

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Факультет ракетно-космічної техніки

Кафедра вищої математики та системного аналізу

Пояснювальна записка до дипломної роботи

магістра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему «Функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у неklasичній області»

XAI.405.463-м.124.1504016.200

Виконав: студент 6 курсу групи 463-м
спеціальності 124 «Системний аналіз»
освітньої програми «Системний аналіз
і управління»

Купіна Д.С.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник: Ніколаєв О.Г.

(прізвище та ініціали)

Рецензент: Колодяжний В.М.

(прізвище та ініціали)

Харків – 2020

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Факультет ракетно-космічної техніки

(повне найменування)

Кафедра вищої математики та системного аналізу

(повне найменування)

Рівень вищої освіти другий (магістрський)

Спеціальність 124 «Системний аналіз»

(код та найменування)

Освітня програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.Г. Ніколаєв _____

(підпис)

(ініціали та прізвище)

« ____ » _____ 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА ДИПЛОМНИЙ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Купіної Дар'ї Сергіївни

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема дипломної роботи «Функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області»

керівник дипломної роботи Ніколаєв О.Г. д. ф.-м. н. професор

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом Університету від «03» листопада 2020 року № 1819 -уч

2. Термін подання студентом дипломного проекту (роботи) _____

3. Вихідні дані до роботи _____

4. Зміст пояснювальної записки (перелік завдань, які потрібно розв'язати)

1) Аналіз інформації по заданій тематиці.

2) Системний аналіз об'єкта дослідження.

3) Функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.

4) Чисельне розв'язання задачі за допомогою програмного пакету Maple.

5) Розрахунок собівартості проекту.

5. Перелік графічного матеріалу

6. Консультанти розділів проекту (роботи)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Загальна частина	д. ф.-м. н., професор каф. 405 Ніколаєв О.Г.		
Економічна частина	ст. викладач каф.601 Зіброва О.В.		

Нормоконтроль _____ «___» _____ 20__ р.
 (підпис) (ініціали та прізвище)

7. Дата видачі завдання «___» _____ р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломного проекту (роботи)	Строк виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1	Огляд інформації з заданої тематики		
2	Визначення актуальності проблеми, цілей і завдань дослідження		
3	Системний аналіз об'єкта дослідження		
4.	Побудова функції Гріна задачі, яка поставлена		
5	Створення програмного продукту для розв'язання задачі у Maple		
6.	Розрахунок економічної частини		

Студент _____

(підпис)

Д.С. Купіна

(ініціали та прізвище)

Керівник проекту (роботи) _____

(підпис)

О.Г. Ніколаєв

(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до дипломної роботи містить: 60 с., 14 рис., 9 табл., 30 джерел.

ФУНКЦІЯ ГРІНА, РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА, СФЕРИЧНИЙ СЕГМЕНТ, СИСТЕМА ПАРНИХ РІВНЯНЬ, ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ, ГРАНИЧНІ УМОВИ.

Об'єктом дослідження є функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Мета роботи - побудова функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.

Предмет дослідження – методи розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа.

Методами дослідження є:

- аналіз наукових інформаційних джерел;
- методи системного аналізу;
- метод дедукції;
- метод парних рівнянь

Розглянута проблема є актуальною з точки зору застосування результатів для розв'язання задач математичної фізики та має практичну спрямованість.

Під час роботи над темою було створено програмний продукт для чисельного розв'язання поставленої задачі.

У майбутньому доцільно приділити більше уваги дослідженню даної теми з метою уточнення її результатів.

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка к дипломной работе содержит 60 с., 14 рис., 9 табл., 30 источников.

ФУНКЦИЯ ГРИНА, УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА, СФЕРИЧЕСКИЙ СЕГМЕНТ, СИСТЕМА ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ.

Объектом исследования является функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа.

Цель работы - построение функции Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в неклассической области.

Предмет исследования – методы решения краевых задач для уравнения Лапласа.

Методами исследования являются:

- анализ научных информационных источников;
- методы системного анализа;
- метод дедукции;
- метод парных уравнений.

Рассмотренная проблема актуальна с точки зрения применения результатов для решения задач математической физики и имеет практическую направленность.

Во время работы над темой был создан программный продукт для численного решения поставленной задачи.

В будущем целесообразно уделить больше внимания исследованию данной темы с целью уточнения ее результатов.

ЗМІСТ

Вступ.....	8
1. Теоретичні відомості	10
1.1 Огляд літератури та актуальність роботи	10
1.2 Мета та задачі роботи.....	11
1.3 Об’єкт, предмет та методи дослідження	11
1.4 Теоретична довідка щодо теми	11
2. Системний аналіз об’єкту дослідження.....	14
2.1 Об’єкт дослідження	14
2.2 Структурний аналіз об’єкта дослідження	14
2.3 Функціональний аналіз об’єкта дослідження.....	15
2.4 Інформаційний аналіз об’єкта дослідження	17
2.5 Дослідження класифікації системи.....	19
3. Функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.....	21
3.1 Постановка задачі	21
3.2 Зведення задачі до системи парних рівнянь	22
3.3 Розв’язання системи парних рівнянь.....	29
3.4 Доведення симетричності функції Гріна	38
3.5 Побудова функції Гріна	41
4. Чисельне розв’язання задачі за допомоги програмного пакету Maple	43
4.1 Обґрунтування вибору програмного пакету Maple	43
4.2 Розв’язання поставленої задачі.....	45
5. Економічний розділ	50
5.1 Мета економічного розділу	50
5.2 Перелік робіт	50
5.3 Працівники проекту та розрахунок заробітної плати і ЄСВ.....	51
5.4 Обладнання та розрахунок амортизації	52

	7
5.5 Розрахунок собівартості проекту.....	55
Висновки	57
Перелік джерел посилання	58

ВСТУП

Дипломна робота присвячена актуальній проблемі – побудові функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області, а саме у сферичному сегменті.

Актуальність обраної теми є досить великою, так як побудову та дослідження функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа можна використовувати для вирішення задач математичної фізики, а саме задач на електростатику.

Як об'єкт дослідження було обрано функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа. В загальному випадку, функція Гріна - функція, яка використовується для вирішення неоднорідних диференціальних рівнянь з граничними умовами (неоднорідною крайовою задачею).

Мета та задачі роботи

Метою роботи є побудова функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.

Для цього необхідно виділити наступні задачі:

- провести аналіз наукових робіт, які присвячені даній тематиці;
- провести системний аналіз об'єкту дослідження;
- побудувати функцію Гріна задачі, яка поставлена;
- створити програму для чисельного розв'язання поставленої задачі.

Розглянута проблема є актуальною з точки зору застосування результатів для розв'язання задач математичної фізики та має практичну спрямованість.

Під час аналізу літератури, виявилось, що наразі не існує одного єдиного інформаційного джерела, де була представлена тема роботи саме в області сферичного сегменту.

У першому розділі зазначені актуальність даної теми, огляд інформаційних джерел та деякі теоретичні відомості. Також визначено об'єкт, предмет, мету, методи та завдання цього дослідження.

У другому розділі наведено структуру об'єкту дослідження разом із параметрами його складових елементів. Також описується морфологічний, функціональний, інформаційний аналіз та класифікація функції Гріна.

У третьому розділі даної пояснювальної записки представлено побудову функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.

У четвертому – розглядається програмне розв'язання поставленої задачі.

П'ятий розділ є розрахунком собівартості даної роботи.

У висновках описані результати даної роботи.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Огляд літератури та актуальність роботи

Тему дослідження та побудови функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа розглядали велика кількість науковців у своїх роботах. Таким чином, Тихонов А.М. та Самарський О.А. у своїй книзі «Рівняння математичної фізики» наводять визначення формул Гріна, постановку крайових задач та теорію щодо гармонічних функцій[1]. Проте вони не розглядають жодної побудови саме функції Гріна для будь-якої задачі будь-якої області.

В той же час Бабич В.М., Капилевич М.Б. та Міхлін С.Г. у довіднику «Лінійні рівняння математичної фізики» будують рішення функції Гріна для плаского випадку, усієї сфери, нескінченної напівплощини, та на півпросторі[2]. Тобто, вони не розглядають неklasичних областей, таких як сферичний сегмент.

Боголюбов О.М. у посібнику «Функції Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа» для побудови у класичних областях використовує метод електростатичних зображень, метод поділ змінних, за допомоги перетворення Фурье та розкладання за власними функціями[3].

Такий науковець, як Уфлянд Я.С. у книзі «Метод парних рівнянь у задачах математичної фізики» розглядає різні методики побудови, але у загальному випадку для будь-яких функцій[4].

Таким чином, огляд літератури дає зрозуміти, що дана тема має потенціал для дослідження, оскільки для побудови використовується метод парних рівнянь, а сама побудова проходить у сферичному сегменті.

Щодо актуальності обраної теми, то вона є досить великою, так як результати побудови можна використовувати для вирішення задач математичної фізики, а саме задач на електростатику.

1.2 Мета та задачі роботи

Метою роботи є побудова функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області.

Для цього необхідно виділити наступні задачі:

- провести аналіз наукових робіт, які присвячені даній тематиці;
- провести системний аналіз об'єкту дослідження;
- побудувати функцію Гріна задачі, яка поставлена;
- створити програму для чисельного розв'язання поставленої задачі.

1.3 Об'єкт, предмет та методи дослідження

У рамках цієї дипломної роботи магістра об'єктом дослідження є функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа, а предметом дослідження – методи розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа.

Щоб досягнути мети, будемо використовувати наступні методи:

- аналіз наукових інформаційних джерел;
- методи системного аналізу;
- метод дедукції;
- метод парних рівнянь.

1.4 Теоретична довідка щодо теми

В загальному випадку, функція Гріна - функція, яка використовується для вирішення неоднорідних диференціальних рівнянь з граничними умовами (неоднорідною крайової задачі)[10].

Функції Гріна корисні в електростатиці - для вирішення рівняння Пуассона; в теорії конденсованих середовищ - вони дозволяють вирішити

рівняння дифузії (і рівняння теплопровідності, яке збігається з ним); в квантовій механіці - функція Гріна, гамільтоніана, є однією з ключових функцій і пов'язана з щільністю станів. Функції Гріна, які використовуються в цих областях, дуже схожі, оскільки рівняння дифузії і рівняння Шредінгера в деякому сенсі подібні[11].

Всі галузі математичної і теоретичної фізики, де вкрай корисні функції Гріна, мабуть, важко навіть перерахувати. Вони допомагають знаходити стаціонарні і нестаціонарні рішення, в тому числі при різноманітних граничних умовах.

У випадку даного дослідження нас цікавить галузь математичної фізики. А саме розглядається функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа.

За результатами огляду вищенаведеної літератури можна записати вигляд функції Гріна.

Якщо оператор L не вироджений, тоді крайова задача

$$\begin{aligned}
 L[y] &= a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\
 a_1y(a) + a_2y'(a) &= 0 \\
 \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

має єдине рішення при будь-якій функції $f(x)$. Це рішення виражається формулою

$$y(x) = L^{-1} [f] = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$$

Функція $G(x, s)$, яка є ядром оберненого інтегрального оператора, називається функцією Гріна.

Функція Гріна визначена на квадраті $[a, b] \times [a, b]$, задовольняє рівнянню

$$L[G(x, s)] = \delta(x - s) \tag{1.2}$$

та крайовим умовам (1.1) (при цьому, ми вважаємо $G(x, s)$ функцією від x , враховуючи s як параметр).

Щоб функція $G(x, s)$ задовольняла рівнянню (1.2), необхідно, аби при $x \neq s$ вона задовольняла рівнянню $L[G(x, s)] = 0$, при $x = s$ була неперервною, а її похідна мала при стрибок, який дорівнює $1 / a_0(s)$. Тобто

$$\begin{aligned} G(s + 0, s) &= G(s - 0, s), \\ G'x(s + 0, s) - G'x(s - 0, s) &= 1 / a_0(s) \end{aligned}$$

Ці властивості функції Гріна лежать в основі алгоритму її побудови[12-15].

Розглядаючи фізичний зміст роботи, його можна інтерпретувати як потенціал поля, створеного одиничним точковим зарядом, який поміщений усередину заземленої провідної замкненої поверхні[6].

Фіксуємо дві точки: x і x_0 . В точку x ми помістимо одиничний позитивний заряд, а в точці x_0 будемо спостерігати результуючий потенціал. Нехай в точці x розташований одиничний позитивний електричний заряд. Він індукує на заземленої Γ деякий розподіл зарядів. Тоді потенціал електростатичного поля в точці x_0 є сума потенціалу, створеного одиничним зарядом, і потенціалу, створеного індукованими на Γ зарядами:

$$G(x, x_0) = F(x - x_0) + u(x, x_0)$$

При цьому функція $u(x, x_0)$, відповідна потенціалу, створеного індукованими на Γ зарядами, є гармонійною як по x , так і по x_0 .

2. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ОБ'ЄКТУ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1 Об'єкт дослідження

Як вже було сказано, об'єктом дослідження обрана функція Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа, яка будується у некласичній області – сегменті шару.

Функція Гріна є системою, оскільки їй притаманні такі закономірності, як емерджентність, адитивність та цілісність.

Емерджентність можна побачити через наявність у системи особливих властивостей, не властивих її підсистемам і блокам[7]. Наприклад, всі елементи системи являють собою окремі величини, які характеризують абсолютно різні процеси та явища, але разом все це є складовою функції Гріна.

Сенс адитивності полягає у тому, що зміни в системі представляють собою суму змін її окремих частин[7]. На прикладі, даної системи це можна легко простежити при побудові функції.

Цілісність - це властивість, що полягає в тому, що зміна будь-якого компонента системи впливає на всі інші компоненти.[7] Тобто, якщо змінити хоча б одну координату точки функції Гріна або змінити область, то кінцевий результат матиме зовсім інші значення.

2.2 Структурний аналіз об'єкта дослідження

Загальна структура об'єкта разом із параметрами складових елементів представлена на рисунку 2.1:

1. Функція Гріна

1.1.Фундаментальний розв'язок Лапласа Обмінний курс

1.1.1. Вхідні дані

1.2. Гармонічна функція в області $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$

1.2.1. Коефіцієнти розкладів a_{nm}

1.2.1.1. Функція $\varphi_m(t)$

1.2.1.1.1. Константи інтегрування $\{c_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty,m-1}$

1.2.1.1.1.1. Вхідні дані

1.2.2. Функція Лежандра

1.2.2.1. Вхідні дані

Тип елементного складу – гомогенний, оскільки система складається з однотипних елементів: значень початкових даних та значень розрахованих функцій або матриць.

Тип елементів – енергетичні, тому що на кожному етапі побудови функції Гріна ми розраховуємо складові, а значить відбувається перетворення енергії.

Тип зв'язків між елементами – енергетичні. Це пояснюється тим, що самі елементи пов'язані єдністю реалізації функції.

Тип структури – ієрархічна зі слабкими зв'язками. Структура демонструє, які величини необхідно знати для розрахування складових елементів структури. А вони, в свою чергу, зроблять можливим побудову функції Гріна[8].

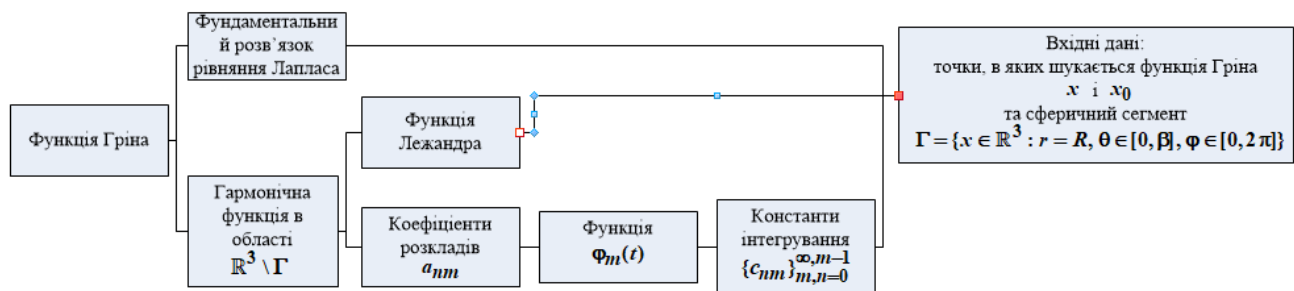


Рисунок 2.1 – Структура функції Гріна

2.3 Функціональний аналіз об'єкта дослідження

Функціональний аналіз процентної ставки представлено у таблиці 2.1

Таблиця 2.1 – Функціональний опис системи

Код	Елемент	Функція
1	Функція Гріна	Використовується для вирішення неоднорідних диференціальних рівнянь з граничними умовами.
1.1	Фундаментальний розв'язок Лапласа	Відома величина для заданих вхідних даних без зв'язку з якою-небудь областю і граничними умовами.
1.1.1	Вхідні дані	Задаються дві точки для розрахунок функції Гріна.
1.2	Гармонічна функція в області $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$	Використовується для побудови функції Гріна.
1.2.1	Коефіцієнти розкладів a_{nm}	Невідомі коефіцієнти, які необхідні для розрахунку гармонічних функцій.
1.2.1.1	Функція $\varphi_m(t)$	Гладка функція для знаходження коефіцієнтів розкладів.
1.2.1.1.1	Константи інтегрування $\{c_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty,m-1}$	Константи інтегрування розраховуються для знаходження функції $\varphi_m(t)$ та, відповідно, коефіцієнтів розкладів системи парних рівнянь.
1.2.1.1.1.1	Вхідні дані	Задаються дві точки для розрахунку функції Гріна.

Продовження таблиці 2.1

1.2.2	Функція Лежандра	Рішення диференціального рівняння в часткових випадках, які мають велику кількість додаткових властивостей, математичної структури і додатків.
1.2.2.1	Вхідні дані	Розрахунок функції Гріна.

Загальні характеристики системи описані в таблиці 2.2:

Таблиця 2.2 – Загальні характеристики системи

Функціональність	Ранг системи	Фактори	
		Системоруйнівні	Системоутворюючі
Одно-функціональна	Обслуговування	<ul style="list-style-type: none"> • Помики в розрахунках складових • Помилкові вхідні дані 	<ul style="list-style-type: none"> • Правдиві вхідні дані • Раціональний опис елементів системи

2.4 Інформаційний аналіз об'єкта дослідження

Елементи системи:

1. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа
2. Функція Лежандра
3. Гармонічні функції
4. Вхідні дані

Всього елементів $n=4$.

Властивості елементів представлені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Властивості елементів системи

№ п/п	Найменування	Позначення	Кількість властивостей	Примітка
1.1.	Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа	a_1	2	1(1) – не має зв'язку з якою-небудь областю і граничними умовами 2(1) – впливає на побудову функції Гріна
1.2.	Функція Лежандра	a_2	2	1(2) – відома функція для певного набору вхідних значень 2(2) – впливає на побудову функції Гріна
1.3.	Гармонічні функції	a_3	2	1(3) – невідомі функції, які необхідно знайти для побудови 2(3) – впливає на побудову функції Гріна
1.4.	Вхідні дані	a_4	2	1(4) – задається на початку роботи алгоритму 2(4) – впливає на побудову функції Гріна

Середньгеометричне число властивостей на один елемент:

$$\sqrt[4]{a_1 * a_2 * a_3 * a_4} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$$

2.5 Дослідження класифікації системи

Класифікація системи представлена в таблиці 2.4[9].

Таблиця 2.4 – Класифікація системи

№ п/п	Ознака класифікації	Тип системи за ознакою	Означення
1.	За зв'язком системи з навколишнім середовищем	Відкрита	Взаємодіє з навколишнім середовищем, обмінюється енергією
2.	За походженням	Змішана	Створена людиною, але описується фізичне явище
3.	За об'єктивністю існування	Реальна	Складається з природних об'єктів
4.	За типом опису законів функціонування	Параметризована	Відомий закон функціонування з точністю до параметрів
5.	За способом управління системою	З комбінованим управлінням	Система підпорядковується зовнішньому управлінню
6.	За централізацією	Централізована	В системі є центрального елемент (задані вхідні дані), від якого все залежить
7.	За однорідністю структури	Однорідна	Система складається з елементів, які володіють однаковими властивостями
8.	За типом складності	Проста	Система описує невелику кількість даних

Продовження таблиці 2.4

9.	За вимірністю	Одновимірна	Система має один вхід та один вихід
10.	За організованістю	Добре організована	В системі визначені усі елементи та зв'язки
11.	За лінійністю	Нелінійна	Система не описується лінійним рівнянням
12.	За обумовленістю дії	Детермінована	Описується, як строга функція

3. ФУНКЦІЯ ГРІНА ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У НЕКЛАСИЧНІЙ ОБЛАСТІ

3.1 Постановка задачі

В просторі \mathbf{R}^3 декартові і сферичні координати точки \mathbf{x} будемо позначати (x_1, x_2, x_3) і (r, θ, φ) відповідно. Зв'язок між декартовими й сферичними координатами здійснюється за формулами

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

В просторі розглянемо сферичний сегмент

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^3 : r = R, \theta \in [0, \beta], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Поставимо задачу знаходження функції Гріна $G(x, x_0)$, $|x_0| < R$ для рівняння Лапласа в області $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$, яка задовольняє такі умови:

$$\Delta G(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^3 \setminus \Gamma : x \neq x_0, \quad (3.1)$$

$$G(x, x_0) = F(x - x_0) + u(x, x_0), \quad (3.2)$$

$$G(x, x_0)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (3.3)$$

де Δ – оператор Лапласа, $F(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|}$ – фундаментальний

розв'язок рівняння Лапласа, функція $u(x, x_0)$ є гармонічною в області $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$ [16,17].

Гармонічну функцію $u(x, x_0)$ будемо шукати у вигляді

$$u(x, x_0) = \begin{cases} u^+(x, x_0), & |x| < R, \\ u^-(x, x_0), & |x| > R, \end{cases} \quad (3.4)$$

де $u^\pm(x, x_0)$ – гармонічні функції у відповідних областях, а функція $u^-(x, x_0)$ є регулярною на нескінченності.

Відносно функцій $u^\pm(x, x_0)$ на сферичній поверхні поставимо такі умови спряження[18]:

$$\left(u^+(x, x_0) - u^-(x, x_0) \right)_{|r=R} = 0, \quad (3.5)$$

$$u^\pm(x, x_0)|_\Gamma = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right)_{|\Gamma}, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - \frac{\partial u^-}{\partial r} \right)_{|r=R, \theta \in (\beta, \pi]} = 0. \quad (3.7)$$

3.2 Зведення задачі до системи парних рівнянь

Запишемо рівняння Лапласа в сферичних координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Подамо фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичних координатах[19,20]. Для цього використаємо таке твердження.

Лема 1. Для фундаментального розв'язку рівняння Лапласа правильним є розклад

$$F(x - x_0) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} r^n / r_0^{n+1} \\ r_0^n / r^{n+1} \end{array} \right\} \sum_{m=-n}^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad (3.8)$$

де верхній (нижній) множник у фігурних дужках вибирається при $r < r_0$ ($r > r_0$).

Тут (r, θ, φ) і $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ – сферичні координати точок x і x_0 .

Доведення. Спершу зазначимо, що функції

$$\left\{ \gamma_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \right\}_{n=0, |m| \leq n}^{\infty}, \quad (3.9)$$

де $\gamma_{nm} = \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}$, утворюють повну ортонормовану систему

власних функцій оператора $r^2 \Delta$ в просторі функцій $L_2([0, \pi] \times [0, 2\pi])$. Дійсно, неважко перевірити, що

$$r^2 \Delta \left\{ \gamma_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \right\} = -n(n+1) \gamma_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (3.10)$$

Зафіксуємо $r \neq r_0$ і будемо шукати розклад функції $F(x - x_0)$ в ряд за власними функціями (3.9)

$$F(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r, r_0) \sum_{m=-n}^n P_{nm}(\theta_0, \varphi_0) \gamma_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (3.11)$$

Застосуємо оператор $r^2 \Delta$ до обох частин розкладу (3.11). За означенням фундаментального розв'язку $r^2 \Delta F(x - x_0) = r^2 \delta(x - x_0)$, де $\delta(x)$ – дельта-функція. Тоді, враховуючи (3.10), одержимо

$$r^2 \delta(x - x_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) - n(n+1)T_n \right] \sum_{m=-n}^n p_{nm}(\theta_0, \varphi_0) \gamma_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Звідси для коефіцієнтів розкладу одержимо формулу

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) - n(n+1)T_n \right] p_{nm}(\theta_0, \varphi_0) = \\ & = \delta(r - r_0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \gamma_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} d\theta d\varphi = \\ & = \delta(r - r_0) \gamma_{nm} P_n^m(\cos \theta_0) e^{-im\varphi_0}. \end{aligned}$$

З останньої формули випливає, що окремі множники лівої частин можна вибрати такими:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) - n(n+1)T_n = \delta(r - r_0), \quad (3.12)$$

$$p_{nm}(\theta_0, \varphi_0) = \gamma_{nm} P_n^m(\cos \theta_0) e^{-im\varphi_0}. \quad (3.13)$$

Функція $T_n(r, r_0)$ є одновимірною функцією Гріна крайової задачі для диференціального рівняння (3.12) на пів осі $r \in (0, \infty)$ з граничними умовами[21]

$$|T_n(0, r_0)| < \infty, \quad T_n(\infty, r_0) = 0. \quad (3.14)$$

Крім умов (3.14) функція Гріна задовольняє умови спряження при $r = r_0$

$$T_n(r_0 - 0, r_0) = T_n(r_0 + 0, r_0), \quad \frac{\partial T_n}{\partial r}(r_0 + 0, r_0) - \frac{\partial T_n}{\partial r}(r_0 - 0, r_0) = \frac{1}{r_0^2}. \quad (3.15)$$

Крайова задача (3.12), (3.14), (3.15) має єдиний розв'язок

$$T_n(r, r_0) = -\frac{1}{2n+1} \begin{cases} r^n / r_0^{n+1}, & r \in [0, r_0), \\ r_0^n / r^{n+1}, & r \in (r_0, \infty). \end{cases} \quad (3.16)$$

Остаточний результат одержимо після підстановки (3.13), (3.16) в (3.11) і заміни

$$\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) = (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0). \quad \blacktriangleleft$$

Наслідок. Як наслідок формули (3.8) одержимо теорему додавання для функції Лежандра[22]

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta \cos \theta_0 + \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta \sin \theta_0) &= \\ &= \sum_{m=-n}^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) e^{im(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Представимо фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в такому вигляді

$$F(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi |x - x_0|} = -\frac{1}{4\pi} (r^2 - 2rr_0 \cos \gamma + r_0^2)^{-1/2},$$

де $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta \sin \theta_0$ – косинус кута між векторами x і x_0 . Оскільки функція $(1 - 2t \cos \gamma + t^2)^{-1/2}$ є аналітичною функцією змінної t при $|t| < 1$, розвинемо її в степеневий ряд

$$(1 - 2t \cos \gamma + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\cos \gamma) t^n, \quad (3.18)$$

де $a_n(\cos \gamma)$ – коефіцієнти розкладу. Ряд збігається абсолютно в інтервалі $|t| < 1$ і рівномірно на кожному відрізку цього інтервалу, де його можна диференціювати будь-яке число разів. Застосуємо цей розклад до функції $F(x - x_0)$

$$F(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} a_n(\cos \gamma). \quad (3.19)$$

Користуючись тим, що $\mathbf{0} = \Delta F(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} r_0^n \Delta\{r^{-n-1} a_n(\cos \gamma)\}$

і єдиністю розвинення функції в степеневий ряд, одержимо $\Delta\{r^{-n-1} a_n(\cos \gamma)\} = \mathbf{0}$.

Після обчислення лапласіана в сферичних координатах (r, γ, φ) від функції $r^{-n-1} a_n(\cos \gamma)$ приходимо до рівняння

$$\Delta\{r^{-n-1} a_n(\cos \gamma)\} \equiv r^{-n-1} \left\{ \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin \gamma \frac{\partial a_n}{\partial \gamma} \right) + n(n+1) a_n \right\} = \mathbf{0}.$$

Таким чином, відносно функції $a_n(\cos \gamma)$ одержано рівняння Лежандра. Його єдиним з точністю до довільного сталого множника розв'язком, обмеженим на відріжку $\theta \in [0, \pi]$, є функція Лежандра $P_n(\cos \gamma)$. [19] Отже, $a_n(\cos \gamma) = c P_n(\cos \gamma)$, де сталу c знайдемо з тотожності (3.18) після підстановки до неї $\gamma = \mathbf{0}$ і врахування формули $P_n(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. В результаті розклад (3.19) набуває остаточного вигляду

$$F(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma).$$

Тепер порівняння останньої формули і розкладу (3.8) приводить до формули (3.17).

Повернемося до задачі (3.4) – (3.7). Через симетричність гармонічної функції $u^+(x, x_0)$ відносно своїх аргументів будемо шукати функції u^\pm у вигляді [23]

$$u^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{R^2} \right)^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^m(\cos \theta) P_n^{-m}(\cos \theta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)}, \quad r < R, \quad (3.20)$$

$$u^- = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n b_{nm} P_n^m(\cos\theta) P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad r > R. \quad (3.21)$$

Зазначимо, що умова $u^+(x, x_0) = u^+(x_0, x)$ приводить до такої тотожності:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{R^2}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^m(\cos\theta) P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{im(\varphi-\varphi_0)} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{R^2}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^m(\cos\theta_0) P_n^{-m}(\cos\theta) e^{im(\varphi_0-\varphi)} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{R^2}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{n,-m} P_n^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad r < R \end{aligned}$$

звідки одержимо

$$a_{nm} = a_{n,-m}.$$

Умови спряження і граничні умови (3.5) – (3.7) для функцій (3.20), (3.21) приводять до системи рівностей

$$a_{nm} = b_{nm}, \quad n = 0 \div \infty, \quad |m| \leq n$$

і системи парних суматорних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладів (3.20), (3.21)[5]

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta) e^{im(\varphi-\varphi_0)} = \\ & -F(x-x_0)|_{r=R}, \quad \theta \in [0, \beta], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta) e^{im(\varphi-\varphi_0)} = 0, \\ & \theta \in (\beta, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Підставимо в праву частину рівняння (3.22) розклад (3.8), після чого запишемо рівняння (3.22), (3.23) відносно коефіцієнтів Фур'є за системою функцій $\{e^{im\varphi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ з цих рівнянь

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n a_{nm} P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta) = \\ & = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta), \quad \theta \in [0, \beta], \quad m \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{r_0}{R}\right)^n a_{nm} P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0} P_n^m(\cos\theta) = 0, \quad \theta \in (\beta, \pi], \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (3.25)$$

Систему (3.24), (3.25) можна переписати так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nm} P_n^{|m|}(\cos\theta) = \\ & = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-|m|}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0} P_n^{|m|}(\cos\theta), \quad \theta \in [0, \beta], \quad m \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \alpha_{nm} P_n^{|m|}(\cos\theta) = 0, \quad \theta \in (\beta, \pi], \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (3.27)$$

де $\alpha_{nm} = a_{nm} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n P_n^{-|m|}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0}$.

У подальшому будемо вважати, що $m \geq 0$, оскільки

$$\alpha_{n,-m} e^{-im\varphi_0} = \alpha_{nm} e^{im\varphi_0}.$$

Перетворимо систему (3.26), (3.27). Користуючись тим, що

$P_n^m(\cos\theta) = (-1)^m \sin^m \theta \left(\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right)_{|x=\cos\theta}$, поділимо обидві частини

рівності (3.26) на $(-1)^m \sin^m \theta$, після чого проінтегруємо їх m разів за змінною $\cos \theta$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nm} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) e^{-im\varphi_0} + \sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} P_n(\cos \theta), \quad \theta \in [0, \beta], \quad (3.28)$$

$$(-1)^m \frac{d^m}{d \cos \theta^m} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \alpha_{nm} P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta \in (\beta, \pi]. \quad (3.29)$$

Тут через c_{nm} при $n = 0, 1, \dots, m-1$, $m \geq 0$ позначено константи інтегрування.

3.3 Розв'язання системи парних рівнянь

Для розв'язання парних систем попередньо доведемо таке твердження.

Лема 2. Справедливими є такі розклади [24]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos[(n+1/2)t] P_n(\cos \theta) = \begin{cases} [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2}, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin[(n+1/2)t] P_n(\cos \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ [2(\cos \theta - \cos t)]^{-1/2}, & 0 < \theta < t \leq \pi. \end{cases}$$

(3.31)

Доведення. За основу візьмемо розклад (3.18)

$$(1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(\cos \theta), \quad (3.32)$$

причому ряд (3.32) є абсолютно збіжним в колі $|z| < 1$ комплексної площини і рівномірно збіжним на будь-якому компактї, який належить зазначеному колу.

Цей факт впливає з оцінки $|P_n(\cos \theta)| \leq 1$ для всіх $\theta \in [0, \pi]$. Таким чином, функція з лівої частини (3.32) є двозначною аналітичною функцією в колі $|z| < 1$. Однозначна гілка цієї функції вибирається природною умовою, що при $\theta \in (0, \pi)$ і $z \in [-1, 1]$ функція $(1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1/2}$ приймає додатні значення.

Зазначимо, що степеневий ряд (3.32) при кожному $\theta \in (0, \pi)$ залишається збіжним при $z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $t \neq \theta$, оскільки для таких θ виконується асимптотична формула

$$P_n(\cos \theta) = \left(\frac{2}{\pi n \sin \theta} \right)^{1/2} \sin[(n + 1/2)\theta + \pi/4] \left(1 + O(n^{-1}) \right).$$

Тоді за теоремою Абеля сума ряду (3.32) в точці $z = e^{it}$ дорівнює [25]

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{int} P_n(\cos \theta) = (1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it})^{-1/2}, \theta \in (0, \pi), t \in [0, \pi], t \neq \theta. \quad (3.33)$$

Знайдемо аргумент комплексного числа $1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it}$, який узгоджується з вибором однозначної гілки функції $(1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it})^{-1/2}$. Для цього запишемо $1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it} = (e^{i\theta} - e^{it})(e^{-i\theta} - e^{it})$ і розглянемо два випадки $t \in [0, \theta)$ і $t \in (\theta, \pi]$. В першому з них можна вибрати $\arg(e^{i\theta} - e^{it}) = (\pi + \theta + t)/2$, $\arg(e^{-i\theta} - e^{it}) = -(\pi + \theta - t)/2$ (рисунок 3.1).

При цьому $\arg[(e^{i\theta} - e^{it})(e^{-i\theta} - e^{it})] = t$,

$$|(e^{i\theta} - e^{it})(e^{-i\theta} - e^{it})| = 2(\cos t - \cos \theta).$$

Тоді $(1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it})^{-1/2} = [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2} e^{-it/2}$, звідки і з формули (3.33) випливає

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1/2)t} P_n(\cos \theta) = [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2}, \quad 0 \leq t < \theta < \pi. \quad (3.34)$$

Аналогічно при $t \in (\theta, \pi]$, неперервно змінюючи $\arg z$ від 0 до $t > \theta$, одержимо $\arg(e^{i\theta} - e^{it}) = (-\pi + \theta + t) / 2$, $\arg(e^{-i\theta} - e^{it}) = -(\pi + \theta - t) / 2$ (рисунок 3.2). Тоді $\arg[(e^{i\theta} - e^{it})(e^{-i\theta} - e^{it})] = t - \pi$,

$$|(e^{i\theta} - e^{it})(e^{-i\theta} - e^{it})| = 2(\cos \theta - \cos t),$$

$$(1 - 2e^{it} \cos \theta + e^{2it})^{-1/2} = i[2(\cos \theta - \cos t)]^{-1/2} e^{-it/2}.$$

Відповідною формулою для суми ряду (3.33) в цьому випадку є така:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1/2)t} P_n(\cos \theta) = i[2(\cos \theta - \cos t)]^{-1/2}, \quad 0 < \theta < t \leq \pi. \quad (3.35)$$

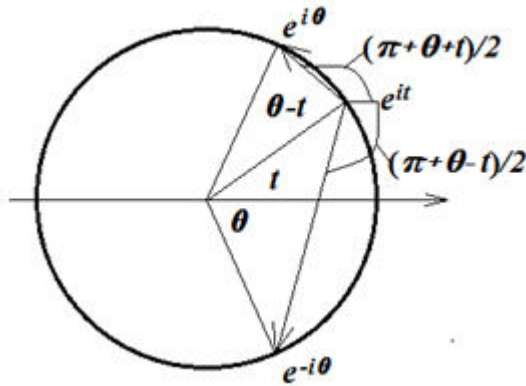
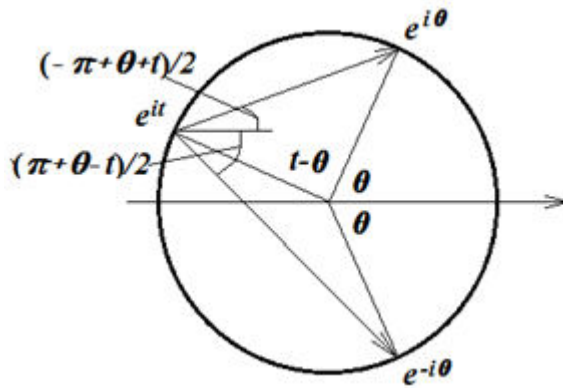


Рисунок 3.1 – Випадок $t \in [0, \theta)$

Рисунок 3.2 – Випадок $t \in (\theta, \pi]$

Тепер, якщо в формулах (3.34), (3.35) окремо прирівняти дійсні і уявні частини виразів, які в них знаходяться, то одержимо розривні суми (3.30), (3.31).



Наслідок. Оскільки формули (3.30), (3.31) фактично є розкладами функцій з їх правих частин у ряди Фур'є за тригонометричними системами функцій $\{\cos[(n + 1/2)t]\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\sin[(n + 1/2)t]\}_{n=0}^{\infty}$ на відрізку $[0, \pi]$, то для коефіцієнтів Фур'є отримаємо

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos[(n + 1/2)t]}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt, \quad (3.36)$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin[(n + 1/2)t]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} dt.$$

Повернемося до розв'язання системи парних рівнянь (3.28), (3.29). Користуючись сумою (3.31), будемо шукати розв'язок цієї системи у вигляді

$$\alpha_{nm} = \int_0^{\beta} \varphi_m(t) \cos[(n + 1/2)t] dt. \quad (3.37)$$

Уважаючи, що $\theta \in (\beta, \pi]$, підставимо інтеграл (3.37) у ряд, розташований в лівій частині рівняння (3.29)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{\beta} \varphi_m(t) \cos[(n+1/2)t] dt P_n(\cos \theta) = \\ & = 2\varphi_m(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(n+1/2)\beta] P_n(\cos \theta) - 2 \int_0^{\beta} \varphi'_m(t) \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(n+1/2)t] P_n(\cos \theta) dt. \end{aligned}$$

Тут приймається, що функція $\varphi_m(t)$ є достатньо гладкою і перестановка нескінченної суми та інтеграла є припустимою. Оскільки $t \leq \beta < \theta$, то згідно з формулою (3.31) права частина останньої формули дорівнює нулю, тобто рівняння (3.29) тотожно виконується. Підставимо інтеграл (3.37) до рівняння (3.28)

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} \varphi_m(t) \sum_{n=0}^{\infty} \cos[(n+1/2)t] P_n(\cos \theta) dt = & \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) e^{-im\varphi_0} + \\ & + \sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} P_n(\cos \theta), \quad \theta \in [0, \beta]. \end{aligned}$$

Підставимо в ліву частину цієї рівності суму (3.30), а в праву частину – інтеграл (3.36)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta} \frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt = \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0) \cos[(n+1/2)t] e^{-im\varphi_0} + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} \sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} \cos[(n+1/2)t]. \end{aligned}$$

Користуючись формулами прямого і оберненого інтегрального перетворення типу Абеля

$$\int_0^\theta \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt = g(\theta), \quad \theta \in [0, \beta],$$

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\theta) \sin \theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} d\theta, \quad t \in [0, \beta],$$

можна розв'язати попереднє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) = & \frac{1}{2\pi^2 R} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta_0) \cos[(n+1/2)t] e^{-im\varphi_0} + \\ & + \frac{2^{m-1}}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} \cos[(n+1/2)t], \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Для визначення констант інтегрування $\{c_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty, m-1}$ (при $m=0$ ця множина є пустою) будемо вимагати, щоб функція

$$g(r, \theta, \varphi) \left(\frac{\partial u^+}{\partial r} - \frac{\partial u^-}{\partial r} \right) \Big|_{(r, \theta, \varphi) \in \Gamma}, \quad \text{де } g(r, \theta, \varphi) \text{ -- будь-яка неперервна функція}$$

своїх аргументів, була інтегрованою по поверхні Γ . Неважко зрозуміти, що необхідною умовою для цього є інтегрованість функції

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{r_0}{R}\right)^n a_{nm} P_n^{-m}(\cos \theta_0) e^{-im\varphi_0} P_n^m(\cos \theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \alpha_{nm} P_n^m(\cos \theta)$$

з вагою $\sin \theta$ по відрізку $\theta \in [0, \beta]$ при будь-якому $m \geq 0$. Згідно з методикою перетворимо інтеграл

$$\begin{aligned} I_m = & \int_0^\beta \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \alpha_{nm} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ = & \int_0^\beta \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta \int_0^\beta \varphi_m(t) \cos[(n+1/2)t] dt d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\beta \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n^m(\cos \theta) \frac{\varphi_m(\beta) \sin[(n+1/2)\beta]}{n+1/2} \sin \theta d\theta - \\
&\quad - \int_0^\beta \sin \theta \int_0^\beta \varphi_m(t) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin[(n+1/2)t]}{n+1/2} dt d\theta = \\
&= 2 \int_0^\beta (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} \varphi_m(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \sin[(n+1/2)\beta] \sin \theta d\theta - \\
&\quad - 2 \int_0^\beta \sin \theta (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} \int_0^\beta \varphi_m(t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \sin[(n+1/2)t] dt d\theta.
\end{aligned}$$

Через формулу (3.31) два останні інтеграли перепишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^\beta (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} \frac{\varphi_m(\beta)}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \beta)}} \sin \theta d\theta - \\
&\quad - 2 \int_0^\beta \sin \theta (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} \int_\theta^\beta \frac{\varphi'_m(t)}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} dt d\theta.
\end{aligned}$$

В цих інтегралах зробимо заміну змінних інтегрування $\cos \theta = x$, $\cos t = u$ і підінтегральної функції $\varphi_m(t) = \psi_m(u)$

$$I_m = \sqrt{2} \int_{x_0}^1 (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{\psi_m(x_0)}{\sqrt{x-x_0}} - \int_{x_0}^x \frac{\psi'_m(u)}{\sqrt{x-u}} du \right\} dx, \quad (3.39)$$

де $\cos \beta = x_0$. Похідна від функції в фігурних дужках під інтегралом (3.39) має особливість в точці $x = x_0$. Її порядок можна визначити, якщо внутрішній інтеграл в цій формулі m разів зінтегрувати частинами

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{\Psi_m(x_0)}{\sqrt{x-x_0}} - \int_{x_0}^x \frac{\Psi'_m(u)}{\sqrt{x-u}} du \right\} = \\ & = \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{\Psi_m(x_0)}{\sqrt{x-x_0}} - \sum_{k=1}^m \chi_k(x, x_0) \Psi_m^{(k)}(x_0) - \int_{x_0}^x \chi_m(x, u) \Psi_m^{(m+1)}(u) du \right\}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

де $\chi_k(x, x_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1/2)} (x-x_0)^{k-1/2}$, $\Gamma(x)$ – гама-функція. Формула (3.40)

показує, що підінтегральна функція в (3.39) в точці $x = x_0$ має особливість порядку $-m - 1/2$ і, щоб позбутися неінтегрованих особливостей в (3.39), необхідно на функції $\Psi_m(u)$ накласти додаткові умови

$$\Psi_m(x_0) = \Psi'_m(x_0) = \dots = \Psi_m^{(m-1)}(x_0) = 0$$

або, що теж саме,

$$\varphi_m(\beta) = \varphi'_m(\beta) = \dots = \varphi_m^{(m-1)}(\beta) = 0. \quad (3.41)$$

Таким чином, для визначення констант інтегрування $\{c_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty, m-1}$ в (3.38) при кожному m маємо m умов (3.41). З'ясуємо можливість знаходження констант з цих умов.

Лема 3. При кожному $m = 1, 2, \dots$ і довільному $\beta \in (0, \pi)$ алгебраїчна система

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} (n+1/2)^k \cos[(n+1/2)\beta + \pi k/2] = g_{mk}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.42)$$

має єдиний розв'язок для будь-якого набору $\{g_{mk}\}_{k=0}^{m-1} \in \mathbf{R}^m$. [18]

Доведення. Для доведення леми покажемо, що однорідна система (3.42) має тільки тривіальний розв'язок. Для цього зафіксуємо $m > 0$ і розглянемо

$$\text{функцію } P(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n \cos[(n+1/2)t].$$

Помножимо обидві частини попередньої рівності на $2 \cos(t/2)$

$$\begin{aligned} Q(t) &\equiv 2 \cos(t/2) P(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n 2 \cos(t/2) \cos[(n+1/2)t] = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n \cos[(n+1)t] + \sum_{n=0}^{m-1} c_n \cos(nt) = \sum_{n=0}^m \tilde{c}_n \cos(nt), \end{aligned}$$

де $\tilde{c}_0 = c_0$, $\tilde{c}_n = c_n + c_{n-1}$ ($n = 1 \div m-1$), $\tilde{c}_m = c_{m-1}$. Функцію $Q(t)$ можна переписати у вигляді

$$Q(t) = e^{-imt} \{ \tilde{c}_m e^{2mti} + \dots + \tilde{c}_1 e^{(m+1)ti} + 2\tilde{c}_0 e^{mti} + \tilde{c}_1 e^{(m-1)ti} + \dots + \tilde{c}_m \}.$$

Вираз у фігурних дужках є зворотним многочленом відносно e^{it} . Якщо такий многочлен має корінь e^{it} $t \in (0, \pi)$, то він має корінь e^{-it} такої же кратності як і перший.

Припустимо, що однорідна система (3.42) при $\beta \in (0, \pi)$ має нетривіальний розв'язок $\{c_n\}_{n=0}^{m-1}$. Тоді функція $P(t)$ задовольняє умови

$$P(\beta) = P'(\beta) = \dots = P^{(m-1)}(\beta) = 0.$$

Очевидно, що такі ж самі умови задовольняє функція $Q(t)e^{imt}$, тоді многочлен $\tilde{c}_m e^{2mt} + \dots + \tilde{c}_1 e^{(m+1)t} + 2\tilde{c}_0 e^{mt} + \tilde{c}_1 e^{(m-1)t} + \dots + \tilde{c}_m$ має пару комплексно спряжених коренів $e^{\pm i\beta}$ обидва кратності m . Однак, цей многочлен свідомо має ще один корінь $e^{i\pi}$, відмінний від зазначених. Якщо

многочлен степеня $2m$ має $2m + 1$ корінь, то він тотожно дорівнює нулю, тобто коефіцієнти $\{\tilde{c}_n\}_{n=0}^m$, а з ними і $\{c_n\}_{n=0}^{m-1}$, є нульовими. Одержана суперечність з припущенням доводить твердження леми. ◀

З леми 3, формули (3.38) і умов (3.41) випливає, що константи інтегрування $\{c_{nm}\}_{m,n=0}^{\infty,m-1}$ знаходяться однозначно з системи

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{nm} (n+1/2)^k \cos[(n+1/2)\beta + \pi k / 2] =$$

$$= -\frac{(-1)^m}{4\pi R} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n P_n^{-m}(\cos\theta_0) e^{-im\varphi_0} (n+1/2)^k \cos[(n+1/2)\beta + \pi k / 2], \quad (3.43)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1, \quad m = 1, 2, \dots$$

3.4 Доведення симетричності функції Гріна

Через D_ε позначимо область, обмежену замкненою кусково-гладкою поверхнею Γ_ε , утвореною поверхнями сферичних сегментів $S_{\pm\varepsilon} = \{r = R \pm \varepsilon, \theta \in [0, \beta], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ і бічною поверхнею зрізаного конуса $C_\varepsilon = \{\theta = \beta, r \in [R - \varepsilon, R + \varepsilon], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Зафіксуємо довільні точки $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^3 \setminus \Gamma : x_1 \neq x_2$. Виберемо додатні числа R_0, ε такими, щоб кулі $B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2)$ і поверхня Γ_ε належали області $B_{R_0}(\mathbf{0}) \setminus \Gamma$, причому $\overline{B_\varepsilon(x_1)} \cap \overline{B_\varepsilon(x_2)} = \emptyset$ (рисунок 3.3).

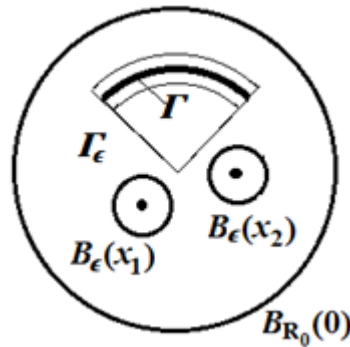


Рисунок 3.3 – Графічне представлення задачі у просторі

Розглянемо дві функції Гріна $G(x, x_i), i = 1, 2$, які задовольняють умови (3.1) – (3.3). Для функцій $G(x, x_i), i = 1, 2$ в області $\Omega = B_{R_0}(0) \setminus \{D_\varepsilon \cup B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)\}$ запишемо другу формулу Гріна

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [G(x, x_1)\Delta G(x, x_2) - G(x, x_2)\Delta G(x, x_1)]dx = \\
 & = \int_{\partial B_{R_0}^+} [G(x, x_1)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_2) - G(x, x_2)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_1)]d\sigma + \\
 & + \int_{\partial B_\varepsilon^-(x_1)} [G(x, x_1)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_2) - G(x, x_2)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_1)]d\sigma + \\
 & + \int_{\partial B_\varepsilon^-(x_2)} [G(x, x_1)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_2) - G(x, x_2)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_1)]d\sigma + \\
 & + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} [G(x, x_1)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_2) - G(x, x_2)\frac{\partial G}{\partial n}(x, x_1)]d\sigma. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Завдяки гармонічності функцій $G(x, x_i), i = 1, 2$ ліва частина формули (3.44) дорівнює нулю. Поверхневий інтеграл по поверхні ∂B_{R_0} прямує до нуля при

$R_0 \rightarrow \infty$, оскільки для функцій $G(x, x_i)$, $i = 1, 2$ виконуються такі асимптотичні формули:

$$G(x, x_i)|_{r=R_0} = O(R_0^{-1}), \quad \frac{\partial G}{\partial r}(x, x_i)|_{r=R_0} = O(R_0^{-2}).$$

Аналогічно через асимптотичні формули

$$G(x, x_i)|_{x \in \partial B_\varepsilon(x_i)} \square -\frac{1}{4\pi\varepsilon}, \quad \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_i)|_{x \in \partial B_\varepsilon^-(x_i)} \square -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$$

поверхневі інтеграли по сферичним поверхням $\partial B_\varepsilon^-(x_1)$ і $\partial B_\varepsilon^-(x_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ прямують до значень $G(x_1, x_2)$ і $-G(x_2, x_1)$ відповідно. Знайдемо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} [G(x, x_1) \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_2) - G(x, x_2) \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_1)] d\sigma.$$

Інтеграл по поверхні Γ_ε можна розбити на окремі інтеграли

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} = \int_{S_{+\varepsilon}} + \int_{S_{-\varepsilon}} + \int_{C_\varepsilon}.$$

Для перших двох справа можна записати

$$\begin{aligned} & \int_{S_{+\varepsilon}} + \int_{S_{-\varepsilon}} = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\beta [-G(r\xi, x_1) \frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_2) + G(r\xi, x_2) \frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_1)] r^2 \sin \theta|_{r=R+\varepsilon} d\theta d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^\beta [G(r\xi, x_1) \frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_2) - G(r\xi, x_2) \frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_1)] r^2 \sin \theta|_{r=R-\varepsilon} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Тут точка ξ має сферичні координати $(\mathbf{1}, \theta, \varphi)$. Оскільки функції $G(x, x_i)$, $i = 1, 2$ є неперервними в області $\mathbf{R}^3 \setminus \{x_i\}$, включаючи поверхню

сегмента Γ , а їх нормальні похідні мають стрибок при переході через цю поверхню:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_i)|_{r=R-\varepsilon} - \frac{\partial G}{\partial r}(r\xi, x_i)|_{r=R+\varepsilon} \right] = 4\pi v_i(R\xi),$$

де $v_i(\mathbf{x})$ – поверхнева густина заряду, яку індукує поле $G(\mathbf{x}, x_i)$ на поверхні Γ , границю наведених вище інтегралів можна записати так:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_{+\varepsilon}} + \int_{S_{-\varepsilon}} \right) = 4\pi \int_{\Gamma} [G(\mathbf{x}, x_1)v_2(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, x_2)v_1(\mathbf{x})] d\sigma.$$

Функції $v_i(\mathbf{x})$ мають особливості на межі сегмента, але вони інтегровані. Тоді одержаний інтеграл дорівнює нулю, оскільки на сегменті Γ функції Гріна приймають нульові значення.

Границя інтеграла по бічній поверхні зрізаного конуса прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ тому, що нормальна похідна функції Гріна до цієї поверхні фактично є похідною в дотичному напрямку до поверхні Γ , а така похідна є неперервною функцією при переході через поверхню.

Таким чином, переходячи в формулі (3.44) до границі при $R_0 \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ і враховуючи попередні викладки, одержимо

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1).$$

3.5 Побудова функції Гріна

Після знаходження коефіцієнтів c_{nm} з системи (3.43) можна одержати явний вигляд функції Гріна. Підставляючи функцію $\Phi_m(t)$ у формулу (3.37), одержимо

$$\alpha_{nm} = \frac{(-1)^m}{2\pi^2 R} e^{-im\varphi_0} \sum_{k=m}^{\infty} \beta_{nk} \left(\frac{r_0}{R}\right)^k P_k^{-m}(\cos\theta_0) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{nk} c_{km},$$

$$m \geq 0,$$

де

$$\beta_{nk} = \begin{cases} (1/2)\{\sin[(n+k+1)\beta]/(n+k+1) + \sin[(n-k)\beta]/(n-k)\}, & n \neq k, \\ (1/2)\{\beta + \sin[(2n+1)\beta]/(2n+1)\}, & n = k. \end{cases}$$

Звідси випливає подання функції $u^+(x)$ у вигляді

$$u^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=0}^n \alpha_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=1}^n \alpha_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{-im(\varphi-2\varphi_0)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\pi^2 R} \cos[m(\varphi-\varphi_0)] (2-\delta_{m0}) \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \beta_{nk} \left(\frac{r_0}{R}\right)^k \left(\frac{r}{R}\right)^n P_k^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta) +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos\theta) \cos[m(\varphi-\varphi_0)] \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{nk} \bar{c}_{km}, \quad r, r_0 < R,$$

де

$$\bar{c}_{km} = c_{km} e^{im\varphi_0}.$$

Аналогічно при $r_0 < R, r > R$ правильною є формула

$$u^- = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos\theta) \cos[m(\varphi-\varphi_0)] \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{nk} \bar{c}_{km} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\pi^2 r} \cos[m(\varphi-\varphi_0)] (2-\delta_{m0}) \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \beta_{nk} \left(\frac{r_0}{R}\right)^k \left(\frac{R}{r}\right)^n P_k^{-m}(\cos\theta_0) P_n^m(\cos\theta).$$

4. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГИ ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ MAPLE

4.1. Обґрунтування вибору програмного пакету MAPLE

MAPLE – система комп'ютерної математики, розрахована на широке коло користувачів. До недавнього часу її називали системою комп'ютерної алгебри, що вказувало на особливу роль символічних обчислень і перетворень, які здатна здійснювати ця система. Але насправді вона здатна виконувати швидко і ефективно не тільки символічні, а й чисельні розрахунки, поєднуючи це з чудовими засобами графічної візуалізації та підготовки електронних документів[26].

Maple – типова інтегрована система. Вона об'єднує в собі:

- потужну мову програмування (вона же мова для інтерактивного спілкування з системою);
- редактор для підготовки і редагування документів і програм;
- сучасний багатівіконний інтерфейс з можливістю роботи в діалоговому режимі;
- потужну довідкову систему з багатьма тисячами прикладів;
- ядро алгоритмів і правил перетворення математичних виразів;
- чисельний і символічний процесори;
- систему діагностики;
- бібліотеки вбудованих і додаткових функцій;
- пакети функцій сторонніх виробників і підтримку деяких інших мов програмування і програм.

Основою для роботи з символічними перетвореннями в Maple є ядро системи. Воно містить сотні базових функцій і алгоритмів символічних перетворень. У нових реалізаціях обсяг ядра досягає 6-7 Мбайт. Є також основна бібліотека операторів, команд і функцій. Багато вбудовані в неї функції, як і

функції ядра, можуть використовуватися без будь-якого оголошення, інші потребують оголошення. Крім того, є ряд пакетів (packages), що підключаються[27].

Додаткові функції з пакетів можуть застосовуватися після оголошення підключення пакету за допомогою команди with (name), де name – ім'я застосовуваного пакету. Загальна кількість функцій, з урахуванням вбудованих в ядро і розміщених в пакетах в системі MapleVR4 наближається до 2500, в реалізації R5- до 2700, а в Maple 6 і Maple 7 воно вже перевищує 3000. Це означає, що більшість завдань може вирішуватися в режимі прямого діалогу з системою без використання будь-яких засобів програмування.

Maple має вхідну мову програмування надвисокого рівня, орієнтований на рішення математичних задач практично будь-якої складності. Він служить для завдання системі питань або, кажучи інакше, задання вхідних даних для подальшої їх обробки. Це мова інтерпретує типу і за своєю ідеологією нагадує Бейсік. Вхідна мова має велике число заздалегідь визначених математичних і графічних функцій, а також велику бібліотеку, що підключається по мірі необхідності.

Крім того, Maple містить мову процедурного програмування – Maple-мова, що включає цілком традиційні засоби структурування програм: оператори циклів, оператори умовних і безумовних переходів, оператори порівняння, логічні оператори, команди управління зовнішніми пристроями, функції користувача, процедури і т. д.[28]

Maple-мова також включає в себе всі команди і функції вхідної мови, їй доступні всі спеціальні оператори та функції. Багато з них є досить серйозними програмами, наприклад символічне диференціювання, інтегрування, розкладання в ряд Тейлора, побудова складних тривимірних графіків і т. д.

Мовою реалізації системи Maple є мова Сі, на якому написано ядро системи, що містить ретельно оптимізовані процедури. Більшість функцій, які

містяться в пакетах, написані на Maple-мові, завдяки чому їх можна модифікувати і навіть писати свої власні бібліотеки. За різними оцінками, лише від 5 до 10% коштів Maple створено на мові реалізації – все інше написано на Maple-мові.

Синтаксис структурних операторів мови Maple нагадує суміш Бейсика і Паскаля. За близьким до Бейсик правилами (і за допомогою загальноприйнятих математичних скорочень) виконується і введення математичних виразів в діалоговому режимі роботи з системою[30].

4.2. Розв'язання поставленої задачі

Для розв'язання описаної у роботі задачі необхідно підключити пакети `orthopoly` та `LinearAlgebra`, а також зазначити, що задача вирішується у сферичних координатах.

Пакет `orthopoly` призначений для роботи з ортогональними поліномами. Даний пакет дозволяє працювати з поліномами Гегенбауер, Ерміта, Лагерра, Лежандра, а також з поліномами Чебишева першого і другого роду[28].

Пакет `LinearAlgebra` призначений для роботи з матрицями і працює ефективніше при чисельних розрахунках, особливо у разі матриць великих розмірів[27].

Зазначимо наступні вхідні дані (рисунок 4.1):

$$\beta := \frac{\pi}{2} \quad R := 1 \quad x_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2\pi}{3} \\ \pi \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{bmatrix}$$

Рисунок 4.1 – Вхідні дані

Для таких β і R наш сферичний сегмент виглядає наступним чином (рисунок 4.2):

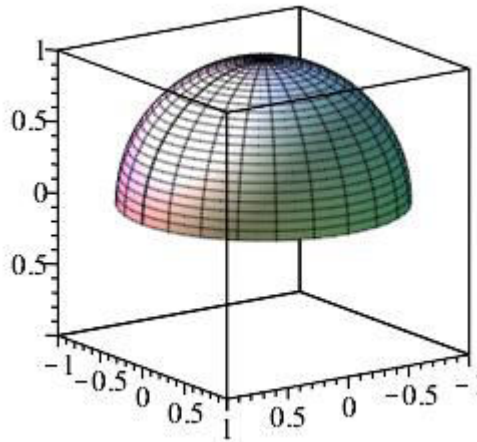


Рисунок 4.2 – Сферичний сегмент

Першим кроком у побудові функції Гріна необхідно знайти константи інтегрування c_{nm} . Для цього ми інтерпретуємо формулу (3.43) у множення матриць. Таким чином, знаходимо окремо ліву (рисунок 4.4) і праву частину рівняння (рисунок 4.5). Після знаходимо матрицю констант інтегрування (рисунок 4.6).

```

for n from 0 to 9 do
  for k from 0 to 9 do
    LeftSide[n, k] :=  $\left(n + \frac{1}{2}\right)^k \cdot \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \beta + \frac{\pi \cdot k}{2}\right)$  od
  end do
  LSM := convert(LeftSide, Matrix) : GM := convert(G, Matrix) :
  LSM

```

$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{\sqrt{2}}{128}$	$\frac{\sqrt{2}}{256}$	$\frac{\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{\sqrt{2}}{1024}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{9\sqrt{2}}{8}$	$\frac{27\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{81\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{243\sqrt{2}}{64}$	$\frac{729\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{2187\sqrt{2}}{256}$	$\frac{6561\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{19683\sqrt{2}}{1024}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{4}$	$\frac{25\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{125\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{625\sqrt{2}}{32}$	$\frac{3125\sqrt{2}}{64}$	$\frac{15625\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{78125\sqrt{2}}{256}$	$-\frac{390625\sqrt{2}}{512}$	$\frac{1953125\sqrt{2}}{1024}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{49\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{343\sqrt{2}}{16}$	$\frac{2401\sqrt{2}}{32}$	$\frac{16807\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{117649\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{823543\sqrt{2}}{256}$	$\frac{5764801\sqrt{2}}{512}$	$\frac{40353607\sqrt{2}}{1024}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{2}}{4}$	$\frac{81\sqrt{2}}{8}$	$\frac{729\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{6561\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{59049\sqrt{2}}{64}$	$\frac{531441\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{4782969\sqrt{2}}{256}$	$\frac{43046721\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{387420489\sqrt{2}}{1024}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{2}}{4}$	$\frac{121\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{1331\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{14641\sqrt{2}}{32}$	$\frac{161051\sqrt{2}}{64}$	$\frac{1771561\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{19487171\sqrt{2}}{256}$	$-\frac{214358881\sqrt{2}}{512}$	$\frac{2357947691\sqrt{2}}{1024}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{13\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{169\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{2197\sqrt{2}}{16}$	$\frac{28561\sqrt{2}}{32}$	$\frac{371293\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{4826809\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{62748517\sqrt{2}}{256}$	$\frac{815730721\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{10604499373\sqrt{2}}{1024}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{225\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{3375\sqrt{2}}{16}$	$\frac{50625\sqrt{2}}{32}$	$\frac{759375\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{11390625\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{170859375\sqrt{2}}{256}$	$\frac{2562890625\sqrt{2}}{512}$	$\frac{38443359375\sqrt{2}}{1024}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{17\sqrt{2}}{4}$	$\frac{289\sqrt{2}}{8}$	$\frac{4913\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{83521\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{1419857\sqrt{2}}{64}$	$\frac{24137569\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{410338673\sqrt{2}}{256}$	$\frac{6975757441\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{118587876497\sqrt{2}}{1024}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{19\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{361\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{6859\sqrt{2}}{16}$	$\frac{130321\sqrt{2}}{32}$	$\frac{2476099\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{47045881\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{893871739\sqrt{2}}{256}$	$\frac{16983563041\sqrt{2}}{512}$	$-\frac{322687697779\sqrt{2}}{1024}$

Рисунок 4.4 – Обчислення лівої частини формули

```

for m from 1 to 10 do
for k from 0 to m - 1 do

$$G[m, k + 1] := \text{subs}\left(\pi = 3.14, -\frac{(-1)^m}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \sum_{n=m}^{10} \left(\frac{r_0}{R}\right)^n \cdot P^{-m}(n, \cos(\theta_0)) \cdot e^{-i \cdot m \cdot \varphi_0} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)^k \cdot \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \beta + \frac{\pi \cdot k}{2}\right)\right)$$

od
print(G)

```

-0.018106 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.051485 $\sqrt{2}$	-0.12962 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0039339 $\sqrt{2}$	-0.026082 $\sqrt{2}$	0.099956 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0.033755 $\sqrt{2}$	0.21228 $\sqrt{2}$	-1.0349 $\sqrt{2}$	-6.3921 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0	0
-0.40125 $\sqrt{2}$	-2.2525 $\sqrt{2}$	12.000 $\sqrt{2}$	69.266 $\sqrt{2}$	-353.16 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0	0
-0.043395 $\sqrt{2}$	0.36323 $\sqrt{2}$	3.1378 $\sqrt{2}$	-26.347 $\sqrt{2}$	-226.71 $\sqrt{2}$	1908.6 $\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
0.58984 $\sqrt{2}$	-4.9853 $\sqrt{2}$	-42.587 $\sqrt{2}$	360.39 $\sqrt{2}$	3075.3 $\sqrt{2}$	-26049. $\sqrt{2}$	-222090. $\sqrt{2}$	0	0	0	0
-7.9860 $\sqrt{2}$	67.881 $\sqrt{2}$	576.98 $\sqrt{2}$	-4904.4 $\sqrt{2}$	-41686. $\sqrt{2}$	354340. $\sqrt{2}$	3.0118 $10^6 \sqrt{2}$	-2.5601 $10^7 \sqrt{2}$	0	0	0
-0.00033636 $\sqrt{2}$	0.0063076 $\sqrt{2}$	0.039859 $\sqrt{2}$	-0.66904 $\sqrt{2}$	-4.6450 $\sqrt{2}$	71.382 $\sqrt{2}$	534.72 $\sqrt{2}$	-7655.0 $\sqrt{2}$	-60993. $\sqrt{2}$	0	0
0.0025243 $\sqrt{2}$	-0.026505 $\sqrt{2}$	-0.27830 $\sqrt{2}$	2.9222 $\sqrt{2}$	30.683 $\sqrt{2}$	-322.17 $\sqrt{2}$	-3382.8 $\sqrt{2}$	35520. $\sqrt{2}$	372950. $\sqrt{2}$	-3.9160 $10^6 \sqrt{2}$	0

Рисунок 4.5 – Обчислення правої частини формули

```

LS := Transpose(LSM) : GT := Transpose(GM) :
subs( $\pi = 3.14, \sqrt{2} = 1.41, GT$ ) :
C := LinearSolve(LS, GT) :
subs( $\sqrt{2} = 1.41, \pi = 3.14, C$ )

```

-0.031404	0.19701	0.067320	0.43292	-18.185	-21.922	81.384	4132.0	0.87880	1.2721
0.010468	0.13418	0.046674	0.97954	-16.703	-19.654	145.33	3541.8	0.91874	1.0600
-0.0041872	-0.021692	0.031836	-0.084600	-10.946	-14.356	-1.9850	3148.2	0.54596	1.0600
0.0029910	0.030180	-0.0038640	0.81800	-8.1312	-10.532	125.89	1967.7	0.63150	0.60554
-0.00099698	-0.0064324	0.0064452	-0.12840	-3.5180	-4.9788	-30.794	1517.9	0.20548	0.60572
0.00081578	0.0076244	-0.0021060	0.22226	-0.91136	-3.2630	60.548	674.64	0.27676	0.22704
-0.00017254	-0.0011977	0.0010240	-0.028502	-0.56516	-0.61004	-16.643	421.62	0.037122	0.22716
0.00014957	0.0013458	-0.00047000	0.039784	-0.047772	-0.54280	15.330	126.50	0.070380	0.050452
-0.000014660	-0.00010557	0.000082584	-0.0026808	-0.044308	-0.037280	-1.8291	35.560	-0.00062682	0.050484
0.000013120	0.00011541	-0.000045332	0.0034200	0.0018204	-0.042596	1.5619	9.3710	0.0076482	0.0050454

Рисунок 4.6 – Знаходження коефіцієнтів інтегрування

Маючи константи інтегрування, наступним кроком побудови функції Гріна буде знаходження коефіцієнтів \mathbf{a}_{nm} (рисунок 4.8) через використання допоміжної функції $\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{t})$ та коефіцієнту \mathbf{a}_{nm} (рисунок 4.7). Повністю побудовану функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у сферичному сегменті з вхідними умовами (рисунок 4.1) можна побачити на рисунку 4.9


```

for m from 1 to 10 do
  f[m] :=  $\frac{1}{2\pi \cdot R} \cdot \sum_{i=m}^{10} \left(\frac{r_0}{R}\right)^i \cdot (-1)^m \cdot P^{-|m|}(l, \cos(\theta_0)) \cdot \cos\left(\left(l + \frac{1}{2}\right) \cdot t\right) \cdot e^{-i \cdot m \cdot \varphi_0} + \frac{2}{\pi} \cdot \text{add}\left(C[i+1, m] \cdot \cos\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot t\right), i=0..m-1\right)$ 
od
ALFA := Matrix(10, 10):
for m from 1 to 10 do
for n from 0 to 9 do
  ALFA[n+1, m] :=  $\text{subs}\left(\pi=3.14, \int_0^\beta f[m] \cdot \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot t\right) dt\right)$ 
od od
od od
ALFA

```

-0.031623	0.040182	-0.014508	-0.069388	-0.26560	-0.28301	0.64297	-5.9260	-1.5388	-0.49975
-0.023039	0.089278	0.00087787	0.059861	0.40137	0.25795	-0.92050	4.7567	1.1474	0.43255
-0.011049	0.10049	0.013122	0.25955	0.20679	0.45712	-0.47326	8.2060	2.2042	0.65703
-0.0020486	0.041213	0.0097845	0.37628	-1.2055	-0.29932	1.4770	-4.2872	-0.85154	-0.43589
0.0010946	-0.017512	-0.0013441	0.28322	-2.1816	-1.4545	-0.052561	-13.661	-3.7565	-1.0506
0.00037132	-0.016016	-0.0060625	0.063872	-1.5051	-1.8284	-5.6413	6.0138	0.25671	0.70666
-0.00054771	0.011793	-0.0023886	-0.062115	-0.14199	-1.0368	-8.8800	47.792	10.349	3.7875
-0.00020732	0.010828	0.0013467	-0.021522	0.35536	0.038588	-5.6276	70.517	16.447	4.9845
0.00033545	-0.0087125	0.00073148	0.043581	-0.011789	0.38294	-0.20865	48.281	11.360	2.9600
0.00014457	-0.0081963	-0.00086229	0.018341	-0.21214	0.044082	1.3679	5.8331	0.85744	0.017323

Рисунок 4.7 – Обчислення допоміжних коефіцієнтів та функції

```

A := Matrix(10, 10):
for m from 1 to 10 do
for n from 1 to 10 do
  A[n, m] :=  $\frac{ALFA[n, m]}{\left(\frac{r_0}{R}\right)^n \cdot P^{-|m|}(n, \cos(\theta_0)) \cdot e^{-i \cdot m \cdot \varphi_0}}$  od od
od
A

```

-0.11068	0.070318	-0.012695	-0.030358	-0.058100	-0.030955	0.035162	-0.16204	-0.021039	-0.0034162
-0.14111	0.068353	0.000084015	0.00071611	0.00060019	0.000048218	-0.000021507	0.000013893	4.1889 10 ⁻⁷	1.9740 10 ⁻⁸
1.6580	6.5974	-0.37690	3.2616	-1.1369	1.0995	0.49802	3.7779	-0.44396	0.057897
-1.4218	8.2681	0.36743	6.3077	-5.8414	-0.41926	0.59802	-0.50179	-0.028808	-0.0042628
1.6529	-2.3757	-0.016382	0.31015	-0.21464	-0.012857	-0.000041741	-0.00097471	-0.000024080	-6.0506 10 ⁻⁷
-14.121	-196.88	24.089	82.037	624.90	-245.37	244.72	84.326	-1.1636	1.0353
-100.65	483.59	-21.857	-126.83	-64.693	-105.41	-201.47	241.95	11.691	0.95478
-88.013	338.49	3.1001	-3.6484	4.4360	0.035471	-0.38094	0.35151	0.0060372	0.00013474
-3626.5	-25233.	-567.54	9058.9	656.46	5712.6	833.87	51692.	-3258.3	227.45
7686.9	-82031.	-1624.4	6503.7	-14159.	553.80	3234.7	2596.3	71.839	0.27319

Рисунок 4.8 – Обчислення коефіцієнтів для гармонічної функції

```

U_plus := simplify( $\text{add}\left(\left(\frac{r \cdot r_0}{R}\right)^n \cdot \text{add}\left(A[n+1, |m|+1] \cdot P^m(n, \cos(\theta)) \cdot P^{-m}(n, \cos(\theta_0)) \cdot e^{-i \cdot m \cdot (\varphi - \varphi_0)}, m=-n..n\right), n=0..9\right)$ )
U_plus := -0.15677 - 0.059915 I

F := simplify( $-\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \text{add}\left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}} \cdot P(n, \cos(\theta)), n=0..9\right)$ )
F :=  $\frac{(121841732543328 \sqrt{3} + 441109432935963) \sqrt{2} - 422343345482019 \sqrt{3} - 4036904067711228}{5416169448144896 \pi}$ 

Gr := simplify(F + U_plus)
Gr := -0.38279 - 0.059915 I

```

Рисунок 4.9 – Обчислення функції Гріна

Щоб продемонструвати графік зміни потенціалу (рисунок 4.10), необхідно взяти ще дві точки x , щоб одна належала осі Oz , а інша знаходилась всередині сфери $|x| < R$.

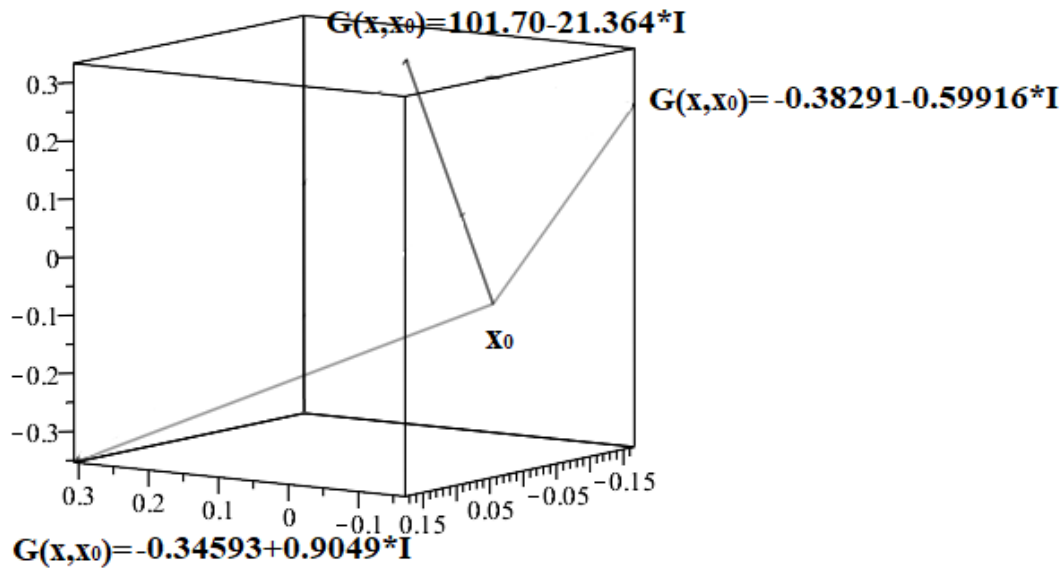


Рисунок 4.10 – Графік зміни потенціалу для $\beta = \frac{\pi}{2}$

Якщо поставити значення $\beta = \frac{3 * \pi}{2}$, а x залишити незмінним, тоді загальний вид графіку так само не зміниться, проте значення функції Гріна стануть іншими (рисунок 4.11).

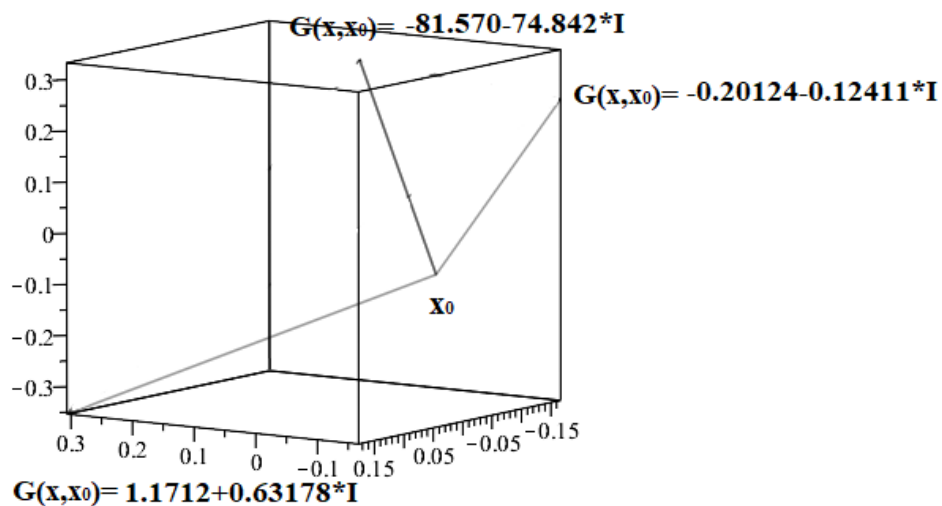


Рисунок 4.11 - Графік зміни потенціалу для $\beta = \frac{3 * \pi}{2}$

5. ЕКОНОМІЧНИЙ РОЗДІЛ

5.1 Мета економічного розділу

Кожний проект, що реалізується повинен бути правильно оцінений з точки зору його виконавців з метою отримання належної плати за свою роботу. Отже економічний розділ даної дипломної роботи направлений на обчислення собівартості побудови функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа у некласичній області та створення програмного продукту у програмному пакеті.

Для цього необхідно розрахувати наступні показники:

- трудомісткість роботи;
- заробітну плату основним та допоміжним працівникам;
- загальну вартість обладнання, необхідного для виконання проекту;
- загальну амортизацію.

5.2 Перелік робіт

Для виконання поставленої задачі необхідно визначити перелік завдань, які необхідно виконати для досягнення мети. Також треба оцінити трудомісткість й зазначити тривалість кожного із завдань за формулою (5.1). Результати виконаної роботи наведені в таблиці 5.1.

$$T = \frac{t}{n}, \quad (5.1)$$

де T – тривалість завдання, дні;

t – трудомісткість, людино-дні;

n – кількість людей, що займаються цим видом роботи.

Для виконання даного проекту не має потреби у великій кількості працівників. Тоді, припускаємо необхідність двох працівників – керівника проекту та математика-програміста, який спеціалізується на тематиці роботи.

Таблиця 5.1 – Завдання та трудомісткість проекту

№	Завдання	Тривалість, дн	Трудомісткість, л-дн	
			Керівник	Математик-програміст
1.	Постановка завдання	1	1	-
2.	Аналіз літературних джерел щодо теми роботи	5	-	5
4.	Побудова функції Гріна задачі яка поставлена	6	-	6
6.	Створення програмного продукту для розв'язання задачі	5	-	5
7.	Оформлення документації	1	1	-
Разом		18	2	16

5.3 Працівники проекту та розрахунок заробітної плати і ЄСВ

Для вдалої реалізації проекту необхідно, аби над ним якісно працювала певна група кваліфікованих спеціалістів. Величини їх заробітних плат зазначено у таблиці 5.2. Денна плата розраховується за формулою 5.2. Припустимо, що робочий місяць має тривалість 22 дні.

$$ЗПд = \frac{ЗПм}{22}, \quad (5.2)$$

де ЗПд – денна заробітна плата, грн.;

ЗПм – місячна заробітна плата, грн.

Таблиця 5.2 – Працівники та їх заробітні плати

№	Спеціаліст	Заробітна плата	
		Місячна, грн	Денна, грн
1.	Керівник проекту	20020	910
2.	Математик - програміст	18040	820

Тепер необхідно розрахувати основну заробітну плату (ОЗП) працівникам (5.3), додаткову заробітну плату (ДЗП), яка визначена в розмірі 25% ОЗП (5.4) та єдиний соціальний внесок ЄСВ (5.5).

$$\text{ОЗП} = \sum_{i=1}^n \text{ЗТ} * \text{ЗПд}, \quad (5.3)$$

де ЗТ – загальна трудомісткість певного працівника;

i – порядковий номер працівника.

$$\text{ОЗП} = 2 * 910 + 16 * 820 = 14940 \text{ (грн.)}$$

$$\text{ДЗП} = \text{ОЗП} * N, \quad (5.4)$$

де N – коефіцієнт додаткової заробітної плати, який в умовах цієї роботи складає 25%.

$$\text{ДЗП} = 14940 * 25\% = 3735 \text{ (грн.)}$$

$$\text{ЄСВ} = (\text{ОЗП} + \text{ДЗП}) * \text{КЄСВ}, \quad (5.5)$$

де КЄСВ - норматив відрахувань до фонду єдиного соціального внеску, який дорівнює 22%.

$$\text{ЄСВ} = (14940 + 3735) * 22\% = 4108,5 \text{ (грн.)}$$

5.4 Обладнання та розрахунок амортизації

Для виконання поставленої задачі є перелік необхідного обладнання, який представлено у таблиці 5.3.

Таблиця 5.3 – Вартість обладнання

№	Найменування	Вартість, грн
1.	Ноутбук HP 250 G6 (4LT72ES)	14999
2.	БФП Canon i-SENSYS MF633Cdw (1475C007)	10299
3.	Картридж Canon 045 MF610/630 series Black, Cyan, Yellow, Magenta	7400
Разом		32698

З наведеної вище таблиці зрозуміло, що треба розрахувати амортизацію. Вона розраховується у декілька етапів:

1) обчислюється річна сума амортизаційних відрахувань за формулою (5.6);

$$AM_p = \frac{C_p * N_{am}}{100\%}, \quad (5.6)$$

де C_p – первісна вартість обладнання;

N_{am} – річна норма амортизації, яка дорівнює 25%.

2) обчислюється величина амортизаційних відрахувань у розрахунку на одну годину роботи по кожній одиниці обладнання окремо (5.7);

$$AM_{год} = \frac{AM_p}{T}, \quad (5.7)$$

де T – річний фонд роботи обладнання в годинах (2112 год).

3) обчислюється розмір амортизаційних відрахувань у залежності від часу використання обладнання (5.8);

$$AM_{пов} = AM_{год} * t_{пов}, \quad (5.8)$$

де $t_{пов}$ – час використання обладнання.

4) обчислюється загальна амортизація шляхом додавання амортизаційних відрахувань по кожному обладнанню окремо (5.9).

$$AM = \sum_{i=1}^n AM_{пов_i}, \quad (5.9)$$

Нижче наведено розрахунки амортизації ноутбуку.

$$AM_{p}^{\text{ноутбук}} = \frac{14999 * 25}{100\%} = 3749,75(\text{грн.}),$$

$$AM_{\text{год}}^{\text{ноутбук}} = \frac{3749,75}{2112} = 1,78 (\text{грн.}),$$

$$AM_{\text{пов}}^{\text{ноутбук}} = 1,78 * 144 = 256,32 (\text{грн.}).$$

Тепер можна розрахувати амортизацію принтеру разом із картриджами.

$$AM_{p}^{\text{БФП}} = \frac{17699 * 25}{100\%} = 4424,75(\text{грн.}),$$

$$AM_{\text{год}}^{\text{БФП}} = \frac{4424,75}{2112} = 2,10 (\text{грн.}),$$

$$AM_{\text{пов}}^{\text{БФП}} = 2,10 * 36 = 75,6 (\text{грн.}).$$

Обчислимо загальні амортизаційні відходження.

$$AM = AM_{\text{пов}}^{\text{ноутбук}} + AM_{\text{пов}}^{\text{БФП}} = 256,32 + 75,6 = 331,92(\text{грн.})$$

До того ж є необхідність враховувати додаткові витрати. До них відносять:

- придбання канцелярії;
- вартість електроенергії.

Обчислити вартість енергії можна за допомогою формули (5.10).

$$\text{Ценер} = \text{Тел} * t * W, \quad (5.10)$$

де Тел – тариф електроенергії за 1 кВт, наразі дорівнює 1,68 (грн.);

t – кількість годин роботи;

W – споживана потужність.

$$\text{Ценер} = 1,68 * 144 * 0,8 = 193,54 (\text{грн.})$$

Необхідна канцелярія занесена до таблиці 5.4.

Таблиця 5.4 – Вартість канцелярії

№	Найменування	Кількість	Ціна, грн.	Сума, грн.
1.	Папір Tecnis Copier A4 80 г/м2	3 пач.	88,80	266,4

Продовження таблиці 5.4

2.	Руч кульк. Weifa 927 ВК кристал	3 шт.	2,75	8,25
3.	Руч кульк. Айhao 555-А синя	3 шт.	2,75	8,25
4.	Файл Format А4 35мкм	100 шт.	0,66	66,00
5.	Скріпка Format 25мм, 100 шт. трикутна	1 пач.	7,62	7,62
6.	Реєстратор SOHO ECO 75мм, син., Україна	1 шт.	55,50	55,50
Разом				412,02

5.5 Розрахунок собівартості проекту

Собівартість досліджуваної роботи дорівнює сумі усіх витрат під час підготовки та реалізації проекту. Результати даного економічного розділу занесені у таблицю 5.5.

Таблиця 5.5 – Статті калькуляції собівартості проекту

№	Види витрат	Сума, грн
1.	Основна заробітна плата	14940
2.	Додаткова заробітна плата	3735
3.	Єдиний соціальний внесок	4108,5
4.	Амортизація	331,92
5.	Вартість електроенергії	193,54
6.	Вартість канцелярії	412,02

7.	Загальна собівартість	23720,98
----	-----------------------	----------

Таким чином, повна собівартість проекту складає 23 тисячі 720 гривень 98 копійок.

ВИСНОВКИ

Під час роботи над даною темою було проведено системний аналіз функції Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Повністю досліджено її структуру та елементи, які впливають на її побудову.

Об'єкт дослідження є системою, оскільки на це вказують такі властивості як: емерджентність, адитивність та цілісність.

Важливою частиною дипломної роботи є побудова функції Гріна для поставленої задачі. Для цього використовувався метод парних рівнянь та було описано доведення деяких корисних для роботи лем.

Під час роботи над темою було створено програму для чисельного розв'язання поставленої задачі. Її опис та приклад роботи наведено у пояснювальній записці.

У економічному розділі наводиться собівартість роботи, що була виконана. Вона складає 23 тисячі 720 гривень 98 копійок.

У майбутньому варто приділити більшу увагу даній темі. У даній роботі розглядається функція Гріна виключно першої крайової задачі для рівняння Лапласа і виключно у області сферичного сегменту. Тож перспективою даного дослідження є побудова функції Гріна інших крайових задач для таких же некласичних областей.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Тихонов А.М. Уравнения математической физики: навч. посіб./ А.М. Тихонов, О.А. Самарський. – Вид. 6-те. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
2. Бабич В.М. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Міхлін / за ред. Міхліна С.Г. – М.:Наука, 1964. – 368 с.
3. Боголюбов А.Н. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа / А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина – М.:Изд-во МГУ, 2011. – 92 с.
4. Свешников А.Г. Лекции по математической физике: учеб. пособие/ А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов— М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.
5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики/ Я.С. Уфлянд – Л.:Наука, 1977. – 220 с.
6. Функция Грина задачи Дирихле [Электронный ресурс]. - <https://docplayer.ru/32932200-1-funkciya-grina-zadach-i-dirihle.html>
7. Методы системного анализа объекта исследования [Электронный ресурс]. – https://studme.org/35377/filosofiya/metody_sistemnogo_analiza_obektov_issledovaniya#664
8. Системные свойства. Классификация систем [Электронный ресурс]. – <https://victor-safronov.ru/systems-analysis/lectures/rodionov/01.html>
9. Система: элементы системы; назначение системы; свойства элементов системы [Электронный ресурс]. – <https://studfile.net/preview/6058633/page:3/>
10. Малишев О.О. Метод парних суматорних рівнянь для вирішення змішаної крайової задачі для рівняння Лапласа у кільці. Известия ПНПУ им. В.Г. Белинского. Фізико-математичні та технічні науки. Пенза, 2010. № 18(22). С. 11–14.

11. Владимирова В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимирова, В.В. Жаринов – М.:Физматлит, 2004. – 400 с.
12. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной/ А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов – М.:Наука, 2003. – 321 с.
13. Калашников С.Г. Электричество: учеб. пособие для ВУЗов/ С.Г. Калашников – М.:Физматлит, 2003. – 624 с.
14. Eyges, Leonard, The Classical Electromagnetic Field, Dover Publications, New York, 1972.
15. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations (2nd edition), Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем.. — 4-е изд., испр.. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 576 с.
17. Гулин А. В., Самарский А. А. Численные методы: учебное пособие для вузов. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 432 с.
18. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач/ Пер. с англ.. — М.: Мир, 1982. — 286 с.
19. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969
20. Михлин С.Г. Курс математической физики/ С.Г. Михлин – М.: Наука, 1968. – 567 с.
21. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики/ А.В. Бицадзе – М.:Наука, 1982. – 336 с.
22. Рівняння Лапласа та Пуассона. Формула Гріна. Задачі Діріхле та Неймана, їх зведення до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду [Електронний ресурс]. – <http://www.apmath.spbu.ru/ru/education/final/question23.pdf>

23. Парфенова Ю.А. Векторные парные сумматорные уравнения. Известия ПНПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические науки. Пенза, 2010. № 18(22). С. 21–25.
24. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка [Текст]/ М.А. Мартыненко // Математическая физика. – 1979. - №25. – С.106-109.
25. Sneddon I.N. Mixed boundary value problem in potential theory [Text] / I.N. Sneddon. – Amsterdam:North-Holland Publ.Co., 1996. – 283 p.
26. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple: учеб. пособие для ВУЗов./ Д.П. Голоскоков – СПб.: ООО «ПаркКом», 2010. – 643 с.
27. Сараев П.В. Основы использования математического пакета Maple в моделировании: учеб. пособие/ П.В. Сараев – Липецк: Международный институт компьютерных технологий, 2006. – 119 с.
28. Молчанова Л.А. Введение в Maple: уч.-метод. пособие/ Л.А. Молчанова – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2006. – 36 с.
29. Савотченко С.Е. Методы решения математических задач в Maple: учеб. пособие/ С.Е. Савотченко, Т.Г. Кузьмичева – Белгород: Изд-во Белаудит, 2001. – 116 с.
30. Ніколаєв О.Г., Купіна Д.С. Про функцію Гріна для рівняння Лапласа в просторі зі сферичним сегментом. Системний аналіз та математичне моделювання : тези доп. XVII Науково-технічної конференції студентів і молодих вчених "Сучасні проблеми ракетно-космічної техніки і технології" (м. Харків, 6-8 квіт. 2020 р.). Харків, 2020.