тоді число відняних ступенів вільності (число накладених умов зв"язку) кінематичними парами п"ятого та четвертого класів дорівнює $2p_5 + p_4$. Три ступені вільності відніймаються при закріпленні однієї ланки кінематичного ланцюга. Якщо всі умови зв"язку є незалежними, то структурна формула плоского механізму (формула Чебишева) має вигляд

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 - 3,$$

або

$$W = 3n' - 2p_5 - p_4, \qquad (I.2)$$

де $n' = n - 1$ - кількість рухомих ланок механізму.

Крім незалежних умов зв"язку в механізмах можуть бути залежні умови зв"язку - <u>зайві зв"язки</u>.

Структурні формули просторового і плоского механізмів із зайвими зв"язками мають вигляд

$$W = 6n' - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q; \qquad (I.3)$$

$$W = 3n' - 2p_5 - p_4 + q, \qquad (I.4)$$

де q - кількість зайвих зв"язків.

Розрізняють як конструктивні $q_к$, так і технологічні $q_т$ зайві зв"язки.

<u>Приклад I</u>. Визначимо ступінь рухомості механізму із конструктивними зайвими зв"язками. На рис. I.II,е плоский диференціальний зубчастий механізм має чотири сателітні блоки, але для передачі руху достатньо одного. Таким чином, три сателітні блоки є зайвими і еквівалентними трьом конструктивним зайвим зв"язкам. Розміщення трьох зайвих сателітних блоків дозволяє вільни-

ти потужність, яка передається при незмінному габариті.

Число рухомих ланок механізму (рис. I.II,е) $n' = 7$, число кінематичних пар п"ятого класу (циліндричні шарніри) $p_5 = 7$, число кінематичних пар четвертого класу (зубчасті зачеплення) $p_4 = 8$, число зайвих конструктивних зв"язків $q_{yk} = 3$.

Тоді

$$W = 3n' - 2p_5 - p_4 + q_{yk} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 8 + 3 = 2$$

Приклад 2. Визначимо кількість технологічних зайвих зв"язків механізму (рис. I.5,а). Число рухомих ланок шарнірного чотириланковика $n' = 3$, кількість кінематичних пар п"ятого класу $p_5 = 4$, кількість кінематичних пар четвертого класу $p_4 = 0$. Тоді згідно з виразом (I.4) $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 + 0 = 1$.

Проте при неточному виготовленні та складанні механізму і значних деформаціях ланок можливе порушення умов плоского руху. В цьому випадку кількість зайвих технологічних зв"язків знаходять за формулою (I.3):

$$q_T = W - 6n' + 5p_5 + 4p_4 = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 3.$$

Зайві технологічні зв"язки усуваються зміною рухомості окремих кінематичних пар. Наприклад, у шарнірному чотириланковику можна дві обертальні пари п"ятого класу замінити: одну – на сферичну пару третього класу, другу – на циліндричну пару четвертого класу.

I.2.3. Заміна вищих кінематичних пар четвертого класу кінематичним ланцюгом із парами п"ятого класу

З метою спрощення вивчення структури та кінематики механізму в багатьох випадках зручно умовно замінювати вищі пари четвертого класу кінематичним ланцюгом із кінематичними парами п"ятого класу.

При цьому повинні задовольнятися умови структурної та кінематичної еквівалентності, тобто замінюючий ланцюг мусить накладати на відносний рух ланок стільки умов зв"язку, скільки й вища пара четвертого класу. Характер миттьового відносного руху мусить зберігатися.

У плоскому механізмі кожна кінематична пара четвертого класу на відносний рух ланок накладає одну умовну зв"язку. Кіне-

матичний ланцюг, до складу якого входять p_5 пар п"ятого класу та n' ланок, накладає $2p_5 - 3n$ умов зв"язку.

Таким чином, умова структурної еквівалентності набуває вигляду

$$2p_5 - 3n' = 1. \qquad (I.5)$$

Співвідношення між числом кінематичних пар п"ятого класу та числом ланок, які входять до плоского замінюючого ланцюга, –

$$p_5 = \frac{3n'+1}{2}; \qquad (I.6)$$

для просторового ланцюга

$$p_5 = \frac{6n'+4}{5}.$$

Отже, самий простий замінюючий ланцюг складається з однієї ланки та двох кінематичних пар п"ятого класу.

Як виконується умова кінематичної еквівалентності, побачимо на прикладі.

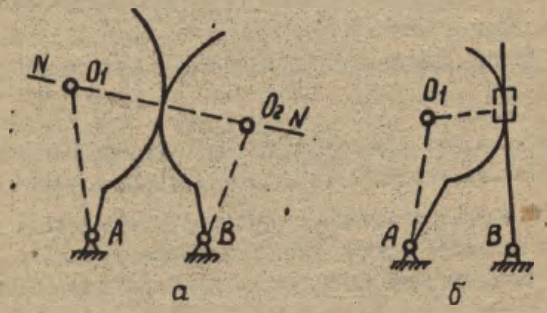


Рис. I.I2

На рис. I.I2,а зображено триланковий плоский механізм із вищою парою четвертого класу, утвореною криволінійними поверхнями змінних радіусів кривини.

Для одержаної схеми замінюючого механізму проводимо нормаль NN до профілів у точці їх дотику і намічаємо центри кривини профілю O_1 і O_2. Замість вищої пари вводимо умовну лан-

ку, що входить до складу двох обертальних пар, центри яких збігаються з центрами кривини. Механізм AO_1O_2B і є замінюючим механізмом.

Із диференціальної геометрії відомо, що коло кривини у точці дотику до кривої та сама крива еквівалентні до похідної другого порядку включно. Так само і замінюючий механізм еквівалентний заданому, тобто положення швидкості та прискорення однойменних точок будуть однакові. Коли один із профілів являє собою пряму (рис. I.I2,б), центр його кривини нескінченно віддалений і ланка замінюючого ланцюга входить в одну обертальну та одну поступальну пари.

I.2.4. Класифікація механізмів

Класифікацією механізмів називається об"єднання механізмів в окремі групи за загальними ознаками і властивостями. Розрізняють такі її види:

I. Структурно-конструктивна класифікація, коли механізми об"єднуються за ознаками конструктивного оформлення. Елементи цієї класифікації викладено в п. I.2.I.

2. Класифікація за функціональним призначенням, яка об'єднує механізми одного визначеного призначення, наприклад, механізми забираного шасі літака, механізми передач руху і т.п.

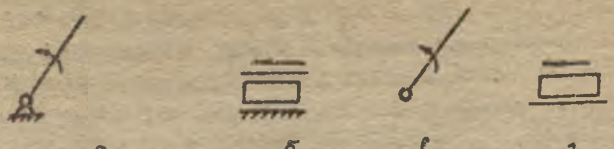
3. Структурна класифікація, в основу якої покладено особливість будови механізмів.

Першу і другу класифікації застосовують у сучасній довідковій технічній літературі.

Для вивчення та удосконалення методів кінематичного та динамічного аналізу механізмів необхідна структурна класифікація. На її основі розроблено структурний аналіз механізмів. Основи структурної класифікації плоских механізмів утворені професором Л.В. Ассуром у I9I4-I9I8 рр. В подальшому вона була творче розвинута російськими та українськими вченими І.І. Артоболевським, С.М. Кожевниковим та іншими.

Структурна класифікація плоских механізмів передбачає склад механізмів з елементарних структурних компонентів: основних механізмів, окремих початкових ланок (кожної з однією кінематичною парою), структурних груп.

Основним є дволанковий механізм (рис. І.І3,а,б), що складається із початкової ланки І, стояка 2 та кінематичної пари п"ятого класу (обертальної або поступальної).



а б в г

Рис. І.І3

Структурна формула основного механізму: $W = 3n' - 2p_5 = 1$. Ступінь його рухомості дорівнює одиниці.

Окрема початкова ланка – це початкова ланка з кінематичною парою п"ятого класу (рис. І.І3,в,г); її структурна формула така сама, як і основного механізму.

Структурна група (група Ассура) – це кінематичний ланцюг, який після приєднання зовнішніми кінематичними парами до стояка набуває нульового ступеня рухомості, прицьому структурна група не повинна поділятися на простіші кінематичні ланцюги з нульовим ступенем рухомості. Структурна формула структурної групи, що утримує тільки кінематичні пари п"ятого класу, має вигляд

$$W = 3n' - 2p_5 = 0, \qquad (I.7)$$

звідки

$$p = \tfrac{3}{2} n'. \qquad (I.8)$$

Згідно з формулою (І.8), залежно від числа ланок та кінематичних пар в структурній групі ці групи можуть бути різної структури (табл. І.І).

Таблиця І.І

Кількість ланок групи	2	4	І т.д.
Число кінематичних пар п"ятого класу – І5	3	6	І т.д.

У механізмах особливо поширені простіші структурні групи, що складаються з двох ланок і трьох кінематичних пар п"ятого класу (двоповодкові групи) (рис. І.І4).

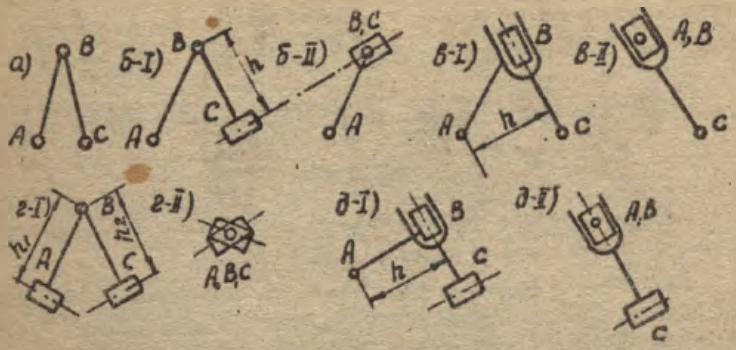


Рис. I.I4

У другій колонці табл. I.I наведено співвідношення між числом ланок і кількістю кінематичних пар, що відповідає триповодковій групі (рис. I.I5,а) (ланка 2 називається базисною, а ланки I, 3, 4 - поводками), а також структурній групі, у якої крім двох тристоронніх коротких замкнених контурів є один рухомий - чотиристоронній (рис. I.I5,б).

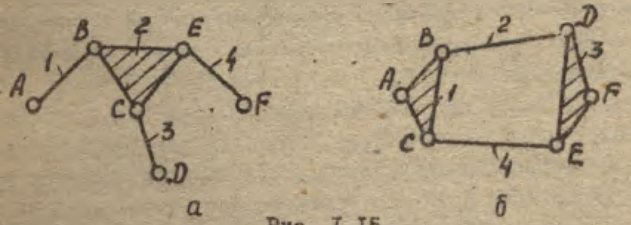


Рис. I.I5

Кожна структурна компонента характеризується класом, який установлюється за найвищим класом контура, що входить до її складу. Клас контура визначається числом кінематичних пар, які має контур. На рис. I.I6,а,б,в,г зображено контури I - 4-го класів.

Таким чином, основні механізми та окремі початкові ланки є структурними компонентами першого класу, двоповодкові групи - другого класу, триповодкові - третього класу і структурна гру-

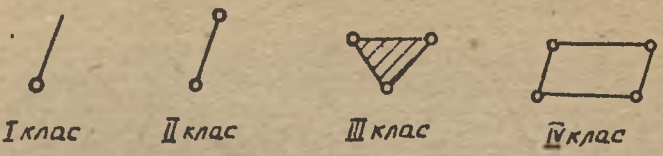


Рис. I.I6

па з чотиристороннім рухомим контуром – четвертого класу. Існують структурні групи вищих класів.

Залежно від вигляду внутрішньої та зовнішніх кінематичних пар розрізняють двоповодкові групи п"яти модифікацій. У групі першої модифікації всі кінематичні пари обертальні (рис. I.I4,а). У двоповодковій групі другої модифікації одна зовнішня кінематична пара поступальна (див. рис. I.I4,б). У групі третьої модифікації внутрішня пара поступальна (рис. I.I4,в). У групі четвертої модифікації обидві зовнішні пари поступальні (див. рис. I.I4,г). У групі п"ятої модифікації внутрішня і зовнішня пари – поступальні (див. рис. I.I4,д). На рис. I.I4,б,в,г,д наведено по два варіанти однієї модифікації. У варіанті І повзун має плече $h \neq 0$, у варіанті ІІ – плече $h = 0$. Кінематичний ланцюг з трьома поступальними парами не утворює структурної групи, бо якщо його приєднати до стояка, то він не матиме нульової рухомості.

Групи третього класу відрізняються одна від одної порядком. Порядок групи визначається кількістю зовнішніх кінематичних пар. Триповодкова група має третій порядок. Порядок груп третього класу може бути від третього до n-го, порядок груп четвертого класу – від другого (див. рис. I.I5,б) до четвертого.

Структурна формула структурної групи з кінематичними парами п"ятого і четвертого класів має вигляд

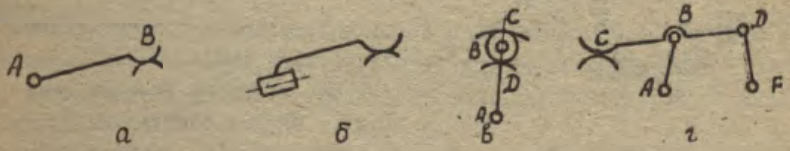
$$W = 3n' - 2p_5 - p_4 = 0. \qquad (I.9)$$

Відповідно до формули (I.9) і залежно від числа ланок і кінематичних пар у структурній групі ці групи можуть бути різної структури (табл. I.2).

Таблиця I.2

Кількість ланок групи - n	I	2(3)	І т.д.
Число кінематичних пар п"ятого класу - p_5	I	2(4)	
Число кінематичних пар четвертого класу - p_4	I	2(I)	

Структурна група другого класу (монада) складається з однієї ланки однієї пари п"ятого класу та однієї пари четвертого класу (рис. I.17,а,б).



а б в г

Рис. I.7

У другій колонці табл. I.2 наведено два варіанти структурної групи третього класу, третього порядку (рис. I.I7,в,г). Клас механізму визначається найвищим класом структурної компоненти, що входить до його складу.

Принципи структурної класифікації плоских механізмів можуть бути поширені й на просторові механізми. Найбільше використання в просторових механізмах мають структурні компоненти першого та другого класів, для яких структурні формули відповідно такі:

$$W = 6n' - 5p_5 = 1; \qquad W = 6n' - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 0.$$

Структурні групи другого класу складаються з двох ланок ($n' = 2$) та кількості кінематичних пар $p_5 = I$, $p_4 = I$, $p_3 = I$.

I.2.5. Послідовність структурного аналізу механізму

I. Установлюють кількість ланок механізму.

2. Перелічують та характеризують кінематичні пари.

3. Визначають ступінь рухомості механізму, кількість зайвих зв"язків. Призначають початкові ланки або перевіряють їх

відповідність ступеню рухомості.

4. Виділяють зі складу механізму його структурні компоненти (основний механізм, структурні групи і т.п.). Визначають клас структурних компонент, а для структурних груп, якщо вони є,- порядок і модифікацію (вид).

5. Визначають клас механізму.

Приклад І. Необхідно виконати структурний аналіз плоского механізму маніпулятора (рис. І.І8)

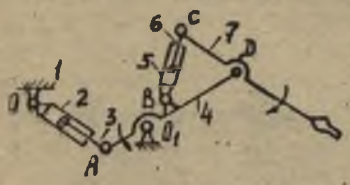


Рис. І.І8

І. Визначимо число рухомих ланок механізму

$$n' = 6.$$

2. Охарактеризуємо кінематичні пари (КП):

І КП, утворена ланками І-2, У кл., нижча, обертальна;

П КП, утворена ланками 2-3, У кл., нижча, поступальна;

Ш КП, утворена ланками 3-4, У кл, нижча, обертальна;

ІУ КП, утворена ланками 4-І, У кл, нижча, обертальна;

У КП, утворена ланками 4-5, У кл., нижча обертальна;

УІ КП, утворена ланками 5-6, У кл., нижча, поступальна;

УП КП, утворена ланками 6-7, У кл., нижча, обертальна;

УШ КП, утворена ланками 7-4, У кл., нижча, обертальна.

Таким чином, число кінематичних пар п"ятого класу - $p_5 = 8$.

Число кінематичних пар четвертого класу - $p_4 = 0$.

Ступінь рухомості механізму визначимо за формулою (І.4) (конструктивних зайвих зв"язків у механізмі немає):

$$W = 3n' - 2p_5 - p_4 + q = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 - 0 + 0 = 2.$$

За початкові прийнято ланки 4 і 7. Кількість технологічних зайвих зв"язків

$$q_T = W - 6n' + 5p_5 + 4p_4 = 2 - 6 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 0 = 6.$$

Від"єднаємо від розглядуваного механізму основний механізм (ланки 4 і 1) (див. рис. І.І9,а), потім - дві структурні групи другого класу, третьої модифікації (одна група - ланки 2, 3,

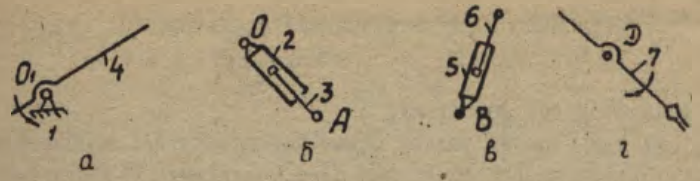


Рис. I.I9

друга - ланки 5, 6) (рис. I.I9,б,в). Після цього залишається окрема початкова ланка 7 (рис. I.I9,г). Отже, цей механізм належить до другого класу.

Приклад 2. Необхідно виконати структурний аналіз плоского кулачкового механізму двигуна внутрішнього згоряння (рис. I.20), в якому рух кулачка 2 за допомогою штовхача 3 передається клапану 4.

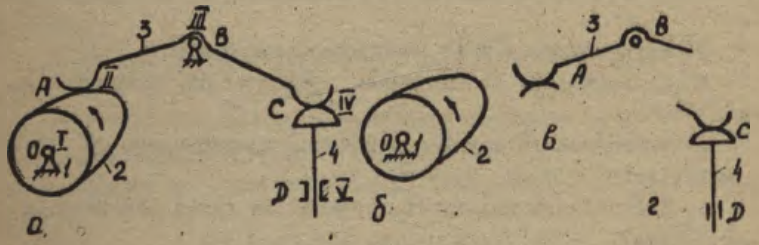


Рис. I.20

I. Визначимо число рухомих ланок механізму $n' = 3$.

2. Охарактеризуємо кінематичні пари:

I КП, утворена ланками I-2, У кл., нижча, обертальна.

II КП, утворена ланками 2-3, IУ кл., вища, кулачкова.

III КП, утворена ланками 3-I, У кл., нижча, обертальна.

IУ КП, утворена ланками 3-4, IУ кл., вища, клапанна.

У КП, утворена ланками 4-I, У кл., нижча, поступальна.

Таким чином, кінематичних пар п"ятого класу $p_5 = 3$. Число кінематичних пар четвертого класу $p_4 = 2$.

3. Визначимо ступінь рухомості механізму:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

за початкову приймемо ланку 2.

4. Виділимо зі складу механізму структурні компоненти та охарактеризуємо їх. Визначимо клас механізму. Від"єднаємо від розглядуваного механізму основний механізм (ланки 1 і 2) (рис. 1.20,б), потім - структурну групу другого класу першої модифікації (рис. 1.20,в), першу в порядку нашарування, та групу другого класу другої модифікації (рис. 1.20,г), другу в порядку нашарування. Отже, цей механізм належить до другого класу.

Контрольні запитання

1. Що називають ланкою механізму і якими вони бувають?
2. Що таке кінематична пара? Класифікація кінематичних пар.
3. Види механізмів за конструктивною ознакою.
4. Що називають кінематичним ланцюгом? Які вигляди він має?
5. Як визначити ступінь рухомості просторового та плоского механізмів?
6. Які зв"язки називають зайвими? За якими ознаками їх розрізняють?
7. Що називають основним механізмом і структурною групою? Як розрізняють структурні групи?
8. Які мета та спосіб заміни вищих пар нижчими?
9. Яка послідовність структурного аналізу механізмів?

Розв"язати приклади:

Приклад 1. Визначити ступінь рухомості та клас механізму (рис. 1.21)

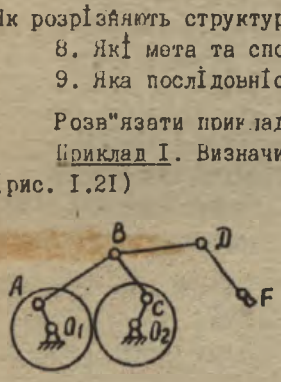


Рис. 1.21

Відповідь: W = 3, клас другий.

Приклад 2. Визначити ступінь рухомості та клас механізму (рис. I.22).

Відповідь: W = I; клас третій, якщо ведуча ланка z_1; клас другий, якщо ведуча ланка z_6.

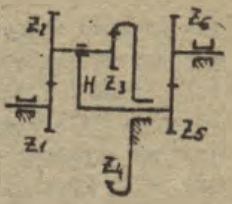


Рис. I.22

Література

Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1987.

Кожевников С.Н. Основания структурного синтеза механизмов. К., 1974.

Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. М., 1972.

Озол О.Г. Расширение структурной теории и классификации плоских механизмов с низшими парами / Тр. Латвийской сельскохозяйственной академии наук, Рига, 1965. Вып. 13.

2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

2.1. Кінематичний аналіз важільних механізмів з нижчими кінематичними парами

Кінематичний аналіз механізму полягає у визначенні його руху за заданим законом руху початкових ланок. Основне завдання кінематичного аналізу: знаходження кутових і лінійних переміщень ланок, побудова траєкторії окремих точок, визначення кутових і лінійних швидкостей, а також прискорень ланок і точок механізму.

Методи вирішення: аналітичні, векторно-графічний (метод планів швидкостей та прискорень), графічний (метод кінематичних діаграм), експериментальний.

Аналітичні методи дають можливість виконувати дослідження з наперед заданою точністю і застосовувати ЕОМ. Векторно-графічний та графічний методи відзначаються наочною простотою і мають необхідну для багатьох практичних завдань точність. Ці методи взаємно доповнюють один одного. Метод планів швидкостей та прискорень дає можливість визначити швидкості та прискорення всіх ланок і точок механізму для вибраного положення. Метод кінематичних діаграм дає графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів залежно від іншого: наприклад, для переміщень S, швидкостей v, дотичних прискорень w^{τ} точки ланки механізму - від часу або узагальненої координати. Експериментальний метод дозволяє знаходити закони руху ланок без допущень, які застосовуються в теоретичних дослідженнях.

2.I.I. Аналітичні методи

2.I.I.I. Метод замкнених контурів

Залежність положень ланок і координат окремих точок, а також швидкостей і прискорень від часу можна одержати з умови замкнутості контурів, утворених ланками механізму, які розглядаються як векторні багатокутники. Сумісне розв'язання рівнянь проекцій цих контурів на осі прямокутної системи координат дозволяє визначити положення ланок і координати окремих точок. Диференціюючи ці рівняння за часом, знаходять швидкості, а повторюючи диференціювання, одержують прискорення. Розглянемо застосування методу замкнених контурів на прикладі.

Приклад I. Кінематичне дослідження плоского механізму забираного шасі літака зі ступенем рухомості $W = I$ (рис. 2.I). Нехай відомі довжина ланок, координати нерухомих шарнірів, залежність переміщення штока відносно циліндра від часу - $S(t)$. Необхідно визначити положення ланок 2 і 3 (кути φ_2 і φ_3), кутові швидкості ω_2, ω_3, кутові прискорення ε_2, ε_3 цих ланок, швидкість v_K і прискорення w_K точки K за заданим положенням механізму.

Розглядаючи замкнений контур OAO_1O, утворений ланками механізму, як суму векторів, можна скласти рівняння

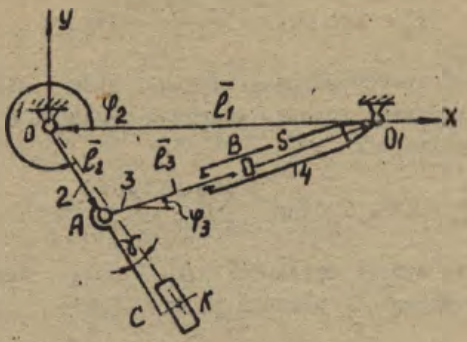


Рис. 2.I

$$\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_3 + \bar{S} = 0. \qquad (2.I)$$

За початок координат XOY приймаємо центр шарніра O . Відлік кутів φ_2 і φ_3 , що координують вектори $\bar{\ell}_2$ і $\bar{\ell}_3$, будемо здійснювати від осі X проти обертання годинникової стрілки.

Проектуючи векторне рівняння (2.I) на осі X і Y , дістанемо

$$\ell_1 \cos 180^\circ + \ell_2 \cos\varphi_2 + (\ell_3 + S)\cos\varphi_3 = 0, \qquad (2.2)$$

$$\ell_1 \sin 180^\circ + \ell_2 \sin\varphi_2 + (\ell_3 + S)\sin\varphi_3 = 0, \qquad (2.3)$$

або

$$\ell_2 \cos\varphi_2 = \ell_1 - (\ell_3 + S)\cos\varphi_3, \qquad (2.4)$$

$$\ell_2 \sin\varphi_2 = -(\ell_3 + S)\sin\varphi_3. \qquad (2.5)$$

Піднесемо обидві частини рівнянь (2.4), (2.5) до другого степеня і додамо їх почленно:

$$\ell_2^2 = \ell_1^2 - 2\ell_1(\ell_3 + S)\cos\varphi_3 + (\ell_3 + S)^2, \qquad (2.6)$$

звідки

$$\varphi_3 = \arccos\frac{\ell_1^2 + (\ell_3 + S)^2 - \ell_2^2}{2\ell_1(\ell_3 + S)}. \qquad (2.7)$$

Тоді з формули (2.5) матимемо

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{-(l_3+S)\sin\varphi_3}{l_2}. \qquad (2.8)$$

Обернені тригонометричні функції є багатозначними. Із виразу (2.8) одержимо головне значення функції. Дійсне значення кута φ_2 дорівнює

$$\varphi_2 = 2\pi + \arcsin \frac{-(l_3+S)\sin\varphi_3}{l_2}. \qquad (2.9)$$

Щоб визначити кутові швидкості ω_2 і ω_3, виконаємо диференціювання за часом t рівнянь (2.4), (2.5):

$$-l_2\omega_2\sin\varphi_2 = (l_3+S)\omega_3\sin\varphi_3 - \frac{dS}{dt}\cos\varphi_3; \qquad (2.10)$$

$$l_2\omega_2\cos\varphi_2 = -(l_3+S)\omega_3\cos\varphi_3 - \frac{dS}{dt}\sin\varphi_3. \qquad (2.11)$$

Для спрощення формул (2.10), (2.11) повернемо систему координат XOY на кут φ_3 проти обертання годинникової стрілки і, маючи на увазі, що $\frac{dS}{dt} = v_{B_3B_4}$ – швидкість поступального руху штока 3 відносно циліндра 4, одержимо

$$l_2\omega_2\sin(\varphi_2-\varphi_3) = v_{B_3B_4}, \qquad (2.12)$$

$$l_2\omega_2\cos(\varphi_2-\varphi_3) = -(l_3+S)\omega_3, \qquad (2.13)$$

звідки

$$\omega_2 = \frac{v_{B_3B_4}}{l_2\sin(\varphi_2-\varphi_3)}, \qquad (2.14)$$

$$\omega_3 = \frac{-v_{B_3B_4}}{(l_3+S)}\operatorname{ctg}(\varphi_2-\varphi_3). \qquad (2.15)$$

Кутові прискорення визначимо диференціюванням за часом t рівнянь (2.10), (2.11):

$$-\ell_2\omega_2^2\cos\varphi_2-\varepsilon_2\ell_2\sin\varphi_2=(\ell_3+s)\omega_3^2\cos\varphi_3+(\ell_3+s)\varepsilon_3\sin\varphi_3+$$

$$+\frac{ds}{dt}\omega_3\sin\varphi_3+\frac{ds}{dt}\omega_3\sin\varphi_3-\frac{d^2s}{dt^2}\cos\varphi_3; \qquad (2.16)$$

$$-\ell_2\omega_2^2\sin\varphi_2+\varepsilon_2\ell_2\cos\varphi_2=(\ell_3+s)\omega_3^2\sin\varphi_3-(\ell_3+s)\varepsilon_3\cos\varphi_3-$$

$$-\frac{ds}{dt}\omega_3\cos\varphi_3-\frac{ds}{dt}\omega_3\cos\varphi_3-\frac{d^2s}{dt^2}\sin\varphi_3. \qquad (2.17)$$

Для спрощення формул (2.16), (2.17) повернемо систему координат XOY на кут φ_3 проти обертання годинникової стрілки І, маючи на увазі, що $\frac{d^2s}{dt^2}=W^2_{B_3B_4}$ – прискорення поступального руху штока 3 відносно циліндра 4, одержимо

$$-\ell_2\omega_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_3)-\varepsilon_2\ell_2\sin(\varphi_2-\varphi_3)=(\ell_3+s)\omega_3^2-W^2_{B_3B_4}, \qquad (2.18)$$

$$-\ell_2\omega_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)+\varepsilon_2\ell_2\cos(\varphi_2-\varphi_3)=-(\ell_3+s)\varepsilon_3-2v^2_{B_3B_4}\cdot\omega_3, \qquad (2.19)$$

звідки

$$\varepsilon_2=\frac{W^2_{B_3B_4}-(\ell_3+s)\omega_3^2-\ell_2\omega_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_3)}{\ell_2\sin(\varphi_2-\varphi_3)}, \qquad (2.20)$$

$$\varepsilon_3=-\frac{\varepsilon_2\ell_2\cos(\varphi_2-\varphi_3)-\ell_2\omega_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)+2v^2_{B_3B_4}\omega_3}{\ell_3+s}, \qquad (2.21)$$

Швидкість точки K дорівнює

$$v_K=\ell_{OK}\omega_2. \qquad (2.22)$$

Модулі нормального $\bar{W}^n_K$ тангенціального $\bar{W}^\tau_K$ і повного $\bar{W}_K$, прискорення точки K знайдемо за такими рівняннями:

$$W^n_K=\omega_2^2\ell_{OK}; \qquad (2.23)$$

$$W_к^τ = \varepsilon_2 \ell_{0к}; \qquad (2.24)$$

$$W_к = \sqrt{(W_к^n)^2 + (W_к^τ)^2}. \qquad (2.25)$$

Напрямок $\bar{W}_к$ утворює з віссю OX кут (див. рис. 2.1):

$$\beta_к = (\varphi_2 + \delta) + \pi \mp \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2}, \text{ якщо } \varepsilon_2 \gtrless 0; \qquad (2.26)$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\ell_{ск}}{\ell_{со}}.$$

2.I.I.2. Метод перетворення координат

Порівняно з методом замкнених контурів метод перетворення координат спрощує аналітичне дослідження просторових механізмів. Цей метод базується на використанні матричного обчислювання. Матриці дозволяють упорядкувати дії в процесі багаторазового перетворення координат, контролювати ці дії, скористатися математичним обчисленням і полегшити застосування ЕОМ.

2.I.I.2.I. Матриця перетворення координат

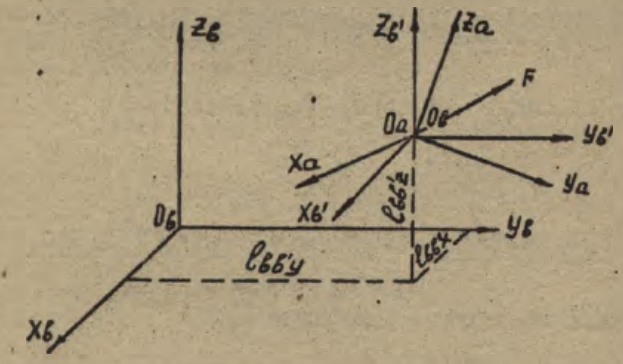


Рис. 2.2

Виберемо системи координат $O_б X_б Y_б Z_б$ і $O_{б'} X_{б'} Y_{б'} Z_{б'}$ (рис. 2.2), осі яких паралельні, а початки координат (точки

O_β і $O_{\beta'}$) не збігаються). Початок координат системи $O_{\beta'} X_{\beta'} Y_{\beta'} Z_{\beta'}$ збігається з початком координат системи $O_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, але осі цих систем повернені одні відносно одних.

Радіус-вектор точки F у системі координат $O_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ дорівнює

$$\bar{r}_F^{(\alpha)} = \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} . \qquad (2.26)$$

Радіус-вектор точки F у системі координат $O_{\beta'} X_{\beta'} Y_{\beta'} Z_{\beta'}$ подамо у вигляді проекцій на осі цієї системи.

Оскільки $\bar{i}_\beta = \bar{i}_{\beta'}$, $\bar{j}_\beta = \bar{j}_{\beta'}$ і $\bar{k}_\beta = \bar{k}_{\beta'}$, то

$$r_{Fx}^{(\beta')} = \bar{i}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{i}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{i}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} , \qquad (2.27)$$

$$r_{Fy}^{(\beta')} = \bar{j}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{j}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{j}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} , \qquad (2.28)$$

$$r_{Fz}^{(\beta')} = \bar{k}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{k}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{k}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} , \qquad (2.29)$$

що рівнозначно повороту системи $O_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ проти напрямку обертання годинникової стрілки до суміщення із системою $O_\beta X_\beta Y_\beta Z_\beta$.

Для переходу від системи координат $O_\beta X_\beta Y_\beta Z_\beta$ до системи $O_\beta X_\beta Y_\beta Z_\beta$ скористуємось паралельним переносом:

$$r_{Fx}^{(\beta)} = r_{Fx}^{(\beta')} - (-\ell_{\beta\beta' x}) = r_{Fx}^{(\beta')} + \ell_{\beta\beta' x} , \qquad (2.30)$$

$$r_{Fy}^{(\beta)} = r_{Fy}^{(\beta')} - (-\ell_{\beta\beta' y}) = r_{Fy}^{(\beta')} + \ell_{\beta\beta' y} , \qquad (2.31)$$

$$r_{Fz}^{(\beta)} = r_{Fz}^{(\beta')} - (-\ell_{\beta\beta' z}) = r_{Fz}^{(\beta')} + \ell_{\beta\beta' z} . \qquad (2.32)$$

Тоді

$$r_{Fx}^{(\beta)} = \bar{i}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{i}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{i}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} + \ell_{\beta\beta' x} , \qquad (2.33)$$

$$r_{Fy}^{(\beta)} = \bar{j}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{j}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{j}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} + \ell_{\beta\beta' y} , \qquad (2.34)$$

$$r_{Fz}^{(\beta)} = \bar{k}_\beta \bar{i}_\alpha r_{Fx}^{(\alpha)} + \bar{k}_\beta \bar{j}_\alpha r_{Fy}^{(\alpha)} + \bar{k}_\beta \bar{k}_\alpha r_{Fz}^{(\alpha)} + \ell_{\beta\beta' z} . \qquad (2.35)$$

Для одержання квадратної матриці додамо до рівнянь

[к] Використання квадратних матриць спрощує перетворення координат множенням матриць.

(2.33) - (2.35) тотожність I = I.

Таким чином, у матричній формі маємо

$$\begin{vmatrix} z_{Fx}^{(б)} \\ z_{Fy}^{(б)} \\ z_{Fz}^{(б)} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{x_б x_a} & \cos\varphi_{x_б y_a} & \cos\varphi_{x_б z_a} & l_{бб'x} \\ \cos\varphi_{y_б x_a} & \cos\varphi_{y_б y_a} & \cos\varphi_{y_б z_a} & l_{бб'y} \\ \cos\varphi_{z_б x_a} & \cos\varphi_{z_б y_a} & \cos\varphi_{z_б z_a} & l_{бб'z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z_{Fx}^{(a)} \\ z_{Fy}^{(a)} \\ z_{Fz}^{(a)} \\ 1 \end{vmatrix}. \qquad (2.36)$$

У компактній формі матричне рівняння набуває вигляду

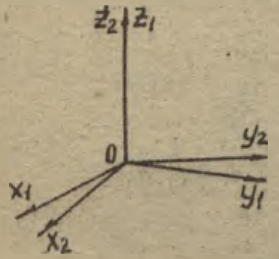
$$\bar{z}_F^{(б)} = A_{бa}\, z_F^{(a)}, \qquad (2.37)$$

де

$$A_{бa} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{x_б x_a} & \cos\varphi_{x_б y_a} & \cos\varphi_{x_б z_a} & l_{бб'x} \\ \cos\varphi_{y_б x_a} & \cos\varphi_{y_б y_a} & \cos\varphi_{y_б z_a} & l_{бб'y} \\ \cos\varphi_{z_б x_a} & \cos\varphi_{z_б y_a} & \cos\varphi_{z_б z_a} & l_{бб'z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \qquad (2.38)$$

матриця перетворення координат.

З виразу (2.38) можна одержати матриці різних кінематичних пар, наприклад, матриці обертальної КП п"ятого класу при обертанні навколо осі z (рис. 2.3):



$$B_{12}^{(z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{x_1x_2} & \cos\varphi_{x_1y_2} & 0 & 0 \\ \cos\varphi_{y_1x_2} & \cos\varphi_{y_1y_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2.39)$$

Рис. 2.3

Матриця поступальної кінематичної пари п"ятого класу вздовж осі x (рис. 2.4):

$$\Pi_{12}^{(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_{12x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (2.40)$$

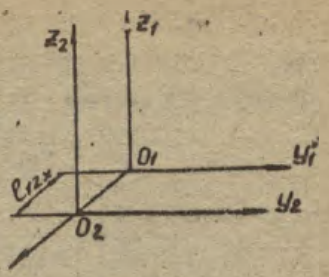


Рис. 2.4

2.I.I.2.2. Приклад I. Кінематичне дослідження основного* кінематичного ланцюга просторового механізму робота зі ступенем рухомості W = 3 (рис. 2.5).

Нехай відомі відстань ℓ_{OB}, довжини ℓ_{BC}, ℓ_{DF}, узагальнені координати $\ell_{BC(t)}$, $\varphi_{10(t)}$, $\varphi_{32(t)}$. Необхідно знайти координати, швидкість та прискорення точки F схвату, напрямок схвату, його кутові швидкість та прискорення.

Запишемо умови переходу послідовно від системи координат $CX_3Y_3Z_3$ до системи координат $OX_0Y_0Z_0$.

Перехід від системи $CX_3Y_3Z_3$ до системи $CX_2Y_2Z_2$

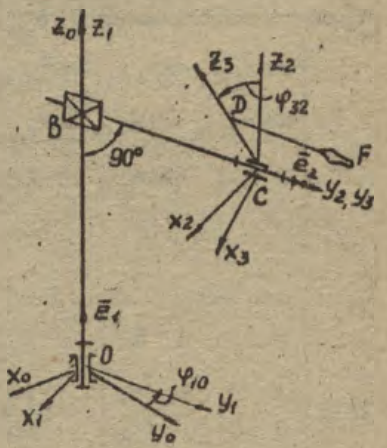


Рис. 2.5

$$\bar{r}_F^{(2)} = B_{23}\bar{r}_F^{(3)} . \qquad (2.41)$$

Перехід від системи $CX_2Y_2Z_2$ до системи $OX_1Y_1Z_1$:

$$\bar{r}_F^{(1)} = \Pi_{12}\bar{r}_F^{(2)} = \Pi_{12}B_{23}r_F^{(3)} . \qquad (2.42)$$

---

*Основний кінематичний ланцюг – це кінематичний ланцюг механізму робота за вилученим приводів.

Перехід від системи $OX_1Y_1Z_1$ до системи $OX_0Y_0Z_0$:

$$\bar{r}_F^{(0)} = B_{01}\bar{r}_F^{(1)} = B_{01}\Pi_{12}B_{23}\bar{r}_F^{(3)}; \qquad (2.43)$$

$$\bar{r}_F^{(0)} = \begin{bmatrix} r_{F_x}^{(0)} \\ r_{F_y}^{(0)} \\ r_{F_z}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \bar{r}_F^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell_{DF} \\ \ell_{DC} \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.44)$$

Матрицю $B_{01} = B_{10}^T$, тобто матрицю B_{01}, можна одержати транспонуванням матриці B_{10}; $B_{23} = B_{32}^T$, де

$$B_{10}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{x_1x_0} & \cos\varphi_{y_1x_0} & \cos\varphi_{z_1x_0} & 0 \\ \cos\varphi_{x_1y_0} & \cos\varphi_{y_1y_0} & \cos\varphi_{z_1y_0} & 0 \\ \cos\varphi_{x_1z_0} & \cos\varphi_{y_1z_0} & \cos\varphi_{z_1z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (2.45)$$

$$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_{BC} \\ 0 & 0 & 1 & \ell_{BO} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{32}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & 0 & \sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{32} & 0 & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.46)$$

Здійснивши підстановку (2.44) - (2.46) у (2.43), внаслідок множення матриць дістанемо

$$\begin{bmatrix} z_{F_x}^{(0)} \\ z_{F_y}^{(0)} \\ z_{F_z}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{DC}\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{32} - (l_{DF}+l_{BC})\sin\varphi_{10} \\ l_{DC}\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{32} + (l_{DF}+l_{BC})\cos\varphi_{10} \\ l_{DC}\cos\varphi_{32} + l_{B0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

або

$$z_{F_x}^{(0)} = l_{DC}\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{32} - (l_{DF}+l_{BC})\sin\varphi_{10},$$
$$z_{F_y}^{(0)} = l_{DC}\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{32} + (l_{DF}+l_{BC})\cos\varphi_{10},$$
$$z_{F_z}^{(0)} = l_{DC}\cos\varphi_{32} + l_{B0}.$$

Швидкості точки F визначають, використовуючи диференціювання за часом її координат:

$$v_{F_x}^{(0)} = \dot{z}_{F_x}^{(0)}; \quad v_{F_y}^{(0)} = \dot{z}_{F_y}^{(0)}; \quad v_{F_z}^{(0)} = \dot{z}_{F_z}^{(0)};$$
$$v_F = \sqrt{(v_{F_x}^{(0)})^2 + (v_{F_y}^{(0)})^2 + (v_{F_z}^{(0)})^2}; \quad (2.48)$$

прискорення –

$$w_{F_x}^{(0)} = \dot{v}_{F_x}^{(0)}; \quad w_{F_y}^{(0)} = \dot{v}_{F_y}^{(0)}; \quad w_{F_z}^{(0)} = \dot{v}_{F_z}^{(0)};$$

$$w_F^{(0)} = \sqrt{(w_{F_x}^{(0)})^2 + (w_{F_y}^{(0)})^2 + (w_{F_z}^{(0)})^2}. \quad (2.49)$$

Напрямок схвату (ланки DF) визначимо другим рядком матриці B_{10}^T або другим стовпцем матриці B_{01} :

$$\cos\varphi_{y_1x_0} = -\sin\varphi_{10},$$
$$\cos\varphi_{y_1y_0} = \cos\varphi_{10}, \quad (2.50)$$
$$\cos\varphi_{y_1z_0} = 0.$$

Кутову швидкість ω_3 схвату знайдемо як швидкість складного руху ланки 3:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{32} = \dot{\varphi}_{10}\bar{e}_1 + \dot{\varphi}_{32}\bar{e}_2, \quad (2.51)$$

де $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ – орти осей обертання (рис. 2.5);

або

$$\bar{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \omega_{3x}^{(0)} \\ \omega_{3y}^{(0)} \\ \omega_{3z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x}^{(0)} \\ e_{1y}^{(0)} \\ e_{1z}^{(0)} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{10} + \begin{bmatrix} e_{2x}^{(0)} \\ e_{2y}^{(0)} \\ e_{2z}^{(0)} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{32}, \qquad (2.52)$$

де

$$\begin{bmatrix} e_{1x}^{(0)} \\ e_{1y}^{(0)} \\ e_{1z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} e_{2x}^{(0)} \\ e_{2y}^{(0)} \\ e_{2z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_{10} \\ \cos\varphi_{10} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \omega_{3x}^{(0)} &= -\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{10}, \\ \omega_{3y}^{(0)} &= \dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{10}, \\ \omega_{3z}^{(0)} &= \dot{\varphi}_{10}, \\ \omega_3 &= \sqrt{\dot{\varphi}_{32}^2 + \dot{\varphi}_{10}^2}. \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Проекції кутового прискорення по осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3x}^{(0)} &= -\ddot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{10} - \dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{10}, \\ \varepsilon_{3y}^{(0)} &= \ddot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{10} - \dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{10}, \\ \varepsilon_{3z}^{(0)} &= \ddot{\varphi}_{10}, \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{(\varepsilon_{3x}^{(0)})^2 + (\varepsilon_{3y}^{(0)})^2 + (\varepsilon_{3z}^{(0)})^2}. \end{aligned} \qquad (2.54)$$

2.I.I.2.3. Приклад 2. Кінематичне дослідження просторового механізму зі ступенем рухомості $W = I$ (рис. 2.6).

Дано: $\varphi_{10}(t)$, розміри $\ell_{AB} = \ell_1$; $\ell_{BC} = \ell_2$; ℓ_3, ℓ_0. Необхідно визначити положення всіх ланок механізму та окремих точок ланок, а також швидкості та прискорення ланок та її окремих точок.

Палець кінематичної пари B належить шатуну I знаходиться в площині, перпендикулярній до лінії BC. Вісь кільцевого прорізу, що належить кривошипу, спрямована вздовж лінії AB, яка перпендикулярна до осі обертальної пари O.

Початок нерухомої системи координат $AX_0Y_0Z_0$ приймаємо в точці A . Вісь AZ_0 спрямуємо по осі обертальної пари 0 , вісь AX_0 - паралельно осі поступальної пари C . Напрямок осі AY_0 визначається з умови одержання правої системи координат. Початок системи координат $X_1Y_1Z_1$ що зв"язана з першою ланкою, приймаємо також у точці A . Вісь AZ_1 збігається з віссю AZ_0 , вісь AX_1 спрямована вздовж ланки AB . Початок системи координат $X_1'Y_1'Z_1'$, яка також зв"язана з першою ланкою, розмістимо в точці B . Вісь BZ_1' паралельна осі AZ_1 . Осі AX_1 і BX_1' збігаються, вісь BY_1' паралельна осі AY_1 . Початок системи координат $X_2Y_2Z_2$, яка зв"язана з другою ланкою, вибираємо також в точці B . Вісь BZ_2 має напрямок по осі пальця, а вісь BX_2 - по ланці BC . Кут між осями BZ_1' і BZ_2 - кут нутації θ_{21} , розташований в площині $Z_1'BZ_2$, відраховується від осі BZ_1' до осі BZ_2 (проти обертання годинникової стрілки), якщо дивитись з додатного напрямку лінії вузлів, яка збігається з віссю BX_1' . Кут між осями BX_1' і BX_2 - кут чистого обертання φ_{21} , розташований в площині $X_1'BX_2$, відраховується від лінії вузлів (від осі BX_1') до осі BX_2 (проти обертання годинникової стрілки), якщо дивитись з додатного напрямку осі BZ_2 .

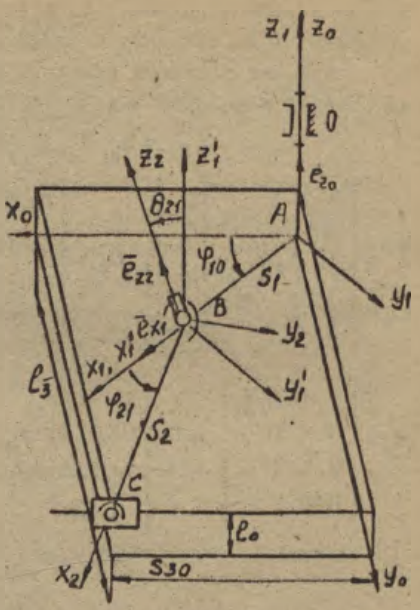


Рис. 2.6

Розімкнемо сферичну пару C і одержимо два незамкнені кінематичні ланцюги: перший складається з ланок 0 і 3 ; другий - з ланок 0, 1, 2. Знайдемо координати точки C у неру-

хомій системі координат $X_0Y_0Z_0$ для другого ланцюга та приріднюємо їх до значення першого ланцюга.

Запишемо рівняння переходу від системи координат $BX_2Y_2Z_2$ до системи координат $AX_0Y_0Z_0$:

$$\bar{z}_c^{(0)} = B_{01}\,\Pi_{11'}\,B_{1'2}\,\bar{z}_c^{(2)}, \qquad (2.55)$$

$$\bar{z}_c^{(0)} = \begin{vmatrix} S_{30} \\ \ell_3 \\ \ell_0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \bar{z}_c^{(2)} = \begin{vmatrix} \ell_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad B_{01} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Pi_{11'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad B^*_{1'2} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{21}\sin\varphi_{21} & \cos\theta_{21}\cos\varphi_{21} & -\sin\theta_{21} & 0 \\ \sin\theta_{21}\sin\varphi_{21} & \sin\theta_{21}\cos\varphi_{21} & \cos\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Виконавши підстановку у формулу (2.55) і множення матриць матимемо

$$X_c^{(0)} = S_{30} = \ell_2\cos\varphi_{21}\cos\varphi_{10} - \ell_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}\sin\varphi_{10} + \ell_1\cos\varphi_{10}, \qquad (2.56)$$

$$Y_c^{(0)} = \ell_3 = \ell_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{10} + \ell_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}\cos\varphi_{10} + \ell_1\sin\varphi_{10}, \qquad (2.57)$$

$$Z_c^{(0)} = \ell_0 = \ell_2\sin\theta_{21}\sin\varphi_{21}. \qquad (2.58)$$

З одержаної системи трьох рівнянь знаходимо кути

$$\theta_{21},\ \varphi_{21} \qquad X_c^{(0)} = S_{30}.$$

Так, з виразів (2.57), (2.58) за методом повороту системи координат $AX_0Y_0Z_0$ проти руху годинникової стрілки на кут φ_{10} маємо:

$$\ell_3\cos\varphi_{10} = \ell_2\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}; \qquad (2.59)$$

---

*Матриця $B_{1'2}$ одержана за відомими співвідношеннями між напрямними косинусами та кутами Ейлера, якщо кут прецесії $\Psi_{21}=0$

$$\ell_0 = \ell_2 \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21}; \tag{2.60}$$

$$\sin\varphi_{21} = \frac{\sqrt{\ell_3^2 \cos^2\varphi_{10} + \ell_0^2}}{\ell_2}. \tag{2.61}$$

Формула (2.61) дає два значення φ_{21}, що відповідають двом можливим положенням ланок 2 і 3 при тому самому положенні ланки 1. Для вибору чверті, до якої належить кут φ_{21}, можна побудувати схему механізму в початковому положенні.

Після визначення φ_{21} знаходимо B_{21} і $X_C^{(0)}$. Координати точки S_2 шатуна в системі координат $AX_0Y_0Z_0$

$$\bar{r}_{S_2}^{(0)} = B_{01} \Pi_{11'} B_{1'2} \bar{r}_{S2}^{(2)}, \tag{2.62}$$

звідки

$$X_{S_2}^{(0)} = r_{S_2x}^{(0)} = \ell_{BS_2} \cos\varphi_{21} \cos\varphi_{10} - \ell_{BS_2} \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21} \sin\varphi_{10} + \ell_1 \cos\varphi_{10}, \tag{2.63}$$

$$Y_{S_2}^{(0)} = r_{S_2y}^{(0)} = \ell_{BS_2} \cos\theta_{21} \sin\varphi_{10} + \ell_{BS_2} \cos\theta_{21} \sin\varphi_{21} \cos\varphi_{10} + \ell_1 \sin\varphi_{10}, \tag{2.64}$$

$$Z_{S_2}^{(0)} = r_{S_2z}^{(0)} = \ell_{BS_2} \sin\theta_{21} \sin\varphi_{21}. \tag{2.65}$$

Визначимо швидкість ланок та окремих точок ланок. Абсолютна кутова швидкість другої ланки дорівнює

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21}^{(\theta)} + \bar{\omega}_{21}^{(\varphi)} = \bar{e}_{z0} \dot{\varphi}_{10} + \bar{e}_{x1} \dot{\theta}_{21} + \bar{e}_{z2} \dot{\varphi}_{21}, \tag{2.66}$$

де $\bar{\omega}_{10}$ – кутова швидкість першої ланки відносно нульової; $\bar{\omega}_{21}^{(\theta)}$ – кутова швидкість другої ланки відносно першої при обертанні навколо осі BX_1' (рис. 2.6); $\bar{\omega}_{21}^{(\varphi)}$ – кутова швидкість другої ланки відносно першої при обертанні навколо осі BZ_2; $\bar{e}_{z0}$, $\bar{e}_{x1}$, $\bar{e}_{z2}$ – орти векторів кутових швидкостей.

Звідси в проекціях на осі $AX_0Y_0Z_0$ маємо

$$\begin{bmatrix} \omega_{2x}^{(0)} \\ \omega_{2y}^{(0)} \\ \omega_{2z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{10} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} \\ \sin\varphi_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_{21} + \begin{bmatrix} \sin\varphi_{10} \sin\theta_{21} \\ -\cos\varphi_{10} \sin\theta_{21} \\ \cos\theta_{21} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21}, \tag{2.67}$$

тобто

$$\omega_{2x}^{(0)} = \dot{\theta}_{21}\cos\varphi_{10} + \dot{\varphi}_{21}\sin\varphi_{10}\sin\theta_{21}, \tag{2.68}$$

$$\omega_{2y}^{(0)} = \dot{\theta}_{21}\sin\varphi_{10} - \dot{\varphi}_{21}\cos\varphi_{10}\sin\theta_{21}, \tag{2.69}$$

$$\omega_{2z}^{(0)} = \dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_{21}\cos\theta_{21}. \tag{2.70}$$

У проекціях на осі $BX_2Y_2Z_2$

$$\begin{vmatrix}\omega_{2x}^{(2)}\\ \omega_{2y}^{(2)}\\ \omega_{2z}^{(2)}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\sin\varphi_{21}\sin\theta_{21}\\ \cos\varphi_{21}\sin\theta_{21}\\ \cos\theta_{21}\end{vmatrix}\dot{\varphi}_{10} + \begin{vmatrix}\cos\varphi_{21}\\ -\sin\varphi_{21}\\ 0\end{vmatrix}\dot{\theta}_{21} + \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 1\end{vmatrix}\dot{\varphi}_{21}, \tag{2.71}$$

або

$$\omega_{2x}^{(2)} = \dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{21}\sin\theta_{21} + \dot{\theta}_{21}\cos\varphi_{21}, \tag{2.72}$$

$$\omega_{2y}^{(2)} = \dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{21}\sin\theta_{21} - \dot{\theta}_{21}\sin\varphi_{21}, \tag{2.73}$$

$$\omega_{2z}^{(2)} = \dot{\varphi}_{10}\cos\theta_{21} + \dot{\varphi}_{21}. \tag{2.74}$$

Швидкість точки C у проекціях на осі $AX_0Y_0Z_C$ дорівнює:

$$v_{Cx}^{(0)} = \dot{X}_C^{(0)}; \quad v_{Cy}^{(0)} = \dot{Y}_C^{(0)} = 0; \quad v_{Cz}^{(0)} = \dot{Z}_C^{(0)} = 0. \tag{2.75}$$

Відповідно

$$\begin{aligned} v_{Bx}^{(0)} &= \dot{X}_B^{(0)} = -l_1\omega_{10}\sin\varphi_{10},\\ v_{By}^{(0)} &= \dot{Y}_B^{(0)} = l_1'\omega_{10}\cos\varphi_{10},\\ v_{Bz}^{(0)} &= 0; \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} v_{S1x}^{(0)} &= \dot{X}_{S1}^{(0)} = -l_{AS_1}\omega_{10}\sin\varphi_{10},\\ v_{S1y}^{(0)} &= \dot{Y}_{S1}^{(0)} = l_{AS_1}\omega_{10}\cos\varphi_{10},\\ v_{S1z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Швидкість точки S_2 шатуна визначимо за формулою

$$\bar{v}_{S_2} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{\rho}_{BS_2}, \tag{2.78}$$

або

$$\bar{v}_{S_2} = \bar{v}_B + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{2x}^{(0)} & \omega_{2y}^{(0)} & \omega_{2z}^{(0)} \\ \rho_{BS_{2x}}^{(0)} & \rho_{BS_{2y}}^{(0)} & \rho_{BS_{2z}}^{(0)} \end{vmatrix} = \bar{v}_B + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{2x}^{(0)} & \omega_{2y}^{(0)} & \omega_{2z}^{(0)} \\ X_{S_2}^{(0)} - X_B^{(0)} & Y_{S_2}^{(0)} - Y_B^{(0)} & Z_{S_2}^{(0)} - Z_B^{(0)} \end{vmatrix}, \quad (2.79)$$

або

$$v_{S_{2x}}^{(0)} = v_{Bx}^{(0)} + \omega_{2y}^{(0)}(Z_{S_2}^{(0)} - Z_B^{(0)}) - \omega_{2z}^{(0)}(Y_{S_2}^{(0)} - Y_B^{(0)}),$$

$$v_{S_{2y}}^{(0)} = v_{By}^{(0)} + \omega_{2z}^{(0)}(X_{S_2}^{(0)} - X_B^{(0)}) - \omega_{2x}^{(0)}(Z_{S_2}^{(0)} - Z_B^{(0)}), \quad (2.80)$$

$$v_{S_{2z}}^{(0)} = v_{Bz}^{(0)} + \omega_{2x}^{(0)}(Y_{S_2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) - \omega_{2y}^{(0)}(X_{S_2}^{(0)} - X_B^{(0)}).$$

Визначимо прискорення ланок та окремих точок ланок:

$$\varepsilon_{2x}^{(0)} = \dot{\omega}_{2x}^{(0)}; \quad \varepsilon_{2y}^{(0)} = \dot{\omega}_{2y}^{(0)}; \quad \varepsilon_{2z}^{(0)} = \dot{\omega}_{2z}^{(0)}; \quad (2.81)$$

$$\varepsilon_{2x}^{(2)} = \dot{\omega}_{2x}^{(2)}; \quad \varepsilon_{2y}^{(2)} = \dot{\omega}_{2y}^{(2)}; \quad \varepsilon_{2z}^{(2)} = \dot{\omega}_{2z}^{(2)}; \quad (2.82)$$

$$W_{cx}^{(0)} = \dot{v}_{cx}^{(0)}; \quad W_{cy}^{(0)} = \dot{v}_{cy}^{(0)}; \quad W_{cz}^{(0)} = \dot{v}_{cz}^{(0)}; \quad (2.83)$$

$$W_{Bx}^{(0)} = \dot{v}_{Bx}^{(0)}; \quad W_{By}^{(0)} = \dot{v}_{By}^{(0)}; \quad W_{Bz}^{(0)} = \dot{v}_{Bz}^{(0)}; \quad (2.84)$$

$$W_{S1x}^{(0)} = \dot{v}_{S1x}^{(0)}; \quad W_{S1y}^{(0)} = \dot{v}_{S1y}^{(0)}; \quad W_{S1z}^{(0)} = \dot{v}_{S1z}^{(0)} = 0. \quad (2.85)$$

Прискорення точки S_2 другої ланки:

$$\bar{W}_{S_2} = \bar{W}_B + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{\rho}_{BS_2} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \bar{\rho}_{BS_2}), \quad (2.86)$$

або

$$\bar{W}_{S_2} = \bar{W}_B + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_{2x}^{(0)} & \varepsilon_{2y}^{(0)} & \varepsilon_{2z}^{(0)} \\ X_{S_2}^{(0)} - X_B^{(0)} & Y_{S_2}^{(0)} - Y_B^{(0)} & Z_{S_2}^{(0)} - Z_B^{(0)} \end{vmatrix} + \bar{\omega}_2(\bar{\omega}_2 \cdot \bar{\rho}_{BS_2}) - \bar{\rho}_{BS_2}(\bar{\omega}_2 \cdot \bar{\omega}_2). \quad (2.87)$$

У проекціях на осі $A\dot{X}_0Y_0Z_0$:

$$W_{S2x}^{(0)} = W_{Bx}^{(0)} + \varepsilon_{2y}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}) - \varepsilon_{2z}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2x}^{(0)}\left[\omega_{2x}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \right.$$
$$\left. + \omega_{2y}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)})\right] - (X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)})\left((\omega_{2x}^{(0)})^2 + (\omega_{2y}^{(0)})^2 + (\omega_{2z}^{(0)})^2\right); \quad (2.88)$$

$$W_{S2y}^{(0)} = W_{By}^{(0)} + \varepsilon_{2z}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) - \varepsilon_{2x}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}) + \omega_{2y}^{(0)}\left[\omega_{2x}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \right.$$
$$\left. + \omega_{2y}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)})\right] - (Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)})\left((\omega_{2x}^{(0)})^2 + (\omega_{2y}^{(0)})^2 + (\omega_{2z}^{(0)})^2\right); \quad (2.89)$$

$$W_{S2z}^{(0)} = W_{Bz}^{(0)} + \varepsilon_{2x}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) - \varepsilon_{2y}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)}\left[\omega_{2x}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \right.$$
$$\left. + \omega_{2y}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)})\right] - (Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)})\left((\omega_{2x}^{(0)})^2 + (\omega_{2y}^{(0)})^2 + (\omega_{2z}^{(0)})^2\right) \quad (2.90)$$

Позначаючи

$$V_3 = \omega_{2x}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \omega_{2y}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}),$$

одержимо:

$$W_{S2x}^{(0)} = W_{Bx}^{(0)} + \varepsilon_{2y}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}) - \varepsilon_{2z}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) + \omega_{2x}^{(0)} V_3 - \omega_2^2(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}); \quad (2.91)$$

$$W_{S2y}^{(0)} = W_{By}^{(0)} + \varepsilon_{2z}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) - \varepsilon_{2x}^{(0)}(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}) + \omega_{2y}^{(0)} V_3 - \omega_2^2(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}); \quad (2.92)$$

$$W_{S2z}^{(0)} = W_{Bz}^{(0)} + \varepsilon_{2x}^{(0)}(Y_{S2}^{(0)} - Y_B^{(0)}) - \varepsilon_{2y}^{(0)}(X_{S2}^{(0)} - X_B^{(0)}) + \omega_{2z}^{(0)} V_3 -$$
$$- \omega_2^2(Z_{S2}^{(0)} - Z_B^{(0)}). \quad (2.93)$$

2.І.2. Векторно-графічний метод

2.І.2.І. Основні положення

Кінематичне дослідження починається з визначення положень ланок механізму. Схематичне зображення механізму в масштабі довжин K_e [м/мм] називається планом механізму.

Для побудови плану механізму необхідно знати розміри ланок, координати осей нерухомих шарнірів, положення осей поступальних пар та початкової (вхідної) ланки або початкових (вхідних) ланок механізму. Побудову плану механізму показано в під-

розд. 2.1.2.2. План швидкостей та прискорень є наслідком графічного розв"язку векторних рівнянь, записаних для визначення швидкостей та прискорень.

Утворення векторних рівнянь базується на положеннях плоско-паралельного руху твердого тіла і складного руху точки.

Якщо дві точки належать одній ланці та знаходяться на відстані l_{AB} одна від одної (рис. 2.7,а), то векторні рівняння для швидкостей та прискорень мають вигляд:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \qquad (2.94)$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A + \bar{W}^n_{BA} + \bar{W}^\tau_{BA}, \qquad (2.95)$$

де $v_{BA} = \omega_{BA} l_{BA}$ - швидкість руху точки B навколо A; $\bar{W}^n_{BA}$ $\bar{W}^\tau_{BA}$ - нормальне і тангенціальне прискорення у відносному обертальному русі точки B навколо точки A ; ω і ε - кутова швидкість і кутове прискорення ланки.

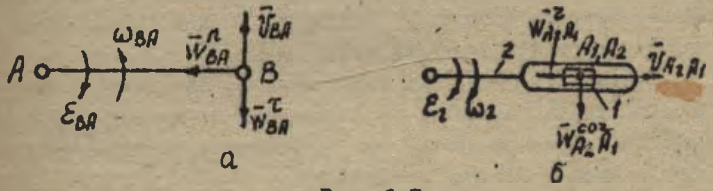


Рис. 2.7

Якщо дві точки A_1 і A_2 належать двом різним ланкам, що утворюють поступальну пару і в даний момент часу збігаються (рис. 2.7,б), то векторні рівняння для швидкостей і прискорень мають вигляд

$$v_{A2} = \bar{v}_{A1} + \bar{v}_{A2A1}, \qquad (2.96)$$

$$\bar{W}_{A2} = \bar{W}_{A1} + \bar{W}^{cor}_{A2A1} + \bar{W}^r_{A2A1}, \qquad (2.97)$$

де v_{A2A1} - швидкість поступального руху точки A_2 відносно точки A_1 ; $\bar{W}^{cor}_{A2A1}$ - прискорення Коріоліса точки A_2 відносно точки A_1 ; $W^{cor}_{A2A1} = 2\omega_1 v_{A2A1}$; $\bar{W}^r_{A2A1}$ - прискорення поступального руху точки A_2 відносно точки A_1.

Побудова планів швидкостей і прискорень для механізмів другого класу з $W = I$ виконується у такій послідовності:

1. Структурним аналізом установлюють кількість і послідовність приєднання структурних груп. Виділяють точки приєднання та середні точки кожної структурної групи. Середня точка структурної групи першої модифікації збігається з віссю обертальної пари, що з"єднує ланки групи, а точка приєднання - з осями зовнішніх кінематичних пар. Точку приєднання структурної групи другої модифікації в поступальній парі вибирають на напрямній, що збігається у даний момент часу з віссю обертальної внутрішньої кінематичної пари. Середню точку структурної групи третьої модифікації вибирають на напрямній, що збігається з віссю зовнішньої обертальної кінематичної пари, і т.п.

2. Знаходять швидкості (прискорення) точок приєднання структурної групи, першої у послідовності нашарування. Швидкість (прискорення) точки приєднання до початкової ланки визначають за заданим законом його руху. Швидкість (прискорення) точки приєднання до стояка дорівнює нулю.

3. Визначають швидкість (прискорення) середньої точки структурної групи, першої у послідовності нашарування. Для цього відносно точок приєднання групи складають векторні рівняння, які розв"язують графічним методом.

4. Знаходять швидкості (прискорення) точок приєднання структурної групи, другої у послідовності нашарування. Якщо ця структурна група приєднується до ланок структурної групи, першої у послідовності нашарування, то швидкості (прискорення) її точок приєднання визначають методом подібності. Якщо ця група приєднується до однієї з ланок попередньої групи і до стояка, то швидкість (прискорення) точки приєднання до ланки попередньої групи визначають методом подібності.

5. Визначають швидкість (прискорення) середньої точки структурної групи, другої у послідовності нашарування. Для цього відносно точок приєднання групи складають векторні рівняння і графічно їх розв'язують і т.п., поки не вичерпаються усі структурні групи.

2.I.2.2. Побудова планів механізму, швидкостей і прискорень

Побудову плану механізму розглянемо на прикладі механізму стабілізатора літака (рис. 2.8), ступінь рухомості якого дорівнює одиниці. Даний механізм складається з основного механізму (ланки I, 6); структурної групи другого класу другої модифікації (ланки 2, 3), першої у послідовності нашарування; структурної групи другого класу першої модифікації (ланки 4, 5), другої у послідовності нашарування. Довжина ланок ℓ_{OA}, ℓ_{AB}, ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DF}, кут γ, координати осей нерухомих шарнірів x_C, y_C, x_E, y_E відомі.

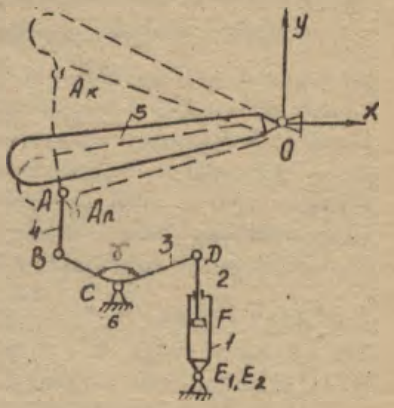


Рис. 2.8

Положення ланок механізму визначається заданим положенням поршня у гідроциліндрі (відстанню $\ell_{FE}(t)$). Розв'язання виконуємо у такій послідовності. Призначаємо масштаб плану механізму K_ℓ м/мм, вибираємо систему координат YOX і встановлюємо положення нерухомих осей шарнірів O, C і E_1 (рис. 2.9). Визначаємо відстань

$$\ell_{E_1D} = \ell_{FD} + \ell_{E_1F}(t).$$

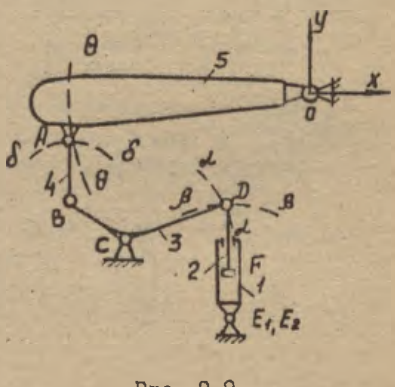


Рис. 2.9

Для першої у послідовності приєднання структурної групи (ланки 2, 3) положення зовнішніх точок C і E_2 відомо. Точка E_2 належить до другої ланки і збігається з точкою E_1, ци-

ліндра у даний момент часу.

Положення внутрішньої точки D знаходимо методом засічок. З точки C проводимо дугу $\alpha\alpha$ радіусом $CD = {}^{\ell_{CD}}/_{K_\ell}$.

З точки E_1 проводимо дугу $\beta\beta$ радіусом $E_1D = {}^{\ell_{E_1D}}/_{K_\ell}$. На перетинанні цих дуг маємо точку D.

Відрізок DE визначає положення ланки 2, відрізок DC - ланки 3. Побудувавши трикутник DCB, знайдемо положення точки B на ланці 3. Положення внутрішньої точки A структурної групи, другої у послідовності приєднання, визначаємо також методом засічок.

З точки B радіусом $BA = {}^{\ell_{BA}}/_{K_\ell}$ проводимо дугу $\delta\delta$, а з точки O радіусом $AO = {}^{\ell_{AO}}/_{K_\ell}$ - дугу $\theta\theta$. На перетинанні цих дуг маємо точку A. Відрізок AB визначає положення ланки 4, відрізок AO - ланки 5.

Аналогічно будують положення ланок механізму для інших послідовних положень поршня. Для знаходження траєкторій точок визначаємо ці точки на ланках механізму у різних його положеннях і з'єднуємо їх плавною кривою (наприклад, дуга $A_n A_к$ - траєкторія точки A, див. рис. 2.8).

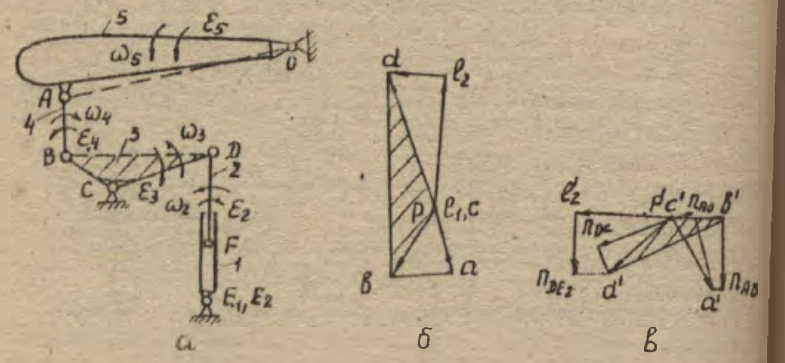


Рис. 2.10

Розглянемо для цього механізму (див. рис. 2.9, 2.10) побудову планів швидкостей та прискорень. Величину швидкості $\bar{U}^{x}_{E_2E_1}$ поршня відносно циліндра вважаємо заданою і сталою.

Швидкості зовнішніх точок C і E_2 структурної групи (ланки 2, 3) дорівнюють $\bar{v}_C = 0$, $\bar{v}_{E_2} = \bar{v}_{E_1} + \bar{v}^{\tau}_{E_2E_1}$. Але оскільки $\bar{v}_{E_1} = 0$, то $\bar{v}_{E_2} = \bar{v}^{\tau}_{E_2E_1}$.

Щоб визначити швидкості точки D – внутрішньої точки групи, першої у порядку нагарування, – запишемо векторні рівняння відносно зовнішніх точок цієї групи:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_{E_2} + \bar{v}_{DE_2}; \qquad (2.98)$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}. \qquad (2.99)$$

Вектори $\bar{v}_{DE_2}$ і $\bar{v}_{DC}$ – швидкості обертання точки D навколо точок E_2 і C. Тому $\bar{v}_{DE_2}$ перпендикулярна до DE_2, а $\bar{v}_{DC}$ – до DC.

Розв"язуємо графічно рівняння (2.98), (2.99). Вибираємо масштаб плану швидкостей

$$K_v = v_{E_2} / (pe_2) \left[\frac{м}{с\,мм}\right],$$

де (pe_2) – відрізок, що зображує швидкість точки E_2, який приймають таким, що дорівнює 60...100 мм.

Відкладаємо на кресленні з вибраної точки p (полюса плану швидкостей) відрізок (pe_2), який має той самий напрямок, що й швидкість $\bar{v}_{E_2E_1}$ (див. рис. 2.10,б). Із точки e_2 проводимо пряму, перпендикулярну до ланки DE_2, а із точки C, що збігається з полюсом, – пряму, перпендикулярну до ланки DC. Точку перетинання цих прямих позначимо літерою d. Відрізок (pd) (рис. 2.10,б) у масштабі K_v відображає швидкість точки D, $v_D = (pd)K_v$.

Швидкість точки B ланки 3 можна знайти графічним розв"язанням векторних рівнянь (2.100), (2.101) (див. рис. 2.10,б):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}; \qquad (2.100)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_D + \bar{v}_{BD}. \qquad (2.101)$$

Але оскільки швидкості $\bar{v}_{BC}$, $\bar{v}_{BD}$ і $\bar{v}_{DC}$ перпендикулярні, відповідно, до BC, BD і DC, то сторони трикутника cdb на плані швидкостей також перпендикулярні до сторін

трикутника CDB на плані механізму, і ці трикутники подібні. Швидкість точки B можна знайти, побудувавши на відрізку (dc) трикутник cdb, подібний до трикутника CDB, з однаковим обходом сторін; $v_B = (pb)K_v$. Метод подібності рекомендується використовувати, коли відомі швидкості двох точок ланки і необхідно знайти швидкості інших її точок.

Кутові швидкості ланок групи:

$$\omega_2 = \frac{v_{DE_2}}{l_{DE_2}} = \frac{(de_2)K_v}{(DE_2)K_l}; \qquad (2.102)$$

$$\omega_3 = \frac{v_{DC}}{l_{DC}} = \frac{(dc)K_v}{(DC)K_l}. \qquad (2.103)$$

Щоб знайти напрямок кутових швидкостей, необхідно в думці перенести вектори швидкостей $\bar{v}_{DE_2}$ і v_{DC} у точку D і розглянути рух точки D відносно точок E_2 і C. Кутові швидкості ω_2 і ω_3 мають напрямок, протилежний обертанню годинникової стрілки (див. рис. 2.10,а).

Для визначення швидкості точки A – внутрішньої точки структурної групи, другої у послідовності приєднання, – запишемо векторні рівняння відносно зовнішніх точок B і O групи:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{AB}; \qquad (2.104)$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}. \qquad (2.105)$$

Вектор $\bar{v}_{AB}$ перпендикулярний до ланки AB, вектор $\bar{v}_{AO}$ – до ланки AO. Графічне розв"язання рівнянь (2.104), (2.105) подано на рис. 2.10,б.

Кутові швидкості ланок групи:

$$\omega_4 = \frac{v_{AB}}{l_{AB}} = \frac{(ab)K_v}{(AB)K_l}; \qquad (2.106)$$

$$\omega_5 = \frac{v_{AO}}{l_{AO}} = \frac{(pa)K_v}{(AO)K_l}. \qquad (2.107)$$

Щоб знайти напрямок кутових швидкостей, необхідно в думці перенести вектори швидкостей $\bar{v}_{AB}$ і $\bar{v}_{AO}$ у точку A і розглянути рух точки A відносно точок B і O. Кутова швидкість ω_4 має напрямок обертання годинникової стрілки, а кутова швидкість ω_5 - напрямок, протилежний обертанню годинникової стрілки (див. рис. 2.10,а).

Розглянемо побудову плану прискорень.

Прискорення зовнішніх точок C, E_2 структурної групи (ланки 2, 3):

$$\bar{W}_C = 0; \tag{2.108}$$

$$\bar{W}_{E_2} = \bar{W}_{E_1} + \bar{W}^{cor}_{E_2E_1} + \bar{W}^{r}_{E_2E_1}, \tag{2.109}$$

де $\bar{W}_{E_1} = 0$, $\bar{W}^{r}_{E_2E_1}$ - прискорення поршня відносно циліндра також дорівнює нулю, тому що $v^{r}_{E_2E_1} \approx const$.

Тоді $\bar{W}_{E_2} = \bar{W}^{cor}_{E_2E_1}$, тобто прискорення точки E_2 дорівнює прискоренню Коріоліса, модуль якого

$$W^{cor}_{E_2E_1} = 2\omega_2 v^{r}_{E_2E_1} = \frac{2(de_2)(pe_2)K_v^2}{(DE_2)K_\ell}. \tag{2.110}$$

Напрямок вектора $\bar{W}^{cor}_{E_2E_1}$ одержимо, якщо повернемо на 90^0 вектор відносної швидкості $\bar{v}^{r}_{E_2E_1}$ у бік переносного руху ланки 2.

Для визначення прискорення точки D - внутрішньої точки структурної групи, першої у порядку нашарування, - запишемо векторні рівняння відносно зовнішніх точок E_2 та C групи:

$$\bar{W}_D = \bar{W}_{E_2} + \bar{W}^{n}_{DE_2} + \bar{W}^{r}_{DE_2}; \tag{2.111}$$

$$\bar{W}_D = \bar{W}_C + \bar{W}^{n}_{DC} + \bar{W}^{\tau}_{DC}. \tag{2.112}$$

Модуль та напрямок нормальних відносних прискорень $\bar{W}^{n}_{DE_2}$ і $\bar{W}^{n}_{DC}$ відомі:

$$W^{n}_{DE_2} = \frac{v^2_{DE_2}}{\ell_{DE_2}} = \frac{(de_2)^2K_v^2}{(DE_2)K_\ell}; \quad W^{n}_{DC} = \frac{v^2_{DC}}{\ell_{DC}} = \frac{(dc)^2K_v^2}{(DC)K_\ell},$$

де (de_2) і (dc) - відрізки плану швидкостей (див. рис. 2.10,б).

(DE_2) і (DC) - відрізки плану механізму (див.рис. 2.10,а).

Прискорення $\bar{W}^n_{DE_2}$ спрямовано паралельно ланці DE_2 механізму, від точки D до точки E_2, прискорення $\bar{W}^n_{DC}$ - паралельно ланці DC механізму, від точки D до точки C. Дотичні прискорення $\bar{W}^\tau_{DE_2}$ і $\bar{W}^\tau_{DC}$ відомі за напрямком. Вектор $\bar{W}^\tau_{DE_2}$ перпендикулярний до DE_2, вектор $\bar{W}^\tau_{DC}$ - до DC.

Масштаб плану прискорень визначається так:

$K_w = \frac{W_{E_2}}{(p'e'_2)}$, відрізок ($p'e'_2$), що зображує на плані прискорень прискорення точки E_2, приймають довжиною 60...100 мм. Тоді масштабні величини прискорень $\bar{W}^n_{DE_2}$ і $\bar{W}^n_{DC}$ дорівнюють:

$$e'_2 n_{DE_2} = \frac{W^n_{DE_2}}{K_w}; \qquad p' n_{DC} = \frac{W^n_{DC}}{K_w}.$$

Розв"яжемо графічно рівняння (2.III), (2.II2).

Відкладаємо на кресленні з вибраної точки p' - полюса плану прискорень, - перпендикулярно до ланки 2 відрізок $p'e'_2$. Із точки e'_2 відкладаємо відрізок $e'_2 n_{DE_2}$ і через точку n_{DE_2} перпендикулярно до відрізка $e'_2 n_{DE_2}$ проводимо пряму, паралельну напрямку прискорення $\bar{W}^\tau_{DE_2}$. З точки c', що збігається з полюсом p', відкладаємо відрізок $p' n_{DC}$ і через точку n_{DC} перпендикулярно до відрізка $p' n_{DC}$ проводимо пряму, паралельну напрямку прискорення $\bar{W}^\tau_{DC}$. Точку перетинання прямих, паралельних $\bar{W}^\tau_{DE_2}$ і $\bar{W}^\tau_{DC}$, позначимо d'. Тоді

$$W_D = (p'd')K_w.$$

Прискорення точки B ланки 3 можна знайти графічним розв"язанням рівнянь:

$$\bar{W}_B = \bar{W}_D + \bar{W}^n_{BD} + \bar{W}^\tau_{BD}; \qquad (2.II3)$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_C + \bar{W}^n_{BC} + \bar{W}^\tau_{BC}. \qquad (2.II4)$$

Але положення точки b' на плані прискорень можна одержати, якщо використати метод подібності.

Доведемо, що трикутник $b'd'c'$ на плані прискорень подібний до трикутника BDC на плані механізму.

Сторони трикутника $b'd'c'$ на плані прискорень відповідно дорівнюють:

$$b'd' = \frac{W_{BD}}{K_w}; \qquad d'c' = \frac{W_{DC}}{K_w}; \qquad b'c' = \frac{W_{BC}}{K_w};$$

$$W_{BD} = \sqrt{(W^n_{BD})^2 + (W^\tau_{BD})^2} = \ell_{BD}\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2};$$

$$W_{DC} = \sqrt{(W^n_{DC})^2 + (W^\tau_{DC})^2} = \ell_{DC}\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2};$$

$$W_{BC} = \sqrt{(W^n_{BC})^2 + (W^\tau_{BC})^2} = \ell_{BC}\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2},$$

де ω_3 і ε_3 – кутова швидкість і кутове прискорення третьої ланки.

Відповідно

$$\frac{W_{BD}}{\ell_{BD}} = \frac{W_{DC}}{\ell_{DC}} = \frac{W_{BC}}{\ell_{BC}},$$

або

$$\frac{(b'd')K_w}{(BD)K_\ell} = \frac{(d'c')K_w}{(DC)K_\ell} = \frac{(b'c')K_w}{(BC)K_\ell}.$$

Після скорочення на K_w/K_ℓ маємо

$$\frac{b'd'}{BD} = \frac{d'c'}{DC} = \frac{b'c'}{BC}.$$

Таким чином, положення точки b' на плані прискорень можна одержати, якщо побудувати на відрізку $p'd'$ трикутник $b'd'c'$, подібний до трикутника BDC, з однаковим обходом сторін.

Метод подібності рекомендується вживати, коли відомі прискорення двох точок ланки і необхідно визначити прискорення інших її точок.

Кутові прискорення ланок групи визначаються за формулами

$$\varepsilon_2 = \frac{W^\tau_{DE_2}}{\ell_{DE_2}} = \frac{(n_{DE_2}d')K_w}{(DE_2)K_\ell}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{W^\tau_{DC}}{\ell_{DC}} = \frac{(n_{DC}d')K_w}{(DC)K_\ell}.$$

Щоб знайти напрямок кутових прискорень, необхідно в думці

перенести вектори прискорень $\bar{W}^{\tau}_{DE_2}$ і $\bar{W}^{\tau}_{DC}$ у точку D і розглянути рух точки D відносно точок E_2 і C . Кутові прискорення Σ_2 і Σ_3 мають напрямок обертання за годинниковою стрілкою (див. рис. 2.10,в).

Прискорення точки A – внутрішньої точки структурної групи (ланки 4-5) – знаходимо за векторними рівняннями відносно зовнішніх точок B і O групи:

$$\bar{W}_A = \bar{W}_B + \bar{W}^{n}_{AB} + \bar{W}^{\tau}_{AB}; \qquad (2.115)$$

$$\bar{W}_A = \bar{W}_O + \bar{W}^{n}_{AO} + \bar{W}^{\tau}_{AO}. \qquad (2.116)$$

Модуль і напрямок прискорень $\bar{W}^{n}_{AB}$ і $\bar{W}^{n}_{AO}$ відомі:

$$W^{n}_{AB} = \frac{v^2_{AB}}{l_{AB}} = \frac{(ab)^2 K^2_v}{(AB) K_l}; \quad W^{n}_{AO} = \frac{v^2_{AO}}{l_{AO}} = \frac{(ap)^2 K^2_v}{(AO)^2 K_l},$$

де (ab) і (ap) – відрізки плану швидкостей, (AB) і (AO) – відрізки плану механізму. Прискорення $\bar{W}^{n}_{AB}$ спрямовано паралельно AB від точки A до точки B , прискорення $\bar{W}^{n}_{AO}$ – паралельно AO від точки A до точки O .

Масштабні величини нормальних прискорень $\bar{W}^{\tau}_{AB}$ і $\bar{W}^{\tau}_{AO}$ дорівнюють:

$$b'n_{AB} = \frac{W^{n}_{AB}}{K_W}; \qquad p'n_{AO} = \frac{W^{n}_{AO}}{K_W}.$$

Напрямок тангенціальних прискорень $\bar{W}^{\tau}_{AB}$ і $\bar{W}^{\tau}_{AO}$ відомий. Прискорення $\bar{W}^{\tau}_{AB}$ перпендикулярно до AB , прискорення $\bar{W}^{\tau}_{AO}$ – до AO . Побудову плану прискорення точки A виконано відповідно до векторних рівнянь (2.115), (2.116) (див. рис. 2.10,в). Тоді $W_A = (p'a')K_W$.

Кутові прискорення ланок групи визначаються за формулами

$$\varepsilon_4 = \frac{W^{\tau}_{AB}}{l_{AB}} = \frac{(n_{AB}a')K_W}{(AB)K_l}, \qquad (2.117)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{W^{\tau}_{AO}}{l_{AO}} = \frac{(n_{AO}a')K_W}{(AO)K_l}. \qquad (2.118)$$

Щоб знайти напрямок кутових прискорень, необхідно в думці перенести вектори прискорень $\vec{W}^{\tau}_{AB}$ і $\vec{W}^{\tau}_{AO}$ у точку А і розглянути рух точки А відносно точок В і О. Кутове прискорення ε_4 має напрямок обертання за годинниковою стрілкою (див. рис. 2.10,в), кутове прискорення ε_5 – має напрямок, протилежний обертанню годинникової стрілки (див. рис. 2.10,в).

2.1.3. Метод кінематичних діаграм

Кінематичні діаграми дають наочне уявлення про закон руху досліджуваної точки або ланки механізму. Наприклад, для точки В кривошипно-повзунного механізму компресора (рис. 2.11,а) будують: діаграму переміщень залежно від часу $S_B = S_B(t)$, діаграми швидкості $v_B = v_B(t)$ і прискорення $W_B = W_B(t)$ або діаграму переміщень залежно від узагальненої координати $S_B = S_B(\varphi_1)$, діаграми аналога швидкості $S'_B = S'_B(\varphi_1)$ і аналога прискорення $S''_B = S''_B(\varphi_1)$.

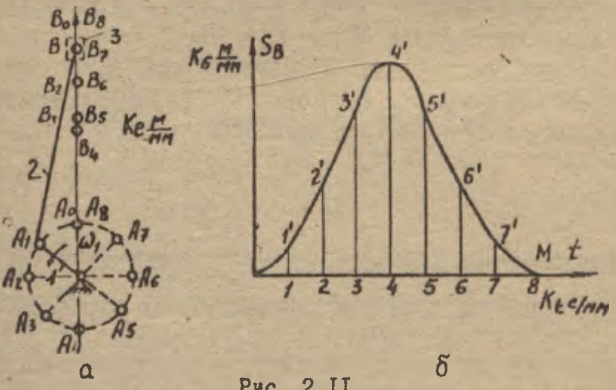


Рис. 2.11

При дослідженні руху шатуна 2 (рис. 2.11) будують: діаграму кутового переміщення у функції від часу $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, діаграми кутової швидкості $\omega_2 = \omega_2(t)$ і кутового прискорення $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$ або діаграму кутового переміщення у функції від узагальненої координати $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$, аналога кутової швидкості $\varphi'_2 = \varphi'_2(\varphi_1)$, аналога кутового прискорення $\varphi''_2 = \varphi''_2(\varphi_1)$.

Якщо початкова (ведуча) ланка механізму обертається з по-

стійною кутовою швидкістю $\omega_1 = const$, то співвідношення дійсних швидкостей та прискорень, а також їх аналогів мають вигляд: $v_B = \omega_1 S'_B$, $W_B = \omega_1^2 S''_B$, $\omega_2 = \omega_1 \varphi'_2$, $\varepsilon_2 = \omega_1^2 \varphi''_2$.

Методи побудови діаграм для точки B і для шатуна 2 однакові. Розглянемо, наприклад, побудову діаграм $S_B = S_B(t)$, $v_B = v_B(t)$, $W_B = W_B(t)$ за умови, що відомі l_{OA} , l_{AB} , $\omega_1 = const$.

А. Побудова діаграми $S_B = S_B(t)$.

Побудова діаграми $S_B = S_B(t)$ виконується за розміченою траєкторією точки B (рис. 2.II,а). Для розмітки траєкторії точки B спочатку ділять коло, що описується точкою A , на довільне число рівних частин, наприклад вісім. За початкове положення приймають положення A_0 , відповідне до положення повзуна B_0 . Усі послідовні положення позначають за напрямком обертання кривошипа: A_1 , A_2 , A_3 і т.д. Для кожного положення кривошипа будують плани механізму і визначають методом засічок положення точок B_1 , B_2 , B_3 і т.д.

Наносять на креслені координатні осі $S_B Ot$ (рис. 2.II,б). На осі Ot відкладають відрізок (OM), який у масштабі буде часом одного повного оберту кривошипа, тобто

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} . \qquad (2.II9)$$

Масштаб часу $K_t = \frac{T}{OM}$. Масштаб переміщення K_S $\frac{м}{мм}$ візьмемо таким, що дорівнює масштабу плану механізму K_ℓ $\frac{м}{мм}$.

Відрізок OM ділять на таке саме число рівних частин, що й коло радіуса OA . У точках I, 2, 3... виставляють перпендикуляри і на них відкладають відрізки $(11') = B_0B_1$; $(22') = B_0B_2$ і т.п. З'єднавши точки I, 2 і т.д. плавною кривою, дістанемо діаграму переміщень $S_B = S_B(t)$.

Діаграма $v_B = v_B(t)$ будується графічним диференціюванням діаграми $S_B = S_B(t)$, діаграма $W_B = W_B(t)$ - графічним диференціюванням діаграми $v_B = v_B(t)$. Але послідовне диференціювання сприяє нагромадженню помилок, і діаграма $W_B = W_B(t)$ може стати неточною.

Більш точних результатів можна досягнути, якщо за даними планів швидкостей побудувати діаграму $v_B = v_B(t)$. Потім графічним диференціюванням одержують діаграму $W_B = W_B(t)$ і графічним інтегруванням – діаграму $S_B = S_B(t)$.

Б. Графічне диференціювання. Метод хорд.

Нехай дано частину діаграми $S_B = S_B(t)$ (рис. 2.I2). Початкова точка кривої має координати X_1, Y_1, кінцева точка C – координати X_2, Y_2. Проведемо хорду AC. Середня швидкість руху точки B механізму (рис. 2.I2,а) в інтервалі $[X_1, X_2]$ визначається за формулами

$$v_{B\,сер} = \frac{(Y_2 - Y_1)K_S}{(X_2 - X_1)K_t}, \qquad (2.I20)$$

$$v_{B\,сер} = t_y \alpha_x \frac{K_S}{K_t}. \qquad (2.I2I)$$

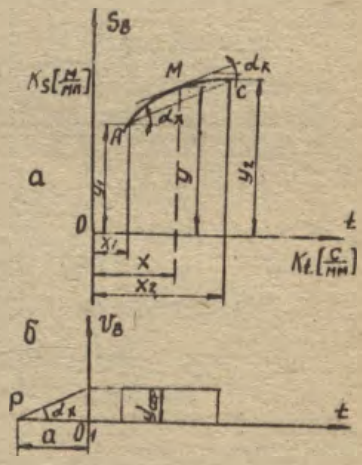


Рис. 2.I2

Графічно $v_{B\,сер}$ для інтервалу $[X_1, X_2]$ можна одержати так. Виберемо нову вісь часу 0_1t. Від точки 0_1 ліворуч відкладаємо полюсну відстань $a = 30...50$ мм. Із полюса p проведемо промінь паралельно хорді AC до перетинання з віссю ординат. Ордината $Y'_{сер}$ (рис. 2.I2,б) у масштабі зображує $v_{B\,сер}$.

Дійсно, замінивши у формулі (2.I2I) $\operatorname{tg}\alpha_x$ на $-\frac{Y'_{сер}}{a}$, одержимо

$$v_{B\,сер} = Y'_{сер}\frac{K_S}{aK_t}, \qquad (2.I22)$$

де

$$\frac{K_S}{aK_t} = K_v. \qquad (2.I23)$$

Але середня швидкість на даному інтервалі $[x_1, x_2]$ чисельно дорівнює дійсній швидкості для середини інтервалу. Для доведення цього скористуємось теоремою Лагранжа, яка формулюється так: якщо функція $y(x)$ безперервна у замкнутому інтервалі і диференційована в його внутрішніх точках, то у цьому інтервалі є хоча б одне значення x (рис.2.12,а), для якого кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту хорди.

Коли інтервал $[x_1, x_2]$ достатньо малий, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, тобто дотична до кривої у точці M, що лежить усередині інтервалу, паралельна хорді AC. Тоді для середини інтервалу $t = x \cdot K_t$, $S_B = y \cdot K_S$. Після диференціювання одержимо

$$dt = dx \cdot K_t, \tag{2.124}$$

$$dS_B = dy \cdot K_S. \tag{2.125}$$

Поділивши вираз (2.125) на (2.124), маємо

$$\frac{dS_B}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{K_S}{K_t},$$

або

$$v_B = tg\alpha \times \frac{K_S}{K_t}. \tag{2.126}$$

Порівняння виразів (2.121), (2.126) доводить, що $v_B = v_{B\,сер}$. Таким чином, для побудови діаграми $v_B = v_B(t)$ проведення дотичних до діаграми $S_B = S_B(t)$ (що досить утруднено) можна замінити проведенням хорд.

Послідовність графічного диференціювання методом хорд:

1. Діаграму, що диференціюється, поділяють на ряд інтервалів. Проводять ординати.

2. Крайні точки ординат з"єднують хордами.

3. Вибирають нову вісь часу 0_1t і відкладають полюсну відстань $a = 30...50$ мм.

4. Із полюса проводять промені, паралельні хордам, до перетинання з віссю ординат.

5. Точки перетину променів з віссю ординат проектують на відповідні середні ординати.

6. Одержані точки з"єднують лекальною кривою і проставляють масштаби.

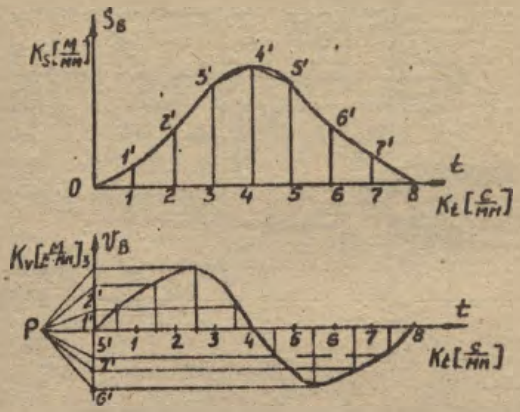


Рис. 2.13

На рис. 2.13 зображено побудову діаграми $V_B = V_B(t)$, диференційованої методом хорд діаграми $S_B = S_B(t)$.

В. Графічне інтегрування.

Оскільки інтегрування - дія, протилежна диференціюванню, то графічно воно виконується у зворотній послідовності. На рис. 2.14 показано побудову діаграми $V_B = V_B(t)$ графічним інтегруванням діаграми $W_B = W_B(t)$.

Послідовність графічного інтегрування:

1. Діаграму поділяють на ряд інтервалів і проводять ординати. Посередині кожного інтервалу вибирають точки, які лежать на кривій, і проектують на вісь ординат.

2. Від початку координат відкладають полюсну відстань $a = 30...50$ мм. Точки у перетині проектуючих ліній з віссю ординат з"єднують з полюсом променями.

3. Вибирають нову вісь часу (0_1t) і, починаючи з першого інтервалу, будують ломану, відрізки якої 0-1, 1-2 і т.д. (рис. 2.14) паралельні відповідним променям (P-1 , P-2) і т.д.

4. Ломану замінюють лекальною кривою і проставляють масштаби K_V і K_t ($K_V = K_W \cdot K_t \cdot a$).

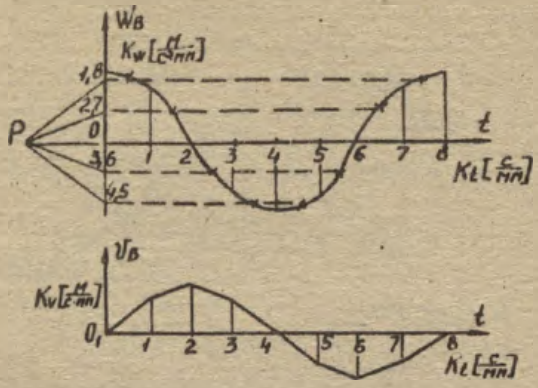


Рис. 2.I4

Контрольні запитання

I. Які переваги та недоліки методів кінематичного дослідження важільних механізмів?

2. Яка послідовність кінематичного дослідження механізмів методом замкнених контурів?

3. Як методом перетворення координат знайти швидкість і прискорення точок і ланок просторового механізму?

4. Яка послідовність кінематичного дослідження механізму другого класу методом планів швидкостей та прискорень?

5. Як скласти рівняння швидкостей та прискорень для структурних груп другого класу?

6. В якому випадку використовується метод подібності при побудові планів швидкостей та прискорень?

7. Як за планами швидкостей та прискорень знайти кутові швидкості та прискорення ланок механізму?

8. Як побудувати графічно функцію положення механізму та її похідні?

9. Як знайти масштаби кінематичних діаграм механізму?

Розв"язати приклади:

$S_2 - V_{S2}$ (рис. 2.I5)

механізму у заданому положенні ($\varphi_1 = 90^0$) аналітичним методом. Дано: $\omega_1 = 20$ 1/с, $l_{OA} = 0{,}1$ м, $l_{AB} = 0{,}4$ м, $l_{AS_2} = 0{,}2$ м.

Відповідь: $v_{S_2} = 2$ м/с.

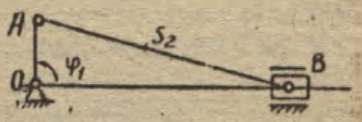


Рис. 2.15

Приклад 2. Визначити вираз радіуса-вектора $\bar{r}_F^{(0)}$ (рис. 2.16) механізму методом перетворення координат.

Дано: φ_{10}, φ_{21}, l_{OB}, l_{BF}.

Відповідь:

$$r_{F_x}^{(0)} = l_{BF}\cos\varphi_{21}\sin\varphi_{10},$$

$$r_{F_y}^{(0)} = l_{BF}\cos\varphi_{21}\cos\varphi_{10},$$

$$r_{F_z}^{(0)} = l_{BF}\sin\varphi_{21} + l_{OB}.$$

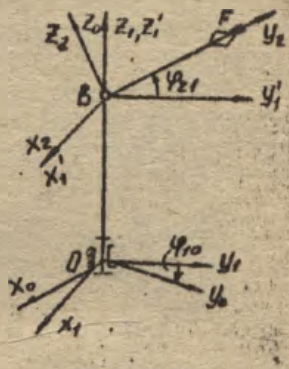


Рис. 2.16

Література

Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1987.

Заблонский К.И., Белоконев И.М., Щёкин Б.М. Теория механизмов и машин. К., 1989.

Механика промышленных роботов / Под ред. К.В. Фролова и Е.К. Воробьева: 3 кн. М., 1988. Кн.1.

Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М., 1979.

2.2. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів

Метод планів швидкостей та прискорень, метод кінематичних діаграм та аналітичні методи кінематичного дослідження можна використовувати і для аналізу кулачкових механізмів.

Якщо профіль кулачка спеціальний, тобто окреслений лініями, що мають просту математичну інтерпретацію (дуги, кола, прямі

і т.п.), то у кожному положенні можна побудувати замінюючий механізм, який досліджується аналітичним або векторно-графічним методами. Якщо профіль кулачка окреслений довільними кривими, то для кінематичного дослідження такого кулачкового механізму доцільно використати метод кінематичних діаграм.

2.2.1. Кулачковий механізм із спеціальним профілем кулачка

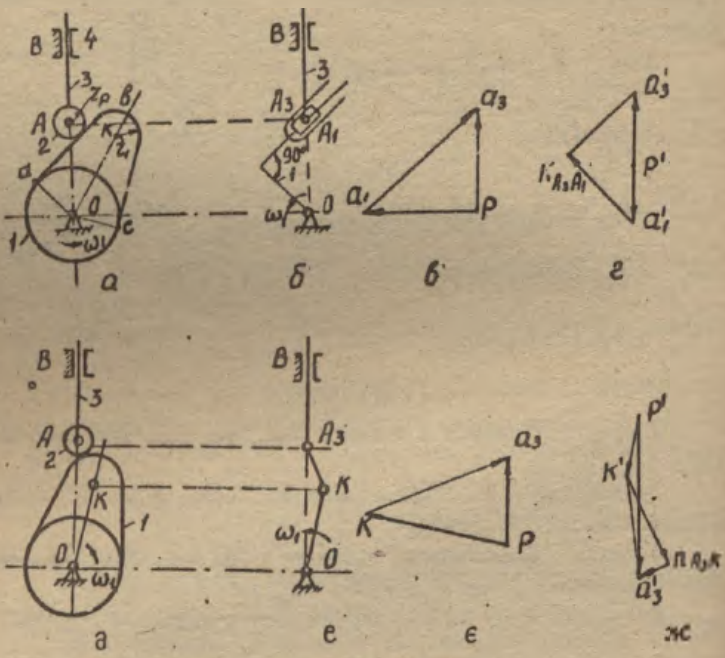


Рис. 2.17

На рис. 2.17,а зображено схему кулачкового механізму, в якого при рівномірному обертанні кулачка I штовхач 3 звершує зворотно-прямолінійний рух. Характер руху штовхача за напрямком від центра I до центра кулачка визначається відповідно профілем відлалення ab і профілем повернення bc . Ці профі-

лі складаються з прямолінійної частини та дуги кола радіусом r_1. Застосуємо для дослідження цього кулачкового механізму метод планів швидкостей та прискорень. Для контакту ролика штовхача з прямолінійною частиною профілю віддалення замінюючий механізм зображено на рис. 2.17,б. Він утворений структурною групою другого класу четвертої модифікації. Плани швидкостей та прискорень для замінюючого механізму побудовані на рис. 2.17,в,г за правилами, розглянутими у підрозд. 2.1.2.2.

Для контакту ролика штовхача з профілем віддалення по дузі радіусом r_1 замінюючий механізм зображено на рис. 2.17,е. Він утворений структурною групою другого класу другої модифікації. Плани швидкостей та прискорень для замінюючого механізму побудовані на рис. 2.17,е,ж за правилами, розглянутими у підрозд. 2.1.2.2.

2.2.2. Кулачковий механізм із довільним профілем кулачка

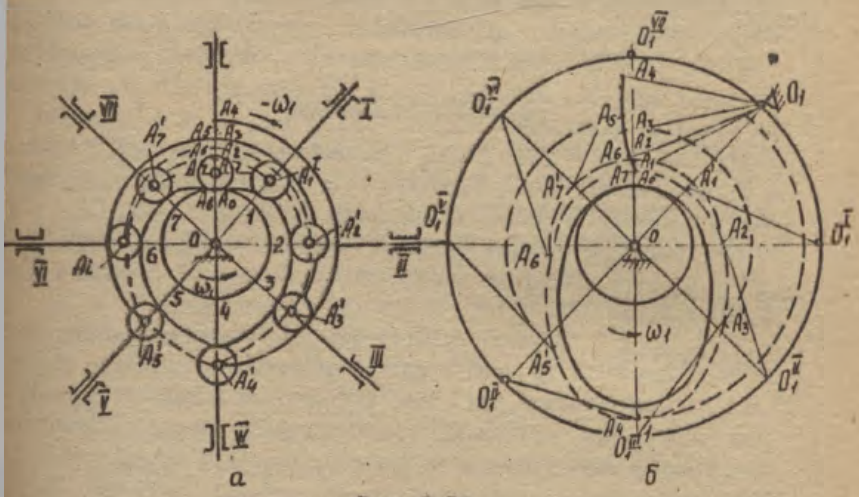


Рис. 2.18

Приклад 1. На рис. 2.18,а зображено кулачковий механізм, в якого при постійній швидкості обертання кулачка штовхач звер-

шує зворотно-прямолінійний рух. При цьому центр ролика (точка A) у відносному русі утворює еквідистантний (пунктирний) профіль кулачка.

Для дослідження цього механізму методом кінематичних діаграм необхідно побудувати діаграму переміщень $S_A = S_A(\varphi_1)$, діаграму аналога швидкості $S'_A = S'_A(\varphi_1)$, діаграму аналога прискорення $S''_A = S''_A(\varphi_1)$ штовхача, де φ_1 – кут повороту кулачка.

Для побудови діаграми $S_A = S_A(\varphi_1)$ виконують розмітку траєкторії центра ролика A у його абсолютному русі.

Поділимо коло, описане мінімальним радіусом-вектором дійсного профілю кулачка, на вісім рівних частин. (Для точнішого дослідження це коло потрібно ділити на 16 або 24 частини). Пронумеруємо ділення у напрямку, протилежному обертанню кулачка. Через точки ділення I, 2, 3... проводимо центральні промені I, II, III... Застосуємо метод інверсії, тобто надамо усій системі кутову швидкість $(-\omega)$. Тоді кулачок буде нерухомим, а штовхач братиме участь у двох рухах: у поступальному відносно стояка і обертальному навколо осі обертання кулачка. При цьому точка A буде послідовно займати положення A'_1, A'_2, A'_3 на еквідистантному профілі. Відстані осі A ролика від осі O обертання кулачка, відповідно, OA'_1, OA'_2, OA'_3 і т.п. Зробивши радіусами OA'_1, OA'_2, OA'_3 ... засічки на траєкторії точки в її абсолютному русі, одержимо розмічену траєкторію. За розміченою траєкторією точки A будуємо діаграму $S_A = S_A(\varphi_1)$, а потім графічним диференціюванням – діаграми $S'_A = S'_A(\varphi_1)$ і $S''_A = S''_A(\varphi_1)$. Побудову кінематичних діаграм розглянуто в підрозд. 2.1.3.

Приклад 2. На рис. 2.18,б зображено схему механізму, в якому при обертанні кулачка з постійною швидкістю штовхач звершує зворотно-обертальний рух, описуючи центром ролика дугу радіусом O_1A_0. При дослідженні цього механізму методом кінематичних діаграм слід побудувати діаграму кутового переміщення $\beta_{O_1A} = \beta_{O_1A}(\varphi_1)$, діаграму аналога кутової швидкості $\beta'_{O_1A} = \beta'_{O_1A}(\varphi_1)$ і діаграму аналога кутового прискорення $\beta''_{O_1A} = \beta''_{O_1A}(\varphi_1)$.

Для побудови діаграми $\beta_{O_1A} = \beta_{O_1A}(\varphi_1)$ необхідно розміти-

ти кут повороту штовхача. Це зручніше зробити за розміченою траєкторією точки A в ІІ абсолютному русі. Послідовність розв"язання цієї задачі така. Надамо всій системі обертання навколо осі O (рис. 2.18,б) з кутовою швидкістю $(-\omega_1)$. Тоді кулачок зупиниться, а точка O_1 рухатиметься по колу радіусом OO_1 з постійною швидкістю у напрямку, протилежному обертанню кулачка. Поділимо це коло на 8 рівних частин (для точнішого дослідження коло слід поділити на 16 або 24 частини).

З одержаних точок O_1^I, O_1^{II}, O_1^{III} ... радіусом OA зробимо засічки на еквідистантному профілі кулачка, тобто знайдемо положення точки A в оберненому русі A_1', A_2', A_3' ... Відстані осі A ролика від осі O обертання кулачка дорівнюватимуть OA_1', OA_2', OA_3' і т.д. Виконавши радіусами OA_1', OA_2', OA_3' ... засічки на траєкторії точки A в ІІ абсолютному русі, одержимо розмічену траєкторію. Кожному положенню осі ролика A_1, A_2, A_3 ... відповідають визначені кути: $\angle\beta_1 = \angle A_1O_1A_0$, $\angle\beta_2 = \angle A_2O_1A_0$ і т.п. За розміченим кутом β повороту штовхача будуємо діаграму $\beta_{O_1A} = \beta_{O_1A}(\varphi_1)$, а потім графічним диференціюванням – діаграми $\beta'_{O_1A} = \beta'_{O_1A}(\varphi_1)$ і $\beta''_{O_1A} = \beta''_{O_1A}(\varphi_1)$. Побудову кінематичних діаграм розглянуто у підрозд. 2.1.3.

Контрольні запитання

1. Які методи застосовуються для кінематичного дослідження кулачкових механізмів? Їх переваги та недоліки.

2. Використання аналітичного методу замкнених контурів для дослідження кулачкового механізму із спеціальним профілем кулачка.

3. В якому випадку використовують метод інверсії при кінематичному дослідженні кулачкового механізму?

4. Як побудувати діаграми лінійних і кутових переміщень для кулачкових механізмів?

Розв"язати приклади:

Приклад 1. Визначити прискорення штовхача (ланки 3) (рис. 2.19) у заданому положенні кулачкового механізму за методом планів швидкостей та прискорень. Дано: $\omega_1 = 30$ 1/с,

$r = 0{,}1$ м, $e = 0{,}05$, $r_{рол} = 0{,}05$.

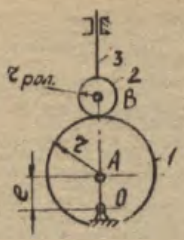


Рис. 2.19

Відповідь: $W_B = 60$ м/с^2.

Приклад 2. За методом інверсії побудувати діаграму $S_{A2} = S_{A2}(S_{A1})$ штовхача кулачкового механізму (рис. 2.20).

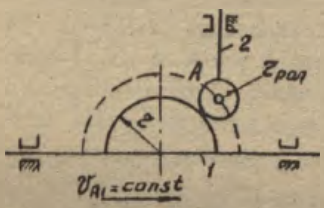


Рис. 2.20

Література

Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М., 1975.
Кореняко А.С. Теория механизмов и машин. К., 1976.

2.3. Кінематичне дослідження зубчастих механізмів

2.3.1. Прості зубчасті механізми

Передача руху від колеса I до колеса 2 або навпаки (рис. 2.21) відбувається натисканням бокових поверхонь зубців ведучого колеса на бокові поверхні зубців веденого колеса. При цьому початкове коло радіусом r_{w1} першого колеса перекочується без ковзання по початковому колі радіусом r_{w2} другого колеса, тобто швидкість у точці контакту початкових кіл - полюсі зачеплення P_{12} (рис. 2.21) - дорівнює

$$v_{P_{12}} = r_{w_1}\omega_1 = r_{w_2}\omega_2. \qquad (2.127)$$

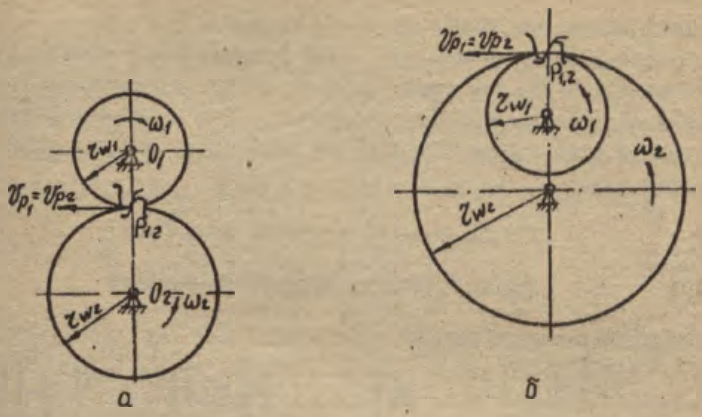


Рис. 2.2I

Відношення кутових швидкостей ланок механізму називається передаточним. Передаточне відношення позначається U_{kl}. Індекси вказують на номера ланок, між якими розглядається передаточне відношення, наприклад: $U_{12}=\omega_1/\omega_2$, $U_{21}=\omega_2/\omega_1$. Передаточному відношенню надається знак "мінус" при протилежному напрямку обертання зубчастих коліс (рис. 2.2I,а) і знак "плюс" - при однаковому напрямку (рис. 2.2I,б). Враховуючи (2.I27), маємо

$$U_{12}=\pm\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{r_{w2}}{r_{w1}}. \qquad (2.I28)$$

Крок початкового кола першого колеса дорівнює кроку початкового кола другого колеса:

$$P_{w1}=P_{w2}. \qquad (2.I29)$$

Позначаючи кількість зубців першого й другого коліс відповідно z_1 і z_2, маємо $2\pi r_{w1}=z_1 P_{w1}$, $2\pi r_{w2}=z_2 P_{w2}$. Тоді

$$\frac{r_{w2}}{r_{w1}}=\frac{z_2}{z_1}, \text{ або } U_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{r_{w2}}{r_{w1}}=\pm\frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.I30)$$

Формула (2.I30) дозволяє, якщо відомі кількість зубців коліс z_1 і z_2, а також кутова швидкість ведучого колеса (ω_1),

знайти кутову швидкість веденого колеса (ω_2).

Але зубчастий механізм, який складається з однієї пари зубчастих коліс, дає змогу змінити кутову швидкість у 4 - 6 разів. Для одержання більших передаточних відношень застосовуються складні зубчасті механізми, які мають декілька пар зубчастих коліс.

2.3.2. Складні зубчасті механізми

2.3.2.I. Рядний зубчастий механізм

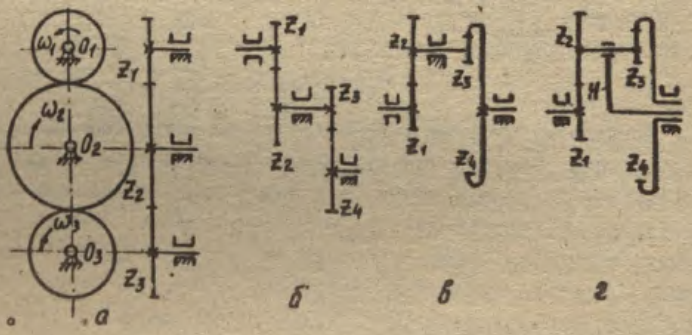


Рис. 2.22

Рядний зубчастий механізм (рис. 2.22,а) характеризується передачею руху від першого колеса до другого, від другого до третього і т.п. Передаточне відношення цього механізму визначається за формулою

$$U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}. \qquad (2.I3I)$$

Помноживши праву частину виразу (2.I3I) на $\frac{\omega_2}{\omega_2}$, одержимо

$$U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{\omega_2}{\omega_3}, \qquad (2.I32)$$

або

$$U_{13} = U_{12} \cdot U_{23}.$$

тобто передаточне відношення рядного зубчастого механізму дорівнює добутку передаточних відношень кожної пари коліс. Знак передаточного відношення рядного зубчастого механізму визначається кількістю зовнішніх зачеплень. При парній кількості зовнішніх зачеплень буде знак "плюс", при непарній - "мінус".

Замінюючи у формулі (2.132) кожне окреме передаточне відношення U_{12}, U_{23} відповідним відношенням чисел зубців, маємо

$$U_{13} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1}. \qquad (2.133)$$

Вираз (2.133) свідчить про те, що передаточне відношення рядного механізму не залежить ні від числа, ні від розмірів проміжних коліс, які називаються паразитними. Паразитні колеса застосовують для передачі обертання з одного вала на інший при великій міжосьовій відстані, а також для утворення визначеного напрямку обертання веденої ланки.

2.3.2.2. Кратний зубчастий механізм

У кратних зубчастих механізмах (рис. 2.22,б,в) рух від першого колеса передається до другого, від третього - до четвертого. Передаточне відношення цих механізмів

$$U_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \qquad (2.134)$$

Помноживши праву частину виразу (2.134) на $\frac{\omega_2}{\omega_2}$ і $\frac{\omega_3}{\omega_3}$, одержимо

$$U_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{\omega_2}{\omega_3}\,\frac{\omega_3}{\omega_4} = U_{12}\cdot U_{34}, \qquad (2.135)$$

тому що $\omega_2 = \omega_3$.

Замінивши у формулі (2.135) окремі передаточні відношення U_{12}, U_{34} відповідним відношенням чисел зубців (рис.2.22,б), дістанемо

$$U_{14} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \qquad (2.136)$$

Передаточне відношення кратного механізму дорівнює добутку окремих передаточних відношень, або відношенню добутку чисел зубців ведених коліс до добутку чисел зубців ведучих коліс.

2.3.2.3. Диференціальний зубчастий механізм

Диференціальним зубчастим механізмом називається складний співвісний зубчастий механізм, в якому мають місце зубчасті колеса з рухомими осями обертання, а ступінь рухомості механізму більша за одиницю.

На рис. 2.22,г зображено схему диференціального механізму з двома ступенями вільності.

Визначимо співвідношення між кутовими швидкостями рухомих ланок диференціального механізму. Нехай ω_1, ω_2, ω_4 – кутові швидкості відповідно першого, другого й четвертого коліс, а ω_H – кутова швидкість водила. Застосуємо метод інверсії (метод обертання руху). Для цього всій системі надамо обертання з кутовою швидкістю $(-\omega_H)$. Тоді водило стане нерухомим і диференціальний зубчастий механізм перетвориться на кратний співвісний зубчастий механізм (рис. 2.22,в).

Механізм, одержаний з диференціального механізму застосуванням методу обертання руху, називається обернутим. Кутові швидкості ланок оберненого механізму відповідно дорівнюють:

$$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H ;$$

$$\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H ;$$

$$\omega_4^{(H)} = \omega_4 - \omega_H .$$

Верхній індекс (H) при кутових швидкостях ω_1, ω_2, ω_4 свідчить, що водило зупинено умовно.

Таким чином, вираз передаточного відношення оберненого механізму (формула Вілі́са) має вигляд

$$U_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_4^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} . \qquad (2.137)$$

Вираз (2.137) дозволяє визначити будь-яку з трьох кутових швидкостей диференціального механізму ω_1, ω_H або ω_4,

задано дві інші швидкості і величина передаточного відношення $U_{14}^{(н)}$ оберненого механізму відома. Отже, за допомогою диференціального механізму можна на одному валу здійснити рух, передається від двох незалежних один від одного двигунів.

2.3.2.4. Планетарний зубчастий механізм

Планетарним зубчастим механізмом називається складний співвісний зубчастий механізм, в якому існують зубчасті колеса з рухомими осями обертання і ступінь рухомості якого дорівнює одиниці. Розглянемо дослідження простого і замкненого планетарних механізмів.

2.3.2.4.1. Простий планетарний зубчастий механізм

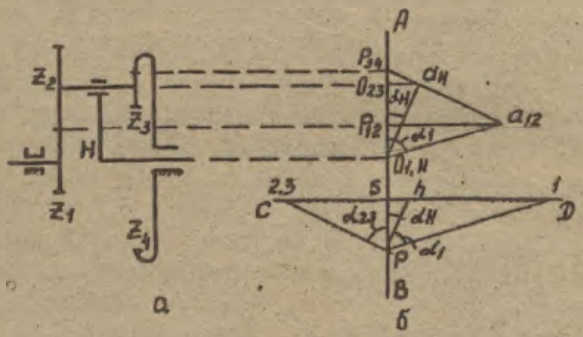


Рис. 2.23

На рис. 2.23,а показано схему простого планетарного механізму. Співвідношення між кутовими швидкостями ведучої та веденої ланок простого планетарного механізму визначають з формули (2.137), дорівнюючи нулю кутову швидкість зупиненого колеса ($\omega_4 = 0$):

$$U_{14}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{0 - \omega_н}.$$

Тоді передаточне відношення простого планетарного механізму має вигляд

$$U_{1н}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_н} = 1 - U_{14}^{(н)}. \qquad (2.138)$$

Після заміни передаточного відношення $U_{14}^{(н)}$ відношенням відповідних чисел зубців маємо

$$U_{1н}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_н} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \qquad (2.139)$$

Формула (2.139) дозволяє аналітично визначити кутові швидкості $\omega_н$ або ω_1, якщо задано одну з них і величина передаточного відношення відома.

Для наочного уявлення кінематики планетарних механізмів користуються також графічним методом. Він складається з побудови картин лінійних швидкостей точок рухомих ланок і плану кутових швидкостей ланок.

Для побудови картин лінійних швидкостей і плану кутових швидкостей креслять схему механізму (рис. 2.23,а) у масштабі K_ℓ м/мм і задаються кутовою швидкістю, наприклад ω_1. На пряму АВ (рис. 2.23,б), паралельну площині обертання коліс, проектують осі обертання і полюси зачеплення коліс. На продовженні проектуючої лінії полюса зачеплення P_{12} відкладають відрізок $(p_{12}a_{12}) \approx 60...80$ мм, який у масштабі швидкостей відображає швидкість $v_{P_{12}}$ точки на початковому колі першого колеса, де $v_{P_{12}} = \omega_1 r_{w1}$, а r_{w1} – радіус початкового кола.

Масштаб швидкостей $K_v = \dfrac{v_{P_{12}}}{(p_{12}a_{12})}$ м/смм.

Швидкість точок першого колеса на його осі обертання дорівнює нулю. З"єднавши прямою точку a_{12} з точкою O_1 (див. рис. 2.23,б), маємо картину розподілу швидкостей точок на першому колесі.

Для сателіта $z_2 - z_3$ відомі швидкість у полюсі зачеплення P_{12} і швидкість у полюсі P_{34} (дорівнює нулю, тому що колесо z_4 нерухоме). З"єднавши прямою точку a_{12} із P_{34}, одержимо картину розподілу швидкостей точок для другого й третього коліс. Відрізок $(a_н O_{23})$ зображує швидкість осі сателіта, а пряма $a_н O_н$ – картину розподілу швидкостей точок водила.

Для побудови плана кутових швидкостей проводять пряму CD,

перпендикулярну до прямої AB (рис. 2.23,б).

Від точки S перетину прямих AB і CD відкладають відрізок $(S1) \approx 60...80$ мм, який у масштабі кутових швидкостей відбиває кутову швидкість ω_1 першого колеса.

Масштаб кутової швидкості $K_\omega = \frac{\omega_1}{(S1)}$ 1/см.

Із точки I проводять пряму, паралельну $a_{12}O_1$, до перетинання з прямою AB і одержують точку P – полюс плану кутових швидкостей. Якщо тепер із полюса P провести промені, паралельні $a_H O_H$ і $a_H a_{12}$, то вони відсічуть на прямій CD відрізки Sh і S2,3, які у масштабі K_ω відбивають кутові швидкості водила та сателіта.

Дійсно (див. рис. 2.23,б),

$$tg\alpha_1 = \frac{P_{12}a_{12}}{P_{12}O_1} = \frac{v_{12}}{K_v} : \frac{z_{w1}}{K_l} = \omega_1 \frac{K_l}{K_v}.$$

Аналогічно

$$tg\alpha_H = \omega_H \frac{K_l}{K_v}; \quad tg\alpha_{23} = \omega_{23}\frac{K_l}{K_v}.$$

Відрізки (S1), (Sh), (S2,3) пропорційні тангенсам цих кутів:

$$(S1) = (SP)tg\alpha_1; (Sh) = (SP)tg\alpha_H; (S_{2,3}) = (SP)tg\alpha_{2,3}.$$

Таким чином,

$$(S1):(SH):(S2,3) = tg\alpha_1 : tg\alpha_H : tg\alpha_{2,3} = \omega_1 : \omega_H : \omega_{2,3}.$$

Відрізок (S1) розташований по інший бік від прямої AB, ніж відрізок (S2,3). Це свідчить про те, що напрямок обертання першого колеса протилежний напрямку обертання сателіта.

За планом кутових швидкостей можна визначити відносні кутові швидкості та передаточні відношення, наприклад:

$$\omega_{2H} = (2,3h)K_\omega; \quad U_{1H}^{(4)} = \frac{(S1)}{(Sh)}.$$

2.3.2.4.2. Замкнений планетарний зубчастий механізм

На рис. 2.24 а зображено схему замкненого планетарного

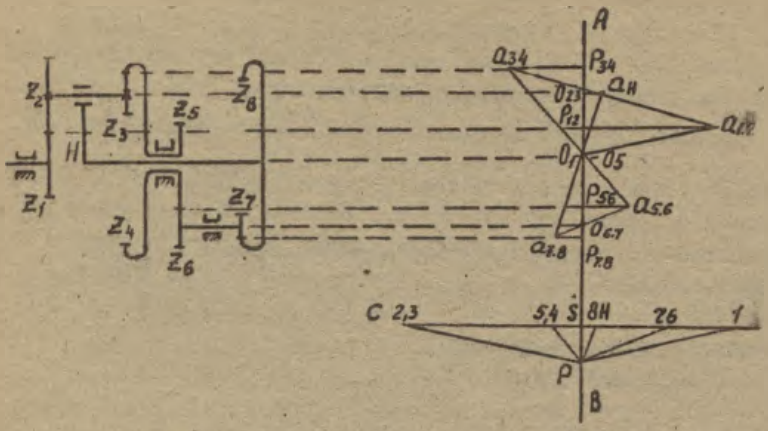


Рис. 2.24

зубчастого механізму.

Замкнений планетарний механізм можна умовно поділити на дві частини: диференціальну (колеса z_1, z_2, z_3, z_4) і замикаючу (колеса z_5, z_6, z_7, z_8).

Щоб визначити вираз передаточного відношення механізму, розглянемо кінематику диференціальної частини. Для неї, відповідно до рівняння (2.137), маємо

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} . \qquad (2.140)$$

Поділимо кожну кутову швидкість у формулі (2.140) на кутову швидкість тієї ланки, що прийнята за вихідну (наприклад на ω_8). Тоді

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1/\omega_8 - \omega_H/\omega_8}{\omega_4/\omega_8 - \omega_H/\omega_8} .$$

Беручи до уваги, що $\omega_H = \omega_8$, $\omega_4 = \omega_5$, $\omega_6 = \omega_7$, одержимо $u_{14}^{(H)} = \frac{u_{18}-1}{u_{58}-1}$,

звідки

$$u_{18} = u_{14}^{(н)} (u_{58} - 1) + 1. \qquad (2.141)$$

Виражаючи передаточні відношення у правій частині формули (2.141) через числа зубців, дістанемо

$$u_{18} = \frac{\omega_1}{\omega_8} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} + \frac{z_2 z_4 z_6 z_8}{z_1 z_3 z_5 z_7}. \qquad (2.142)$$

Вираз (2.142) дозволяє аналітично визначити кутові швидкості ω_8 або ω_1, якщо задано одну з них і передаточне відношення u_{18} відомо.

Графічний метод кінематичного дослідження замкненого планетарного механізму складається з побудови картин лінійних швидкостей точок рухомих ланок і плану кутових швидкостей ланок. Для цього у масштабі K_l м/мм зображують схему механізму.

На пряму AB, паралельну площині обертання коліс, проектують осі обертання і полюси зачеплення коліс (рис. 2.24,б). Побудову картин розподілу лінійних швидкостей для замкненого планетарного механізму починають із замикаючої частини. Відкладають, наприклад, відрізок $(a_{78}p_{78}) \approx 20...30$ мм. З'єднавши прямими точку a_{78} з точками O_{67} і $O_{1,н}$, одержують картини розподілу лінійних швидкостей по ланках z_6, z_7, і $z_{8,н}$. Точки перетинання продовження цих прямих із проектуючими полюса зачеплення P_{56} і віссю обертання O_{23} визначають відрізки $(P_{56}a_{56})$ і $(O_{23}a_н)$, які виражають лінійні швидкості полюса зачеплення P_{56} і осі O_{23} обертання сателіта. З'єднавши точку a_{56} з точкою O_5, мають картину розподілу швидкостей по ланці z_5. Продовжуючи лінію $a_{56}O_5$, дістають картину розподілу швидкостей по ланці z_4. Відрізок $(a_{34}p_{34})$ виражає швидкість точок на початкових колах коліс z_3 і z_4. З'єднавши точки a_{34} і $a_н$, одержують закон розподілу швидкостей по ланці z_2, z_3 (сателіта). Перетин прямої $a_{34}a_н$ із проектуючою лінією полюса зачеплення P_{12} дає точку a_{12}. Відрізок $(p_{12}a_{12})$ виражає швидкість точок на початкових колах коліс z_1 і z_2. Масштаб картин лінійних швидкостей визначають після їх побудови. Якщо відома кутова швидкість ω_1, то

$$K_v = \frac{v_{p12}}{(p_{12}\, a_{12})} = \frac{\omega_1 r_{w1}}{(p_{12}\, a_{12})},$$

де r_{w1} - радіус початкового кола першого колеса. План кутових швидкостей для замкненого планетарного механізму будують так само, як і для простого планетарного механізму.

2.3.2.5. Хвильовий планетарний механізм

Кінематичне дослідження хвильового механізму (рис. 2.25) виконується аналітичним методом. Зв"язок між кутовими швидкостями рухомих ланок механізму можна установити методом обертання руху, тобто надавши усій системі кутову швидкість $(-\omega_H)$.

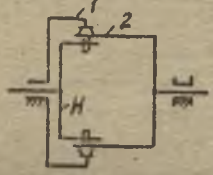


Рис. 2.25

Тоді при нерухомому жорсткому колесі 1

$$U_{21}^{(H)} = \frac{\omega_2 - \omega_H}{0 - \omega_H},$$

або

$$U_{H2}^{(1)} = \frac{\omega_H}{\omega_2} = \frac{1}{1 - U_{21}^{(H)}} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}. \qquad (2.143)$$

Оскільки різниця зубців $z_2 - z_1$ приймається малою, хвильові механізми мають велике передаточне відношення. Якщо гнучке колесо 2 буде нерухомим, то передаточне відношення такого механізму має вигляд

$$U_{H1}^{(2)} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}. \qquad (2.144)$$

Контрольні запитання

1. Що називається передаточним відношенням простого зубчастого механізму? Якими параметрами воно визначається? Як установлюється знак передаточного відношення?

2. Як визначаються передаточні відношення рядного і кратного зубчастого механізмів? Які особливості виразу передаточ-

них відношень через числа зубців?

3. За якою формулою встановлюються співвідношення між кутовими швидкостями диференціального зубчастого механізму, ступінь руху якого дорівнює двом?

4. Як одержати передаточне відношення простого і замкненого планетарних зубчастих механізмів?

5. Яка послідовність побудови картин лінійних швидкостей для простого та замкненого планетарних зубчастих механізмів?

6. Як використати план кутових швидкостей планетарного зубчастого механізму для визначення передаточних відношень, відносних швидкостей, збігу напрямків обертання?

7. Завдяки чому хвильові зубчасті механізми мають великі передаточні відношення?

Розв"язати приклади:

Приклад I. Визначити передаточне відношення U_{4H} планетарного механізму (рис. 2.26). Дано: $z_1 = 25$, $z_2 = 50$, $z_3 = 125$, $z_4 = 12$, $z_5 = 54$, $z_6 = 120$.

Відповідь: $U_{4H} = 12$.

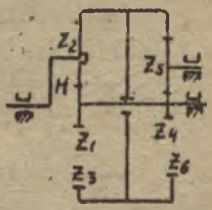


Рис. 2.26

Приклад 2. Визначити аналітичним методом кутову швидкість ω_{2H} сателіта відносно водила планетарного механізму (рис. 2.27). Дано: $\omega_1 = 150$ 1/с, $z_1 = 20$, $z_2 = 80$, $z_3 = 40$, $z_4 = 140$.

Відповідь: $\omega_{2H} = 35$ 1/с.

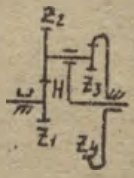


Рис. 2.27

Література

Кудрявцев В.М. Планетарные передачи. Л., 1989.

Руденко Н.Ф. Планетарные передачи. Теория применения, расчет и проектирование. М., 1947.

Кудрявцев В.М. Замкнутые передачи дифференциального типа. Л., 1969.

Полетучий А.И. Волновые зубчатые передачи. Харьков, 1979.

3. ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

3.1. Силовий розрахунок механізмів

Силове дослідження передбачає визначення сил, діючих на ланки механізму. Це необхідно для розрахунків на міцність ланок і кінематичних пар механізму, для розрахунку елементів кінематичних пар на знос, знаходження потужності приводу і таке інше.

Силовий розрахунок найчастіше виконується методом кінетостатики, тобто крім активних і реактивних сил, що діють на ланки механізму, до розгляду беруться ще й сили інерції.

3.1.1. Сили, що діють на ланки механізму

Рушійні сили F_p – це сили, що намагаються прискорити рух ведучих ланок механізму. Робота цих сил є позитивною ($A_p > 0$). Рушійні сили звичайно задаються у вигляді механічних характеристик, тобто залежностей силових параметрів від кінематичних і часу. На рис. 3.1 наведено механічні характерис-

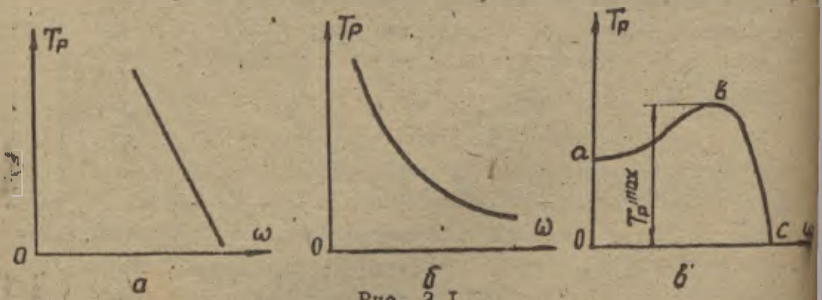


Рис. 3.1

тики електродвигунів постійного струму з паралельним збудженням (рис. 3.I,а), постійного струму з послідовним збудженням (рис. 3.I,б), асинхронного трифазного струму (рис. 3.I,в) - залежності рушійного моменту $T_р$ від кутової швидкості ω ротора.

Механічна характеристика $T_р = T_р(\omega)$ асинхронного електродвигуна складається з двох частин: перша - висхідна ab - нестійка, друга - низхідна стійка і робоча. Такі самі частини має її механічна характеристика карбюраторного двигуна внутрішнього згоряння (рис. 3.2,а). На рис. 3.2,б показано механічну характеристику пружинного привода - прямолінійну залежність сили пружності $F_р$ від деформації пружини, тобто від переміщення S .

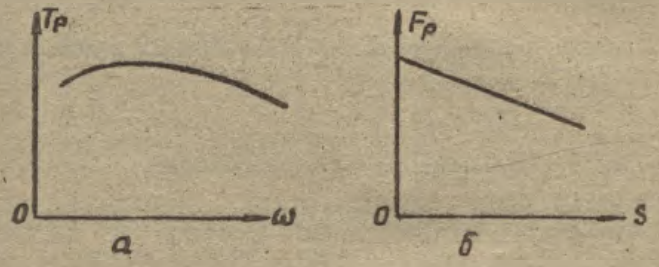


Рис. 3.2

Сили виробничих опорів $F_{во}$ - це сили, для переборювання яких призначений механізм. Робота цих сил негативна ($A_{во} < 0$).

Задаються сили виробничих опорів, як і рушійні, у вигляді механічних характеристик. На рис. 3.3 наведено механічні характеристики відцентрового насоса (а) і стругального верстата (б):

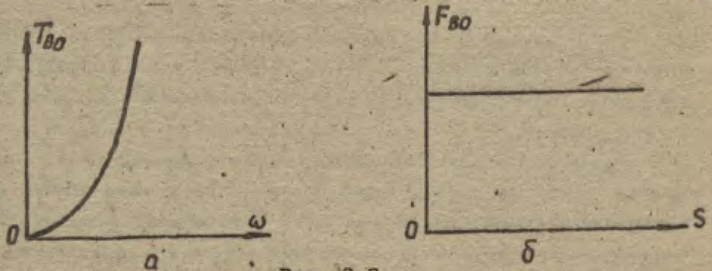


Рис. 3.3

залежності моменту $T_{во}$ на роторі від кутової швидкості ротора, залежності сили $F_{во}$ різання, прикладеної до різця, від переміщення S різця.

Сили тяжіння G - це сили взаємодії ланок механізму із землею. Робота цих сил позитивна при переміщенні за напрямком до центра землі, при переміщенні у протилежному напрямку - негативна ($A_{ст} \lesssim 0$).

Сили інерції ланок можуть враховуватися зведенням до головного вектора $\bar{F}_{iн}$, прикладеного у центрі мас ланки, і до головного моменту $\bar{T}_{iн}$ пари сил інерції. Головний вектор сил інерції

$$\bar{F}_{iн} = -m\bar{W}_s, \qquad (3.1)$$

де m - маса ланки; $\bar{W}_s$ - вектор прискорення центра мас ланки.

Головний момент пари сил інерції ланки плоского механізму визначається за формулою

$$\bar{T}_{iн} = -J_s\bar{\varepsilon}, \qquad (3.2)$$

де J_s - центральний момент інерції ланки; $\bar{\varepsilon}$ - кутове прискорення ланки.

Головний момент пари сил інерції ланки просторового механізму зручно виразити через проекції на головні центральні осі інерції ланки:

$$T_{iнx} = -J_x\varepsilon_x + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z ; \qquad (3.3)$$

$$T_{iнy} = -J_y\varepsilon_y + (J_z - J_x)\omega_z\omega_x ; \qquad (3.4)$$

$$T_{iнz} = -J_z\varepsilon_z + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y , \qquad (3.5)$$

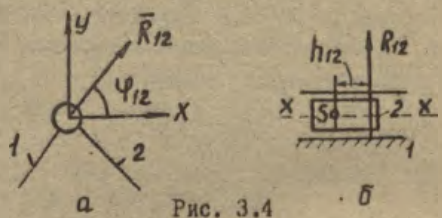
де J_x, J_y, J_z - головні центральні моменти інерції ланки; ω_x, ω_y, ω_z, ε_x, ε_y, ε_z - проекції кутової швидкості та кутового прискорення на головні центральні осі інерції ланки.

Крім того, при русі механізму у кінематичних парах виникають, діючи на ланки, реакції зв"язків і сили тертя. У більшості механізмів сили тертя малі і у першому наближенні не враховуються. Реакції у кінематичних парах знаходять розглядом кі

нетостатично визначених кінематичних ланцюгів.

3.I.2. Умова кінетостатичної визначеності кінематичних ланцюгів із кінематичними парами п"ятого класу

В обертальній кінематичній парі п"ятого класу (рис. 3.4,а) плоского ланцюга лінія дії реакції від першої ланки на другу R_{12}, без врахування тертя, проходить через центр шарніра O. При цьому величина реакції та її напрямок (кут φ_{12}) невідомі.



а Рис. 3.4 б

У поступальній парі п"ятого класу лінія дії реакції $\bar{R}_{12}$ (без урахування тертя) є нормальною до осі xx поступальної пари (рис. 3.4,б).

Величина реакції та положення її лінії дії, тобто плече h_{12}, невідомі. Таким чином, нижча кінематична пара п"ятого класу дає дві невідомі. Якщо кінематичний ланцюг має p_5 пар п"ятого класу, то кількість невідомих дорівнює $2p_5$. Для кожної ланки плоского ланцюга можна скласти три рівняння рівноваги. Якщо таких ланок n', то загальна кількість рівнянь рівноваги дорівнює $3n'$. Отже, умова кінетостатичної визначеності плоского кінематичного ланцюга має вигляд

$$3n' = 2p_5, \tag{3.6}$$

або

$$p_5 = \frac{3}{2} n'. \tag{3.7}$$

Але за формулою (3.7) визначається також співвідношення між числом кінематичних пар п"ятого класу та кількістю ланок у структурній групі (див. підрозд. I.2.4).

Таким чином, будь-яка структурна група кінематично визначена.

Умова кінетостатичної визначеності для просторового ланцюга має вигляд

$$6n' = 5p_5, \tag{3.8}$$

або

$$p_5 = \frac{6}{5} n'. \tag{3.9}$$

Із формул (3.6), (3.8) випливає, що початкові ланки механізму не будуть знаходитись у рівновазі, тому що при числі рухомих ланок $n' = I$ кількості пар п"ятого класу $p_5 = I$ (див. рис. I.I8) число рівнянь рівноваги, які можна скласти, на одиницю більше числа невідомих:

$$3n' - 2p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1, \tag{3.I0}$$

або

$$6n' - 5p_5 = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1. \tag{3.II}$$

Щоб зберігти рівновагу, необхідно до початкової ланки додатково прикласти зрівноважувальну силу $F_{зр}$ або зрівноважувальний момент $T_{зр}$. Наприклад, якщо вихідна ланка двигуна з"єднана безпосередньо за допомогою муфти зі вхідною ланкою робочої машини (виконавчого механізму), то до вихідної ланки прикладається зрівноважувальний момент (потрібний момент виробничих опорів). Якщо вихідна ланка двигуна і вхідна ланка робочої машини (виконавчого механізму) з"єднані за допомогою зубчастого механізму, то до вихідної ланки прикладається зрівноважувальна сила (потрібна сила виробничих опорів).

Проведений аналіз показує, що силовий розрахунок механізму може бути зведений до силового дослідження структурних груп, окремих початкових ланок і основного механізму.

3.I.3. Послідовність силового розрахунку механізмів другого класу

I. Від механізму від"єднується структурна компонента (структурна група, окрема початкова ланка), остання у послідовності нашарування. До ланок (до ланки) структурної компоненти прикладаються діючі на них (на неї) сили, в тому числі сили інерції, а також реакції ланок, від яких від"єднано структурну компоненту. Визначаються реакції у кінематичних парах компоненти.

2. Від механізму від"єднується структурна компонента, передостання у послідовності нашарування. До ланок (до ланки) структурної компоненти прикладаються усі сили, включаючи вже відомі реакції від структурної компоненти, останньої у послідовності нашарування. Визначаються реакції у кінематичних парах компоненти і т.д., поки не вичерпаються всі структурні групи та окремі початкові ланки.

3. Виконується силовий розрахунок основного механізму: до початкової ланки основного механізму прикладаються діючі на нього сили, у тому числі вже відома реакція від структурної компоненти, першої у послідовності нашарування. Визначається реакція у кінематичній парі, утворена початковою ланкою і стояком, а також зрівноважувальна сила або зрівноважувальний момент.

3.I.4. Силовий розрахунок плоского механізму другого класу з кінематичними парами п"ятого класу

3.I.4.I. Графоаналітичний метод.

Важільний механізм V-образного двигуна (рис. 3.5,а) складається з основного механізму (ланки I, 2), структурної групи другого класу другої модифікації (ланки 3, 4), першої в послідовності нашарування, і структурної групи другого класу другої модифікації (ланки 5, 6), другої в порядку нашарування. Приймаємо, що механізм має площину симетрії, яка паралельна площині руху і в якій діють усі сили.

Діючі на ланки сили і моменти сил, у тому числі й сили інерції, замінені рівнодіючими силами $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$ і рівнодіючими моментами T_3, T_5. На другу ланку діє також зрівноважувальний момент $T_{зр}$.

Необхідно визначити реакції в кінематичних парах і зрівноважувальний момент у даному положенні механізму.

А. Силовий розрахунок структурної групи, останньої в порядку нашарування

Від"єднаємо від механізму і зобразимо в масштабі K_ℓ м/мм структурну групу, яка складається з п"ятої та шостої ланок

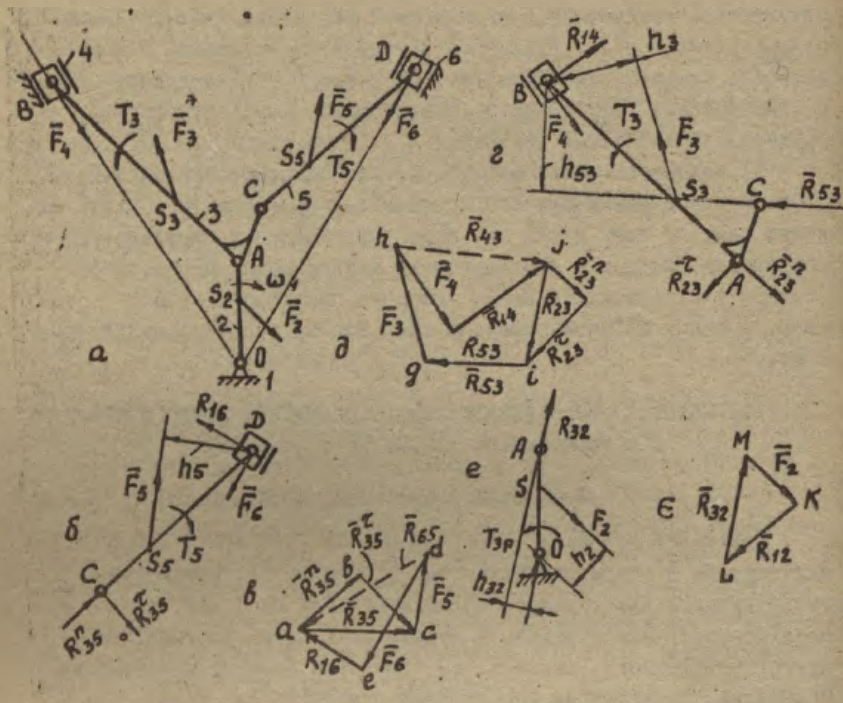


Рис. 3.5

(рис. 3.5,б). До ланок групи прикладаємо задані сили та моменти сил, а також реакції $\bar{R}_{35}$, $\bar{R}_{16}$ ланок, від яких від"єднана група. Подамо реакцію $\bar{R}_{35}$ у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових:

$$\bar{R}_{35} = \bar{R}^{n}_{35} + \bar{R}^{\tau}_{35}.$$

Складова $\bar{R}^{n}_{35}$ має напрямок вздовж прямої CD, а складова $\bar{R}^{\tau}_{38}$ – перпендикулярна до неї.

Визначенню підлягають величини реакцій $\bar{R}^{n}_{35}$, $\bar{R}^{\tau}_{35}$, $\bar{R}_{16}$ та величина і напрямок реакції у внутрішній кінематичній парі групи (шарнір D):

$$\bar{R}_{56} = -\bar{R}_{65}.$$

Доцільна послідовність у визначенні реакцій:

1. Визначають величину реакції $\bar{R}^{\tau}_{35}$, для чого складають рівняння моментів відносно точки D усіх сил, що діють на п"яту ланку:

$$\sum T_{D5} = -F_5 h_5 K_\ell - T_5 + R^{\tau}_{35}(CD)K_\ell = 0, \qquad (3.12)$$

звідки

$$R^{\tau}_{35} = \frac{F_5 h_5 K_\ell + T_5}{(CD)K_\ell}. \qquad (3.13)$$

Якщо при обчисленні праву частину формули (3.13) одержують зі знаком мінус, то це означає, що дійсний напрямок $\bar{R}^{\tau}_{35}$ протилежний напрямку прийнятому.

2. Знаходять величини реакцій $\bar{R}^{n}_{35}$ і $\bar{R}_{16}$ графічним розв"язанням векторного рівняння, яке виражає умову рівноваги обох ланок стркутурної групи. З метою спрощення подальшого дослідження пропонується у рівнянні спочатку записати усі вектори сил, що діють на одну ланку групи (наприклад п"яту), а потім на другу:

$$\bar{R}^{n}_{35} + \bar{R}^{\tau}_{35} + \bar{F}_5 + F_6 + \bar{R}_{16} = 0. \qquad (3.14)$$

Побудову плану сил виконують відповідно до рівняння (3.14) у визначеному масштабі K_p н/мм. Відкладають відомі вектори $\bar{R}^{\tau}_{35}$, $\bar{F}_5$, $\bar{F}_6$. Потім з початку вектора $\bar{R}^{\tau}_{35}$ проводять напрямок вектора $\bar{R}^{n}_{35}$, а з кінця вектора $\bar{F}_6$ – напрямок вектора $\bar{R}_{16}$. Перетин цих напрямків замикає план сил і визначає величини $\bar{R}^{n}_{35}$ і $\bar{R}_{16}$.

3. Визначають реакцію в шарнірі D графічним розв"язанням векторного рівняння, що відображає умову рівноваги однієї з ланок групи (наприклад п"ятої ланки) (див. рис. 3.5,в):

$$\bar{R}^{n}_{35} + \bar{R}^{\tau}_{35} + \bar{F}_5 + \bar{R}_{65} = 0.$$

Оскільки на плані сил (див. рис. 3.5,в) послідовно відкладені сили, що діють на п"яту ланку, то для визначення величини та напрямку вектора $\bar{R}_{65}$ достатньо з"єднати кінець вектора $\bar{F}_5$ з початком вектора $\bar{R}^{n}_{35}$.

Величина реакції у шарнірі D дорівнює $R_{65} = (ad)K_p$.

Б. Силовий розрахунок структурної групи, передостанньої у порядку нашарування

Виділямо зі складу механізму та зобразимо в масштабі K_ℓ м/мм структурну групу з ланками 3 і 4 (див. рис. 3.5,г). До ланок групи прикладемо задані сили і моменти сил, а також вже відому реакцію $\bar{R}_{53}=-\bar{R}_{35}$ від структурної групи, останньої в порядку нашарування. Реакція $\bar{R}_{23}$ і $\bar{R}_{14}$ другої ланки і стояка, від яких від"єднано групу, прикладені відповідно до шарніра A і поступальної пари B. Подамо реакцію $\bar{R}_{23}$ у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових:

$$\bar{R}_{23}=\bar{R}^{n}_{23}+\bar{R}^{\tau}_{23}.$$

Складова $\bar{R}^{n}_{23}$ має напрямок вздовж прямої AB, а складова $\bar{R}^{\tau}_{23}$ – напрямок, перпендикулярний до неї. Визначенню підлягають величини реакцій $\bar{R}^{n}_{23}$, $\bar{R}^{\tau}_{23}$, $\bar{R}_{14}$ та величина і напрямок реакції у шарнірі B:

$$\bar{R}_{43}=-\bar{R}_{34}.$$

Доцільна послідовність у визначенні реакцій така сама, як і в структурній групі, останньої в порядку нашарування:

1. Розраховують величину реакції $\bar{R}^{\tau}_{23}$:

$$\sum F_{B3}=-R^{\tau}_{23}(AB)K_\ell+T_3+F_3h_3K_\ell-R_{53}h_{53}K_\ell=0, \qquad (3.15)$$

звідки

$$R^{\tau}_{23}=\frac{T_3+F_3h_3K_\ell-R_{53}h_{53}K_\ell}{(AB)K_\ell}. \qquad (3.16)$$

Дійсний напрямок сили $\bar{R}^{\tau}_{23}$ визначається знаком правої частини формули (3.16).

2. Графічним розв"язанням векторного рівняння (3.17) знаходять $\bar{R}^{n}_{23}$ і $\bar{R}_{14}$:

$$\bar{R}^{n}_{23}+\bar{R}^{\tau}_{23}+\bar{R}_{53}+\bar{F}_3+\bar{F}_4+\bar{F}_{14}=0. \qquad (3.17)$$

У вибраному масштабі K_P н/мм відкладають (див.рис. 3.5,д) відомі вектори $\bar{R}^{\tau}_{23}$, $\bar{F}_3$, $\bar{R}_{53}$, $\bar{F}_4$. Потім з початку вектора $\bar{R}^{\tau}_{23}$ проводять напрямок вектора $\bar{R}^{n}_{23}$, а з кінця вектора $\bar{F}_4$ – напрямок вектора $\bar{R}_{14}$. Перетин цих двох напрямків замикає план сил і визначає величини $\bar{R}^{n}_{23}$ та $\bar{R}_{14}$.

3. Визначають реакцію в шарнірі B графічним розв"язанням векторного рівняння, що відбиває умову рівноваги третьої ланки (див. рис. 3.5,д):

$$\bar{R}^{n}_{23} + \bar{R}^{\tau}_{23} + \bar{R}_{53} + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0.$$

Величина реакції в шарнірі B дорівнює

$$R_{43} = (h_j) K_p .$$

В. Силовий розрахунок основного механізму

На початкову ланку основного механізму діють сили $\bar{F}_2$, $\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}$, $\bar{R}_{12}$ і зрівноважувальний момент T_{3p} (див. рис. 3,5,е). Сили $\bar{F}_2$ і $\bar{R}_{32}$ відомі, необхідно визначити R_{12} і T_{3p}.

Порядок розв"язання завдання:

1. Знаходять зрівноважувальний момент із рівняння моментів відносно точки O :

$$\sum T_O = -F_2 h_2 K_\ell - R_{32} h_{32} \cdot K_\ell + T_{3p} = 0,$$

звідки

$$T_{3p} = F_2 h_2 K_\ell + R_{32} h_{32} K_\ell . \qquad (3.18)$$

2. Визначають реакцію $\bar{R}_{12}$ графічним розв"язанням векторного рівняння, що відбиває умову рівноваги ланки 2 (див. рис. 3.5,е):

$$\bar{R}_{32} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{12} = 0. \qquad (3.19)$$

Величина реакції дорівнює

$$R_{12} = (KL) \cdot K_p .$$

3.1.4.2. Аналітичний метод

Важільний механізм насоса (рис. 3.6,а) складається з основного механізму (ланки 3, 1) і структурної групи другого класу третьої модифікації (ланки 4, 5). Діючі на ланки сили і моменти сил, у тому числі й сили інерції, замінено рівнодіючими силами $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$ і рівнодіючими моментами T_4, T_5. На третю ланку також діє зрівноважувальна сила $\bar{F}_{3p}$, напрямок якої збігається з напрямком нормалі до профілів зубчастої пари. Домовимось напрямні кути γ_i сил відкладати від

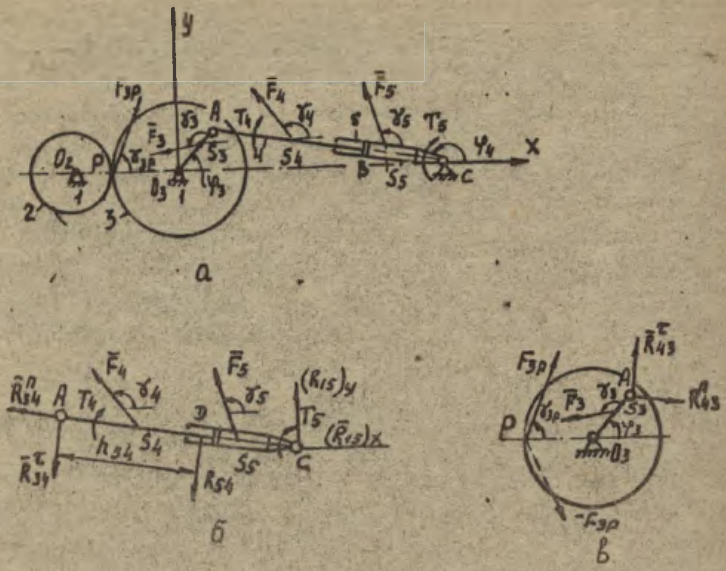


Рис. 3.6

дсдатного напрямку осі 0x у бік, протилежний руху годинникової стрілки.

Визначають реакції в кінематичних парах і зрівноважувальну силу в даному положенні механізму.

А. Силовий розрахунок структурної групи другого класу третьої модифікації (ланка 4, 5) (рис. 3.6,а,б)

Необхідно визначити в кінематичних парах реакції $\bar{R}^{n}_{34}$, $\bar{R}^{\tau}_{34}$, $\bar{R}_{54} = -\bar{R}_{45}$, $\bar{R}_{15}$, плече h_{54} реакції $\bar{R}_{54}$.

Попередній напрямок $\bar{R}^{n}_{34}$ приймають таким, щоб його напрямний кут β^{n}_{34} збігався з напрямком кута φ_4 ланок 4, 5. Попередній напрямок $\bar{R}^{\tau}_{34}$ одержують поворотом $\bar{R}^{n}_{34}$ на кут $0{,}5\pi$ проти руху годинникової стрілки.

Величину реакції $\bar{R}^{\tau}_{34}$ визначають з умови рівноваги структурної групи у формі рівняння моментів:

$$\Sigma(\bar{T}_C)_{\text{лан}4,5} = \bar{l}_{CA} \times \bar{R}^{\tau}_{34} + \bar{l}_{CS_4} \times \bar{F}_4 + \bar{l}_{CS_5} \times \bar{F}_5 + \bar{T}_4 + \bar{T}_5 = 0, \qquad (3.20)$$

або

$$\begin{vmatrix} l_{CA}\cos\varphi_4 & l_{CA}\sin\varphi_4 \\ R^{\tau}_{34}\cos(90^\circ+\varphi_4) & R^{\tau}_{34}\sin(90^\circ+\varphi_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{cs_4}\cos\varphi_4 & l_{cs_4}\sin\varphi_4 \\ F_4\cos\gamma_4 & F_4\sin\gamma_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{cs_5}\cos\varphi_4 & l_{cs_5}\sin\varphi_4 \\ F_5\cos\gamma_5 & F_5\sin\gamma_5 \end{vmatrix} + \bar{T}_4 + \bar{T}_5 = 0,$$

звідки

$$R^{\tau}_{34} = \frac{1}{l_{CA}}\left(F_4 l_{cs_4}\sin(\varphi_4-\gamma_4) + F_5 l_{cs_5}\sin(\varphi_4-\gamma_4) + T_4 + T_5\right). \quad (3.21)$$

Якщо права частина виразу (3.21) буде зі знаком мінус, то

$$\gamma^{\tau}_{34} = \varphi_4 - 0{,}5\pi.$$

Для визначення величин реакцій $\bar{R}^{n}_{34}$ і $\bar{R}_{54}$ запишемо векторне рівняння рівноваги четвертої ланки:

$$\bar{R}^{n}_{34} + \bar{R}^{\tau}_{34} + \bar{F}_4 + \bar{R}_{54} = 0. \quad (3.22)$$

Виконаємо проектування векторів сил на координатні осі X і Y (рис. 3.6,б):

$$R^{n}_{34}\cos\varphi_4 + R^{\tau}_{34}\cos\gamma^{\tau}_{34} + F_4\cos\gamma_4 + R_{54}\cos(\varphi_4+0{,}5\pi) = 0,$$

$$R^{n}_{34}\sin\varphi_4 + R^{\tau}_{34}\sin\gamma^{\tau}_{34} + F_4\sin\gamma_4 + R_{54}\sin(\varphi_4+0{,}5\pi) = 0,$$

звідки

$$R^{n}_{34} = -\frac{R^{\tau}_{34}(\cos\gamma^{\tau}_{34}+\sin\gamma^{\tau}_{34}\operatorname{tg}\varphi_4) + F_4(\cos\gamma_4+\sin\gamma_4\operatorname{tg}\varphi_4)}{\cos\varphi_4+\sin\varphi_4\operatorname{tg}\varphi_4}, \quad (3.23)$$

$$R_{54} = \frac{R^{n}_{34}\cos\varphi_4 + R^{\tau}_{34}\cos\gamma^{\tau}_{34} + F_4\cos\gamma_4}{\sin\varphi_4}. \quad (3.24)$$

Якщо

$$R^{n}_{34} < 0, \text{ то } \gamma^{n}_{34} = \varphi_4 - \pi,$$

а при $R_{54} < 0$ $\gamma_{54} = \varphi_4 - 0{,}5\pi$.

Для визначення величини реакції $\bar{R}_{15}$ запишемо векторне рівняння рівноваги п"ятої ланки:

$$\bar{R}_{45} + \bar{F}_5 + \bar{R}_{15} = 0. \quad (3.25)$$

Спроектувавши вектори сил на координатні осі, одержимо

$$R_{45}\cos\gamma_{45} + F_5\cos\gamma_5 + (R_{15})_{x_1} = 0,$$

$$R_{45}\sin\gamma_{45} + F_5\sin\gamma_5 + (R_{15})_y = 0,$$

де $\gamma_{45} = \gamma_{54} - \pi$, якщо $R_{54} > 0$,

$\gamma_{45} = \gamma_{54} + \pi$, якщо $R_{54} < 0$,

звідки
$$(R_{15})_x = -(R_{45}\cos\gamma_{45} + F_5\cos\gamma_5), \qquad (3.26)$$

$$(R_{15})_y = -(R_{45}\sin\gamma_{45} + F_5\sin\gamma_5). \qquad (3.27)$$

Величина реакції R_{15} дорівнює

$$R_{15} = \sqrt{(R_{15})_x^2 + (R_{15})_y^2}. \qquad (3.28)$$

Напрямний кут вектора $\bar{R}_{15}$

$$\gamma_{15} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left[(R_{15})_y/(R_{15})_x\right], & \text{якщо } (R_{15})_x \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left[(R_{15})_y/(R_{15})_x\right], & \text{якщо } (R_{15})_x < 0. \end{cases} \qquad (3.29)$$

Плече $h_{54} = \ell_{AD}$ реакції $\bar{R}_{54}$ визначаємо з рівняння моментів

$$\Sigma(T_A)_{ланка} = \bar{\ell}_{AS_4} \times \bar{F}_4 + \bar{\ell}_{AD} \times \bar{R}_{54} + \bar{T}_4 = 0, \qquad (3.30)$$

або

$$\begin{vmatrix} \ell_{AS_4}\cos(\varphi_4+\pi) & \ell_{AS_4}\sin(\varphi_4+\pi) \\ F_4\cos\gamma_4 & F_4\sin\gamma_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_{AD}\cos(\varphi_4+\pi) & \ell_{AD}\sin(\varphi_4+\pi) \\ R_{54}\cos\gamma_{54} & R_{54}\sin\gamma_{54} \end{vmatrix} + \bar{T}_4 = 0,$$

звідки

$$\ell_{AD} = h_{54} = \frac{F_4\ell_{AS_4}\sin(\varphi_4 - \gamma_4) - T_4}{R_{54}\sin(\gamma_{54} - \varphi_4)}. \qquad (3.31)$$

Б. Силовий розрахунок основного механізму

Необхідно визначити зрівноважувальну силу $F_{зр}$ і реакцію $\bar{R}_{13}$ у шарнірі O_3 (див. рис. 3.6,в). Попередньо напрямний кут $\gamma_{зр}$ зрівноважувальної сили $F_{зр}$ приймається $\gamma_{зр} = 0{,}5\pi - \alpha_w$, де α_w – кут зачеплення.

Величину зрівноважувальної сили знаходимо з рівняння

$$\Sigma(\bar{T}_O)_{ланка\,3} = \bar{\ell}_{O_3S_3} \times \bar{F}_3 + \bar{\ell}_{O_3A} \times \bar{R}_{43}^{\tau} + \ell_{O_3A} \times \bar{R}_{43}^{n} + \bar{\ell}_{O_3P} \times \bar{F}_{зр} = 0, \qquad (3.32)$$

або

$$\begin{vmatrix} l_{O_3S_3}\cos\varphi_3 & l_{O_3S_3}\sin\varphi_3 \\ F_3\cos\gamma_3 & F_3\sin\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{O_3A}\cos\varphi_3 & l_{O_3A}\sin\varphi_3 \\ R^{\tau}_{43}\cos\gamma^{\tau}_{43} & R^{\tau}_{43}\sin\gamma^{\tau}_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{O_3A}\cos\varphi_3 & l_{O_3A}\sin\varphi_3 \\ R^{n}_{43}\cos\gamma^{n}_{43} & R^{n}_{43}\sin\gamma^{n}_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{O_3P}\cos 180^\circ & l_{O_3P}\sin 180^\circ \\ F_{3P}\cos\gamma_{3P} & F_{3P}\sin\gamma_{3P} \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$F_{3P} = \frac{F_3 l_{O_3S_3}\sin(\gamma_3-\varphi_3) + R^{\tau}_{43} l_{O_3A}\sin(\gamma^{\tau}_{43}-\varphi_3) + R^{n}_{43} l_{O_3A}\sin(\gamma^{n}_{43}-\varphi_3)}{l_{O_3P}\sin\gamma_{3P}}, \quad (3.33)$$

де $\gamma^{\tau}_{43} = \varphi_4 - 0{,}5\pi$, якщо $R^{\tau}_{43} > 0$; $\gamma^{\tau}_{43} = \varphi_4 + 0{,}5\pi$, якщо $R^{\tau}_{43} < 0$; $\gamma^{n}_{43} = \varphi_4 - \pi$, якщо $R^{n}_{34} > 0$, і $\gamma^{n}_{43} = \varphi_4$, якщо $R_{34} < 0$.

Якщо права частина виразу (3.33) – зі знаком мінус, то

$$\gamma_{3P} = 1{,}5\pi + \alpha_w.$$

Реакцію $\bar{R}_{13}$ визначаємо з умови рівноваги ланки 3:

$$\bar{F}_{3P} + \bar{F}_3 + \bar{R}^{n}_{43} + \bar{R}^{\tau}_{43} + \bar{R}_{13} = 0, \quad (3.34)$$

або

$$(R_{13})_x = -(F_{3P}\cos\gamma_{3P} + F_3\cos\gamma_3 + R^{n}_{43}\cos\gamma^{n}_{43} + R^{\tau}_{43}\cos\gamma^{\tau}_{43}); \quad (3.35)$$

$$(R_{13})_y = -(F_{3P}\sin\gamma_{3P} + F_3\sin\gamma_3 + R^{n}_{43}\sin\gamma^{n}_{43} + R^{\tau}_{43}\sin\gamma^{\tau}_{43}). \quad (3.36)$$

Величина реакції R_{13} дорівнює

$$R_{13} = \sqrt{(R_{13})^2_x + (R_{13})^2_y}. \quad (3.37)$$

Напрямний кут вектора

$$\gamma_{13} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left[(R_{13})_y/(R_{13})_x\right], & \text{якщо } (R_{13})_x \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left[(R_{13})_y/(R_{13})_x\right], & \text{якщо } (R_{13})_x < 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

3.1.5. Визначення зрівноважувальної сили методом Жуковського

На практиці часто виникає потреба у визначенні величини зрівноважувальної сили без використання довгого та складного кінетостатичного розрахунку. Визначити зрівноважувальну силу безпосередньо можна за допомогою теореми М.Є. Жуковського про "жорсткий важіль", яка формулюється так: якщо механізм під дією прикладених до нього сил перебуває у рівновазі, то у рівновазі буде знаходитись і "жорсткий важіль".

Жорстким важелем називається повернутий на кут 90° план швидкостей механізму, що розглядається як тверде тіло з віссю обертання у полюсі, і навантажений тими, що й механізм, силами, прикладеними в однойменних точках плану швидкостей.

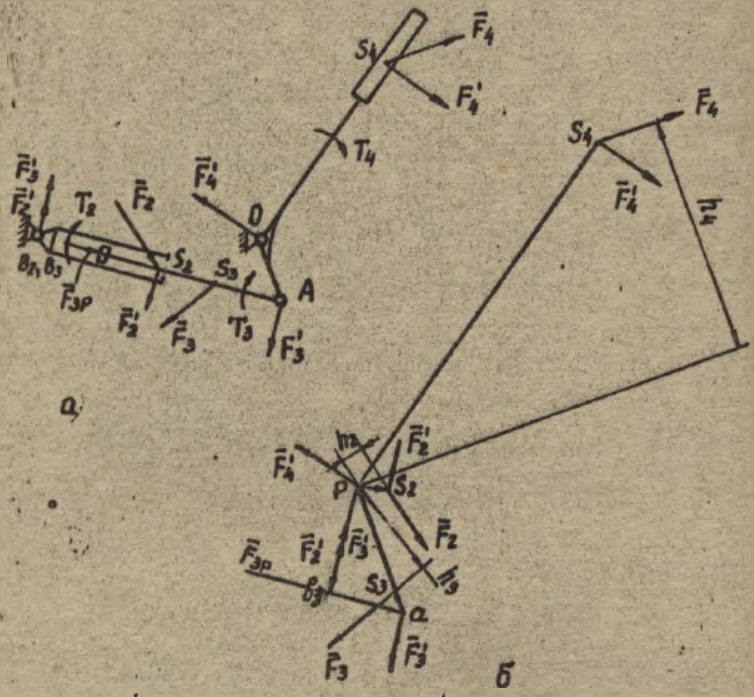


Рис. 3.7

Нехай потрібно визначити величину зрівноважувальної сили $F_{зр}$, що діє на ланку 3 механізму розкриття сонячної батареї штучного супутника Землі (рис. 3.7,а). На ланки 3 і 4 діють також сили $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ і моменти сил T_3, T_4. Побудуємо план швидкостей, повернутий на кут 90° за ходом годинникової стрілки.

Сили $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, не змінюючи їхнього напрямку, перенесемо у відповідні точки плану швидкостей. Моменти T_2, T_3 і T_4 замінимо на пари сил, які відповідно дорівнюють

$F'_2 = T_2 / \ell_{S_2 b_2}$, $F'_3 = T_3 / \ell_{ab_3}$, $F'_4 = T_4 / \ell_{s_4 o}$.

Після цього силу $\bar{F}'_2$ без зміни напрямку перенесемо в точки b_3 і S_2 , сили $\bar{F}'_3$ – у точки a і b_3 , сили $\bar{F}'_4$ – у точки S_4 і P на плані швидкостей.

Запишемо умову рівноваги "жорсткого важеля" – рівняння моментів прикладених до нього сил відносно полюса P (рис.3.7,б):

$$\Sigma T_P = F_{3P}(pb_3) - F_2 h_2 - F'_2(s_2 p) - F'_3(ab_3) - F_3 h_3 - F'_4(s_4 p) - F_4 h_4 = 0, \quad (3.39)$$

звідки

$$F_{3P} = \frac{F_2 h_2 + F'_2(s_2 p) + F'_3(ab_3) + F_3 h_3 + F'_4(s_4 p) + F_4 h_4}{pb_3} . \quad (3.40)$$

Застосовуючи теорему М.Є. Жуковського, можна використовувати звичайний план швидкостей, але при цьому всі сили при їх перенесенні на план швидкостей необхідно повернути в одну й ту саму сторону на кут 90^0.

3.I.6. Силовий розрахунок просторових механізмів з нижчими кінематичними парами п"ятого класу

Силовий розрахунок розглянемо на прикладах кінематичного дослідження просторових механізмів зі ступенем рухомості $W > I$ і $W = I$.

Приклад I. Виконаємо силовий розрахунок основного кінематичного ланцюга механізму робота зі ступенем рухомості $W = 3$ (рис. 3.8). Задано функції $\varphi_{10}(t)$, $\ell_{BC}(t)$, $\varphi_{32}(t)$, розміри, маси ланок, масу об"єкта маніпулювання, моменти інерції ланок відносно головних центральних осей. Необхідно визначити реакції в кінематичних парах механізму, зрівноважувальні сили та зрівноважувальні моменти.

На ланки механізму при його русі діють сили тяжіння $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, $\bar{G}_{об}$ ланок та об"єкта маніпулювання, головні вектори сил інерції F_{in2} , F_{in3} , $F_{inоб}$* ($F_{in1} = 0$), головні моменти сил інерції T_{in1} , T_{in2} , T_{in3} .

Для визначення головних векторів сил інерції запишемо вирази для прискорень центрів мас ланок і прискорення об"єкта ма-

*Основний кінематичний ланцюг – кінематичний ланцюг механізму, за винятком приводів

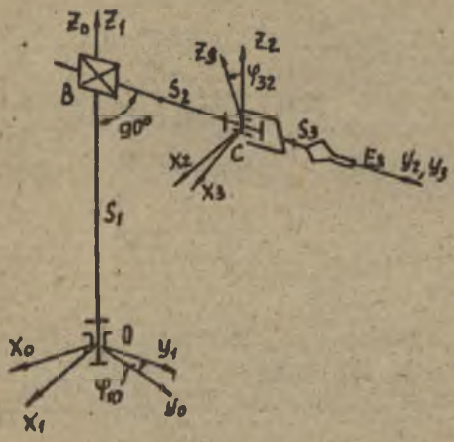


Рис. 3.8

обертальний рух сповільнений.

Відносне прискорення

$$\bar{W}^{\tau}_{S_2 S_2^{(1)}} = \ddot{\ell}_{BC}\bar{j}_2, \qquad (3.43)$$

прискорення Коріоліса

$$W^{cor}_{S_2 S_2^{(1)}} = -2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}\bar{i}_2. \qquad (3.44)$$

Підставляючи (3.42) – (3.44) у формулу (3.41), маємо

$$\bar{W}^{a}_{S_2} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\bar{i}_2 + (\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_2^{(1)}})\bar{j}_1, \qquad (3.45)$$

звідки

$$W^{(2)}_{S_2x} = \ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}, \qquad (3.46)$$

$$W^{(2)}_{S_2y} = \ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_2^{(1)}}, \qquad (3.47)$$

$$W^{(2)}_{S_2z} = 0. \qquad (3.48)$$

Аналогічно прискорення центра мас третьої ланки та об"єкта маніпулювання дорівнюють:

маніпулювання:

$$\bar{W}_{S_1} = 0, \bar{W}^{a}_{S_2} = \bar{W}^{e}_{S_2^{(1)}} + \bar{W}^{\tau}_{S_2 S_2^{(1)}} + W^{cor}_{S_2 S_2^{(1)}}, \qquad (3.41)$$

де $S_2^{(1)}$ – точка, яка належить першій ланці та збігається у проекції з точкою S_2;

$\bar{W}^{e}_{S_2^{(1)}}$ – переносне прискорення обертального руху точки $S_2^{(1)}$ навколо осі z_1:

$$\bar{W}^{e}_{S_2^{(1)}} = \bar{W}^{n}_{S_2^{(1)}} + \bar{W}^{\tau}_{S_2^{(1)}} = -\dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_2^{(1)}}\bar{j}_2 + \ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2^{(1)}}\bar{i}_2 \qquad (3.42)$$

при цьому вважаємо, що

$$W_{S_3}^{a} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}\bar{i}_3 + (\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_3^{(1)}})\bar{j}_3 + + (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}\bar{k}_3; \quad (3.49)$$

$$W_{E}^{a} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}\bar{i}_3 + (\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BE_3^{(1)}})\bar{j}_3 + + (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}\bar{k}_3, \quad (3.50)$$

звідки

$$W_{S3x}^{(3)} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}, \quad (3.51)$$

$$W_{S3y}^{(3)} = \ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_3^{(1)}}, \quad (3.52)$$

$$W_{S3z}^{(3)} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}, \quad (3.53)$$

$$W_{E3x}^{(3)} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}, \quad (3.54)$$

$$W_{E3y}^{(3)} = \ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BE_3^{(1)}}, \quad (3.55)$$

$$W_{E3z}^{(3)} = (\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}. \quad (3.56)$$

Тоді головні сили інерції у проекціях на осі, пов"язані з ланками, мають вигляд:

$$F_{iH1x}^{(1)} = 0,\ F_{iH1y}^{(1)} = 0,\ F_{iH1z}^{(1)} = 0, \quad (3.57)$$

$$F_{iH2x}^{(2)} = -m_2\left[\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}\right], \quad (3.58)$$

$$F_{iH2y}^{(2)} = -m_2\left[\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_2^{(1)}}\right], \quad (3.59)$$

$$F_{iH2z}^{(2)} = 0; \quad (3.60)$$

$$F_{iH3x}^{(3)} = -m_3\left[(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}\right], \quad (3.61)$$

$$F_{iH3y}^{(3)} = -m_3\left[\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_3^{(1)}}\right], \quad (3.62)$$

$$F_{iH3z}^{(3)} = -m_3\left[(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}\right], \quad (3.63)$$

$$F^{(3)}_{iноб_x} = -m_{об}\left[(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\cos\varphi_{32}\right], \quad (3.64)$$

$$F^{(3)}_{iноб_y} = -m_{об}\left[\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BE3^{(1)}}\right], \quad (3.65)$$

$$F^{(3)}_{iноб_z} = -m_{об}\left[(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE3^{(1)}} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\sin\varphi_{32}\right]. \quad (3.66)$$

Головні моменти сил інерції зручно подати через проекції на головні центральні осі інерції ланок:

$$T^{(1)}_{iн1x} = 0, \quad T^{(1)}_{iн1y} = 0, \quad T^{(1)}_{iн1z} = -J^{(z)}_{s1}\varepsilon_{10}; \quad (3.67)$$

$$T^{(2)}_{iн2x} = 0, \quad T^{(2)}_{iн2y} = 0, \quad T^{(2)}_{iн2z} = -J^{(z)}_{s2}\varepsilon_{10}; \quad (3.68)$$

$$T^{(3)}_{iн3x} = -J^{(x)}_{s3}\varepsilon^{(3)}_{3x} + (J^{(y)}_{s3} - J^{(z)}_{s3})\omega^{(3)}_{3y}\omega^{(3)}_{3z}; \quad (3.69)$$

$$T^{(3)}_{iн3y} = -J^{(y)}_{s3}\varepsilon^{(3)}_{3y} + (J^{(z)}_{s3} - J^{(x)}_{s3})\omega^{(3)}_{3z}\omega^{(3)}_{3x}; \quad (3.70)$$

$$T^{(3)}_{i3z} = -J^{(z)}_{s3}\varepsilon^{(3)}_{3z} + (J^{(x)}_{s3} - J^{(y)}_{s3})\omega^{(3)}_{3x}\omega^{(3)}_{3y}; \quad (3.71)$$

де $J^{(z)}_{s1}$, $J^{(z)}_{s2}$, $J^{(x)}_{s3}$, $J^{(y)}_{s3}$, $J^{(z)}_{s3}$ – моменти інерції ланок відносно їх головних центральних осей; $\omega^{(3)}_{3x}$, $\omega^{(3)}_{3y}$, $\omega^{(3)}_{3z}$ – проекції абсолютної кутової швидкості третьої ланки на осі координат, зв"язані з цією ланкою,

$$\omega^{(3)}_{3x} = -\dot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32}, \quad (3.72)$$

$$\omega^{(3)}_{3y} = \dot{\varphi}_{32}, \quad (3.73)$$

$$\omega^{(3)}_{3z} = \dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}; \quad (3.74)$$

ε_{10} – кутове прискорення обертання першої ланки відносно стояка; $\varepsilon^{(3)}_{3x}$, $\varepsilon^{(3)}_{3y}$, $\varepsilon^{(3)}_{3z}$ – проекції абсолютного кутового прискорення третьої ланки на осі координат, зв"язані з цією ланкою,

$$\varepsilon^{(3)}_{3x} = -\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}, \quad (3.75)$$

$$\varepsilon^{(3)}_{3y} = \ddot{\varphi}_{32}; \quad (3.76)$$

$$\varepsilon^{(3)}_{3z} = \ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}. \quad (3.77)$$

Підставляючи (3.72) – (3.77) у (3.69) – (3.71), маємо

$$T^{(3)}_{iнзx} = J^{(x)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32}+\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32})+(J^{(y)}_{S_3}-J^{(z)}_{S_3})\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}, \quad (3.78)$$

$$T^{(3)}_{iнзy} = -J^{(y)}_{S_3}\ddot{\varphi}_{32}-(J^{(z)}_{S_3}-J^{(x)}_{S_3})\dot{\varphi}^2_{10}\sin\varphi_{32}\cos\varphi_{32}, \quad (3.79)$$

$$T^{(3)}_{iнзz} = -J^{(z)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}-\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32})-(J^{(x)}_{S_3}-J^{(y)}_{S_3})\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}. \quad (3.80)$$

Загальну послідовність виконання силового розрахунку для просторових механізмів можна приймати такою самою, як і для плоских. Але для основного кінематичного ланцюга роботів, без замкнених контурів, частіше використовується метод поочередного розмикання кінематичного ланцюга в кожній кінематичній парі, починаючи з останньої, та послідовного розгляду рівноваги кожної вільної частини ланцюга.

Розглянемо рівновагу третьої ланки механізму. Запишемо векторне рівняння сил, діючих на третю ланку:

$$\bar{G}_{об}+\bar{G}_3+\bar{F}_{iноб}+\bar{F}_{iнз}+\bar{R}_C=0, \quad (3.81)$$

де $\bar{R}_C$ - реакція в кінематичній парі C ,
або у проекціях на осі координат $X_3Y_3Z_3$:

$$(G_{об}+G_3)\sin\varphi_{32}-[m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3(1)}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})+m_3(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}]\cos\varphi_{32}+R^{(3)}_{cx}=0; \quad (3.82)$$

$$-m_{об}(\ddot{\ell}_{BC}-\dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BE_3(1)})-m_3(\ddot{\ell}_{BC}-\dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_3(1)})+R^{(3)}_{cy}=0; \quad (3.83)$$

$$-(G_{об}+G_3)\cos\varphi_{32}-[m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3(1)}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})+m_3(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})]\sin\varphi_{32}+R^{(3)}_{cz}=0. \quad (3.84)$$

Визначивши з рівнянь (3.82) - (3.84) $R^{(3)}_{cx}$, $R^{(3)}_{cy}$, $R^{(3)}_{cz}$, знайдемо модуль

$$R_C=\sqrt{(R^{(3)}_{cx})^2+(R^{(3)}_{cy})^2+(R^{(3)}_{cz})^2}.$$

Запишемо векторне рівняння моментів відносно точки C усіх сил, що діють на третю ланку:

$$\bar{\ell}_{CE_3}\times\bar{G}_{об}+\bar{\ell}_{CE_3}\times\bar{F}_{iноб}+\bar{\ell}_{CS_3}\times\bar{G}_3+\bar{\ell}_{CS_3}\times\bar{F}_{iнз}+\bar{T}_{iнз}+\bar{T}_{R_C}=0, \quad (3.85)$$

де $\bar{T}_{R_C}$ - реактивний момент у кінематичній парі C .

Виразимо векторні добутки через проекції співмножників на осі $X_3Y_3Z_3$:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & (\ell^{(3)}_{CE_3})_y & 0 \\ G^{(3)}_{об x} & 0 & G^{(3)}_{об z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & (\ell^{(3)}_{CE_3})_y & 0 \\ F^{(3)}_{інобx} & F^{(3)}_{інобy} & F^{(3)}_{інобz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & (\ell^{(3)}_{CS_3})_y & 0 \\ G^{(3)}_{3x} & 0 & G^{(3)}_{3z} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & (\ell^{(3)}_{CS_3})_y & 0 \\ F^{(3)}_{ін3x} & F^{(3)}_{ін3y} & F^{(3)}_{i3z} \end{vmatrix} + \bar{T}_{i3} + \bar{T}_{RC} = 0. \qquad (3.86)$$

Розкладемо визначники за елементами перших рядків:

$$G^{(3)}_{обz}(\ell^{(3)}_{CE_3})_y + F^{(3)}_{інобz}(\ell^{(3)}_{CE_3})_y + G^{(3)}_{3z}(\ell^{(3)}_{CS_3})_y + F^{(3)}_{ін3z}(\ell^{(3)}_{CS_3})_y + \qquad (3.87)$$
$$+ T^{(3)}_{ін3x} + T^{(3)}_{RCx} = 0;$$

$$T^{(3)}_{ін3y} + T^{(3)}_{RCy} = 0; \qquad (3.88)$$

$$-G^{(3)}_{обx}(\ell^{(3)}_{CE_3})_y - F^{(3)}_{інобx}(\ell^{(3)}_{CE_3})_y - G^{(3)}_{3x}(\ell^{(3)}_{CS_3})_y - F^{(3)}_{ін3x}(\ell^{(3)}_{CS_3})_y + T^{(3)}_{ін3z} + T^{(3)}_{RCz} = 0, \qquad (3.89)$$

де $T^{(3)}_{RCy} = T_{3p_3}$ – зрівноважувальний момент третьої ланки.

Підставляючи у формули (3.87) – (3.89) вирази проекцій сил, моментів сил і довжин, одержимо:

$$-(G_{об}\ell_{CE_3(1)} + G_3\ell_{CS_3(1)})\cos\varphi_{32} - [m_{об}\ell_{CE_3(1)}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}) +$$
$$+ m_3\ell_{CS_3(1)}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})]\sin\varphi_{32} + J^{(x)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}) +$$
$$+ (J^{(y)}_{S_3} - J^{(z)}_{S_3})\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} + T_{RCx} = 0; \qquad (3.90)$$

$$-J^{(y)}_{S_3}\ddot{\varphi}_{32} - (J^{(z)}_{S_3} - J^{(x)}_{S_3})\dot{\varphi}^2_{10}\sin\varphi_{32}\cos\varphi_{32} + T_{3p_3} = 0; \qquad (3.91)$$

$$-(G_{об}\ell_{CE_3(1)} + G_3\ell_{CS_3})\sin\varphi_{32} + [m_{об}\ell_{CE_3(1)}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}) +$$
$$+ m_3\ell_{CS_3(1)}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})]\cos\varphi_{32} - J^{(z)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}) -$$
$$- (J^{(x)}_{S_3} - J^{(y)}_{S_3})\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32} + T_{RCz} = 0. \qquad (3.92)$$

З рівнянь (3.90) – (3.92) визначимо реактивні моменти T_{RCx}, T_{RCz} у кінематичній парі C, а також зрівноважувальний момент (потрібний рушійний момент) T_{3p_3}.

Розглянемо рівновагу третьої та другої ланок механізму. Запишемо векторне рівняння сил, що діють на третю й другу ланки:

$$\bar{G}_{об} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{iноб} + \bar{F}_{iн3} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{iн2} + \bar{R}_B = 0, \qquad (3.93)$$

де $\bar{R}_B$ - реакція в кінематичній парі B .

Спроектуємо векторне рівняння (3.93) на осі координат $X_2Y_2Z_2$. Для одержання проекцій $\bar{F}_{iноб}$ і $\bar{F}_{iн3}$ на осі $X_2Y_2Z_2$ виконаємо множення матриць B_{23} і $F^{(3)}_{iноб}$ та B_{23} і $\bar{F}^{(3)}_{iн3}$. Тоді

$$\begin{bmatrix} F^{(2)}_{iн.обx} \\ F^{(2)}_{iн.обy} \\ F^{(2)}_{iн.обz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & 0 & \sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{32} & 0 & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F^{(3)}_{iн.обx} \\ F_{iн.обy} \\ F_{iн.обz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(3)}_{iн.обx}\cdot\cos\varphi_{32} + F^{(3)}_{iн.обz}\sin\varphi_{32} \\ F^{(3)}_{iн.обy} \\ -F^{(3)}_{iн.обx}\cdot\sin\varphi_{32} + F^{(3)}_{iн.обz}\cos\varphi_{32} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.94)$$

Підставивши у формулу (3.94) вирази $F^{(3)}_{iн.обx}$, $F^{(3)}_{iн.обy}$, $F^{(3)}_{iн.обz}$ з рівнянь (3.64) - (3.66), дістанемо:

$$F^{(2)}_{iн.обx} = -m_{об}\left[\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}\right]; \qquad (3.95)$$

$$F^{(2)}_{iн.обy} = -m_{об}\left[\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BE_3(1)}\right]; \qquad (3.96)$$

$$F^{(2)}_{iн.обz} = 0, \qquad (3.97)$$

$$\begin{bmatrix} F^{(2)}_{iн3x} \\ F^{(2)}_{iн3y} \\ F_{iн.3z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & 0 & \sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{32} & 0 & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F^{(3)}_{iн3x} \\ F^{(3)}_{iн3y} \\ F^{(3)}_{iн3z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(3)}_{iн3x}\cdot\cos\varphi_{32} + F^{(3)}_{iн3z}\sin\varphi_{32} \\ F^{(3)}_{iн.3y} \\ -F^{(3)}_{iн3x}\cdot\sin\varphi_{32} + F^{(3)}_{iн3z}\cdot\cos\varphi_{32} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.98)$$

Підставивши у (3.98) вирази $\bar{F}^{(3)}_{iнзx}$, $\bar{F}^{(3)}_{iн.3y}$, $\bar{F}^{(3)}_{iн.3z}$ з рівнянь (3.61) - (3.63), одержимо

$$F^{(2)}_{iн.3x} = -m_3\left(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}\right), \qquad (3.99)$$

$$F^{(2)}_{iн.3y} = -m_3\left(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_3(1)}\right), \qquad (3.100)$$

$$F^{(2)}_{iн.3z} = 0 \qquad (3.101)$$

Таким чином, рівняння рівноваги у проекціях на осі мають вигляд:

$$-m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3^{(1)}}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})-m_3(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3^{(1)}}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})-$$
$$-m_2(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2^{(1)}}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})+R_{Bx}=0; \qquad (3.102)$$

$$-m_{об}(\ddot{\ell}_{BC}-\dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BE_3^{(1)}})-m_3(\ddot{\ell}_{BC}-\dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_3^{(1)}})-$$
$$-m_2(\ddot{\ell}_{BC}-\dot{\varphi}_{10}^2\ell_{BS_2^{(1)}})+R_{By}=0; \qquad (3.103)$$

$$-G_{об}-G_3-G_2+R_{Bz}=0, \qquad (3.104)$$

де $R_{By}=F_{зрг}$ – зрівноважувальна сила другої ланки. З рівнянь (3.102) – (3.104) визначимо реакції R_{Bx}, R_{Bz} у кінематичній парі B та зрівноважувальну (потрібну рушійну) силу другої ланки.

Запишемо векторне рівняння моментів відносно точки B усіх сил, що діють на третю та другу ланки:

$$\bar{\ell}_{BE_3^{(1)}}\times\bar{G}_{об}+\bar{\ell}_{BE3}\times\bar{F}_{ін.об}+\bar{\ell}_{BS_3}\times\bar{G}_3+\bar{\ell}_{BS_3}\times\bar{F}_{ін.3}+\bar{\ell}_{BS_2}\times\bar{G}_2+$$
$$+\bar{\ell}_{BS_2}\times\bar{F}_{ін.2}+\bar{T}_{ін.3}+\bar{T}_{ін.2}+\bar{T}_{RB}=0, \qquad (3.105)$$

де $\bar{T}_{RB}$ – реактивний момент у кінематичній парі B.

Обчислимо векторні добутки через проекції співмножників на осі $X_2Y_2Z_2$:

$$\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BE_3})_y&0\\0&0&G^{(2)}_{обz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BB_3})_y&0\\F^{(2)}_{ін.обx}&F^{(2)}_{ін.обy}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BS_3})_y&0\\0&0&G^{(2)}_{3z}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BS_2})_y&0\\F^{(2)}_{ін.3x}&F^{(2)}_{ін.3y}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BS_2})_y&0\\0&0&G^{(2)}_{2z}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&(\ell^{(2)}_{BS_2})_y&0\\F^{(2)}_{ін.2x}&F^{(2)}_{ін.2y}&0\end{bmatrix}+$$

$$+\bar{T}_{ін.3}+\bar{T}_{ін.2}+\bar{T}_{RB}=0. \qquad (3.106)$$

Розкладемо визначники за елементами перших рядків:

$$G^{(2)}_{об.2}\left(\ell^{(2)}_{BE_3}\right)_y + G^{(2)}_{3z}\left(\ell^{(2)}_{BS_3}\right)_y + G^{(2)}_{2B}\left(\ell_{BS_2}\right)_y + T^{(2)}_{iH.3x} + T^{(2)}_{iH.2x} + T^{(2)}_{RBx} = 0; \quad (3.107)$$

$$T^{(2)}_{iH.3y} + T^{(2)}_{iH.2y} + T^{(2)}_{RBy} = 0; \quad (3.108)$$

$$-F^{(2)}_{iH.об.x}\left(\ell^{(2)}_{BE_3}\right)_y - F^{(2)}_{iH.3x}\left(\ell^{(2)}_{BS_3}\right)_y - F^{(2)}_{iH.2x}\left(\ell^{(2)}_{BS_2}\right)_y + T^{(2)}_{iH.3z} + T^{(2)}_{iH.2z} + T^{(2)}_{RBz} = 0. \quad (3.109)$$

Для одержання проекцій $\bar{T}_{iH.3}$ на осі $X_2Y_2Z_2$ помножимо матрицю B_{23} на матрицю $\bar{T}^{(3)}_{iH.3}$:

$$\begin{bmatrix} T^{(2)}_{iH.3x} \\ T^{(2)}_{iH.3y} \\ T^{(2)}_{iH.3z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & 0 & \sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_{32} & 0 & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T^{(3)}_{iH.3x} \\ T^{(3)}_{iH.3y} \\ T^{(3)}_{iH.3z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{(3)}_{iH.3x}\cos\varphi_{32} + T^{(3)}_{iH.3z}\sin\varphi_{32} \\ T^{(3)}_{i3y} \\ -T^{(3)}_{iH.3x}\sin\varphi_{32} + T^{(3)}_{iH.3z}\cos\varphi_{32} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Підставивши у формулу (3.110) вирази величин $T^{(3)}_{iH.3x}$, $T^{(3)}_{iH.3y}$, $T^{(3)}_{iH.3z}$ із рівнянь (3.78) - (3.80), одержимо:

$$T^{(2)}_{iH.3x} = \left[J^{(x)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}\right) + \left(J^{(y)}_{S_3} - J^{(z)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}\right] \times$$
$$\times\cos\varphi_{32} - \left[J^{(z)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\right) + \left(J^{(x)}_{S_3} - J^{(y)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32} \times \right.$$
$$\left. \times\sin\varphi_{32}\right]\sin\varphi_{32}; \quad (3.111)$$

$$T^{(2)}_{iH.3y} = -J^{(y)}_{S_3}\ddot{\varphi}_{32} - \left(J^{(z)}_{S_3} - J^{(x)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}^2_{10}\sin\varphi_{32}\cdot\cos\varphi_{32}; \quad (3.112)$$

$$T^{(2)}_{iH.3z} = -\left[J^{(x)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}\right) + \left(J^{(y)}_{S_3} - J^{(z)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}\right]\sin\varphi_{32} -$$
$$-\left[J^{(z)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\right) + \left(J^{(x)}_{S_3} - J^{(y)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\right]\cos\varphi_{32}. \quad (3.113)$$

Підставивши у формули (3.107) – (3.109) проекції сил, моментів сил і довжин, дістанемо:

$$-G_{об}\ell_{BE_3} - G_3\ell_{BS_3} - G_2\ell_{BS_2} + \left[J^{(x)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(J^{(y)}_{S_3} - J^{(z)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}\right]\cos\varphi_{32} - \left[J^{(z)}_{S_3}\left(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(J^{(x)}_{S_3} - J^{(y)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\right]\sin\varphi_{32} + T^{(2)}_{RBx} = 0; \quad (3.114)$$

$$-J^{(y)}_{S_3}\ddot{\varphi}_{32} - \left(J^{(z)}_{S_3} - J^{(x)}_{S_3}\right)\dot{\varphi}^2_{10}\sin\varphi_{32}\cos\varphi_{32} + T^{(2)}_{RBy} = 0; \quad (3.115)$$

$$m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\ell_{BE_3} + m_3(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3(1)} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC})\ell_{BS_3} +$$

$$+ m_2[\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}]\ell_{BS_2} - [\,J^{(x)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}) +$$

$$+ (J^{(y)}_{S_3} - J^{(z)}_{S_3})\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}\,]\sin\varphi_{32} - [\,J^{(z)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32} - \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32} +$$

$$+ (J^{(x)}_{S_3} - J^{(y)}_{S_3})\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}\,]\cos\varphi_{32} - J^{(z)}_{S_2}\cdot\varepsilon_{10} + T^{(z)}_{R_{BZ}} = 0. \quad (3.II6)$$

З рівнянь (3.II4) – (3.II6) визначимо реактивні моменти в кінематичній парі B .

Розглянемо рівновагу третьої, другої та першої ланок механізму. Запишемо векторне рівняння сил, що діють на третю, другу та першу ланки:

$$\bar{G}_{об} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{ін.об} + \bar{F}_{ін.3} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{ін.2} + \bar{G}_1 + \bar{R}_0 = 0, \quad (3.II7)$$

де $\bar{R}_0$ – реакція в кінематичній парі O .

Спроектуємо векторне рівняння (3.II7) на осі координат $X_1 Y_1 Z_1$:

$$-m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BE_3} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}) - m_3(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_3} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}) -$$

$$- m_2(\ddot{\varphi}_{10}\ell_{BS_2} - 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\ell}_{BC}) + R^{(1)}_{Ox} = 0; \quad (3.II8)$$

$$-m_{об}(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BE_3}) - m_3(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_3}) - m_2(\ddot{\ell}_{BC} -$$

$$- \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_2}) + R^{(1)}_{Oy} = 0; \quad (3.II9)$$

$$-G_{об} - G_3 - G_2 - G_1 + R^{(1)}_{Oz} = 0. \quad (3.I20)$$

З рівнянь (3.II8) – (3.I20) визначимо реакції $R^{(1)}_{Ox}$, $R^{(1)}_{Oy}$, $R^{(1)}_{Oz}$ у кінематичній парі O .

Запишемо векторне рівняння моментів відносно точки O усіх сил, що діють на третю, другу та першу ланки:

$$\bar{\ell}_{OE_3} \times \bar{G}_{об} + \bar{\ell}_{OE_3} \times \bar{F}_{ін.об} + \bar{\ell}_{OS_3} \times \bar{G}_3 + \bar{\ell}_{OS_3} \times \bar{F}_{ін.3} + \bar{\ell}_{OS_2} \times \bar{F}_{ін.2} +$$

$$+ \bar{\ell}_{OS_2} \times \bar{G}_2 + \bar{T}_{ін.3} + \bar{T}_{ін.2} + \bar{T}_{ін.1} + \bar{T}_{R0} = 0. \quad (3.I2I)$$

Розв"язуючи рівняння (3.I2I), маємо

$$-G_{об}\ell_{BE_3} - G_3\ell_{BS_3} - G_2\ell_{BS_2} + [m_{об}(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BE_3}) + m_3(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_3})$$

$$+ m_2(\ddot{\ell}_{BC} - \dot{\varphi}^2_{10}\ell_{BS_2})]\ell_{OB} + [\,J^{(x)}_{S_3}(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32} + \dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32}) + (J^{(y)}_{S_3} -$$

$$-J_{S_3}^{(z)})\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}]\cos\varphi_{32}-[J_{S_3}^{(z)}(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}-\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}+$$

$$+(J_{S_3}^{(x)}-J_{S_3}^{(y)})\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}]\sin\varphi_{32}+T_{R0x}^{(1)}=0; \qquad (3.122)$$

$$-[m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}l_{BE_3}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC})+m_3(\ddot{\varphi}_{10}l_{BS_3}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC})+m_2(\ddot{\varphi}_{10}l_{BS_2}-$$

$$-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC})]l_{OB}-J_{S_3}^{(y)}\ddot{\varphi}_{32}-(J_{S_3}^{(z)}-J_{S_3}^{(x)})\dot{\varphi}_{10}^2\sin\varphi_{32}\cos\varphi_{32}+T_{R0y}^{(1)}=0; \qquad (3.123)$$

$$m_{об}(\ddot{\varphi}_{10}l_{BE_3}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC})l_{BE_3}+m_3(\ddot{\varphi}_{10}l_{BS_3}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC})l_{BS_3}+$$

$$+m_2[\ddot{\varphi}_{10}l_{BS_2}-2\dot{\varphi}_{10}\dot{l}_{BC}]l_{BS_2}-[J_{S_3}^{(x)}(\ddot{\varphi}_{10}\sin\varphi_{32}+\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\cos\varphi_{32})+$$

$$+(J_{S_3}^{(y)}-J_{S_3}^{(x)})\dot{\varphi}_{32}\dot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}]\sin\varphi_{32}-[J_{S_3}^{(z)}(\ddot{\varphi}_{10}\cos\varphi_{32}-\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32})+$$

$$+(J_{S_3}^{(x)}-J_{S_3}^{(y)})\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{32}\sin\varphi_{32}]\cos\varphi_{32}-J_{S_2}^{(z)}\varepsilon_{10}-J_{S_1}^{(z)}\varepsilon_{10}+T_{R0z}^{(1)}=0, \qquad (3.124)$$

де $T_{R0z}^{(1)}=T_{зр1}$ – зрівноважувальний момент першої ланки.

З рівнянь (3.122) – (3.124) визначимо реактивні моменти T_{R0x}, T_{R0y} у кінематичній парі 0 та зрівноважувальний (потрібний рушійний) момент $T_{зр1}$.

Приклад 2. Виконаємо силовий розрахунок просторового кривошипно-повзунного механізму зі ступенем рухомості $W=1$ (рис. 3.9).

Задано функцію $\varphi_{10}(t)$ ($\dot{\varphi}_{10}=const$), розміри, маси ланок, моменти інерції ланок, силу опору F_3, задану проекціями $F_{3x}^{(0)}$, $F_{3y}^{(0)}$, $F_{3z}^{(0)}$ на осі системи координат $X_0Y_0Z_0$. Необхідно знайти реакції в кінематичних парах механізму та зрівноважувальний (рушійний) момент.

Кінематичне дослідження цього механізму виконано у підрозд. 2.I.I.2.2, приклад 2.

Визначимо головні вектори сил інерції ланок механізму в проекціях на осі $X_0Y_0Z_0$:

$$F_{ін1x}^{(0)}=-m_1W_{S1x}^{(0)},\quad F_{ін1y}^{(0)}=-m_1W_{S1y}^{(0)},\quad F_{ін.1z}^{(0)}=0; \qquad (3.125)$$

$$F_{ін.2x}^{(0)}=-m_2W_{S2x}^{(0)},\quad F_{ін.2y}^{(0)}=-m_2W_{S2y}^{(0)},\quad F_{ін.2z}^{(0)}=-m_2W_{S2z}^{(0)}; \qquad (3.126)$$

$$F_{ін.3x}^{(0)}=-m_3W_{Cx}^{(0)},\quad F_{i3y}^{(0)}=0,\quad F_{ін.3z}^{(0)}=0. \qquad (3.127)$$

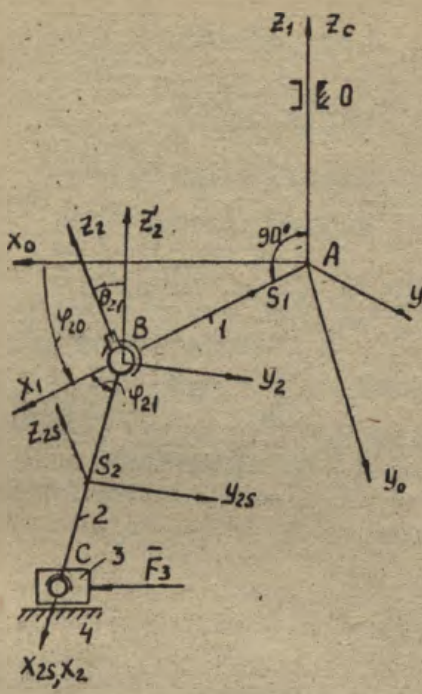


Рис. 3.9

де прискорення $W^{(0)}_{S1x}$, $W^{(0)}_{S1y}$, $W^{(0)}_{S2x}$, $W^{(0)}_{S2y}$, $W^{(0)}_{S2z}$, $W^{(0)}_{Cx}$ можна обчислити відповідно за формулами (2.85), (2.91) - (2.93), (2.83).

Знайдемо головні моменти сил інерції ланок:

$$T^{(0)}_{iH1x} = 0 \quad , \quad T^{(0)}_{iH1y} = 0 \quad , \quad T^{(0)}_{iH1z} = 0 \quad ,$$

тому що $\varepsilon_1 = 0$;

$$\bar{T}^{(0)}_{iH_2} = B_{02}\bar{T}^{(2)}_{iH2} = B_{01}B_{1'2}T^{(2)}_{iH2} \quad , \quad (3.128)$$

де

$$\bar{T}^{(0)}_{iH2} = \begin{bmatrix} T^{(0)}_{iH.2x} \\ T^{(0)}_{iH2y} \\ T^{(0)}_{iH2z} \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

$$\bar{T}^{(2)}_{iH2} = \begin{bmatrix} T^{(2)}_{iH2x} \\ T^{(2)}_{iH2y} \\ T^{(2)}_{iH2z} \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

B_{01} та $B_{1'2}$ - матриці перетворення координат (див. (2.55));

$T^{(2)}_{iHx}$, $T^{(2)}_{iHy}$, $T^{(2)}_{iHz}$ - проекції головного моменту сил інерції другої ланки на її головні центральні осі інерції.

Виконавши множення матриць (3.128э, одержимо:

$$T^{(0)}_{iH2x} = T^{(2)}_{iH2x}(\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} - \sin\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}) - T^{(2)}_{iH.2y}(\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{21} +$$

$$+ \sin\varphi_{10}\cos\theta_{21}\cos\varphi_{21}) + T^{(2)}_{iH.2z}\sin\varphi_{10}\sin\theta_{21} ; \quad (3.129)$$

$$T^{(0)}_{iн\,2y} = T^{(2)}_{iн.2y}(\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + \cos\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}) - T^{(2)}_{iн\,2y}(\sin\varphi_{21}\sin\varphi_{m}^{-}$$

$$- \cos\varphi_{10}\cos\theta_{21}\cos\varphi_{21}) - T^{(2)}_{iн\,2z}\cos\varphi_{10}\sin\theta_{21}; \qquad (3.130)$$

$$T^{(0)}_{iн\,2z} = T^{(2)}_{iн\,2z}\sin\theta_{21}\sin\varphi_{21} + T^{(2)}_{iн.2y}\sin\theta_{21}\cos\theta_{21} + T^{(2)}_{iн.2z}\cos\theta_{21}. \qquad (3.131)$$

Тут

$$T^{(2)}_{iн\,2x} = -J^{(x)}_{s2}\varepsilon^{(2)}_{2x} + \left(J^{(y)}_{s2} - J^{(z)}_{s2}\right)\omega^{(2)}_{2y}\omega^{(2)}_{2z}; \qquad (3.132)$$

$$T^{(2)}_{iн\,2y} = -J^{(y)}_{s2}\varepsilon^{(2)}_{2y} + \left(J^{(z)}_{s2} - J^{(x)}_{s_2}\right)\omega^{(2)}_{2z}\omega^{(2)}_{2x}; \qquad (3.133)$$

$$T^{(2)}_{iн\,2z} = -J^{(z)}_{s2}\varepsilon^{(2)}_{2z} + \left(J^{(x)}_{s2} - J^{(y)}_{s2}\right)\omega^{(2)}_{2x}\omega^{(2)}_{2y}, \qquad (3.134)$$

де $J^{(x)}_{s_2}$, $J^{(y)}_{s_2}$, $J^{(z)}_{s_2}$ – моменти інерції ланки 2 відносно головних центральних осей інерції X_{2s}, Y_{2s}, Z_{2s}, паралельних осям $X_2Y_2Z_2$; $\omega^{(2)}_{2x}$, $\omega^{(2)}_{2y}$, $\omega^{(2)}_{2z}$, $\varepsilon^{(2)}_{2x}$, $\varepsilon^{(2)}_{2y}$, $\varepsilon^{(2)}_{2z}$ – проекції кутової швидкості та кутового прискорення на осі $X_2Y_2Z_2$.

Знайдемо реакції та реактивні моменти в кінематичних парах механізму. Спочатку розглянемо силовий розрахунок структурної групи з ланок 2–3.

Для визначення реакцій $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$, $\bar{R}_{43}$ відповідно в обертальній кінематичній парі C та в поступальній парі, а також реактивного моменту T_{R12} у парі B запишемо рівняння рівноваги другої, другої та третьої і третьої ланок.

$$\bar{\ell}_{BC}\times\bar{R}_{32} + \bar{\ell}_{BS_2}\times\bar{F}_{iн.2} + \bar{T}_{iн.2} + \bar{T}_{R12} = 0; \qquad (3.135)$$

$$\bar{\ell}_{BC}\times\bar{R}_{43} + \bar{\ell}_{BC}\times\bar{F}_{iн.3} + \bar{\ell}_{BC}\times\bar{F}_{3} + \bar{\ell}_{BS_2}\times\bar{F}_{iн.2} + \bar{T}_{iн.2} + \bar{T}_{B12} = 0; \qquad (3.136)$$

$$\bar{R}_{43} + \bar{F}_{iн.3} + \bar{F}_{3} + \bar{R}_{23} = 0. \qquad (3.137)$$

Або в проекціях на осі нерухомої системи координат $X_0Y_0Z_0$, враховуючи, що $F^{(0)}_{iн\,3y} = F^{(0)}_{iн.3z} = 0$, $F^{(0)}_{3y} = F^{(0)}_{3z} = 0$, $R^{(0)}_{43x} = 0$, маємо

$$R^{(0)}_{32z}\ell^{(0)}_{BCy} - R^{(0)}_{32y}\ell^{(0)}_{BCz} + F^{(0)}_{iн\,2z}\ell^{(0)}_{BS_2y} - F^{(0)}_{iн\,2y}\ell^{(0)}_{BS_2z} + T^{(0)}_{iн\,2x} + T^{(0)}_{R12x} = 0; \qquad (3.138)$$

$$R^{(0)}_{32x}\ell^{(0)}_{BCz} - R^{(0)}_{32z}\ell^{(0)}_{BCx} + F^{(0)}_{iн\,2x}\ell^{(0)}_{BS_2z} - F^{(0)}_{iн\,2z}\ell^{(0)}_{BS_2x} + T^{(0)}_{iн\,2y} + T^{(0)}_{R12y} = 0; \qquad (3.139)$$

$$R^{(0)}_{32y}\ell^{(0)}_{BCx} - R^{(0)}_{32x}\ell^{(0)}_{BCy} + F^{(0)}_{iH2y}\ell^{(0)}_{BS2x} - F^{(0)}_{iH2x}\ell^{(0)}_{BS2y} + T^{(0)}_{iH2z} + T^{(0)}_{R12z} = 0; \quad (3.I40)$$

$$R^{(0)}_{43z}\ell^{(0)}_{BCy} - R^{(0)}_{43y}\ell^{(0)}_{BCz} + F^{(0)}_{iH2z}\ell^{(0)}_{BS2y} - F^{(0)}_{iH2y}\ell^{(0)}_{BS2z} + T^{(0)}_{iH2x} + T^{(0)}_{R12x} = 0; \quad (3.I41)$$

$$-R^{(0)}_{43z}\ell^{(0)}_{BCx} - F^{(0)}_{iH3x}\ell^{(0)}_{BCz} + F^{(0)}_{3x}\ell^{(0)}_{BCz} + F^{(0)}_{iH2x}\ell^{(0)}_{BS2z} - F^{(0)}_{iH2z}\ell^{(0)}_{BS2x} + T^{(0)}_{iH2y} + T^{(0)}_{R12y} = 0; \quad (3.I42)$$

$$R^{(0)}_{43y}\ell^{(0)}_{BCx} - F^{(0)}_{iH3x}\ell^{(0)}_{BCy} - F^{(0)}_{3x}\ell^{(0)}_{BCy} + F^{(0)}_{iH2y}\ell^{(0)}_{BS2x} - F^{(0)}_{iH2x}\ell^{(0)}_{BS2y} + T^{(0)}_{iH2z} + T^{(0)}_{R12z} = 0. \quad (3.I43)$$

Величини $\ell^{(0)}_{BCx}$, $\ell^{(0)}_{BCy}$, $\ell^{(0)}_{BCz}$, $\ell^{(0)}_{BS2x}$, $\ell^{(0)}_{BS2y}$, $\ell^{(0)}_{BS2z}$ знаходимо із співвідношень:

$$\begin{bmatrix} \ell^{(0)}_{BCx} \\ \ell^{(0)}_{BCy} \\ \ell^{(0)}_{BCz} \\ 1 \end{bmatrix} = B_{01}B_{1'2}\begin{bmatrix} \ell_{BC} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \ell^{(0)}_{BS2x} \\ \ell^{(0)}_{BS2y} \\ \ell^{(0)}_{BS2z} \\ 1 \end{bmatrix} = B_{01}B_{1'2}\begin{bmatrix} \ell_{BS_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.I44)$$

або

$$\ell^{(0)}_{BCx} = \ell_{BC}(\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} - \sin\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}); \quad (3.I45)$$

$$\ell^{(0)}_{BCy} = \ell_{BC}(\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + \cos\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}); \quad (3.I46)$$

$$\ell^{(0)}_{BCz} = \ell_{BC}\sin\theta_{21}\sin\varphi_{21}; \quad (3.I47)$$

$$\ell^{(0)}_{BS2x} = \ell_{BS_2}(\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{21} - \sin\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}); \quad (3.I48)$$

$$\ell^{(0)}_{BS2y} = \ell_{BS_2}(\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{21} + \cos\varphi_{10}\cos\theta_{21}\sin\varphi_{21}); \quad (3.I49)$$

$$\ell^{(0)}_{BS2z} = \ell_{BS_2}\sin\theta_{21}\sin\varphi_{21}; \quad (3.I50)$$

$$F^{(0)}_{iH3x} + F^{(0)}_{3x} + R^{(0)}_{23x} = 0; \quad (3.I51)$$

$$R^{(0)}_{43y} + R^{(0)}_{23y} = 0; \quad (3.I52)$$

$$R^{(0)}_{43z} + R^{(0)}_{23z} = 0. \quad (3.I53)$$

Замінимо в рівняннях (3.I42) – (3.I43) $R^{(0)}_{43z}$, $R^{(0)}_{43y}$ на

$R^{(0)}_{32z}$ і $R^{(0)}_{32y}$, використавши залежності (3.I52), (3.I53). Тоді

$$-R^{(0)}_{32z}\ell^{(0)}_{BCx}-F^{(0)}_{iH3x}\ell^{(0)}_{BCz}+F^{(0)}_{3x}\ell^{(0)}_{BCz}+F^{(0)}_{iH2x}\ell^{(0)}_{BSzz}-F^{(0)}_{iH2z}\ell^{(0)}_{BSzx}+T^{(0)}_{iH2y}+T^{(0)}_{R12y}=0 \quad (3.I54)$$

$$R^{(0)}_{32y}-F^{(0)}_{iH3x}\ell^{(0)}_{BCy}-F^{(0)}_{3x}\ell^{(0)}_{BCy}+F^{(0)}_{iH2y}\ell^{(0)}_{BCx}-F^{(0)}_{iH2x}\ell^{(0)}_{BSzy}+T^{(0)}_{iH2z}+T^{(0)}_{R12z}=0. \quad (3.I55)$$

Згідно з рівнянням (3.I5I) $R^{(0)}_{32x}=F^{(0)}_{iH3x}+F^{(0)}_{3x}$. Тоді сумісне розв"язання виразів (3.I39) і (3.I54) дозволяє знайти $R^{(0)}_{32z}$ і $T^{(0)}_{R12y}$.

Сумісним розв"язанням рівнянь (3.I40) і (3.I55) одержимо $R^{(0)}_{32y}$ і $T^{(0)}_{R12z}$. З виразу (3.I38) визначимо T_{R12x}. Реакції $R^{(0)}_{41y}$ і $R^{(0)}_{43z}$ знайдемо з рівнянь (3.I52), (3.I53). З рівноваги третьої ланки випливає, що $T_{43}=0$. Реакцію $\bar{R}_{12}$ у шарнірі B установимо з умови рівноваги другої ланки:

$$\bar{R}_{12}+\bar{F}_{iH2}+\bar{R}_{32}=0, \quad (3.I56)$$

або в проекціях на осі $X_0Y_0Z_0$:

$$R^{(0)}_{12x}+F^{(0)}_{iH2x}+R^{(0)}_{32x}=0, \quad (3.I57)$$

$$R^{(0)}_{12y}+F^{(0)}_{iH2y}+R^{(0)}_{32y}=0, \quad (3.I58)$$

$$R^{(0)}_{12z}+F^{(0)}_{iH2z}+R^{(0)}_{32z}=0. \quad (3.I59)$$

Розглянемо силовий розрахунок початкової ланки і для визначення реакції $\bar{R}_{41}$ у шарнірі O запишемо умову рівноваги першої ланки у формі векторного рівняння сил:

$$\bar{R}_{21}+\bar{F}_{iH1}+\bar{R}_{41}=0, \quad (3.I60)$$

або

$$R^{(0)}_{21x}+F^{(0)}_{iH1x}+R^{(0)}_{41x}=0, \quad (3.I61)$$

$$R^{(0)}_{21y}+F^{(0)}_{iH1y}+R^{(0)}_{41y}=0, \quad (3.I62)$$

$$R^{(0)}_{21z}+R^{(0)}_{41z}=0, \quad (3.I63)$$

де $R^{(0)}_{21x}=-R^{(0)}_{12x}$, $R^{(0)}_{21y}=-R^{(0)}_{12y}$, $R^{(0)}_{21z}=-R^{(0)}_{12z}$.

Реактивний момент T_{R41} знайдемо з рівняння моментів відносно точки 0 всіх сил, що діють на першу ланку:

$$\bar{\ell}_{08} \times \bar{R}_{21} + \bar{\ell}_{0S1} \times \bar{F}_{in1} + \bar{T}_{R21} + \bar{T}_{R41} = 0. \qquad (3.I64)$$

Або в проекціях на осі $X_0 Y_0 Z_0$, враховуючи, що $F_{in\,1z} = 0$, одержимо:

$$R_{21z}^{(0)} \ell_{08y}^{(0)} - R_{21y}^{(0)} \ell_{08z}^{(0)} - F_{in\,1y}^{(0)} \ell_{0S1z}^{(0)} + T_{R21x}^{(0)} + T_{R41x}^{(0)} = 0; \qquad (3.I65)$$

$$R_{21x}^{(0)} \ell_{08z}^{(0)} - R_{21z}^{(0)} \ell_{08x}^{(0)} + F_{in\,1x}^{(0)} \ell_{0S1z}^{(0)} + T_{R21y}^{(0)} + T_{R41y}^{(0)} = 0; \qquad (3.I66)$$

$$R_{21y}^{(0)} \ell_{08x}^{(0)} - R_{21x}^{(0)} \ell_{08y}^{(0)} + F_{in\,1y}^{(0)} \ell_{0S1x}^{(0)} - F_{in\,1}^{(0)} \ell_{0S1y}^{(0)} + T_{R21z}^{(0)} + T_{R41z}^{(0)} = 0, \qquad (3.I67)$$

де $\ell_{08x} = \ell_{AB} \cos\varphi_{10}$, $\ell_{08y} = \ell_{AB} \sin\varphi_{10}$, $\ell_{08z} = \ell_{0A}$;

$T_{R41z}^{(0)} = T_{3p}$ – зрівноважувальний момент механізму.

Контрольні запитання

1. Яка послідовність силового розрахунку механізму?
2. Як знайти реакцію у внутрішній кінематичній парі структурної групи другого класу?
3. У чому особливість силового розрахунку початкової ланки основного механізму?
4. Як визначити зрівноважувальну силу (зрівноважувальний момент), не розкладаючи її (його) на структурні компоненти?

Розв'язати приклади:

Приклад 1. Знайдіть методом Жуковського зрівноважувальний момент T_{3p} механізму (рис. 3.I0) у заданому положенні. Дано: $F_2 = 500$ Н, $F_3 = 1000$ Н, $\ell_{0A} = 0{,}1$ м, $\ell_{AB} = 0{,}4$ м.

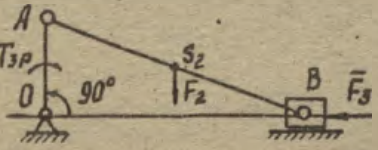


Рис. 3.I0

Відповідь: $T_{3p} = 100$ Нм.

Приклад 2. Визначіть реакцію у шарнірі $0 - R_{41}$ механізму (рис. 3.II) на дію моменту $T_3 = 300$ Нм і зрівноважувальний момент.

Дано: $l_{OA} = 0{,}1$ м, $l_{AB} = 0{,}2$ м

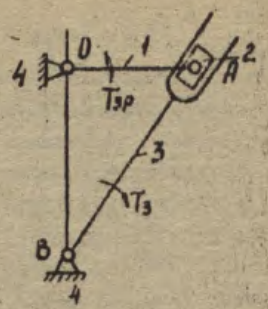


Рис. 3.II

Відповідь: $R_{41} = 1500$ Н,
$T_{зр} = 75$ Нм.

Приклад 3. Визначіть силу інерції об"єкта маніпулювання робота у проекціях на осі нерухомої системи координат $X_0 Y_0 Z_0$, якщо відомі маси об'єкта $m_{об}$, зосереджена у точці F, розміри ланок l_{OB} і l_{BF}, функції $\varphi_{10}(t)$ і $\varphi_{21}(t)$ (рис.3.I2).

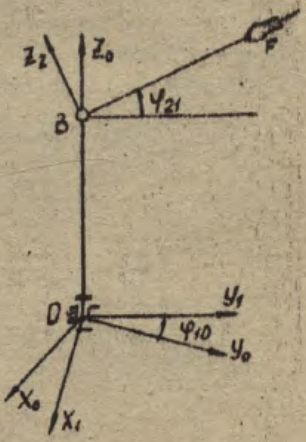


Рис. 3.I2

Відповідь:

$$F^{(u)}_{інобx} = -m_{об} l_{BF} [\ddot{\varphi}_{21} \sin\varphi_{21} \sin\varphi_{10} +$$
$$+\dot{\varphi}^2_{21} \cos\varphi_{21} \sin\varphi_{10} - \ddot{\varphi}_{10} \cos\varphi_{21} \cos\varphi_{10} +$$
$$+\dot{\varphi}^2_{10} \cos\varphi_{21} \sin\varphi_{10} + 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{21} \sin\varphi_{21} \cos\varphi_{10}],$$
$$F^{(u)}_{інобy} = -m_{об} l_{BF} [-\ddot{\varphi}_{21} \sin\varphi_{21} \cos\varphi_{10} -$$
$$-\dot{\varphi}^2_{21} \cos\varphi_{21} \cos\varphi_{10} - \ddot{\varphi}_{10} \cos\varphi_{21} \sin\varphi_{10} -$$
$$-\dot{\varphi}^2_{10} \cos\varphi_{21} \cos\varphi_{10} + 2\dot{\varphi}_{10}\dot{\varphi}_{21} \sin\varphi_{21} \sin\varphi_{10}],$$
$$F_{інобz} = -m_{об} l_{BF} [\ddot{\varphi}_{21} \cos\varphi_{21} + \dot{\varphi}^2_{21} \sin\varphi_{21}].$$

Література

Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1987.

Кореняко А.С. Теория механизмов и машин. К., 1976.

Теория механизмов / Под ред. В.А. Гавриленко. М., 1973.

3.2. Тертя в кінематичних парах механізмів

Тертям називають опір відносному переміщенню ланок, що утворюють кінематичну пару. Залежно від характеру відносного руху ланок розрізняють тертя ковзання і тертя кочення.

Стан поверхонь елементів кінематичних пар зумовлює такі види тертя: сухе тертя, що виникає за повної відсутності на контактуючих поверхнях мастила або будь-яких сторонніх речовин; граничне тертя, яке має місце тоді, коли поверхні розділені шаром мастила завтовшки не більш ніж 0,I мкм; рідинне тертя, при якому поверхні повністю розділені шаром мастила; напівсухе - тертя змішаного типу, водночас сухе і граничне; напіврідинне - водночас рідинне і граничне.

Сухе, напівсухе (напіврідинне) тертя, з одного боку, і рідинне - з іншого - зовсім різні. Тому різні й методи врахування сил тертя у механізмах.

3.2.I. Тертя ковзання у нижчих кінематичних парах

3.2.I.I. Основні закони тертя ковзання

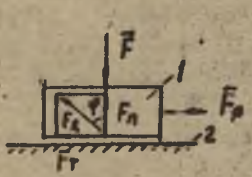


Рис. 3.I3

Якщо ланку I (рис. 3.I3) притиснути до ланки 2 силою F, нормальною до поверхонь контакту ланок, то рушійній силі F_P завжди буде протидіяти сила тертя F_T. Як свідчить досвід, поки сила F_P не досягне визначеної величини, рух ланки I буде відсутнім. Найбільша величина сили тертя, що досягається у момент руху з місця, називається <u>силою тертя опоком</u> F_{T0}. При русі сила тертя F_T менша за F_{T0}.

В інженерних розрахунках при визначенні сили тертя використовують співвідношення

$$F_T = f F_n, \qquad (3.I68)$$

де f - коефіцієнт тертя ковзання; F_n - величина нормальної реакції на поверхні контактуючих ланок. Кут φ між лініями дії вектора $\bar{F}_n$ і повної реакції $\bar{F}_R = \bar{F}_n + \bar{F}_T$ (див. рис. 3.8 називається <u>кутом тертя</u> і знаходиться з виразу

$$tg\varphi = \frac{F_T}{F_n}. \qquad (3.169)$$

Коефіцієнт тертя, що визначається як відношення сили тертя до нормальної реакції, залежить від матеріалу стичних ланок якості їх поверхонь. Коефіцієнт тертя спокою f_0 завжди більший, ніж коефіцієнт тертя при русі f.

3.2.I.2. Тертя у клинчастій поступальній кінематичній парі (у клинчастому жолобі)

З умови рівноваги сил, дійсних на повзун, що рівномірно рухається (рис. 3.I4), маємо:

$$F_p = 2F_T; \qquad (3.170)$$

$$F = 2F_n \sin\gamma \qquad (3.171)$$

Поділивши рівняння (3.I70) на (3.I7I), одержимо

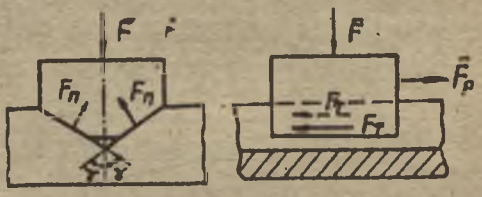


Рис. 3.I4

$$\frac{F_p}{F} = \frac{2F_T}{2F_n \sin\gamma} = \frac{f}{\sin\gamma}, \qquad (3.172)$$

звідки

$$F_p = F\frac{f}{\sin\gamma}$$

Рух повзуна у клинчастому жолобі можна звести до руху повзуна у плоскій напрямній і записати рівняння (3.I72) у формі (3.I68):

$$F_p = f'F, \qquad (3.173)$$

де $f' = \frac{f}{\sin\gamma}$ - зведений коефіцієнт тертя.

Зведений коефіцієнт тертя $f' > f$, тому що $\sin\gamma < 1$. Це використовують, коли потрібно збільшити сили тертя (клинові пасові передачі).

3.2.1.3. Тертя в циліндричній поступальній кінематичній парі.

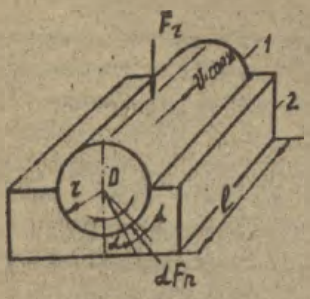


Рис. 3.15

Циліндричний повзун (рис. 3.15) навантажений радіальною силою F_z і рухається з постійною швидкістю.

Визначимо сумарну силу тертя F_T, що виникає на поверхні контакту повзуна 1 і стояка 2. Проведемо з точки O промінь під кутом α до вертикальної осі торцевої поверхні повзуна. Дамо куту α приріст $d\alpha$. Тоді елементарна опорна поверхня ланки 1 $dS = r\,d\alpha\,l$.

Елементарна реакція від поверхні dS дорівнює

$$dF_n = p(\alpha)dS = p(\alpha)\,r\,l\,d\alpha, \qquad (3.174)$$

де $p(\alpha)$ - тиск на поверхні контакту ланок.

Визначимо елементарну силу тертя:

$$dF_T = f\,p(\alpha)\,r\,l\,d\alpha, \qquad (3.175)$$

де f - коефіцієнт тертя матеріалів, з яких виготовлено ланки. Тоді вирази для радіальної сили F_z і сили тертя F_T, якщо $\alpha_{max} = \pi/2$, мають вигляд:

$$F_z = rl\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha; \qquad (3.176)$$

$$F_T = rlf\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\,d\alpha. \qquad (3.177)$$

Поділивши рівняння (3.177) на (3.176), одержимо

$$\frac{F_T}{F_z} = f\,\frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\,d\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha}, \qquad (3.178)$$

звідки

$$F_T = \frac{F_z f \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\,d\alpha}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha} \qquad (3.179)$$

Якщо кінематична пара неприпрацьована, то приймають рівномірний розподіл тиску по поверхні контакту $p(\alpha) = p = const$.

Після підстановки $p = const$ у рівняння (3.179) і виконання відповідних дій маємо

$$F_T = \frac{\pi}{2} F_z f = f' F_z, \qquad (3.180)$$

де $f' = \frac{\pi}{2} f$ - зведений коефіцієнт тертя.

Якщо кінематична пара припрацьована, то розподіл тиску по поверхні контакту приймають за законом косинуса: $p(\alpha) = p_0 \cos\alpha$. У цьому випадку

$$F_T = \frac{4}{\pi} F_z f = f' F_z, \qquad (3.181)$$

а $f' = \frac{4}{\pi} f$.

3.2.1.4. Тертя у радіальному підшипнику ковзання

Шип 1 вала (рис.3.16), навантажений радіальною силою $\bar{F}_z$, обертається з постійною кутовою швидкістю відносно підшипника 2. Момент тертя T_T у підшипнику знайдемо з урахуванням того, що сумарна сила тертя визначається так само, як і в поступальній циліндричній парі. Тоді

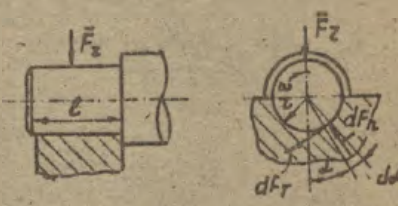


Рис. 3.16

$$T_T = f' F_z \cdot z. \qquad (3.182)$$

Для нового підшипника $f' = \frac{\pi}{2} f$, для припрацьованого – $f' = \frac{4}{\pi} f$.

3.2.1.5. Тертя в упорному підшипнику ковзання (тертя у п"яті)

Рис. 3.I7

Вал I (рис. 3.I7), навантажений осьовою силою F_a , звершує рівномірний обертальний рух. Розглянемо тертя в опорній частині вала – кільцевій п"яті. Відокремимо на її поверхні елементарну кільцеву площину dS :

$$dS = 2\pi\rho d\rho. \qquad (3.I83)$$

Тоді елементарна нормальна реакція від цієї площини дорівнює

$$dF_n = p(\rho) 2\pi\rho d\rho, \qquad (3.I84)$$

а елементарна сила тертя dF_T і елементарний момент тертя dT_T такі:

$$dF_T = f p(\rho) 2\pi\rho d\rho; \qquad (3.I85)$$

$$dT_T = f p(\rho) 2\pi\rho^2 d\rho, \qquad (3.I86)$$

звідки

$$T_T = 2\pi f \int_z^R p(\rho)\rho^2 d\rho, \qquad (3.I87)$$

де $p(\rho)$ – тиск на поверхні ланок.

У новій п"яті

$$p(\rho) = p = \frac{F_a}{\pi(R^2 - z^2)}, \qquad (3.I88)$$

і тому

$$T_T = \frac{2}{3} F_a f \frac{R^3 - z^3}{R^2 - z^2}. \qquad (3.I89)$$

У припрацьованій п"яті $p(\rho) = \frac{C}{\rho}$ (див. рис. 3.I7) коефіцієнт пропорційності C визначається з умови

$$F_a = \int dF_n = \int_z^R \frac{c}{\rho}\rho d\rho = 2\pi c(R-z). \qquad (3.190)$$

звідки

$$C = \frac{F_a}{2\pi(R-z)}, \quad P = \frac{F_a}{2\pi(R-z)\rho}. \qquad (3.191)$$

Підставивши вираз величини ρ у (3.187) і виконавши відповідні дії, одержимо

$$T_T = F_a f \frac{R+z}{2}. \qquad (3.192)$$

3.2.I.6. Тертя у гвинтовій кінематичній парі

Розглянемо гвинтову кінематичну пару з прямокутною нарізкою (рис.3.18), навантажену осьовою силою F і рушійним моментом T_p. Припустимо, що гвинт обертається відносно гайки з постійною швидкістю, тиск на поверхні витків розподіляється рівномірно, а коефіцієнт тертя f – величина стала.

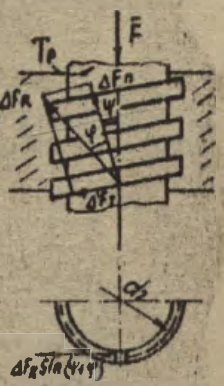


Рис. 3.18

Виділимо на опорній поверхні витка елементарну площину. Вектор сумарної реакції

$$\Delta\bar{F}_R = \Delta\bar{F}_n + \Delta\bar{F}_T \qquad (3.193)$$

від елементарної площини можна вважати прикладеним на відстані середнього радіуса нарізки $z_z = d_2/2$, де ΔF_n і ΔF_T – елементарні нормальна реакція і сила тертя.

Розглянемо рівновагу гвинта.

Спроектуємо сили на вісь гвинта і візьмемо суму моментів відносно осі гвинта:

$$F = \sum \Delta F_R \cos(\psi+\varphi); \qquad (3.194)$$

$$T_p = \sum \frac{d_z}{2} \Delta F_R \sin(\Psi + \varphi), \qquad (3.195)$$

де Ψ – кут підйому середньої гвинтової лінії, $\Psi = \operatorname{arctg} \frac{p}{\pi d_z}$;

φ – кут тертя, $\varphi = \operatorname{arctg} f$; p – крок нарізки.

За поперечних умов $(\Psi + \varphi) = \text{const}$, і тому

$$F = \cos(\Psi + \varphi) \sum \Delta F_R, \qquad (3.196)$$

$$T_p = \frac{d_z}{2} \sin(\Psi + \varphi) \sum \Delta F_R. \qquad (3.197)$$

Поділивши (3.197) на (3.196) і виконавши перетворення, одержимо вираз для рушійного моменту і рівного йому моменту опору в гвинтовій парі:

$$T_p = F \frac{d_z}{2} \operatorname{tg}(\Psi + \varphi). \qquad (3.198)$$

Якщо кут підйому гвинтової лінії Ψ взяти досить великим, то під дією сили F, обертаючись, гвинт може почати опускатися відносно гайки.

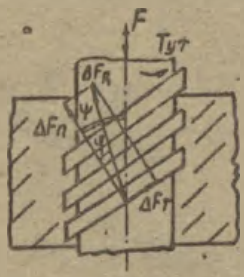


Рис. 3.19

Момент $T_{ут}$ (рис. 3.19), необхідний для утримання гвинта, дорівнює

$$T_{ут} = F \frac{d_z}{2} \operatorname{tg}(\Psi - \varphi). \qquad (3.199)$$

Самогальмування гвинта настає при $T_{ут} \leq 0$, тобто коли

$$\Psi \leq \varphi. \qquad (3.200)$$

Таким чином, для забезпечення самогальмування у гвинтовій парі кут підйому середньої гвинтової лінії не повинен перебільшувати кута тертя. Усі вантажні гвинти виконуються самогальмівними. Для гвинта і гайки, що мають трикутну нарізку (рис. 3.20) з кутом профілю 2α при вершині з наближенням), вважають, що рух гвинта аналогічний руху клинчастого повзуна відносно жолоба. В цьому випадку зведений коефіцієнт тертя у нарізці дорівнює

$$f' = \frac{f}{\sin(90-\alpha)} = \frac{f}{\cos\beta} = tg\,\varphi' \qquad (3.201)$$

Тоді

$$T_p = F\,\frac{d_z}{2}\,tg(\psi+\varphi'). \qquad (3.202)$$

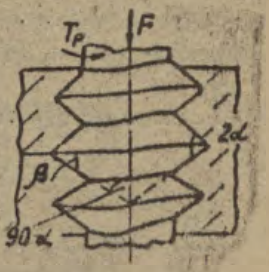


Рис. 3.20

Формулу (3.202) можна також використовувати для визначення моменту у гвинтовій парі з трапецоїдною ($\alpha = 15^\circ$) і упорною парізьками ($\alpha = 3^\circ$).

3.2.I.7. Тертя в кінематичній парі з гнучкою ланкою

Передача руху від гнучкої ланки до барабана (до шківа) або від шківа до гнучкої ланки можлива за наявності тертя. Визначимо силу тертя F_T, діючу між нерухомим барабаном радіусом r (рис.3.2I) і гнучкою ланкою в межах кута обхвату α, зробивши припущення, що гнучка ланка рухається відносно барабана з постійною швидкістю.

Нехай гнучка ланка ідеально гнучка, невагома, нерозтягнена. Позначимо F_2 силу, діючу в збіжному кінці гнучкої ланки, а F_1 – силу в набіжному кінці. Тоді $F_2 = F_1 + F_T$.

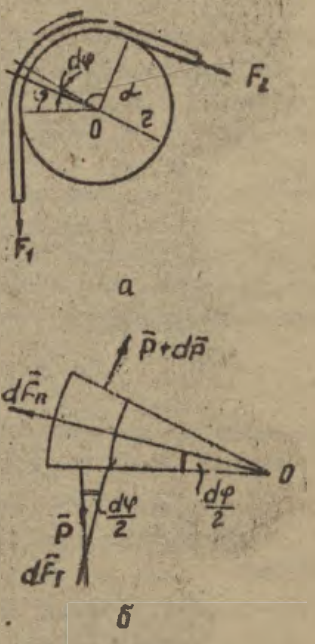


Рис. 3.2I

Виділимо елемент гнучкої ланки, відповідний до кута $d\varphi$, і розглянемо його рівновагу під дією сил (рис. 3.21,б).

Величини $\bar{p}$ і $\bar{p}+d\bar{p}$ - зусилля, діючі в нормальних перерізах виділеного елемента; $d\bar{F}_T$ і $d\bar{F}_n$ - сили тертя і нормального тиску, що діють на елемент гнучкої ланки від барабана.

З умови рівноваги елемента гнучкої ланки маємо

$$dF_n - p\sin\frac{d\varphi}{2} - (p+dp)\sin\frac{d\varphi}{2} = 0, \qquad (3.203)$$

$$dF_T + p\cos\frac{d\varphi}{2} - (p+dp)\cos\frac{d\varphi}{2} = 0. \qquad (3.204)$$

Приймаючи $\cos\frac{d\varphi}{2} = 1$, $\sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$, $dF_T = f\,dF_n$ і нехтуючи членами другого порядку малості, дістанемо

$$dF_n - p\,d\varphi = 0, \qquad (3.205)$$

$$f\,dF_n - dp = 0, \qquad (3.206)$$

звідки

$$\frac{dp}{p} = f\,d\varphi. \qquad (3.207)$$

Інтегруючи ліву і праву частини останнього рівняння в межах зміни кута обхвату, одержимо

$$\ln\frac{F_2}{F_1} = f\alpha, \qquad (3.208)$$

або

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha}. \qquad (3.209)$$

Залежність (3.209) має назву формули Ейлера.

Тоді величина сили тертя між гнучкою ланкою і барабаном дорівнює

$$F_T = F_2 - F_1 = F_1(e^{f\alpha} - 1), \qquad (3.210)$$

а величина моменту, який можна передати від гнучкої ланки до

барабана, або у зворотному напрямку,

$$T_T \leq F_1 z(e^{f\alpha} - 1). \qquad (3.2II)$$

3.2.2. Тертя кочення і ковзання у вищих кінематичних парах

3.2.2.I. Умови тертя кочення і ковзання

Якщо каток I нерухомо лежить на площині II (рис. 3.22,а), то завдяки дії сили $\bar{F}$ виникає місцева деформація стичних ланок на площадці AB. Крива розподілу напруження на площадці AB (відповідно теорії Герца – Беляєва) описується еліптичним законом і симетрична відносно вертикального діаметра котка. Тому нормальна реакція $\bar{F}_n$, діюча на коток від опорної площини, дорівнює силі і має протилежний напрямок, а лінії дії $\bar{F}_n$ і $\bar{F}$ збігаються.

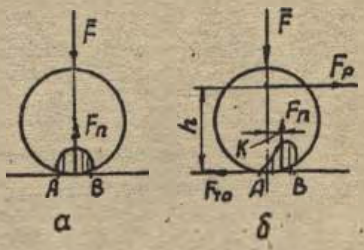


Рис. 3.22

Якщо до розглянутого котка прикласти (рис. 3.22,б) горизонтальну рушійну силу F_p на деякому плечі h і коток почне котитися, то симетрія в розподілі напруження на площині контакту AB порушується. Попереду котка деформації напруження будуть збільшуватись, а позаду – зменшуватися. Тому нормальна реакція зміщується вперед на величину K. Таким чином, виникає момент опору коченню

$$T_{TK} = F_n \cdot K. \qquad (3.2I2)$$

Параметр K називається коефіцієнтом тертя кочення, має розмірність довжини (мм) і залежить від матеріалу і стану стичних поверхонь (для сталі $K = 0{,}0CI...0{,}005$).

Кочення буде рівномірним, якщо

$$F_p h = K F_n. \qquad (3.2I3)$$

У формулі (3.2I3) при зменшенні плеча h збільшується сила F_p. При певному значенні h величина сили F_p може

стати більшою за $F_{To} = f_0 F_n$ – межове значення сили тертя ковзання – і спричинити ковзання котка.

Звідси умова кочення

$$F_P < f_0 F_n \quad , \text{ або } \frac{KF_n}{h} < f_0 F_n \text{ і } h > \frac{K}{f_0}. \qquad (3.214)$$

Умова ковзання $F_P > f_0 F_n$,

або $h < \frac{K}{f_0}$. (3.215)

При коченні з ковзанням $F_P = f_0 F_n$, тобто

$$h = \frac{K}{f_0}. \qquad (3.216)$$

Кочення з ковзанням виникає, наприклад, при відносному русі зубців зубчастих коліс, кулачка і штовхача і т.д.

3.2.2.2. Тертя в поступальній кінематичній парі кочення

Поступальна кінематична пара кочення складається з ланок 1 і 2, між якими розташовано шарики 3 (рис. 3.23,а). З умови рівноваги одного шарика (рис.3.23,б)

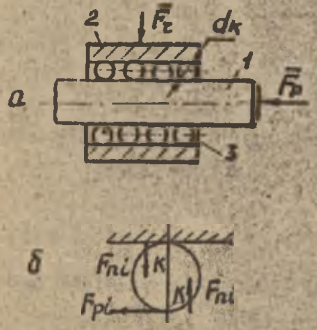


Рис. 3.23

$$F_{pi} d_K = 2K F_{ni}, \qquad (3.217)$$

де F_{pi} і F_{ni} – відповідно рушійна сила і нормальна реакція, що діють на один шарик, 2 – коефіцієнт кочення; d_K – діаметр шарика.

Умова рівномірного переміщення ланки 1 відносно нерухомої ланки 2 має вигляд

$$F_{pd_K} = 2K \sum_{i=1}^{n} F_{ni} = 2K F_2, \qquad (3.218)$$

де F_2 – радіальне навантаження, звідки, уподібнюючи цю пару умовній кінематичній парі з тертям ковзання F_T, одержимо

$$F_P = F_T = 2K F_2 / d_K = f' F_2. \qquad (3.219)$$

де $f' = \frac{2K}{d_к}$ - (3.220)

- зведений коефіцієнт тертя

3.2.2.3. Тертя в радіальному підшипнику кочення

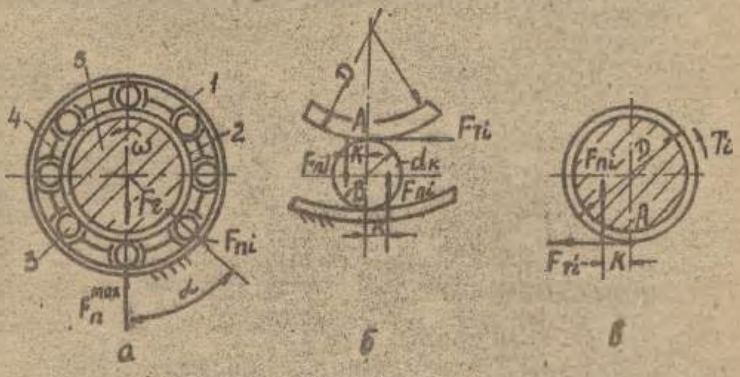


Рис. 3.24

На рис. 3.24,а зображено схему шарикового підшипника. Підшипник складається із зовнішнього кільця 1, з"єднаного з корпусом підшипника, внутрішнього кільця 2, з"єднаного з валом 5, шариків 3 і сепаратора 4, який утримує шарики на однаковій відстані один від одного. Вал 5, навантажений радіальною силою F_r, обертається із постійною швидкістю.

Навантаження F_r розподіляється по окремих шариках нерівномірно. Якщо прийняти гіпотезу про косинусоїдальний закон розподілу, то $F_{ni} = F_n^{max} \cos\alpha_i$, де F_n^{max} і F_{ni} - нормальні реакції на максимально навантажений шарик і на i-й шарик.

Арифметична сума всіх реакцій $\sum_{i=1}^{z} F_{ni} \approx 1{,}3\, F_r$.

Від внутрішнього кільця до тіла кочення прикладено силу F_{ri} з рівноваги шарика:

$$F_{ri}\, d_к = 2 F_{ni} K, \qquad (3.221)$$

де K - коефіцієнт тертя кочення; $d_к$ - діаметр шарика.

Звідси

$$F_{Ti} = \frac{2F_{ni}K}{d_K}. \qquad (3.222)$$

Для переборення моментів сил F_{Ti} і F_{ni} (рис. 3.24,в) необхідно до внутрішнього кільця з валом прикласти момент T_i.

Тоді

$$T_i = \frac{F_{Ti}D}{2} + F_{ni}K, \qquad (3.223)$$

де D – зовнішній діаметр внутрішнього кільця.

Підставивши (3.222) в (3.223), одержимо

$$T_i = F_{ni}K\left(1 + \frac{D}{d_K}\right). \qquad (3.224)$$

Повний момент тертя у підшипнику дорівнює

$$T_T = \sum_{i=1}^{n} T_i = K\left(1 + \frac{D}{d_K}\right)\sum_{i=1}^{n} F_{ni}, \qquad (3.225)$$

або

$$T_T = 1{,}3F_z K\left(1 + \frac{D}{d_K}\right). \qquad (3.226)$$

Помножимо і розділимо праву частину формули (3.226) на $r_в$-радіус вала:

$$T_T = 1{,}3F_z K\left(1 + \frac{D}{d_K}\right)\frac{r_в}{r_в}.$$

Позначимо $1{,}3\frac{K}{r_в}\left(1 + \frac{D}{d_K}\right) = f'$ зведений коефіцієнт тертя до поверхні вала. Тоді $T_T = F_z f' r_в$. (3.227)

3.2.2.4. Тертя в упорному підшипнику кочення

Формула (3.224) для одного тіла кочення, одержана у підрозд. 3.2.2.3. справедлива й для упорного підшипника. Але в даному випадку розподіл реакцій F_{ni} будемо вважати рівномірним, тобто $\sum_{i=1}^{n} F_{ni} = F_a$, де F_a – осьова сила, що наванта-

кує підшипник (рис. 3.25). Тоді

$$T_T = F_a K \left(1 + \frac{D}{d_к}\right). \qquad (3.228)$$

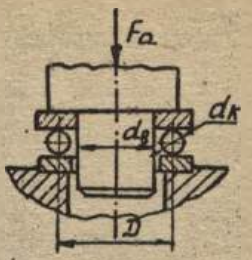


Рис. 3.25

Якщо використовувати зведений коефіцієнт тертя, то потрібно помножити і розділити праву частину формули (3.228) на $r_в$-радіус шипа вала:

$$T_T = F_a K \left(1 + \frac{D}{d_к}\right) \frac{r_в}{r_в}.$$

Тоді, позначивши $\frac{K}{r_в}\left(1 + \frac{D}{d_к}\right) = f'$ зведений коефіцієнт тертя, одержимо

$$T_T = F_a f' r_в. \qquad (3.229)$$

3.2.2.5. Тертя у гвинтовій парі кочення

Визначимо зведений коефіцієнт тертя у шариковій нарізці. Контакт шарика з поверхнями гвинта та гайки відбувається у точках A і B (рис. 3.26,а).

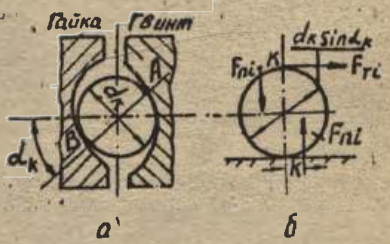


Рис. 3.26

Переходячи до випадку кочення шарика по горизонтальній площині (рис. 3.26,б), візьмемо її діаметр таким, що дорівнює $d_к \sin\alpha_к$, де $d_к$ - справжній діаметр шарика; $\alpha_к$ - кут контакту шарика з поверхнями нарізки.

Тоді відповідно (3.220)

$$f' = \frac{2K}{d_к \sin\alpha_к}.$$

Припустивши, що гвинт відносно гайки обертається з постійною швидкістю, визначимо момент опору в гвинтовій парі ко-

чення за формулою (3.202):

$$T_{г.п} = F\frac{d_г}{2}tg(\psi+\varphi'), \qquad (3.230)$$

де

$$\varphi' = arctg\frac{2к}{d_к \sin\alpha_к}. \qquad (3.231)$$

Контрольні запитання

I. Що розуміють під терміном "зведений коефіцієнт тертя" у різних кінематичних парах механізмів?

2. Які допущення приймаються при визначенні сил і моментів тертя у парах ковзання та кочення?

3. Які шляхи зменшення енергетичних втрат на тертя у механізмах?

4. Які умови самогальмування у гвинтовій парі ковзання?

5. Які умови чистого ковзання та чистого кочення?

Література

Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1987.

Заблонский К.И., Бельконев И.М., Щекин Б.М. Теория механизмов и машин. К., 1989.

Розв"язати приклади:

Приклад I. Визначити втрати потужності на тертя N_T у радіальному підшипнику кочення сателіта (рис. 3.27), які спричиняються силами в зачепленнях: T_1 - момент вала першого колеса z_1; ω_1 - кутова швидкість вала першого колеса z_1; m - модуль зачеплення нульових коліс $z_1 - z_2$ і $z_3 - z_4$; z_1, z_2, z_3, z_4 - кількість зубців коліс; $z_{в_2}$ - радіус вала сателіта; f' - зведений коефіцієнт тертя у підшипниках сателіта. Роз-

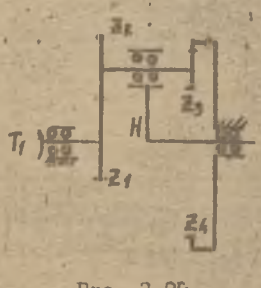


Рис. 3.27

в"язок виконати у загальному вигляді.

Відповідь:

$$N_T = -\frac{2T_1 f' z_{B_2}}{m}\,\frac{z_4(z_2+z_5)\omega_1}{z_3(z_1z_5+z_2z_4)}.$$

Приклад 2. До повзуна кривошипно-повзунного механізму, вага якого G, прикладено силу опору F_{on} (рис. 3.28). Коефіцієнт тертя повзуна у напрямних – f. Визначити момент T вала кривошипа, необхідний для надання повзуну прискорення W_B, якщо кут $OAB = 90^0$, а кут ABO дорівнює α. Розв"язок виконати у загальному вигляді.

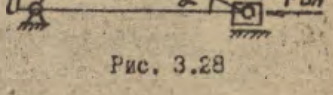


Рис. 3.28

Відповідь:

$$T = \frac{(Gf + W_B\frac{G}{g} + F_{on})\,\ell_{OA}}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

3.3. Енергетичні характеристики механізмів

3.3.1. Режими руху механізмів

Прибуток і видаток енергії механізму встановлюється загальним рівнянням руху у формі кінетичної енергії:

$$\sum_{i=1}^{n'} E_{Ki} - \sum_{i=1}^{n'} E_{ni} = A_P - |A_{b_0}| - |A_{w_0}| \pm A_{CT}, \qquad (3.232)$$

де E_{Ki} і E_{ni} – кінетичні енергії i-ї ланки механізму в кінцевий та початковий моменти досліджуваного проміжку часу; n' – кількість рухомих ланок механізму; A_P, A_{b_0}, A_{w_0}, A_{CT} – відповідно роботи сил: рушійних, виробничого опору, шкідливого опору, тяжіння, за розглядуваний проміжок часу.

Розрізняють три режими руху механізмів: розгін, усталений рух і вибіг. Розглянемо ці режими відповідно до механізму з одним ступенем рухомості. При розгоні швидкість ведучої ланки збільшується від нульового значення до нормальної виробничої швидкості. При цьому $\sum_{i=1}^{n'} E_{ni} = 0$ і рівняння руху сил розгону

має вигляд

$$A_p = |A_{g.o.}| + |A_{ш.o.}| \pm |A_{c.т.}| + \sum_{i=1}^{n'} E_{ki}. \qquad (3.233)$$

За час усталеного руху швидкість ведучої ланки більшості механізмів коливається навколо середнього значення (виробничої швидкості). Проміж часу, після якого ведуча ланка механізму займає початкове положення, а швидкість і прискорення набувають початкових значень, називається періодом усталеного руху ($T_{c.p}$). За період постійного руху

$$\sum_{i=1}^{n'} E_{ki} - \sum_{i=1}^{n'} E_{ni} = 0, \quad A_{c.т} = 0.$$

Тоді

$$A_p = |A_{go}| + |A_{шo}|. \qquad (3.234)$$

При вибігу швидкість ведучої ланки зменшується до нульового значення при зупинці механізму, і тому

$$\sum_{i=1}^{n'} E_{ki} = 0 \text{ і } \sum_{i=1}^{n'} E_{ni} = |A_{g.o}| + |A_{ш.o}| \mp |A_{ст}|. \qquad (3.235)$$

Для зменшення часу вибігу застосовують гальма.

3.3.2. Механічний коефіцієнт корисної дії

Механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД) називається відношення абсолютної величини роботи сил виробничого опору до роботи рушійних сил за час, що дорівнює або кратний періоду усталеного руху:

$$\eta = \frac{|A_{go}|}{A_p} = \frac{A_p - |A_{шo}|}{A_p} = 1 - \frac{|A_{шo}|}{A_p} = 1 - \varphi. \qquad (3.236)$$

Механічний коефіцієнт корисної дії можна знайти також за формулою (3.237):

$$\eta = \frac{|N_{go}|}{N_p} = 1 - \frac{|N_{шo}|}{N_p} = 1 - \varphi, \qquad (3.237)$$

де N_p, N_{go}, $N_{шo}$ - середні потужності сил: рушійних, виробничого і шкідливого опору; φ - коефіцієнт втрат, який застосовують, коли важко знайти енергію A_{g_o} або середню по-

тужність N_{60}. Величина ККД дорівнює

$$1 > \eta > 0. \qquad (3.238)$$

При $\eta < 0$ рух неможливий, відбувається самогальмування.

3.3.2.I. ККД механізмів, з"єднаних послідовно

При послідовному з"єднанні механізмів (рис. 3.29) корисна робота кожного попереднього механізму є роботою рушійних сил для кожного наступного механізму.

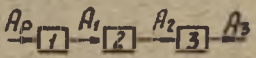


Рис. 3.29

Тоді $\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}$, $\eta_2 = \frac{A_2}{A_1}$, $\eta_3 = \frac{A_3}{A_2}$. Загальний ККД $\eta_{13} = \frac{A_3}{A_p}$, тобто

$$\eta_{13} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3. \qquad (3.239)$$

Загальний ККД механізмів, з"єднаних послідовно, дорівнює добутку ККД окремих складових механізмів. Чим більше механізмів з"єднано послідовно, тим нижче загальний ККД, причому він завжди менший від мінімального ККД окремого механізму цього ланцюга.

3.4. Дослідження руху механізму під дією позиційних сил

Розглянемо механізм зі ступенем рухомості $W = I$, для якого діючі сили є функціями положення механізму.

Визначенню підлягають закони руху ланок механізму або окремих точок ланок, час спрацьовування механізму. Для спрощення розрахунків замість дослідження руху всього механізму розглядається рух його динамічної моделі.

3.4.I. Формування динамічної моделі

Жорсткою називається динамічна модель, при формуванні якої ланки механізму розглядаються як абсолютно жорсткі. Жорстка динамічна модель - це ланка зведення (початкова ланка) (рис. 3.30,а), до якої прикладено зведений момент $T_{3\ell}$, а

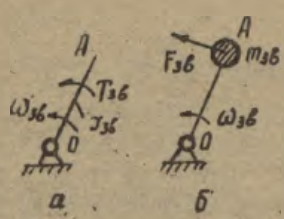


Рис. 3.30

момент інерції цієї ланки дорівнює зведеному моменту інерції $J_{зв}$. Якщо за динамічну модель приймається точка зведення (точка початкової ланки) (рис. 3.30,б), то до неї прикладається зведена сила $F_{зв}$ і в ній зосереджується зведена маса $m_{зв}$.

3.4.I.I. Зведення сил

Зведеним моментом сил називається умовний момент, прикладений до ланки зведення, потужність якого дорівнює сумі потужностей усіх сил і моментів сил, що діють на ланки механізму.

Відповідно

$$T_{зв}\omega_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[F_i v_i \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{v}_i) + T_i \omega_i \cos(\bar{T}_i \wedge \bar{\omega}_i)\right], \quad (3.240)$$

звідки

$$T_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[F_i \frac{v_i}{\omega_{зв}} \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{v}_i) + T_i \frac{\omega_i}{\omega_{зв}} \cos(\bar{T}_i \wedge \omega_i)\right], \quad (3.241)$$

де v_i - швидкість точки прикладання сили F_i; $\omega_{зв}$ - швидкість ланки, до якої прикладено момент T_i; n - кількість зведених сил і моментів сил.

Зведена сила

$$F_{зв} = T'_{зв}/\ell,$$

де ℓ - відстань від точки зведення до осі обертання ланки зведення (рис. 3.30,б).

Тоді

$$F_{зв} = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{v_i}{v_{зв}} \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{v}_i) + T_i \frac{\omega_i}{v_{зв}} \cos(\bar{T}_i \wedge \bar{\omega}_i), \quad (3.242)$$

де $v_{зв}$ - швидкість точки зведення.

З рівнянь (3.241), (3.242) видно, що зведений момент (зведена сила) залежить не від швидкості ланки зведення (точки зведення), а від відношення швидкостей, тобто від положення

механізму. Відношення швидкостей знаходять із побудованого в довільному масштабі плану швидкостей або аналітичним методом кінематичного дослідження.

Поряд із зовнішніми силами зводяться сили і моменти тертя в кінематичних парах механізму. Якщо до складу механізму входять p_5^n поступальних пар і $p_5^{об}$ обертальних пар п"ятого класу, то вираз зведеного моменту тертя має вигляд

$$T_{зв.т} = \sum_{i=1}^{p_5^n} F_{Ti} \frac{v_i}{\omega_{зв}} \cos(\bar{F}_{Ti} \hat{} \bar{v}_i^2) + \sum_{i=1}^{p_5^{об}} T_{Ti} \frac{\omega_i^2}{\omega_{зв}} \cos(\bar{T}_{Ti} \hat{} \bar{\omega}_i),$$

або величина зведеного моменту тертя дорівнює

$$T_{зв.т} = -\left[\sum_{i=1}^{p_5^n} R_i^n f \frac{v_i^2}{\omega_{зв}} + \sum_{i=1}^{p_5^{об}} R_i^{об} f' r_i \frac{\omega_i^2}{\omega_{зв}} \right], \qquad (3.243)$$

де R_i^n та $R_i^{об}$ - реакції в поступальній та обертальній кінематичних парах; f , f' - коефіцієнти тертя в поступальній та обертальній парах; r_i - радіус обертальної кінематичної пари; v_i^2 та ω_i^2 - відносні швидкості в поступальній та обертальній парах; $\omega_{зв}$ - швидкість ланки зведення.

3.4.I.2. Зведення мас

Зведеним моментом інерції називається умовний момент інерції відносно осі обертання ланки зведення, кінетична енергія якого дорівнює кінетичній енергії механізму. Нехай механізм складається з n_1' -ланок, що мають обертальний рух; n_2' - ланок, які звершують поступальний рух; n_3' -ланок, що здійснюють плоско-паралельний рух. Тоді відповідно до визначення зведеного моменту інерції

$$\frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n_1'} \frac{J_{oi}\omega_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n_2'} m_i \frac{v_{si}^2}{2} + \sum_{i=1}^{n_3'} \left(m_i \frac{v_{si}^2}{2} + J_{si} \frac{\omega_i^2}{2} \right),$$

звідки

$$J_{зв} = \sum_{i=1}^{n_1'} J_{oi} \frac{\omega_i^2}{\omega_{зв}^2} + \sum_{i=1}^{n_2'} m_i \frac{v_{si}^2}{\omega_{зв}^2} + \sum_{i=1}^{n_3'} \left(m_i \frac{v_{si}^2}{\omega_{зв}^2} + J_{si} \frac{\omega_i^2}{\omega_{зв}^2} \right), \qquad (3.244)$$

де J_{oi} та J_{si} - моменти інерції відносно осі обертання і осі, що проходить через центр мас ланки; m_i - маса i-ї лан-

ки; v_{si} – швидкість центра мас ланки; $\omega_{зв}$ – швидкість ланки зведення.

Зведена маса пов"язана із зведеним моментом інерції залежністю $J_{зв} = m_{зв} l^2$, де l – відстань від точки зведення до осі обертання ланки зведення.

З рівняння (3.244) видно, що зведений момент інерції (зведена маса) залежить не від величини швидкості ланки зведення (точки зведення), а від відношення квадратів швидкостей, тобто від положення механізму. Відношення швидкостей знаходять із побудованого в довільному масштабі плану швидкостей або аналітичним методом кінематичного дослідження.

3.4.2. Визначення законів руху ланок механізму

В результаті зведення сил і мас до ланки зведення механізму рівняння (3.232) має вигляд

$$\frac{J_{звк}\,\omega_{зв.к}^2}{2} - \frac{J_{звп}\,\omega_{звп}^2}{2} = \int_{\varphi_{звп}}^{\varphi_{звк}} T_{зв}\,d\varphi_{зв}, \qquad (3.245)$$

де $J_{звк}$ і $J_{звп}$ – зведені моменти інерції механізму в кінцевий і початковий моменти розглядуваного проміжку часу; $\varphi_{зв}$ – кут повороту ланки зведення; $T_{зв}$ – зведений момент сил механізму; $\omega_{звк}$ і $\omega_{звп}$ – швидкість ланки зведення в кінцевий і початковий моменти розглядуваного проміжку часу. Нехай рух механізму починається зі стану спокою, тобто $\omega_{звп} = 0$. Тоді з рівняння (3.245) швидкість ланки зведення у i-му положенні механізму можна визначити, якщо відомі зведений момент інерції $J_{зв\,i}$ в цьому положенні та робота зведеного моменту сил, яка виміряється енергією $F_i = \int_{\varphi_{звп}}^{\varphi_{зв\,i}} T_{зв}\,d\varphi_{зв}$.

Простіше цю задачу розв"язати графоаналітичним методом. Розглянемо її відповідно до механізму забираного масі літака (рис. 3.31). Використовуючи рівняння (3.241), (3.243) у вибраних положеннях механізму, визначають величину зведеного моменту сил, будують графік $T_{зв} = T_{зв}(\varphi_{oA})$ (рис. 3.32,а), а потім графічним інтегруванням функції $T_{зв} = T_{зв}(\varphi_{зв})$ – графік $E = E(\varphi_{oA})$ (рис. 3.32,а). За допомогою рівняння (3.244) у вибраних положеннях механізму визначають зведений момент інер-

ції і будують графік $J_{зв} = J_{зв}(\varphi_{OA})$ (рис. 3.32,б). За графіками $E = E(\varphi_{OA})$ і $J_{зв} = J_{зв}(\varphi_{OA})$, виключаючи загальне φ_{OA}, будують діаграму "енергія - зведений момент інерції" - $E = E(J_{зв})$ (рис. 3.32,в). Швидкість ланки зведення в і-му положенні механізму знаходять таким чином:

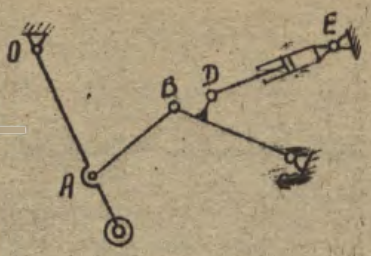


Рис. 3.31

$$\omega_{OA_i} = \sqrt{\frac{2E_i}{J_{зв_i}}} = \sqrt{\frac{2y_{Ei}K_E}{y_{Ji}K_J}} = C\sqrt{tg\varphi_i}, \qquad (3.246)$$

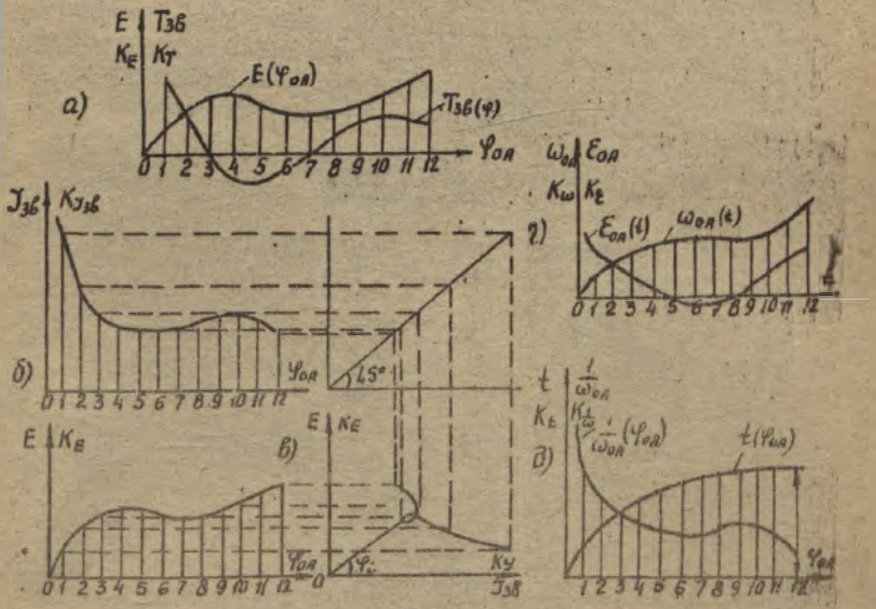


Рис. 3.32

де

$C = \sqrt{\frac{2K_E}{K_J}}$; $tg\varphi_i = \frac{y_{Ei}}{y_{Ji}}$; K_E і K_J – масштаби енергії та зведеного моменту інерції; y_{Ei} і y_{Ji} – ордината та абсциса на діаграмі $E = E(J_{зв})$. Використовуючи розрахунки (формула (3.246)), визначають функцію $\omega_{OA} = \omega_{OA}(\varphi_{OA})$.

Знаючи кутову швидкість ланки зведення в кожному положенні механізму, швидкості інших ланок (точок ланок) можна визначити методами кінематичного дослідження. Для знаходження часу руху механізму будують графік $t = t(\varphi_{OA})$, графічно інтегруючи функцію $\frac{1}{\omega_{OA}} = \frac{1}{\omega_{OA}}(\varphi_{OA})$ (рис. 3.32,д). Остання ордината графіка $t = t(\varphi_{OA}) - y_t$ у масштабі K_t с/мм відбиває час руху механізму від нульового до 12-го положення. Кутове прискорення ланки зведення обчислюють графічним диференціюванням функції $\omega_{OA} = \omega_{OA}(t)$. Прискорення інших ланок (точок ланок) визначають відомими методами кінематичного дослідження.

3.5. Дослідження руху механізму під дією сил, що залежать від швидкості

У цьому випадку використуємо рівняння руху в диференціальній формі. Для цього продиференціюємо рівняння (3.245):

$$d\left(\frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2} - \frac{J_{зв}\omega_{зв0}}{2}\right) = d\left(\int_{\varphi_{зв0}}^{\varphi_{зв}} T_{зв}\,d\varphi_{зв}\right), \qquad (3.247)$$

але

$$\frac{J_{зв0}\omega_{зв0}^2}{2} = const \quad і \quad d\left(\frac{J_{зв0}\omega_{зв0}^2}{2}\right) = 0,$$

і тоді

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2}\right) = T_{зв}. \qquad (3.248)$$

Визначимо похідну лівої частини рівняння (3.248):

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2}\right) = J_{зв}\omega\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}\cdot\frac{\omega^2}{2},$$

звідки

$$J_{зв}\frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}\cdot\frac{\omega^2}{2} = T_{зв}. \qquad (3.249)$$

У багатьох випадках $J_{зв} = \text{const}$, і тому

$$J_{зв}\frac{d\omega}{dt} = T_{зв}. \qquad (3.250)$$

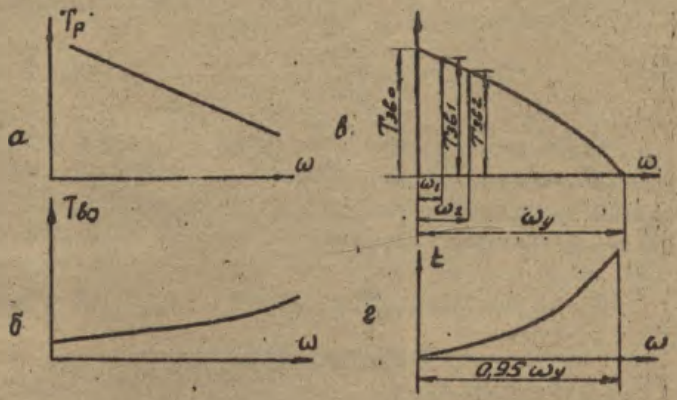


Рис. 3.33

Розглянемо, наприклад, розгін турбогенераторної установки, для якої відомі залежності $T_p = T_p(\omega)$ турбіни і $T_{в0} = T_{в0}(\omega)$ генератора (рис. 3.33,а,б). Зведений до вала турбіни момент інерції агрегата - $J_{зв}$.

Розв"язок рівняння (3.250) виконаємо чисельно. Для цього замінимо $d\omega$ на $\Delta\omega$, а dt на Δt. Тоді

$$\Delta t_i = J_{зв}\frac{1}{T_{зв_i}}\Delta\omega. \qquad (3.251)$$

Послідовність виконання така:

1. Визначаємо залежність $T_{зв} = T_{зв}(\omega)$ (рис. 3.33,в), де $T_{зв} = T_р - T_{в0}$. Швидкість, коли $T_{зв} = 0$, – це швидкість усталеного руху $\omega_у$.

2. Вибираємо крок інтегрування $\Delta\omega = \omega_у / n$ (n – число кроків – вибираємо залежно від точності, з якою необхідно одержати результат).

3. Описуємо приріст часу за початковий крок інтегрування з рівняння (3.25І) $\Delta t_0 = J_{зв} \frac{1}{T_{зв0}} \Delta\omega$. Приймаємо $t_1 = \Delta t_0$ і $\omega_1 = \Delta\omega$.

4. Обчислюємо приріст часу за наступний крок інтегрування:

$$\Delta t_1 = J_{зв} \frac{1}{T_{зв1}} \Delta\omega$$

5. Приймаємо $t_2 = t_1 + \Delta t_1$ і $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$. Визначаємо приріст часу за наступні кроки інтегрування. На рис.3.33,г зображено графік зміни часу розгону механізму від кутової швидкості ланки зведення. Оскільки час, коли $\omega = \omega_у$ буде нескінченним, то обчислення завершують, наприклад, при $\omega_{зв} = 0{,}95\omega_у$. Тоді t розгону дорівнює $\Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n$.

Контрольні запитання

1. Які вам відомі режими та рівняння руху механізмів?
2. Які є динамічні моделі механізмів? Як визначається масово-силова модель?
3. ККД механізмів та його підвищення. Як визначається ККД механізмів, з"єднаних послідовно?
4. Як визначаються закони руху механізмів, сили яких залежать від положення та швидкості?

Розв"язати приклади:

Приклад 1. Запишіть вираз зведеного до першої ланки моменту інерції планетарного механізму (рис. 3.34). Дано: J_1, J_2, J_H – моменти інерції ланок, m_2 – маса сателітів, z_1, z_2, z_3 – кількість зубців зубчастих коліс, m – модуль зачеплення коліс $z_1 - z_2$, $z_2 - z_3$. Розв"язок вико-

нати в загальному вигляді.

Відповідь:

$$J_{зб} = J_1 + J_2 \frac{\left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)^2}{\left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)^2} + m_2 \frac{m^2 (z_1 + z_2)^2}{4\left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)^2} + \frac{J_H}{\left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)^2}.$$

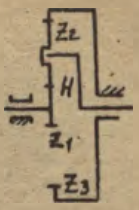


Рис. 3.34

Література

Теория механизмов и машин / Под ред. К.В. Фролова. М., 1977.

Механика промышленных роботов / Под ред. К.В. Фролова, Е.Н. Воробьева. М., 1983. Кн.1.

Заблонский К.Н., Белоконев Н.М., Щекин Б.М. Теория механизмов и машин. К., 1989.

Шебанов Ігор Георгійович

АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ АВІАДВИГУНІВ І ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Редактори: Є.О. Александрова,
Л.О. Кузьменко

Зв.план, 1997
Підписано до друку 04.II.97
Формат 60х84 I/I6. Папір.офс. № 2. Офс.друк.
Умовн.-друк.арк. 7,7. Облік.-вид.арк. 8,63. Т. I50 прим.
Замовлення 70. Ціна вільна

Харківський авіаційний інститут
3I0070, Харків-70, вул. Чкалова, I7
Ротапринт друкарні ХАІ
3I0070, Харків-70, вул. Чкалова, I7