С. В. Спренне, М. А. Супруненко,
О. М. Старов

КІНЕМАТИКА

1995

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Харківський авіаційний інститут ім. М.Є. Жуковського

С.В. Спренне, М.А. Супруненко, О.М. Старов

К І Н Е М А Т И К А

Харків ХАІ 1995

УДК 531.1 (075.8)

Кінематика/С.В. Спренне, М.А. Супруненко, О.М. Старов. - Конспект лекцій. - Харків: Харк. авіац. ін-т, 1995. - 86 стор.

Розглянуто основні розділи кінематики, а також питання задання та орієнтації у просторі твердого тіла, що пов'язано зі специфікою спеціальних курсів в авіаційних вузах, які базуються на методах і прийомах теоретичної механіки. Поряд з традиційними методами векторного викладу запропоновано аналітичні методи дослідження руху окремих об'єктів і механічних систем.

Для студентів усіх факультетів авіаційних вузів.

Іл. 32. Библіогр.: 5 назв

Р е ц е н з е н т и : канд. техн. наук, доц. В.М. Зефіров,
канд. фіз.-мат. наук О.О. Гончаренко

ВСТУП

Вивчення теоретичної механіки починається з розгляду руху матеріальних тіл і точок та дослідження властивостей рухів незалежно від причин, що їх викликали. Цей розділ теоретичної механіки називають кінематикою. В кінематиці матеріальні точки та тіла відрізняються тільки положенням у просторі та геометричною формою, тому досліджуються рухи точок і тіл як геометричних об'єктів.

Як випливає з означення, кінематика є геометрією в чотиривимірному просторі, де четвертим виміром вважається час. Кінематика як самостійний розділ теоретичної механіки виникла лише в середині XIX століття, її перший систематичний курс був написаний професором Паризької політехнічної школи А. Резалем /1828-1896/ у 1862 році.

У цьому курсі викладено лише основні питання кінематики в обсязі, необхідному для розуміння динаміки та аналітичної механіки.

Простір, час та системи відліку

Відповідно до даного вище означення кінематики розглянемо зміну положення деяких геометричних об'єктів у просторі та з плином часу.

У теоретичній механіці припускається, що простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним. Однорідність та ізотропність простору означають відсутність у ньому місць і напрямків, що могли б виділятися серед інших. Однорідність часу означає, що впродовж нього відсутні моменти, що відрізняються. Початок відліку часу довільний.

Для того, щоб став зрозумілим смисл поняття руху, треба ввести у розгляд системи відліку, які включають тіло відліку та зв'язану з ним систему координат, а також спосіб вимірювання часу. Звичайно систему координат зв'язують з тілом відліку, зручним для розв'язування конкретної задачі, а хід та вимірювання часу в усіх системах координат вважають однаковими. Більш того, припускається, що годинники в усіх системах відліку можуть бути синхронними, тобто в будь-якій точці простору годинники показують однаковий час.

Отже, час змінюється в усіх системах відліку однаково, тому вивчення руху в кінематиці зводиться до аналізу властивостей деяких параметричних функцій /де роль параметра відіграє час/, що описують положення об'єкта відносно вибраної системи координат з плином часу. Як правило, такими функціями вибираються координати рухомих точок, що характеризують положення та орієнтацію твердого тіла у просторі.

Простір і час, в яких рухаються всі реальні об'єкти, невіддільні від рухомої матерії: вони є об'єктивними формами її буття. В класичній механіці використовують моделі простору, часу і рухомої матерії, формально не зв'язані одна з одною. Вони є лише наближенням до реальних форм існування матерії. Але коли тіла та точки рухаються з швидкостями, значно меншими від швидкості поширення світла, тривимірний евклідовий простір та універсальний час є повноцінними і досить точними абстракціями реального часу та простору, і це підтверджує практика.

Основні задачі кінематики

Оскільки простір є однорідним та ізотропним, а час - однорідним, то всі системи відліку в кінематиці рівноцінні, і серед них не можна виділити якусь, що має перевагу над іншими. Тому можна говорити лише про рух однієї системи координат відносно іншої, про рух точок або тіл відносно деякої фіксованої системи координат, а не про "абсолютний" рух. У зв'язку з цим будемо говорити про чотири основні задачі кінематики:

1. Вибрано деяку систему координат. Спостерігач, зв'язаний з нею, бачить рухому точку. Задача полягає в тому, щоб описати рух цієї точки та вивчити різні способи опису та дослідження цього руху.

2. Задано дві системи координат. Спостерігач, зв'язаний з однією з них, спостерігає за рухом іншої. Задача полягає в тому, щоб описати та дослідити рух однієї системи відносно іншої. Ця задача еквівалентна задачі опису руху твердого тіла відносно деякої фіксованої системи відліку.

3. Задано дві системи координат, із кожною з яких зв'язаний свій спостерігач. Обидва спостерігають за рухом однієї й тієї ж точки. Рухи, які вони бачать, як правило, різні. Задача

полягає в описі руху точки відносно першої системи, коли відомі рухи другої системи відносно першої і точки, що розглядається, відносно цієї самої системи координат.

4. Задано $n+1$ системи координат, пронумеровані від 0 до n, де n – довільне скінченне ціле число. З кожною із цих систем зв'язаний свій спостерігач, відомий рух кожної k-ї системи відносно /$k-1$/-ї. У цьому випадку треба описати та дослідити рух k-ї системи координат відносно нульової.

Послідовний розгляд цих задач кінематики і є першою частиною курсу теоретичної механіки.

1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Отже, механічний рух – це зміна положення тіл і точок у просторі з часом. Рух у кінематиці розглядається як заданий наперед і незалежно від взаємодії з іншими тілами й точками, тобто без урахування сил, що діють на них. Таке дослідження руху є попереднім етапом, допоміжним засобом для динаміки. Але кінематика має й самостійне значення. Найбільш типові у цьому смислі задачі кінематики механізмів: визначення траєкторій, швидкостей, прискорень точок та кутових швидкостей і прискорень ланок механізмів; вивчення перетворення рухів, які здійснюють механізми; утворення механізмів, що здійснюють рух із заданими кінематичними параметрами.

Оскільки положення й рух твердого тіла у просторі можна вважати відомими тоді, коли відомі положення й рух усіх його точок, то спочатку дослідимо задачі руху точки.

1.1. Задання положення й руху точки у просторі

Як відомо з геометрії, положення точки у просторі можна визначити радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним з деякої фіксованої точки O до даної точки M. Під час руху точки, тобто коли змінюється з часом її положення, радіус-вектор $\vec{r}$, змінюючись за величиною й напрямком, є функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad /1.1/$$

Коли ввести деяку систему координат, наприклад, прямокутну декартову з початком в точці O, то векторові $\vec{r}(t)$ будуть відповідати три скалярні функції часу /координати точки, рис. I.I/

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad /I.2/$$

які цілком визначають положення точки M у просторі в будь-який момент часу, тобто задають її рух.

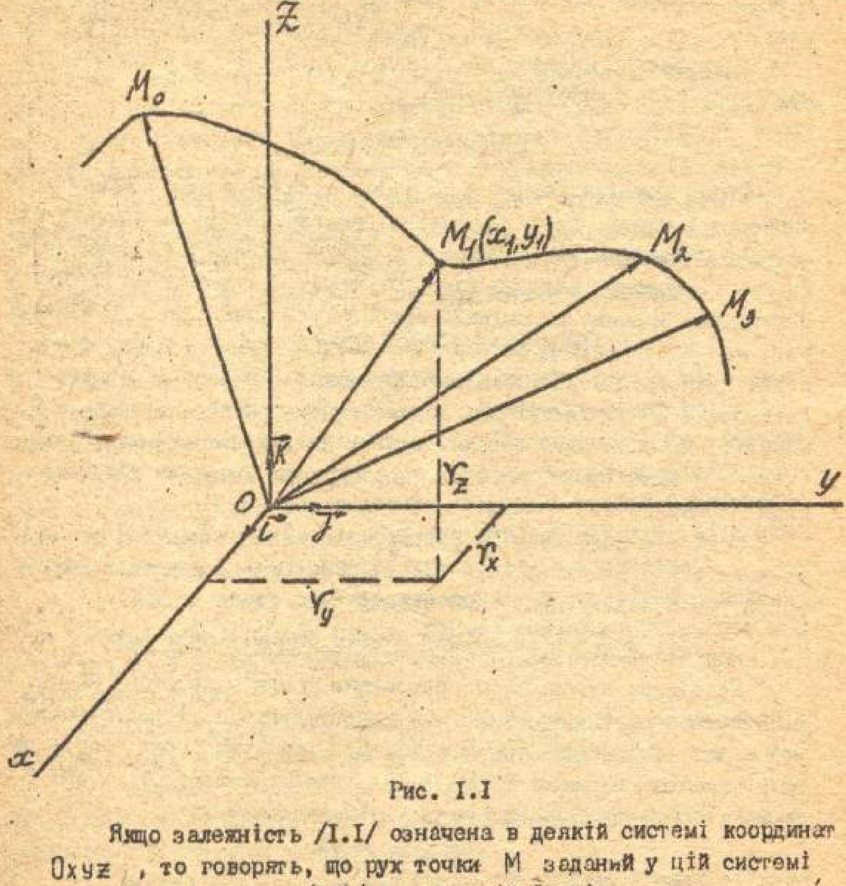


Рис. I.I

Якщо залежність /I.I/ означена в деякій системі координат $Oxyz$, то говорять, що рух точки M заданий у цій системі координат рівнянням /I.I/ у векторній формі.

Якщо функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в /I.2/ однозначні, неперервні та хоча б двічі диференційовні, то рівняння /1.2/ називають рівняннями руху точки M у декартових координатах, або скінченними /кінематичними/ рівняннями руху точки.

З часом кінець вектора $\vec{r}(t)$ опише криву, вздовж якої рухається точка M. Геометричне місце послідовних положень точки M у процесі руху називається траєкторією точки. Ця лінія незмінно зв'язана з системою координат, відносно якої задано рух точки, і суттєво залежить від вибору цієї системи.

Залежності /1.2/ можна вважати параметричними рівняннями траєкторії точки M. Дійсно, коли присвоювати часові деяку послідовність значень, то одержимо координати точки в ці моменти часу і, знаючи їх, побудуємо траєкторію. Для того, щоб дістати рівняння траєкторії у координатній формі, з рівнянь руху /1.2/ виключаємо час t. При цьому траєкторією може бути не вся лінія, рівняння якої одержане, а лише деяка її частина, що відповідає області значень координат точки, які припускаються рівняннями руху.

Як координати, що визначають положення точки M у просторі, можна вибирати й інші набори координатних функцій /рис.1.2/:

1. Сферичні координати $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$, які мають різні назви залежно від області застосування. Назвемо ρ відстанню точки, кут φ - азимутом, або довготою, кут θ - кутом місця, або широтою точки.

2. Циліндричні координати $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, де ρ - відстань точки від осі Oz, φ - азимут, z - висота точки. В окремому випадку, коли точка рухається на площині, використовують полярні координати ρ і φ, смисл яких зрозумілий з рис. 1.2, а рівняння руху в них мають вигляд

$$\rho=\rho(t), \quad \varphi=\varphi(t).$$

Згадані координати зв'язані з декартовими прямокутними такими співвідношеннями:

1/ $x=\rho\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi$, $z=\rho\cdot\sin\theta$;

2/ $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$, $z=z(t)$;

3/ $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$,

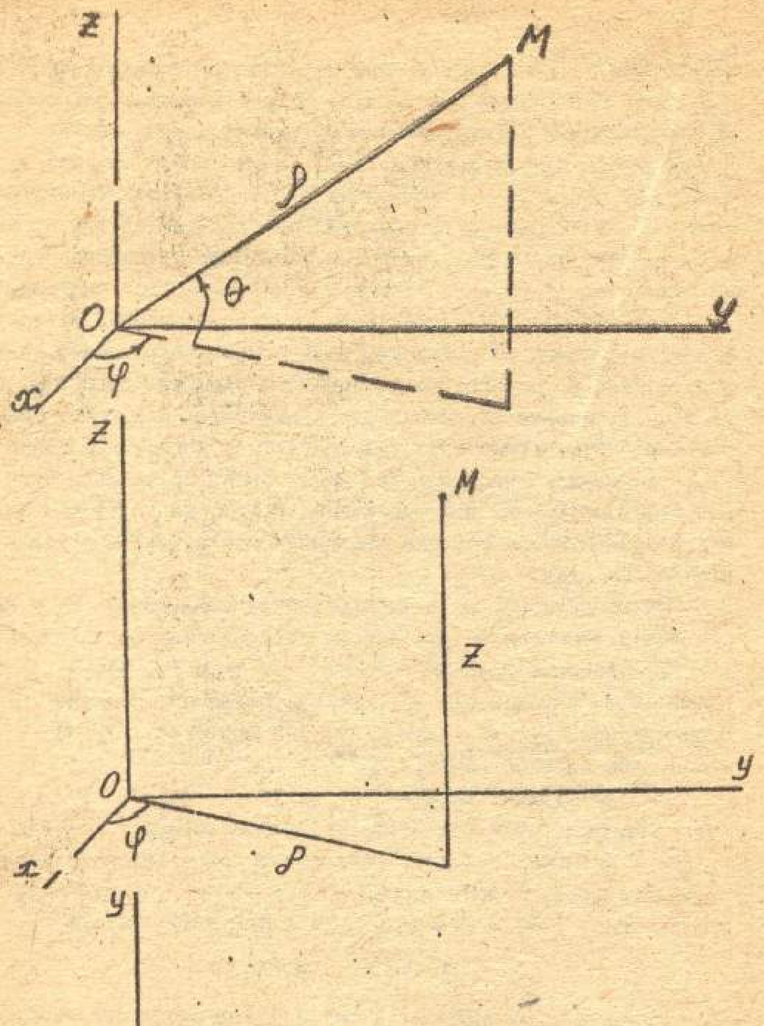


Рис. I.2

Зв'язок векторного та координатного способів задання руху точки легко встановити, якщо ввести у розгляд орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ осей прямокутної декартової системи координат:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

або

$$x(t) = r_x(t) = \vec{r}\,\vec{i}, \quad y(t) = r_y(t) = \vec{r}\,\vec{j}, \quad z(t) = r_z(t) = \vec{r}\,\vec{k}. \qquad /1.3/$$

Якщо траєкторія точки M відома заздалегідь, використовують натуральний спосіб задання руху, що полягає ось у чому. На траєкторії як початок відліку вибирають довільну фіксовану точку O і вказують /довільно/ додатний напрямок відліку дуг. Положення точки M на траєкторії тепер можна визначити її дуговою координатою $\sigma(t) = \smile OM$ /рис. 1.3/. Під час руху точки її дугова координата неперервно змінюється з часом, тобто є функцією часу:

$$\sigma = \sigma(t). \qquad /1.4/$$

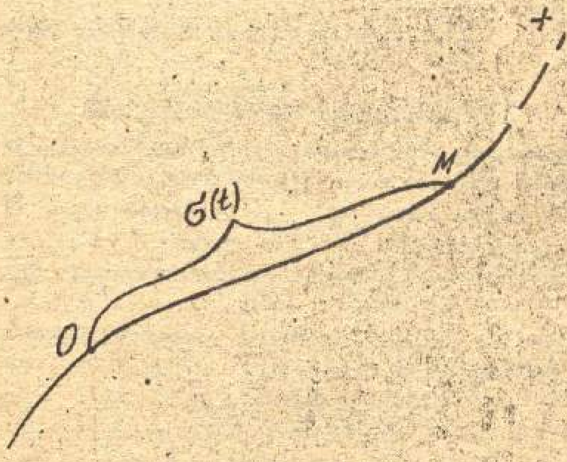


Рис. 1.3

Залежність σ від часу t називається законом руху точки по траєкторії.

Таким чином, рух точки M у просторі задано в натуральній формі, якщо відома її траєкторія, вказані початок і додатний напрямок відліку дугової координати σ на траєкторії та заданий закон /I.4/ руху точки по траєкторії.

З самої природи механічного руху випливає, що функція $\sigma(t)$ /як і будь-яка інша координатна функція/ повинна бути однозначною, скінченною, неперервною і, крім того, двічі диференційовною.

Слід пам'ятати, що в більшості випадків руху дугова координата σ не дорівнює шляхові S, пройденому точкою. У цьому легко переконатися, розглянувши рух точки по прямолінійній траєкторії за законом $\sigma = b \sin kt$. Завдяки цьому дійдемо висновку, що дугова координата може набувати як додатних, так і від'ємних значень, обмежених за модулем значенням b, а пройдений точкою шлях – це монотонно зростаюча додатна необмежена функція. Зв'язок між координатним та натуральним способами задання руху визначається співвідношенням

$$(d\sigma)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

де x, y, z – прямокутні декартові координати рухомої точки.

I.2. Швидкість і прискорення точки

Найважливішими кінематичними характеристиками, що визначають характер руху точки, є її швидкість і прискорення.

Нехай у деякий момент часу t положення точки M визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а в момент $t+\Delta t$ – вектором $\vec{r}\,'$. Переміщення точки $\overline{MM'} = \overline{\Delta r}$ за проміжок часу Δt є різницею $\vec{r}\,'$ і $\vec{r}$.

Величину, що дорівнює відношенню переміщення точки до відповідного проміжку часу,

$$\overline{\Delta r}/\Delta t = \vec{V}_{cp}, \qquad /I.5/$$

будемо називати середньою швидкістю точки M за проміжок часу Δt.

Таким чином /рис. I.4/, середня швидкість точки M – це вектор, що має напрямок хорди MM у бік руху точки по траєкторії.

Переходячи у виразі /I.5/ до границі за умови $\Delta t \to 0$, одержимо

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \qquad /I.6/$$

де точка над буквою означає диференціювання за часом.

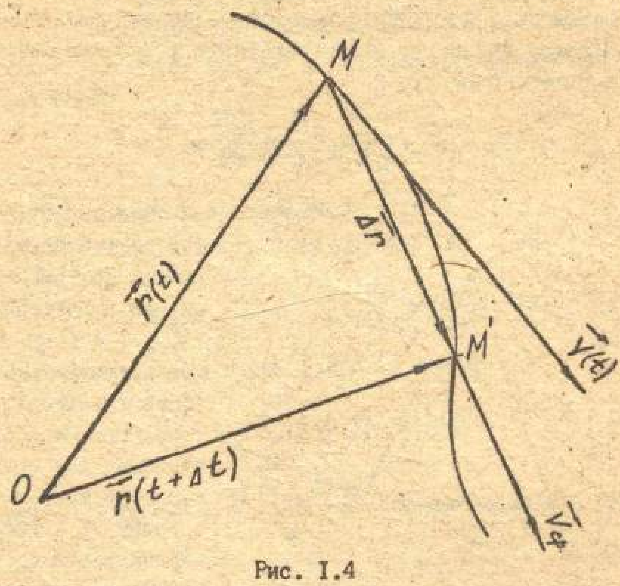


Рис. I.4

Векторну величину $\vec{V}$, що визначається рівністю /I.6/, будемо називати швидкістю точки в даний момент часу t, або миттьовою швидкістю.

Оскільки гранично /коли $\Delta t \to 0$/ напрямок вектора $\Delta\vec{r}/\Delta t$ збігається з напрямком дотичної до траєкторії точки, то й миттьова швидкість точки має напрямок дотичної до траєкторії. Очевидно, що розмірність швидкості - $[V] = [L]/[T]$, м/с або км/год.

Розглянемо миттьові швидкості $\vec{V}$ та $\vec{V}'$ рухомої точки в положеннях M і M'. З рис. I.5 випливає, що в процесі руху точки вектор швидкості змінюється як за величиною, так і за напрямком. Переносимо вектор $\vec{V}'$ в точку M і визначимо $\Delta\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V}$, тобто вектор, який характеризує зміну вектора швидкості за проміжок часу Δt. Поділивши $\Delta\vec{V}$ на Δt одержимо вектор

$$\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \vec{W}_{cp}, \qquad /1.7/$$

який називається середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt. Переходячи в /1.7/ до границі за умови $\Delta t \to 0$, дістанемо векторну величину, яка називається миттьовим прискоренням точки в момент часу t:

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}. \qquad /1.8/$$

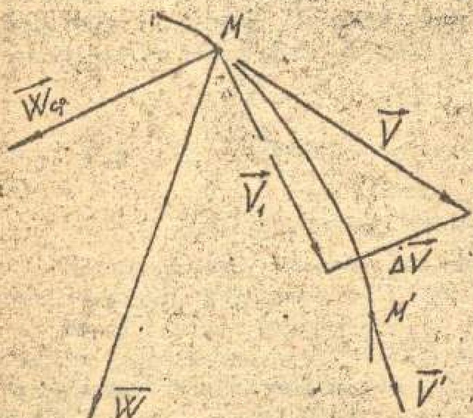


Рис. 1.5

Вектор $\vec{W}$ розташований по той же бік від дотичної до траєкторії точки, що й вектори $\Delta\vec{V}$ та $\vec{W}_{cp}$, а тому він завжди має напрямок у бік увігнутості траєкторії.

Граничне положення площини, яка проходить через дотичну в точці M і точку M', коли M' наближається до M, визначає стичну площину в точці M траєкторії. Для плоскої кривої стична площина збігається з площиною самої кривої. Із співвідношення /1.3/ випливає, що вектор прискорення точки завжди лежить у стичній площині.

Очевидно, що складова прискорення вздовж дотичної до траєкторії характеризує швидкість зміни модуля вектора швидкості, а складова, перпендикулярна до $\vec{V}$, вказує на зміну напрямку вектора $\vec{V}$ з плином часу.

Отже, швидкість та прискорення точки - векторні величини, що характеризують швидкість зміни радіуса-вектора та вектора швидкості відповідно. Вектор миттьової швидкості має напрямок дотичної до траєкторії точки, а вектор прискорення лежить разом зі швидкістю в стичній у даній точці траєкторії площини і завжди спрямований у бік увігнутості траєкторії.

Розмірність прискорення – $[W] = [L]/[T^2]$, см/с^2, або км/год^2.

1.3. Визначення швидкості та прискорення при координатному способі задання руху

Нехай рух точки заданий у прямокутних декартових координатах рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Позначаючи орти координатних осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і розкладаючи радіус-вектор рухомої точки по осях Ox, Oy і Oz, одержимо

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad /1.9/$$

Продиференціюємо вираз /1.9/ за часом:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \qquad /1.10/$$

Вектор швидкості $\vec{V}$ так само можна розкласти по тих же осях:

$$\vec{V} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \qquad /1.11/$$

Зіставляючи формули /1.10/ з /1.11/, знаходимо

$$v_x(t) = \dot{x}(t), \quad v_y(t) = \dot{y}(t), \quad v_z(t) = \dot{z}(t), \qquad /1.12/$$

тобто проекції вектора швидкость точки на осі декартової системи координат дорівнюють першим похідним за часом відповідних координат цієї точки.

Обчисливши проекції вектора швидкості на координатні осі можна за очевидними формулами визначити модуль і напрямок вектора швидкості:

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \qquad /1.13/$$

$$\cos(\vec{V},\hat{\vec{i}}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V},\hat{\vec{j}}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\vec{V},\hat{\vec{k}}) = \frac{V_z}{V}. \qquad /1.14/$$

Прискорення точки дорівнює другій похідній її радіуса-вектора за часом, а оскільки вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ сталі, то

$$\vec{W} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \dot{V}_x\vec{i} + \dot{V}_y\vec{j} + \dot{V}_z\vec{k}. \qquad /1.15/$$

З іншого боку,

$$\vec{W} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}. \qquad /1.16/$$

Порівняємо вирази /1.15/ та /1.16/:

$$W_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad W_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad W_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \qquad /1.17/$$

Таким чином, проекції прискорення точки на осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним за часом відповідних проекцій вектора швидкості.

За формулами

$$|\vec{W}| = W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \qquad /1.18/$$

$$\cos(\vec{W},\hat{\vec{i}}) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\vec{W},\hat{\vec{j}}) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\vec{W},\hat{\vec{k}}) = \frac{W_z}{W} \qquad /1.19/$$

визначаємо модуль та напрямок вектора $\vec{W}$.

1.4. Визначення швидкості та прискорення при натуральному способі задання руху

Знайдемо швидкість та прискорення точки у випадку, коли її рух задано у натуральній формі. Нагадаємо, що при цьому відомі траєкторія точки і закон її руху $\sigma = \sigma(t)$.

Нехай в момент часу t точка займає положення M на траєкторії, а в момент $t + \Delta t$ – положення M'. Дугові координати у ці моменти часу відповідно дорівнюють σ та $\sigma' = \sigma + \Delta\sigma$ /рис. 1.6/.

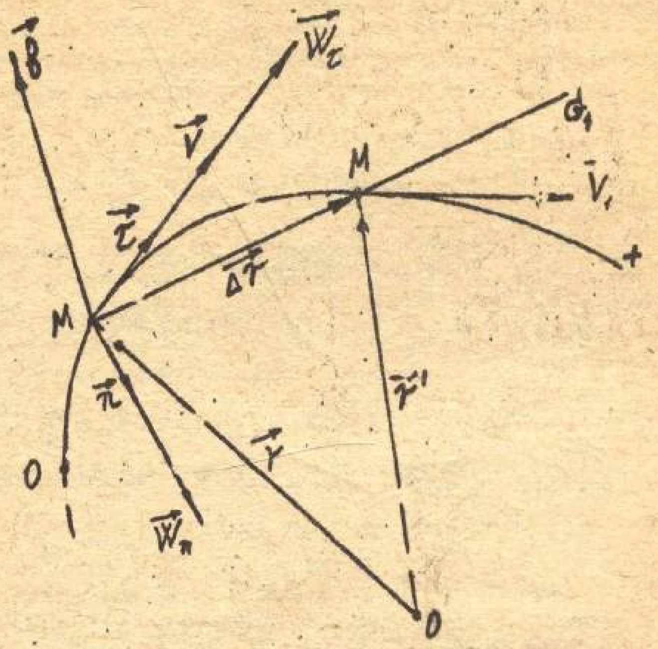


Рис. 1.6

Проводячи з довільної фіксованої точки O' в точку M радіус-вектор $\vec{r}$ і вважаючи, що $\vec{r} = \vec{r}[\sigma(t)]$, одержуємо для вектора швидкості точки

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}\frac{d\vec{r}}{d\sigma}, \qquad /1.20/$$

де $d\vec{r}/d\sigma = \lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}(\Delta\vec{r}/\Delta\sigma)$.

Вектор $\Delta\vec{r}/\Delta\sigma$ має такий самий напрямок, як і вектор $\Delta\vec{r}$, і тому, коли $\sigma \to 0$, його напрямок наближається до дотичної до траєкторії в точці M, а його модуль – до одиниці:

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\sigma}\right| = \lim_{M'\to M}|\vec{MM'}|/|\smile MM'| = 1.$$

Отже, вектор $d\vec{r}/d\sigma$ є одиничним вектором дотичної до траєкторії в точці M. Позначимо його $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma}. \qquad /I.21/$$

З виразів /I.20/ та /I.21/ випливає

$$\vec{V} = \vec{\tau}\frac{d\sigma}{dt} = \vec{\tau}\,\dot{\sigma} = \vec{\tau}\,V_\tau , \qquad /I.22/$$

де $V_\tau = \dot{\sigma}$ – проекція вектора швидкості $\vec{V}$ на дотичну до траєкторії в даній точці.

Вектор прискорення після диференціювання /I.22/ за часом набирає вигляду

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau}\dot{\sigma}) = \vec{\tau}\frac{dV_\tau}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V_\tau = \vec{\tau}\,\dot{V}_\tau + \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}V_\tau^2 . \qquad /I.23/$$

Похідна $d\vec{\tau}/d\sigma$ є вектором $\vec{K}$, перпендикулярним до вектора $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau}\,\vec{\tau} = 1, \qquad \frac{d}{d\sigma}(\vec{\tau}\,\vec{\tau}) = 2\vec{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = 0. \qquad /I.24/$$

З курсу геометрії відомо, що вектор $\vec{K}$ лежить у стичній площині і має напрямок головної нормалі до траєкторії у бік її увігнутості. Величина цього вектора дорівнює кривизні траєкторії в даній точці: $|\vec{K}| = 1/\rho$, де ρ – радіус кривизни траєкторії. Отже,

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \vec{K} = \vec{n}/\rho , \qquad /I.25/$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор головної нормалі в точці M .

Підставляючи в рівняння /I.23/ вираз, одержаний для $d\vec{\tau}/d\sigma$, запишемо формулу для вектора прискорення:

$$\vec{W} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n} = \vec{\tau}\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \vec{n}\frac{V^2}{\rho}. \qquad /I.26/$$

Якщо крім одиничних векторів $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ ввести у розгляд третій $\vec{b}$, такий, що $\vec{b} = \vec{\tau}\times\vec{n}$, то співвідношення /I.26/

набуває очевидного геометричного значення:

$$\vec{W} = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n} + w_b \vec{b}. \qquad /1.27/$$

Рівність /1.27/ є розкладом вектора прискорення по трьох взаємно перпендикулярних напрямках: дотичної, головної нормалі та бінормалі до траєкторії в даній точці /див. рис. 1.6/. При цьому

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{\sigma}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}, \quad w_b = 0 \qquad /1.28/$$

є проекціями вектора $\vec{W}$ на вказані напрямки. Рівність нулю проекції прискорення на бінормаль говорить про те, що цей вектор лежить у стичній площині, а оскільки $w_n \geqslant 0$, то вектор прискорення завжди має напрямок у бік увігнутості траєкторії.

З виразів /1.27/ та /1.28/ випливає

$$|\vec{W}| = W = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\ddot{\sigma}^2 + V^4/\rho^2}, \qquad /1.29/$$

а напрямок вектора прискорення задається кутами між $\vec{W}$, $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$:

$$\cos(\widehat{\vec{W}, \vec{\tau}}) = w_\tau / W, \quad \cos(\widehat{\vec{W}, \vec{n}}) = w_n / W.$$

Напрямки дотичної, головної нормалі та бінормалі в кожній точці траєкторії утворюють прямокутну систему координат з ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Ця система називається натуральним тригранником, а /1.27/ дає розклад вектора прискорення по його осях.

З формул $w_\tau = dV_\tau / dt$, $w_n = V^2/\rho$ випливає, що дотичне прискорення може ставати нулем у таких випадках:

а/ на відрізках рівномірного руху / $V = const$ /;

б/ у моменти часу, коли модуль швидкості досягає свого екстремального значення, тобто у точках траєкторії, де відбувається перехід від прискореного руху до сповільненого або навпаки. Оскільки вектор $\vec{W}_\tau$ має напрямок вздовж однієї прямої з вектором швидкості, то дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості з часом.

Нормальне прискорення перетворюється на нуль, якщо:

а/ радіус кривизни траєкторії дорівнює ∞, тобто на її прямолінійних відрізках або в точках перегину;

б/ швидкість точки стає нулем.

З того, що $\vec{W}_n \perp \vec{V}$, випливає, що нормальне прискорення характеризує зміну напрямку вектора швидкості з часом.

I.5. <u>Дослідження характеру руху точки по траєкторії</u>

Розглянемо характер руху точки по її траєкторії залежно від співвідношення між векторами швидкості та прискорення.

Будемо називати рух точки прискореним /сповільненим/, якщо з часом модуль її швидкості зростає /спадає/.

Для того, щоб одержати ознаки прискореного та сповільненого рухів, дослідимо поведінку функції $|\vec{V}|^2 = V^2$. Очевидно, що під час зростання /спаду/ V^2 зростатиме /спадатиме/ і $|\vec{V}|$. Крім того, такий прийом дозволяє виключити невизначеність, яка виникла б при дослідженні поведінки $f(t) = |\vec{V}|$ в її особливих точках.

Обчислимо похідну V^2 за часом:

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}\vec{V}) = 2\vec{V}\vec{W} = 2VW\cos(\widehat{\vec{V},\vec{W}}). \qquad /I.30/$$

З курсу математичного аналізу відомо, що функція зростає, коли її перша похідна додатна, спадає в протилежному випадку і зберігає стале значення, коли ця похідна дорівнює нулю на деякому інтервалі зміни аргументу. Відповідно до цього рух точки прискорений, якщо скалярний добуток $\vec{V}\vec{W} > 0$, сповільнений при $\vec{V}\vec{W} > 0$ і рівномірний при $\vec{V}\vec{W} = 0$.

Скалярний добуток двох векторів є додатним, якщо кут між ними гострий, від'ємним, якщо кут тупий, і дорівнює нулю, якщо вектори взаємно перпендикулярні. Звідси випливають такі ознаки руху точки:

- рух точки прискорений, якщо кут між її швидкістю та прискоренням гострий;
- якщо кут між $\vec{V}$ і $\vec{W}$ тупий, то точка рухається сповільнено;
- якщо вектори швидкості та прискорення взаємно перпендикулярні, то точка рухається рівномірно протягом деякого проміжку часу, доки $\vec{V} \perp \vec{W}$.

У випадках, коли кут між $\vec{V}$ і $\vec{W}$ дорівнює $\pi/2$ тільки в конкретні моменти часу, говорять, що в ці моменти змінюється характер руху точки: до цього моменту він був прискореним /сповільненим/, а після нього стає сповільненим /прискореним/ або рівномірним.

З указених ознак неважко одержати й аналітичний метод дослідження характеру руху точки. Для цього помножимо скалярно вектори $\vec{V}$ і $\vec{W}$, попередньо розклавши їх по осях прямокутної системи координат:

$$\vec{V}\vec{W}=(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k})(\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k})=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}. \qquad /I.31/$$

З /I.31/ та ознак прискореного і сповільненого рухів випливає, що характер руху цілком визначається знаком добутку $\vec{V}\vec{W}$: $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}<0$ – сповільнений, $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}>0$ – прискорений, $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=0$ – рівномірний рухи.

На практиці останнє рівняння розв'язують відносно часу t і з одержаних значень t'' знаходять точки на траєкторії, що є межами ділянок з певним характером руху. Для з'ясування характеру руху на кожній з них достатньо знайти знак виразу $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}$ на будь-якій ділянці. Описати характер руху на всіх інших ділянках неважко, оскільки ділянки з різним характером руху чергуються.

Якщо рух точки заданий у натуральній формі, то

$$\vec{V}\vec{W}=V_\tau\vec{\tau}\,(W_\tau\vec{\tau}+W_n\vec{n})=V_\tau W_\tau=\dot{\sigma}\ddot{\sigma}, \qquad /I.32/$$

і характер руху точки цілком визначається знаком добутку $\dot{\sigma}\ddot{\sigma}$.

I.6. Годограф змінного вектора та його використання

Годографом змінного вектора називається крива, яку описує кінець цього вектора при неперервній зміні його скалярного аргументу за умови, що початок вектора знаходиться в нерухомій довільно вибраній точці. У векторному аналізі годограф змінного вектора відіграє ту ж саму роль, що в математичному аналізі графік функції. Виходячи з прийнятого вище означення годографа вектора можна говорити про траєкторію точки як про годограф її радіуса-вектора. Побудуємо годограф вектора швидкості точки, відкладаючи з довільної точки 0 вектори швидкості,що відповідають різним моментам часу, і з'єднуючи їх кінці. Геометричні властивості годографа наочно показують закон зміни вектора швидкості з часом. Якщо ввести систему координат $0x_1y_1z_1$ з початками в точці 0, то вирази $x_1 = V_x(t)$, $y_1 = V_y(t)$, $z_1 = V_z(t)$ є параметричними рівняннями годографа швидкості у цій системі координат. Виключаючи у цих рівнянь час, можна одержати рівняння годографа вектора швидкості у вигляді, що містить у собі лише координати x_1, y_1, z_1 його точок. Оскільки радіусом-вектором, що визначає положення точок на годографі швидкості, є вектор швидкості, то вектор прискорення, який дорівнює $d\vec{V}/dt$, має напрямок дотичної до годографа і характеризує швидкість руху по ньому кінця вектора швидкості /рис. 1.7/.

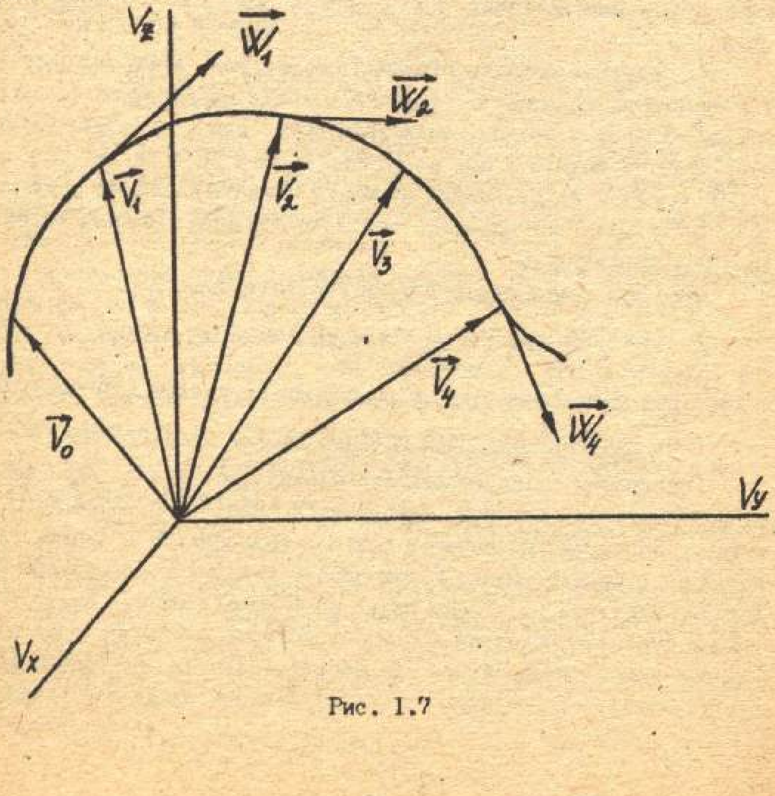


Рис. 1.7

Годограф вектора швидкості та його властивості можна використовувати для дослідження характеру руху точки по її траєкторії та виявлення деяких особливостей самої траєкторії. Як приклад розглянемо годограф, зображений на рис. I.8, і за допомогою нього проаналізуємо рух точки по траєкторії.

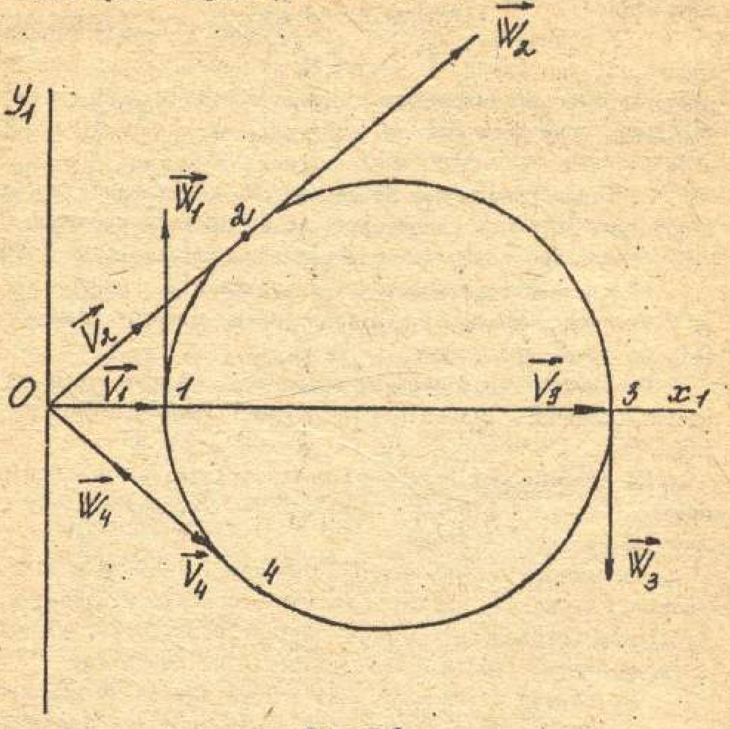


Рис. I.8

Оскільки вектор $\vec{W}$ має напрямок дотичної до годографа швидкості, його нормальна складова стає нулем у тих точках, де вектор швидкості дотичний до нього /положення 2 і 4/, дотична складова вектора $\vec{W}$ – у тих точках, де вектор швидкості й дотична до годографа утворюють між собою кут $\pi/2$ /точки 1 і 3/.

Дійсно, якщо вектор швидкості дотичний до годографа, то в такій точці швидкість та прискорення мають однакові або протилежні напрями, а це можливо лише при $W_n = 0$. У точках годографа, де вектор швидкості ортогональний до нього, кут між векторами $\vec{V}$ та $\vec{W}$ прямий, а це відповідає тому, що $W_\tau = 0$.

Спираючись на властивості годографа та формулу /І.28/, яка визначає нормальне та дотичне прискорення, можна стверджувати таке:

1. У точках траєкторії, відповідних до точок годографа швидкості, де вектор $\vec{V}$ дотичний до нього, нормальне прискорення перетворюється на нуль. Ці точки траєкторії є точками перегину, тому що в них $V^2/\rho = 0$, але $V^2 \neq 0$, а тому $\rho = \infty$.

2. Точки годографа, де вектор $\vec{V}$ нормальний до нього, відповідні до точок траєкторії, де змінюється характер руху. У цих точках модуль швидкості досягає екстремальних значень.

3. Ділянки годографа, які є дугами кіл з центрами у початку O системи $Ox_1y_1z_1$, відповідні до ділянок рівномірного руху по траєкторії.

4. Прямолінійні ділянки годографа, що проходять через початок координат, відповідні до прямолінійних ділянок траєкторії.

Ці властивості годографа швидкості дозволяють порівняно просто й достатньо наочно проаналізувати характер руху та особливості траєкторії точки.

Поняття годографа вектора швидкості знайшло широке використання в задачах динаміки космічного польоту, зокрема, при дослідженні траєкторій міжорбітальних перельотів, відшукуванні оптимальних варіантів маневрів космічних апаратів.

Все більша увага дослідників звертається на можливості використання властивостей годографів швидкості та прискорення для розв'язування нових задач науки і техніки.

І.7. Кінематика точки у довільних криволінійних координатах

Як координати точки можна взяти три будь-які функції

$$q_i = q_i(x, y, z), \quad i = \overline{1,3} \qquad /І.33/$$

декартових координат, якщо тільки цими рівняннями x, y, z визначаються як однозначні функції q_1, q_2, q_3, тобто

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \qquad /I.34/$$

і ні одне з рівнянь /I.23/ не є протиріччям двом іншим і не є наслідком інших.

Припустимо, що яка-небудь координата, наприклад q_1, дорівнює сталій C_1, і запишемо рівняння

$$q_1 = q_1(x, y, z) = C_1$$

деякої поверхні, яка називається координатною. Якщо сталій C_1 надати різних значень, для яких поверхня залишається дійсною, то одержимо сукупність координатних поверхонь, відповідних до координати q_1. Таких сукупностей може бути три - за кількістю координат. Положення точки визначається як перетин трьох координатних поверхонь різних сукупностей. Якщо при будь-якому положенні точки три такі поверхні, що проходять через неї, взаємно ортогональні, то система координат називається ортогональною.

Якщо взяти три координати, наприклад q_2 і q_3, сталими, то одержимо криву, яка є перетином двох поверхонь різних сукупностей:

$$q_2(x, y, z) = C_2, \quad q_3(x, y, z) = C_3.$$

Ця лінія називається координатною відносно q_1; вздовж неї змінюється тільки відповідна координата. Додатним напрямом такої лінії вважається той, в якому значення відповідної координати зростають. Через кожну точку простору проходять три координатні лінії; якщо система координат ортогональна, то ці лінії будуть взаємно ортогональними. Оскільки координатні лінії є кривими, то система загального вигляду q_1, q_2, q_3 називається системою криволінійних координат. Осями криволінійних координат називаються дотичні до координатних ліній, проведені з положення точки, що розглядається, в бік зростання змінної криволінійної координати.

Знайдемо вираз для вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ у криволінійних координатах. Оскільки радіус-вектор $\vec{r}$ рухомої точки можна розглядати як складну функцію часу t, що залежить від нього через координати q_1, q_2, q_3, то

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i .$$

Окремі доданки цієї формули мають значення компонентів /косокутних/ вектора переміщення $d\vec{r}$ по осях криволінійних координат. Дійсно, якщо змінюється тільки одна координата, наприклад q_1, кінець вектора $\vec{r}$ буде рухатися вздовж координатної лінії q_1, і, таким чином, вектор $\partial\vec{r}/\partial q_1$ матиме напрямок координатної осі q_1. Відкладаючи на цій осі одиничний вектор $\vec{\tau}_1$, /рис. I.9/, дістанемо

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial q} = H_1\vec{\tau}_1 , \qquad /I.35/$$

де H_1 – довжина вектора $\partial\vec{r}/\partial q_1$. Аналогічно одержимо

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2} = H_2\vec{\tau}_2 , \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3} = H_3\vec{\tau}_3 . \qquad /I.36/$$

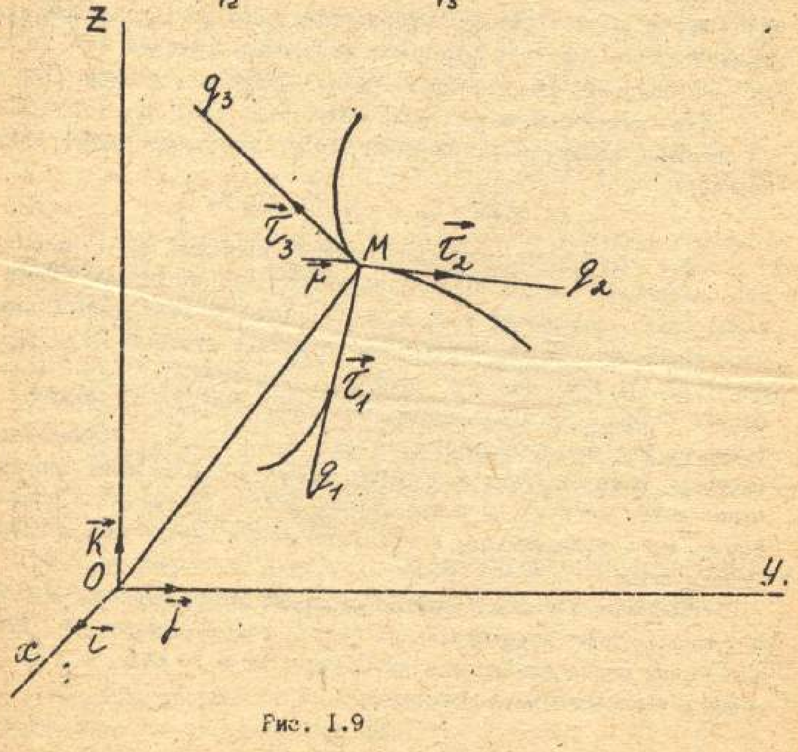


Рис. I.9

Обчислимо довжини H_1, H_2, H_3, розклавши вектор $\vec{r}$ по осях прямокутної декартової системи координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

звідки

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}, \quad i = \overline{1,3}$$

і

$$H_i^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2. \qquad /1.37/$$

Таким чином,

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} H_i \, dq_i \, \vec{\tau}_i , \qquad /1.38/$$

де величини H_1, H_2, H_3 - коефіцієнти Ляме.

Для знаходження виразів для косинусів кутів між віссю $\vec{\tau}_i$ та осями $0x$, $0y$, $0z$ використаємо співвідношення

$$\cos(\vec{\tau}_i \vec{i}) = \vec{\tau}_i \vec{i}, \; \cos(\vec{\tau}_i \vec{j}) = \vec{\tau}_i \vec{j}, \; \cos(\vec{\tau}_i \vec{k}) = \vec{\tau}_i \vec{k},$$

але, враховуючи /1.35/, /1.36/,

$$\vec{\tau}_i = \frac{\partial r}{\partial q_i} / H_i, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\cos(\vec{\tau}_i, \vec{i}) = \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\vec{i}\right) =$$

$$= \frac{1}{H_i}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right)\vec{i}\right] = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial q_i}. \qquad /1.39/$$

Аналогічно одержимо

$$\cos(\vec{\tau}_i, \vec{j}) = \frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial q_i}, \quad \cos(\vec{\tau}_i, \vec{k}) = \frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}. \qquad /1.40/$$

На підставі виведених формул можна записати

$$\vec{\tau}_i \vec{\tau}_k = \frac{1}{H_i H_k}\left[\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_n}\right], \qquad /1.41/$$

звідки випливають умови ортогональності осей криволінійних координат:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k}=0, \quad i\neq k. \qquad /1.42/$$

Виходячи з виразу /1.38/ знайдемо швидкість точки у криволінійних координатах:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\sum_{i=1}^{3} H_i\dot{q}_i\vec{\tau}_i . \qquad /1.43/$$

З цього співвідношення запишемо проекції швидкості на осі криволінійної ортогональної системи

$$V_{q_i}=H_i\dot{q}_i , \quad i=\overline{1,3} \qquad /1.44/$$

і модуль швидкості

$$V=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(H_i\dot{q}_i)^2} . \qquad /1.45/$$

Проекції вектора прискорення точки на напрямки $\vec{\tau}_i$, $i=\overline{1,3}$ дорівнюють $W_{q_i}=\vec{W}\vec{\tau}_i$. Підставляючи сюди раніше знайдені вирази $\vec{\tau}_i=(\partial\vec{r}/\partial q_i)/H_i$, одержимо

$$W_{q_i}=\frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right), \quad i=\overline{1,3}. \qquad /1.46/$$

Скалярний добуток

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)-\vec{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right), \qquad /1.47/$$

крім того,

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_i}, \qquad /1.48/$$

у чому можна переконатися безпосередньо з формул

$$\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3); \quad \vec{V}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i ,$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \, \partial q_k} \dot{q}_i ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \, \partial q_n} \dot{q}_k .$$

З урахуванням рівностей /I.47/ і /I.48/ дістанемо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i} , \qquad /I.49/$$

а позначивши $T = \vec{V}^2 /2$, -

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad /I.50/$$

Таким чином, проекції вектора прискорення на осі криволінійної системи координат q_i набувають вигляду

$$W_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right], \quad i = \overline{1,3}. \qquad /I.51/$$

Модуль прискорення

$$W = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)^2} , \qquad /I.52/$$

якщо осі ортогональні.

2. КІНЕМАТИКА ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Тверде тіло або система твердих тіл є найважливішими об'єктами вивчення теоретичної механіки та ряду інших галузей науки і техніки. Тому детально розглянемо питання знаходження положення та орієнтації тіла у просторі, з'ясуємо характер його руху, визначимо швидкості та прискорення його точок.

Методи аналізу руху точки, викладені вище, можна використати також для дослідження руху твердого тіла і визначення його головних кінематичних характеристик. Але це викликає необхідність знаходження нескінченно великої кількості рівнянь руху точок, тому що рух тіла можна вважати відомим, якщо відомий рух кожної його точки. У зв'язку з цим вводять величини, які характеризують рух тіла в цілому, загальні для всіх його точок. Ці величини дозволяють визначити рух кожної його точки. Такий підхід до дослідження руху тіла суттєво скорочує кількість рівнянь, необхідних для опису його руху. Перша задача полягає у знаходженні найменшого числа рівнянь для опису руху твердого тіла і визначенні їх вигляду.

2.1. Задання положення та орієнтації вільного твердого тіла у просторі

Положення твердого тіла у просторі відносно деякої системи координат $Ax_1x_2x_3$ вважається заданим, якщо задані положення всіх його точок у цій системі /можуть бути визначені їх координати в будь-який момент часу/.

Якщо з тілом жорстко зв'язана система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ з ортами $\vec{e}_k$, $k=\overline{1,3}$, то положення кожної його точки у цій системі визначатиметься незмінними координатами ξ_{i1}, ξ_{i2}, ξ_{i3}, а її положення в системі $Ax_1x_2x_3$ – радіусом-вектором /рис. 2.1/:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_i = \vec{r}_0 + \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \xi_{ik}. \qquad /2.1/$$

Отже, при заданих $\vec{r}_0$ і $\vec{e}_k$ положення кожної точки тіла однозначно задається в системі $Ax_1x_2x_3$. Згідно з означенням ці чотири вектори характеризують положення тіла у вказаній системі координат. Якщо $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ і $\vec{e}_k = \vec{e}_k(t)$, тобто задано рух точки O /полюса/ і зміну з часом напрямку зв'язаних з тілом осей, то можна говорити, що рівняння

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \quad \vec{e}_k = \vec{e}_k(t), \quad k=\overline{1,3} \qquad /2.2/$$

є векторними рівняннями руху тіла.

Проектуючи /2.1/ на осі системи $Ax_1x_2x_3$, одержимо

$$x_{is} = x_{0s} + \sum_{k=1}^{3} \xi_{ik}\alpha_{ks}, \quad s=\overline{1,3}, \qquad /2.3/$$

де

$$\alpha_{ks} = \cos(\vec{e}_k, \vec{j}_s) \qquad /2.4/$$

– напрямні косинуси зв'язаних з тілом осей.

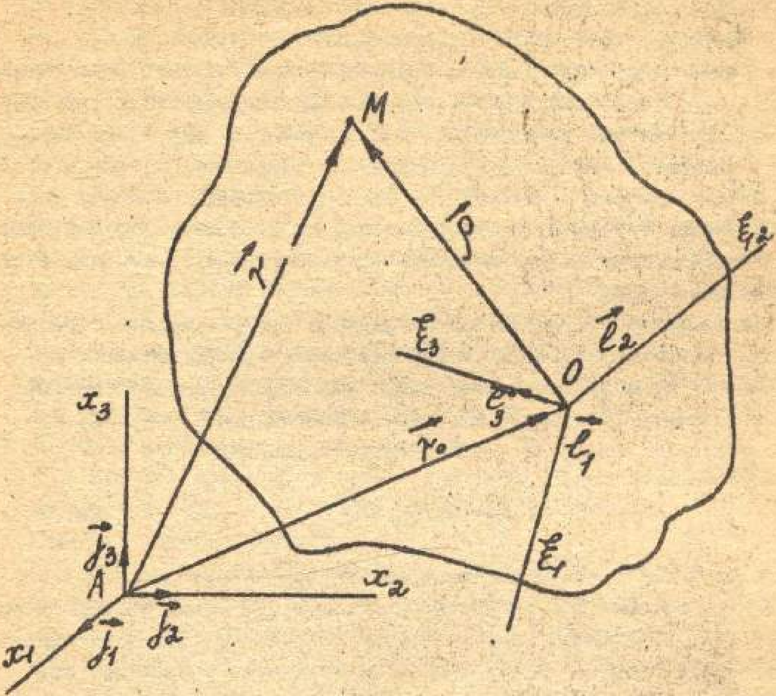


Рис. 2.I

В силу очевидних співвідношень

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_k = \delta_{ik}\ ; \quad i, k = \overline{1,3},$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad /2.5/$$

між дев'ятьма напрямними косинусами α_{ks} існує шість залежностей:

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1 \qquad i = \overline{1,3},$$

$$\alpha_{i1}\,\alpha_{k1} + \alpha_{i2} + \alpha_{k2} + \alpha_{i3}\,\alpha_{k3} = 0, \quad i\ ,\ k = \overline{1,3}. \qquad /2.6/$$

Тому з дев'яти величин α_{k3} лише три незалежні, а всі інші можна виразити через них за допомогою співвідношень /2.6/.

Таким чином, для задання положення тіла у просторі достатньо задати шість незалежних між собою скалярних параметрів: три координати якої-небудь його точки і три величини з α_{k3}. Ці незалежні параметри називають узагальненими координатами твердого тіла, а їх кількість – числом його ступенів свободи. У цьому значенні будемо говорити, що тверде тіло, на положення якого у просторі не накладено ніяких обмежень /вільне тверде тіло/, має шість ступенів свободи.

У багатьох ситуаціях при дослідженні руху твердого тіла необхідно знайти орієнтацію тіла у просторі. Будемо вважати, що орієнтацію тіла задано, якщо задано напрямок будь-якого вектора $\vec{a}$, незмінно зв'язаного з тілом, відносно осей $Ax_1x_2x_3$.

Оскільки вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} a_{\xi_k} \vec{e}_k , \qquad /2.7/$$

то це дозволяє зробити висновок, що напрямок вектора $\vec{a}$ цілком задається ортами $\vec{e}_k$ зв'язаних з тілом осей. Таким чином, орієнтацію тіла визначено, якщо знайдено вектори $\vec{e}_k$ або їхні напрямні косинуси, тобто для задання орієнтації тіла у просторі достатньо задати три незалежні між собою скалярні параметри так, щоб через них можна було обчислити всі напрямні косинуси α_{ks}.

Цілком очевидно, що задання орієнтації тіла ще не характеризує його положення. Проте якщо крім орієнтації задати ще положення якої-небудь точки тіла, то положення тіла згідно з /2.1/ буде задано.

2.2. Способи задання орієнтації тіла у просторі. Рівняння руху тіла та його точок

У попередньому підрозділі зазначалося, що для задання орієнтації твердого тіла досить задати три вектори $\vec{e}_k$ або три з дев'яти напрямних косинусів зв'язаних з тілом осей. Звичайно, виникає питання: якими іншими способами можна задати орієнтацію тіла, тобто яким чином вибрати параметри, що однозначно визначають $\vec{e}_k$ або α_{ks} ? Вибір таких незалежних між собою параметрів вперше запропонував Ейлер, і вони носять назву кутів Ейлера. Взагалі можна навести безліч способів вибору кутів Ейлера або яких-небудь інших параметрів, що характеризують орієнтацію тіла. Їх вибір диктується умовою конкретної задачі. Розглянемо лише два з цих можливих наборів параметрів: класичні кути Ейлера і літакові кути, що використовуються в динаміці польоту.

Введемо проміжну систему координат $Oy_1y_2y_3$, осі якої паралельні осям $Ax_1x_2x_3$ і однаково з ними орієнтовані /рис. 2.2/. Лінію перетину площин Oy_1y_2 та $O\xi_1\xi_2$ назвемо лінією вузлів. Очевидно, що вона перпендикулярна до осей Oy_3 і $O\xi_3$, а тому і до площини, що задається цими осями. Зорієнтуємо лінію вузлів так, щоб поворот навколо неї на кут θ, що приводить до суміщення осей Oy_3 і $O\xi_3$, був додатним. Цей кут, взятий в інтервалі від 0 до π без урахування крайніх значень, називається кутом нутації.

Кут ψ між лінією вузлів і віссю Oy_1, який відлічується від осі Oy_1 у додатному напрямку відносно осі Oy_3, називається кутом прецесії.

Кут φ між лінією вузлів і віссю $O\xi_1$, який відлічується від лінії вузлів у додатному напрямку відносно осі $O\xi_3$, називається кутом власного обертання тіла. Кожний з кутів ψ і φ може змінюватися від 0 до 2π, виключаючи крайнє праве значення.

Введені таким чином параметри називаються кутами Ейлера.

Довільній орієнтації тіла без урахування збігу осей Oy_3 і $O\xi_3$ відповідають три кути Ейлера: φ, ψ і θ. І, навпаки, якщо відомі значення кутів φ, ψ, θ, то цим визначається орієнтація осей $O\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно $Oy_1y_2y_3$, а тому й самого тіла.

Дійсно, кут ψ задає у площині Oy_1y_2 напрямок лінії вузлів ON /рис. 2.3,а/, кут θ – у площині, перпендикулярній до лінії вузлів, такій, що проходить через точку O, – положення осі $O\xi_3$ /рис. 2.3,б/, кут φ – у площині, перпендикулярній до осі $O\xi_3$, такій, що проходить через точку O, – напрямок осі $O\xi_1$ /рис. 2.3,в/. Напрямок осі $O\xi_2$ стає відомим автоматично, оскільки осі $O\xi_1\xi_2\xi_3$ – це осі правого ортогонального тригранника.

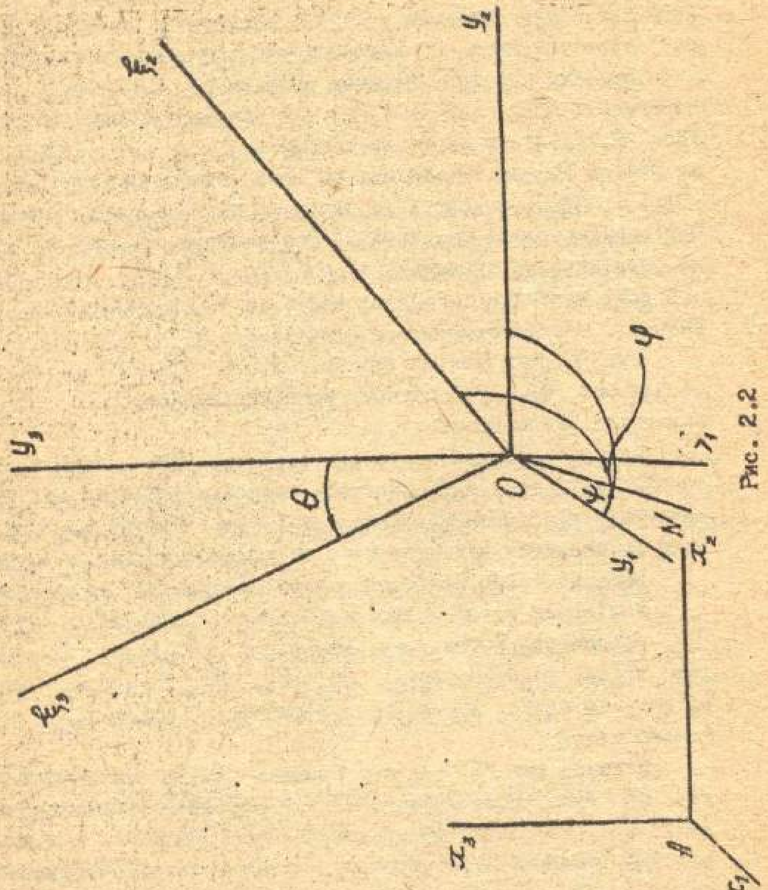


Рис. 2.2

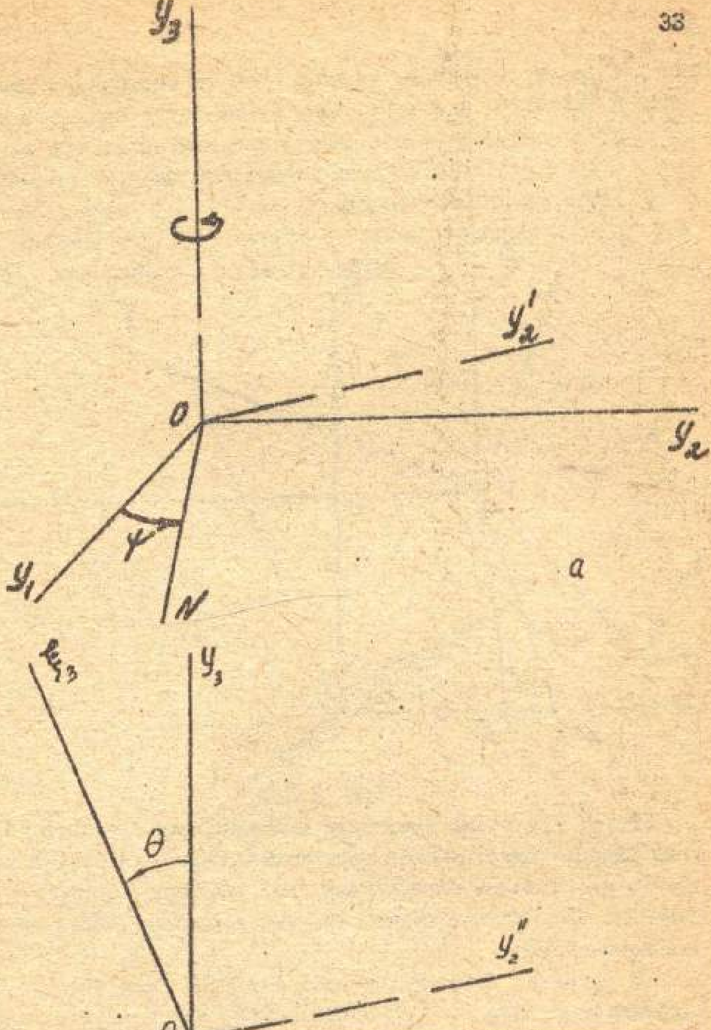


Рис. 2.3,а,б

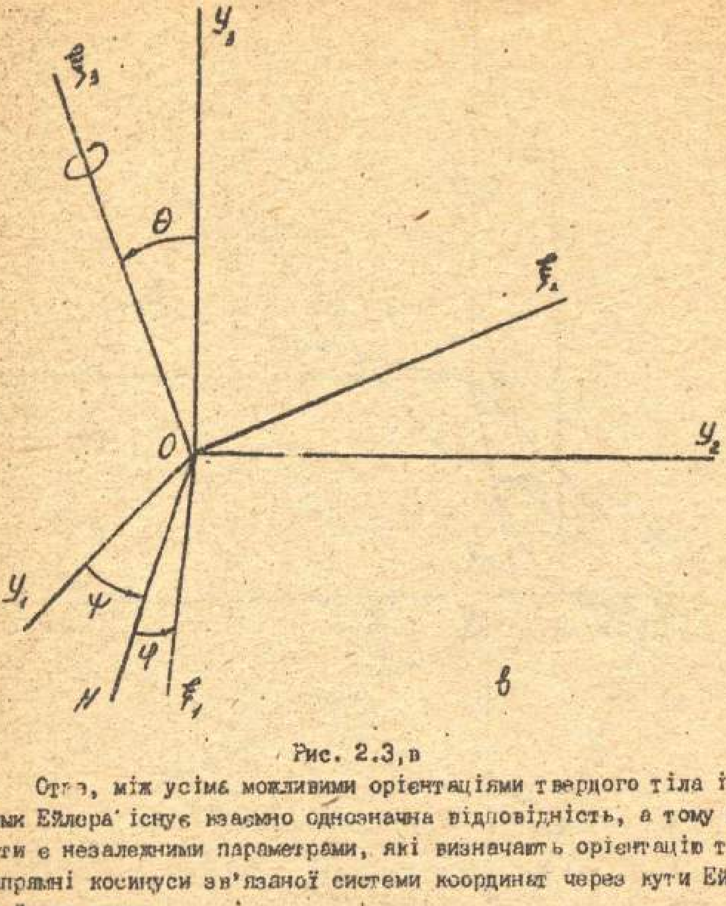


Рис. 2.3,в

Отже, між усіма можливими орієнтаціями твердого тіла і кутами Ейлера існує взаємно однозначна відповідність, а тому ці кути є незалежними параметрами, які визначають орієнтацію тіла. Напрямні косинуси зв'язаної системи координат через кути Ейлера знайдемо нижче.

У випадку, коли кут нутації дорівнює нулю або π , тобто напрямки осей Oy_3 і $O\xi_3$ збігаються, лінія вузлів залишається невизначеною, оскільки площини Oy_1y_3 і $O\xi_1\xi_2$ суміщаються. Але тоді залишаються невідомими також кути ψ і φ . Невизначеність цих кутів можна порівняти з невизначеністю полярного кута у полярній системі координат, коли полярний радіус дорівнює нулю.

Описана вище система кутів Ейлера, як вже зазначалося, не є єдиною. Розглянемо ще одну систему ейлерових кутів, яка використовується для дослідження руху літальних апаратів. Досліджуючи рух літака завжди пов'язують з ним зображену на рис. 2.4 ортогональну систему координат. Початок її збігається з центром мас літака, вісь C_x – з його поздовжньою віссю, вісь C_y лежить у площині симетрії літака і перпендикулярна до C_x, а вісь C_z має напрямок правого крила.

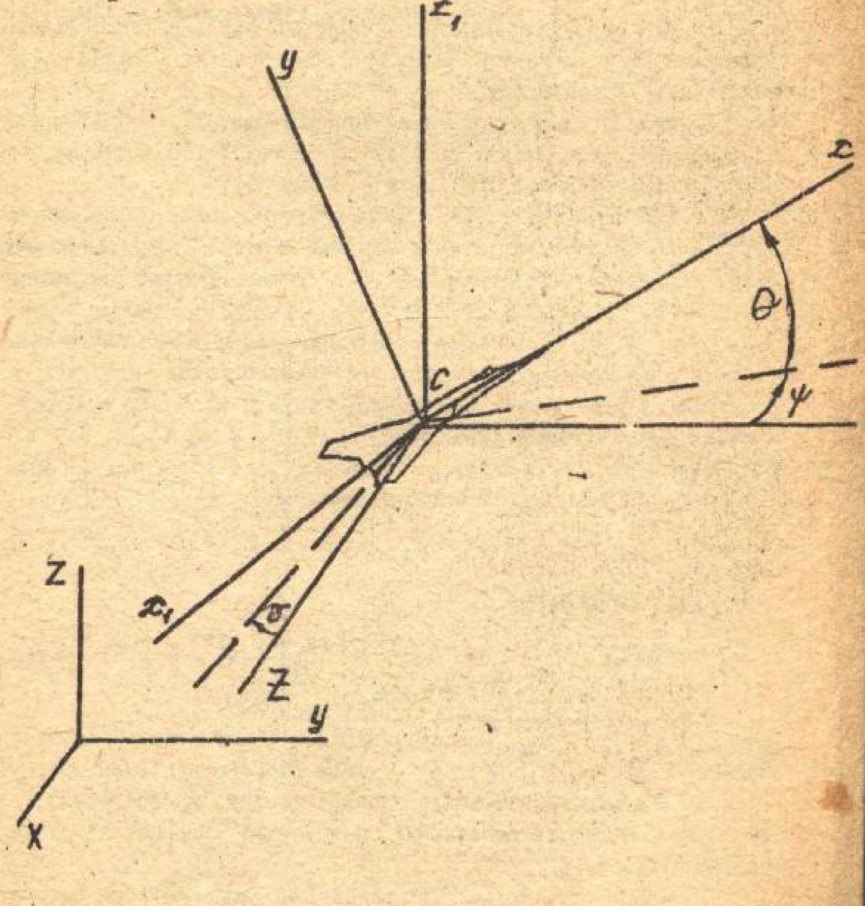


Рис. 2.4

Введемо проміжну систему координат з початком у центрі мас літака, осі якої паралельні осям земної /стартової/ системи координат $OXYZ$ і однаково з ними орієнтовані.

Незалежними параметрами, які визначають орієнтацію зв'язаної системи, а разом з нею і літака відносно Землі або проміжної системи, вибирають кути γ, θ, ψ, що описуються таким чином:

1/ кут ψ – між додатним напрямком осі C_{y_1} та проекцією поздовжньої осі літака на місцеву горизонтальну площину $C_{x_1 y_1}$ – називається кутом курсу;

2/ кут θ – між додатним напрямком осі C_x та її проекцією на $C_{x_1 y_1}$ – називається кутом тангажу; він визначає нахил поздовжньої осі літака до площини горизонту;

3/ кут γ – між віссю C_z та її проекцією на площину $C_{x_1 y_1}$, що показує відхилення площини симетрії літака від місцевої вертикальної площини, яка проходить через C, – називається кутом крену.

Кути ψ і θ задають орієнтацію тіла, можна також вказати й способи опису руху цього тіла та його точок.

Якщо відомі закон руху деякої точки 0 тіла $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ і закон зміни з часом його орієнтації $\vec{e}_k = \vec{e}_k(t)$, $k = \overline{1,3}$ або $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, то говорять, що рух тіла заданий у векторній формі рівняннями

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \quad \vec{e}_k = \vec{e}_k(t), \quad k = \overline{1,3} \qquad /2.8/$$

або в скалярній формі –

$$x_{01} = x_{01}(t), \quad x_{02} = x_{02}(t), \quad x_{03} = x_{03}(t); \qquad /2.9/$$
$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t),$$

де x_{01}, x_{02}, x_{03} – координати довільної точки 0 /далі – полюса/ тіла, а φ, ψ, θ – деяка система кутів Ейлера.

Як і в кінематиці точки, припускається, що всі функції часу в рівняннях руху однозначні, неперервні і принаймні двічі диференційовні.

Рівняння руху точки тіла відповідно до /2.3/ мають вигляд

$$x_{is} = x_{0s}(t) + \sum_{k=1}^{3} \xi_{ik} \alpha_{ks}(t), \qquad s = \overline{1,3}. \qquad /2.10/$$

Сукупність рівнянь /2.9/, /2.10/ дає змогу розв'язати задачу кінематики вільного твердого тіла: перші три рівняння цілком характеризують рух тіла в цілому, а рівняння /2.10/ дозволяють знайти траєкторії, швидкості та прискорення усіх точок тіла.

2.3. Вираження напрямних косинусів зв'язаних осей через кути Ейлера

Напрямні косинуси α_{ks} осей координатної системи, жорстко зв'язаної з тілом, можна записати у формі

$$A = \begin{array}{c} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\| \end{array}, \qquad /2.11/$$

яка є матрицею перетворення координат. Кожний елемент цієї матриці – це функція кутів Ейлера φ, ψ, θ. Для знаходження вигляду цих функцій подамо перехід від системи $Oy_1y_2y_3$ /див. рис. 2.2/ до $O\xi_1\xi_2\xi_3$ як сукупність трьох послідовних поворотів /рис. 2.5,а/.

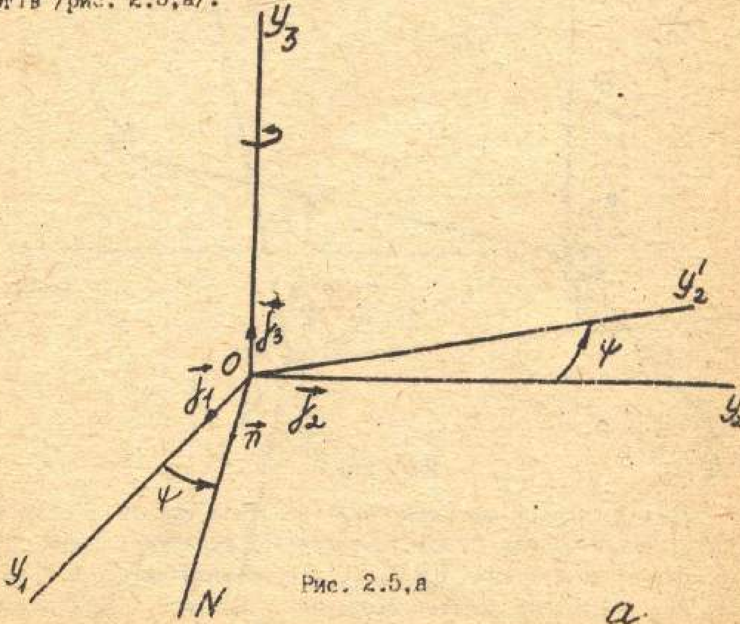


Рис. 2.5,а

а

Перший поворот здійснимо у додатному напрямку навколо осі Oy_2 на кут ψ, і тоді система координат $Oy_1y_2y_3$ перейде в $ONy_2'y_3$. Цим переходом буде задана лінія вузлів ON. Матриця такого перетворення, элементами якої є напрямні косинуси нових осей відносно попередніх, має вигляд

$$A_\psi = \begin{array}{c|ccc|}
 & \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \\
\vec{n} & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\
\vec{j}_2 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\
\vec{j}_3 & 0 & 0 & 1
\end{array} . \qquad /2.12/$$

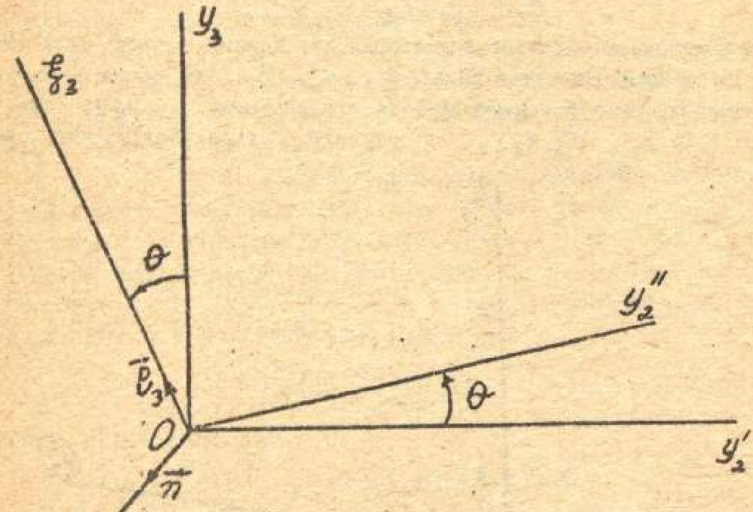


Рис. 2.5,б

Другий поворот виконаємо навколо лінії вузлів ON на кут θ у додатному напрямку /проти годинникової стрілки/. Такий поворот приведе до системи $ONy_2''\xi_3$, тобто визначиться напрямок осі $O\xi_3$ зв'язаної системи координат. Матриця такого повороту

/напрямні кути між осями $ON y_2'' \xi_3$ та $ON y_2' y_3$, зображені на рис. 2.5,б/ набуває вигляду

$$A_\theta = \begin{array}{c} \\ \vec{n} \\ \vec{j}_2'' \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{n} & \vec{j}_2' & \vec{j}_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right\| \end{array} . \qquad /2.13/$$

Заключний поворот на кут φ навколо осі $O\xi_3$ сумістить вісь Oy_2'' з $O\xi_2$, а ON – з $O\xi_1$. Таким чином, тригранник $Oy_1 y_2 y_3$ суміститься з $O\xi_1 \xi_2' \xi_3$. Згідно з рис. 2.5,в матрицю останнього повороту запишемо у вигляді

$$A_\varphi = \begin{array}{c} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{n} & \vec{j}'' & \vec{e}_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} . \qquad /2.14/$$

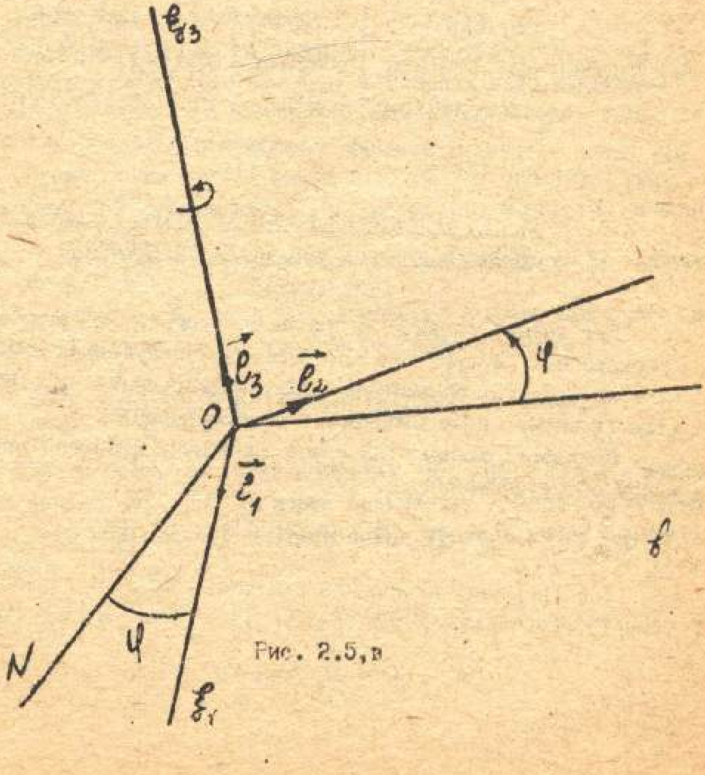


Рис. 2.5,в

Матриця переходу від тригранника $Oy_1y_2y_3$ до $O\xi_1\xi_2\xi_3$ є добутком матриць трьох послідовних поворотів, розглянутих вище:

$$A = A_\varphi A_\theta A_\psi . \qquad /2.15/$$

Помноживши ці матриці, дістанемо

$$A = \begin{array}{c} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|c|c} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \hline -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \hline \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{array} \right\| \end{array} .$$

Очевидно, що добуток $A_\psi A_\theta A_\varphi$ дасть A^T, транспоновану до матриці A, тобто матрицю, одержену з A шляхом заміни рядків стовпцями.

Аналогічно можна знайти матрицю косинусів кутів

$$A = \begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|c|c} \cos\psi\cos\theta & \sin\theta & -\sin\psi\cos\theta \\ \hline \sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma \\ \hline \sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\theta\sin\gamma & -\cos\theta\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\theta\sin\gamma \end{array} \right\| \end{array}$$

між осями зв'язаної системи координат та $Cx_1y_1z_1$ через літакові кути.

2.4. <u>Розподіл швидкостей точок вільного твердого тіла. Поняття кутової швидкості та кутового прискорення</u>

Рух кожної точки тіла характеризується її швидкістю та прискоренням: сукупність цих векторів, побудована в кожній точці тіла, дає так званий розподіл швидкостей та прискорень точок тіла /визначає поля швидкостей та прискорень/.

Швидкості точок тіла можна визначити диференціюванням за часом співвідношення /2.1/:

$$d\vec{r}_m/dt = \vec{V}_m = d\vec{r}_0/dt + d\vec{\rho}/dt = \vec{V}_0 + d\vec{\rho}/dt . \qquad /2.16/$$

Безпосереднє обчислення похідної $d\vec{\rho}/dt$ важко виконати, тому що в зображенні вектора

$$\vec{\rho} = \sum_{k=1}^{3} \xi_{mk} \vec{e}_k \qquad /2.17/$$

для спостерігача, який виконує диференціювання, вектори $\vec{e}_k$ є змінними. Оскільки модулі всіх векторів $\vec{e}_k$ залишаються незмінними, а змінюються з плином часу їх напрямки разом із зміною орієнтації тіла, то можна вважати, що

$$\vec{e}_k = \vec{e}_n(\varphi, \Psi, \theta), \qquad n = \overline{1,3}. \qquad /2.18/$$

Згідно з цим

$$\dot{\vec{e}}_k = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \Psi}\dot{\Psi} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \theta}\dot{\theta}. \qquad /2.19/$$

Безпосередня перевірка підтверджує, що

$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \varphi} = \vec{e}_3 \times \vec{e}_k; \quad \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \Psi} = \vec{j}_3 \times \vec{e}_k; \quad \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \theta} = \vec{n} \times \vec{e}_k. \qquad /2.20/$$

Подивимося на поведінку векторів $\vec{e}_k$ при зміні тільки одного з кутів Ейлера, наприклад Ψ. Оскільки кут Ψ задає напрямок лінії вузлів ON на площині $y_1 O y_2$ /рис. 2.6/, то кінець кожного з векторів $\vec{e}_k$ буде описувати коло радіусом $R = |\vec{e}_k| \sin\alpha_k = \sin\alpha_k$ з центром на осі Oy_3 / α_k – кути, які вектори e_k утворюють з віссю Oy_3 /.

З'ясуємо, яким є збільшення вектора $\vec{e}_k$ при зміні кута Ψ на величину $\Delta\Psi$ /див. рис. 2.6/. З рисунка видно, що вектор $\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \Psi} = \lim\limits_{\Delta\Psi \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_k}{\Delta \Psi}$ має напрямок, перпендикулярний до площини, де лежать вектори $\vec{e}_k$ та $\vec{j}_3$, і утворює з цими векторами праву трійку. А модуль цього вектора дорівнює $|\sin\alpha_k|$:

$$\left| \lim_{\Delta\Psi \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_k}{\Delta \Psi} \right| = \left| \lim_{\Delta\Psi \to 0} \left(2R \sin \frac{\Delta\Psi}{2} / \Delta t \right) \right| = |\sin\alpha_k|.$$

З іншого боку, із співвідношення $\partial \vec{e}_k / \partial \varphi = \vec{j}_3 \times \vec{e}_k$ випливає, що вектор $\partial \vec{e}_k / \partial \Psi$ утворює прямий кут з площиною співмножників $\vec{j}_3$ та $\vec{e}_k$, а всі три вектори утворюють праву трійку. Крім того,

$$|\partial \vec{e}_k / \partial \Psi| = \vec{j}_3 \times \vec{e}_k = |\vec{j}_3|\,|\vec{e}_k| \sin(\vec{j}_3, \vec{e}_k) = |\sin\alpha_k|.$$

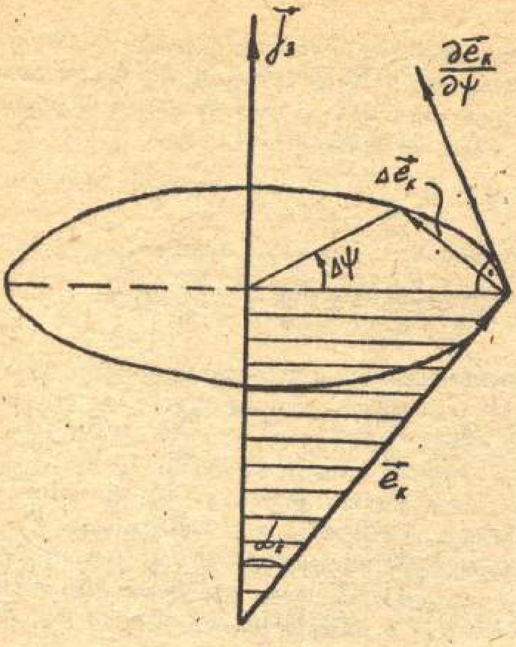


Рис. 2.6

Це, нарешті, й доводить справедливість другого із співідношень /2.20/. Аналогічно можна довести і два інші співідношення.

Таким чином, з виразу /2.19/ випливає, що

$$\dot{\vec{e}}_K = \left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 + \dot{\psi}\,\vec{j}_3 + \dot{\theta}\,\vec{\pi}\right) \times \vec{e}_K . \qquad /2.21/$$

Позначивши

$$\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 + \dot{\psi}\,\vec{j}_3 + \dot{\theta}\,\vec{\pi} = \vec{\omega}, \qquad /2.22/$$

назвемо вектор $\vec{\omega}$ кутовою швидкістю тіла, оскільки він характеризує швидкість зміни орієнтації тіла з плином часу, а сама орієнтація задається кутами Ейлера.

Враховуючи /2.22/, співвідношення /2.21/ можна записати у вигляді

$$\dot{\vec{e}}_K = \vec{\omega} \times \vec{e}_K , \quad K = \overline{1,3}. \qquad /2.23/$$

Ці співвідношення мають назву формул Пуассона.

В результаті цих міркувань приходимо до такого зображення похідної $d\vec{\rho}/dt$:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3}\xi_k\vec{e}_k=\sum_{k=1}^{3}\xi_k\dot{\vec{e}}_k=\sum_{k=1}^{3}\xi_k(\vec{\omega}\,\vec{e}_k)=$$

$$=\vec{\omega}\times\sum_{k=1}^{3}\xi_k\vec{e}_k=\vec{\omega}\times\vec{\rho},$$

або

$$\dot{\vec{\rho}}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}. \qquad /2.24/$$

Для швидкості довільної точки M тіла маємо на підставі /2.16/

$$\vec{V}_M=\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{\rho}=\vec{V}_0+\vec{V}_{M0}, \qquad /2.25/$$

де

$$\vec{V}_{M0}=\vec{\omega}\,\vec{\rho}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}. \qquad /2.26/$$

Співвідношення /2.25/ називається формулою розподілу швидкостей точок вільного твердого тіла, яка показує залежність цих швидкостей від положення точки на тілі / $\vec{\rho}$ / і двох векторних характеристик руху тіла як цілого – швидкості $\vec{V}_0$ довільно вибраного полюса O та кутової швидкості $\vec{\omega}$.

З /2.26/ випливає, що вектор $\vec{X}_{M0}$ спрямований під прямим кутом до площини, де розташовані вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\rho}$, і утворює з ними праву трійку /див. рис. 2.6/. Модуль цього вектора дорівнює

$$V_{M0}=\omega\cdot\rho\cdot\sin(\vec{\omega},\hat{\ }\vec{\rho})=\omega h_M, \qquad /2.27/$$

де h_M – найменша відстань від точки M до напрямку вектора $\vec{\omega}$, який проходить через точку O .

Треба відзначити, що швидкості всіх точок, розташованих на лінії дії вектора $\vec{\omega}$ відносно полюса O , дорівнюють нулю, тому що напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\rho}$ в даному випадку збігаються. У зв'язку з цим швидкість $\vec{V}_{M0}$ можна трактувати як швидкість при миттьовому оберганні тіла навколо осі, яка суміщається з напрямком вектора $\vec{\omega}$.

Вектор $\vec{\omega}$ можна вважати мірою швидкості зміни орієнтації тіла лише у тому випадку, коли буде доведено, що він не залежить від того, як вибрано полюс O, і разом з цим від вибору системи відліку, зв'язаної з тілом.

Для того, щоб це довести, скористуємося цілком зрозумілим наслідком формул Пуассона: для довільного вектора $\vec{a}$, зв'язаного з твердим тілом, має місце

$$\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a}. \qquad /2.28/$$

Дійсно, $\vec{a} = a_{\xi_1}\vec{e}_1 + a_{\xi_2}\vec{e}_2 + a_{\xi_3}\vec{e}_3$, але ж проекції a_{ξ_k} не залежать від зміни часу, і тому

$$\dot{\vec{a}} = \sum_{k=1}^{3} a_{\xi_k}\dot{\vec{e}}_k = \sum_{k=1}^{3} a_{\xi_k}(\vec{\omega} \times \vec{e}_k) = \vec{\omega} \times a,$$

що і свідчить про правильність співвідношення /2.28/.

Припустимо тепер, що поряд із системою відліку $O\xi_1\xi_2\xi_3$ з ортами $\vec{e}_k$, $k = \overline{1,3}$ існує система $O_1\xi_1'\xi_2'\xi_3'$, жорстко зв'язана з тілом, орти якої – $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$.

Оскільки $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ та $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega}' \times a$, то маємо

$$0 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{a}.$$

звідки, у зв'язку з довільністю вибору вектора $\vec{a}$, випливає

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}' = 0, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}'.$$

Таким чином, вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ не залежить від способу задання зв'язаної з тілом системи відліку, а тому його можна взяти як міру швидкості зміни з часом орієнтації тіла у просторі.

Залежно від руху тіла змінюються модуль і напрямок вектора його кутової швидкості. Характеризуються ці зміни за допомогою вектора

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}, \qquad /2.29/$$

який називається вектором кутового прискорення тіла.

Якщо вектор $\vec{\omega}$ задається через проекції на осі нерухомої системи відліку, то він має вигляд $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_{x_i}\vec{j}_i$. Оскільки вектори $\vec{j}_i$ – незмінні, то

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \dot{\omega}_{x_i}\vec{j}_i = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{x_i}\vec{j}_i, \qquad /2.30/$$

або

$$\varepsilon_{x_i} = \dot{\omega}_{x_i}, \quad i = \overline{1,3}. \qquad /2.31/$$

Коли ж $\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{\xi_k} \vec{e}_k$, тобто він задається своїми проекціями на осі зв'язаної з тілом системи відліку, то

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{3} \omega_{\xi_k} \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^{3} \omega_{\xi_k} \dot{\vec{e}}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^{3} \omega_{\xi_k} (\vec{\omega} \times \vec{e}_k) = \sum_{k=1}^{3} \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^{3} (\vec{\omega} \times \omega_{\xi_k} \vec{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{\xi_k} \vec{e}_k .$$

Таким чином,

$$\varepsilon_{\xi_k} = \dot{\omega}_{\xi_k}, \qquad /2.32/$$

тобто проекції кутового прискорення на нерухомі та зв'язані з тілом осі обчислюються як похідні відповідних проекцій кутової швидкості тіла.

2.5. Вираження кутової швидкості через кути Ейлера та її похідні

Щоб обчислити кутову швидкість через кути Ейлера, необхідно сумістити координатні осі $Oy_1 y_2 y_3$ з осями $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$ шляхом трьох послідовних поворотів: навколо осі Oy_3 на кут ψ, навколо лінії вузлів ON на кут θ і навколо осі $O\xi_3$ на кут φ. Ці повороти здійснюються з кутовими швидкостями $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ відповідно.

Далі покажемо, що кутова швидкість тіла, яке бере участь у трьох одночасних обертаннях, є геометричною сумою кутових швидкостей складових обертань. Запишемо це без доведення /рис. 2.5/:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{j}_3 + \dot{\theta} \vec{K} + \dot{\varphi} \vec{e}_K . \qquad /2.33/$$

За допомогою формули /2.33/ знайдемо проекції вектора кутової швидкості на осі: нерухомі $Ox_1 x_2 x_3$ та зв'язані з тілом $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \vec{\omega}\vec{j}_1 = \dot{\psi}\vec{j}_1\vec{j}_3 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{j}_1 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{j}_1 , \\ \omega_{x_2} &= \vec{\omega}\vec{j}_2 = \dot{\psi}\vec{j}_3\vec{j}_2 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{j}_2 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{j}_2 , \\ \omega_{x_3} &= \vec{\omega}\vec{j}_3 = \dot{\psi}\vec{j}_3\vec{j}_3 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{e}_3 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{e}_3 . \end{aligned} \qquad /2.34/$$

Аналогічно виглядають проекції на зв'язані з тілом осі:

$$\omega_{\xi_1} = \vec{\omega}\vec{e}_1 = \dot{\psi}\vec{J}_3\vec{e}_1 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{e}_1,$$

$$\omega_{\xi_2} = \vec{\omega}\vec{e}_2 = \dot{\psi}\vec{J}_3\vec{e}_2 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{e}_2 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{e}_2, \qquad /2.35/$$

$$\omega_{\xi_3} = \vec{\omega}\vec{e}_3 = \dot{\psi}\vec{J}_3\vec{e}_3 + \dot{\theta}\vec{n}\vec{e}_3 + \dot{\varphi}\vec{e}_3\vec{e}_3.$$

Використовуючи для цих співвідношень вирази для косинусів напрямних кутів зв'язаної системи координат, запишемо кінематичні формули Ейлера як залежності проекцій кутової швидкості тіла на нерухомі та зв'язані з тілом осі від кутів Ейлера та їх похідних:

$$\omega_{x_1} = \dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$

$$\omega_{x_2} = -\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \qquad /2.36/$$

$$\omega_{x_3} = \dot{\varphi}\cdot\cos\theta + \dot{\psi};$$

$$\omega_{\xi_1} = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi,$$

$$\omega_{\xi_2} = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cdot\cos\varphi, \qquad /2.37/$$

$$\omega_{\xi_3} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cdot\cos\theta.$$

З цих рівнянь випливає вираз

$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cdot\cos\theta \qquad /2.38/$$

для модуля кутової швидкості.

2.6. Деякі властивості швидкостей точок твердого тіла

Використовуючи співвідношення /2.25/, сформулюємо та доведемо т е о р е м и , наслідки яких можуть бути корисними при розв'язуванні конкретних задач.

Теорема про проекції швидкостей точок твердого тіла

Для рухомого твердого тіла проекції швидкостей двох будь-яких його точок на пряму, яка їх з'єднує, однакові.

Д о в е д е н н я . Дійсно, помножимо /2.25/ скалярно на вектор $\vec{\rho}$, який з'єднує точки O та M . Тоді будемо мати

$$\vec{V}_M\cdot\vec{\rho} = \vec{V}_0\cdot\vec{\rho} + (\vec{\omega}\cdot\vec{\rho})\,\vec{\rho},$$

де $(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho})\,\vec{\rho} = 0$, що випливає з властивостей змішаного добутку трьох векторів.

Таким чином, $\vec{V}_M \cdot \vec{\rho} = \vec{V}_0 \vec{\rho}$, але $\vec{\rho} = \vec{e}\rho$, де $\vec{e}$ – одиничний вектор напрямку OM, і тому

$$\vec{V}_M \cdot \vec{e} = \vec{V}_0 \cdot \vec{e},$$

що й доводить теорему, бо

$$\vec{V}_M \vec{e} = \text{пр}_{OM} \vec{V}_M, \qquad \vec{V}_0 \vec{e} = \text{пр}_{OM} \vec{V}_0.$$

Інший спосіб доведення цього факту базується на властивостях твердого тіла як фізичного об'єкта. Розкладемо вектори $\vec{V}_M$ та $\vec{V}_0$ кожний на дві складові. Одну складову кожного з цих векторів спрямуємо вздовж OM, а другу – перпендикулярно до цього напрямку /рис. 2.7/. Умовою твердості тіла є незмінність відстані між точками M та O, а це можливо лише за умови виконання рівності

$$\vec{V}_{M_1} = \vec{V}_{O_1},$$

що й доводить теорему.

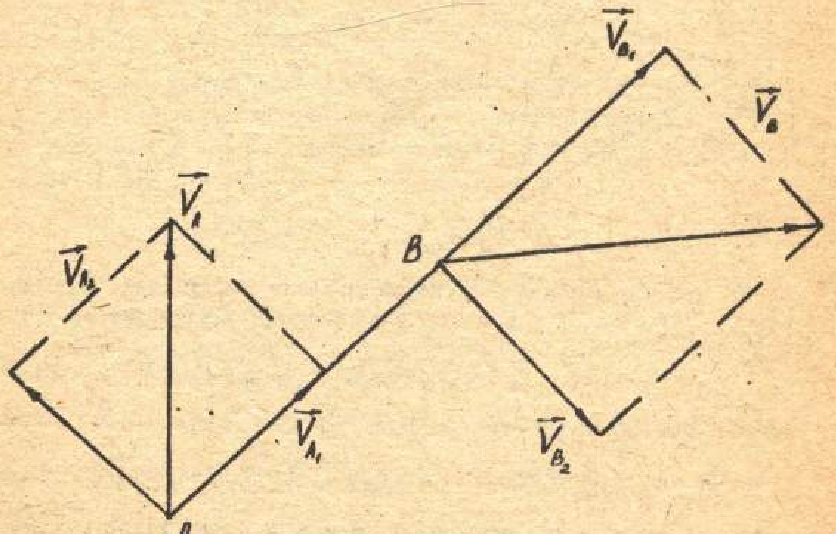


Рис. 2.7

Теорема про швидкості точок відрізка у твердому тілі

Кінці векторів швидкостей точок відрізка розташовані на одній прямій і поділяють її так, як їх початки - сам відрізок /рис. 2.8/.

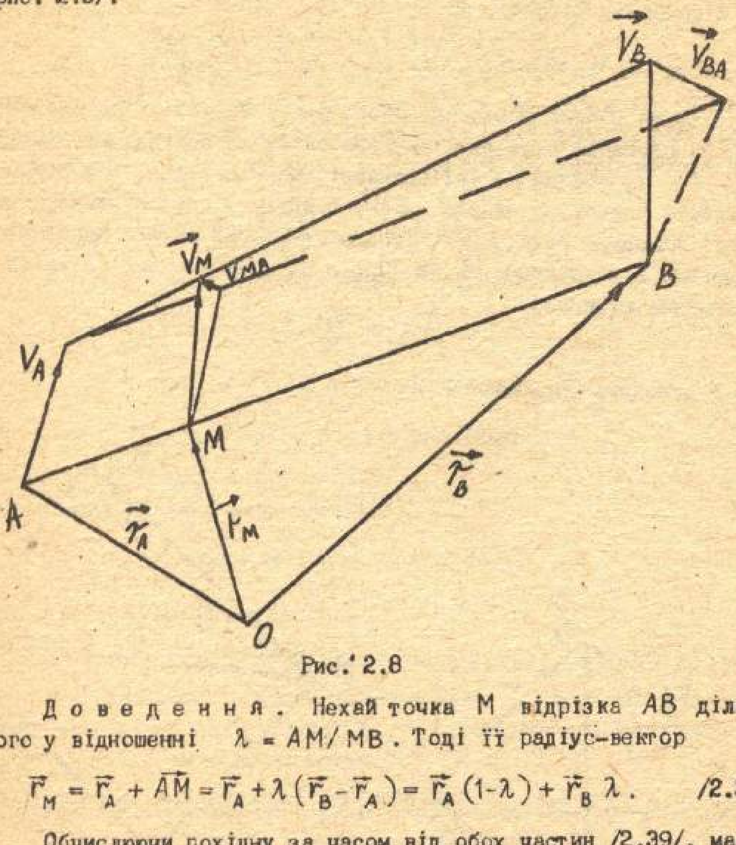


Рис. 2.8

Д о в е д е н н я. Нехай точка M відрізка AB ділить його у відношенні $\lambda = AM/MB$. Тоді її радіус-вектор

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{AM} = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{r}_A(1-\lambda) + \vec{r}_B\lambda . \qquad /2.39/$$

Обчислюючи похідну за часом від обох частин /2.39/, маємо

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \frac{d}{dt}\vec{AM} = \vec{V}_A + \lambda(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = \vec{V}_A(1-\lambda) + \vec{V}_B\lambda . \quad /2.40/$$

Зміна параметра λ відповідає перегляду точок відрізка AB. Тому формула /2.40/ показує, що кінці векторів швидкостей точок цього відрізка розташовані на одній прямій, яку ділять в тому ж відношенні λ, що й точки A, M та B відрізок AB.

Теорема про напрямки однакових швидкостей

Швидкості точок, розташованих на прямій, паралельній векторові кутової швидкості тіла, для даного моменту часу однакові.

Д о в е д е н н я цієї теореми випливає безпосередньо з аналізу співвідношення /2.25/:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \overline{OM} .$$

Якщо $\overline{OM} \parallel \vec{\omega}$, $\vec{\omega} \cdot \overline{OM} = 0$ та $\vec{V}_M = \vec{V}_0$, то це й доводить теорему.

2.7. Розподіл прискорень точок твердого тіла

Диференціюючи за часом швидкість /2.39/ довільної точки M твердого тіла, одержимо формулу прискорень точок твердого тіла:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{W}_0 + \vec{W}_{MO}^{об} + \vec{W}_{MO}^{ос} . \quad /2.41/$$

Вектор

$$\vec{W}_{MO}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon} \times \overline{OM} \quad /2.42/$$

називається вектором обертального прискорення точки M тіла відносно полюса O і має напрямок, перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}$, утворюючи з ними праву трійку /рис. 2.9/. Модуль цього вектора

$$W_{MO}^{об} = \varepsilon \rho \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}}) = \varepsilon d_M , \quad /2.43/$$

де d_M - найкоротша відстань від точки M тіла до напрямку вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Останній доданок у /2.41/ називається доосьовим прискоренням точки M відносно полюса O :

$$\vec{W}_{MO}^{ос} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MO} . \quad /2.44/$$

Оскільки $\vec{V}_{MO} \perp \vec{\omega}$, то доосьове прискорення

$$W_{MO}^{ос} = \omega^2 h_M . \quad /2.45/$$

а вектор $\vec{W}_{MO}^{ос}$ перетинає напрямок вектора $\vec{\omega}$ під прямим кутом

Вектор повного прискорення точки M можна подати у вигляді суми прискорень полюса O тіла і точки M відносно полюса O:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_0 + \vec{W}_{MO}, \qquad \vec{W}_{MO} = \vec{W}_{MO}^{об} + \vec{W}_{MO}^{ос}, \qquad /2.46/$$

де складова $\vec{W}_{MO}$ зумовлена зміною орієнтації тіла у просторі.

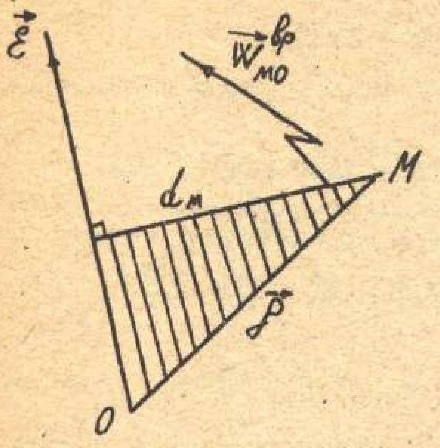


Рис. 2.9

Через велику кількість векторів у виразі прискорення довільної точки твердого тіла /2.46/ розподіл прискорень точок тіла більш складний, ніж розподіл швидкостей. У зв'язку з цим використання співвідношення /2.41/ при геометричному обчисленні прискорень точок тіла потребує проекціювання його на деякі осі, тобто застосування аналітичного методу розв'язування задачі, що розглядається.

Як і при дослідженні поля швидкостей точок тіла, можна стверджувати, що поле прискорень точок вільного твердого тіла є результатом накладання поля прискорень, відповідного поступальному рухові з прискоренням $\vec{W}_0$ полюса O на поле прискорень, відповідне сферичному рухові з полюсом у точці O і кутовими $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$.

3. НЕВІЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

У попередньому розділі було з'ясовано, що для опису руху вільного твердого тіла досить вести незалежних параметрів. Такими параметрами можуть бути, наприклад, координати довільної точки тіла та який-небудь набір кутів Ейлера, що характеризує орієнтацію тіла у просторі. Відомо, що кількість цих незалежних параметрів визначає число ступенів свободи твердого тіла. Отже, вільне тверде тіло має шість ступенів свободи.

Перейдемо до розгляду окремих видів руху твердого тіла, головною особливістю яких є те, що тіло у кожному з цих рухів матиме число ступенів свободи, менше за шість. Зменшення числа ступенів свободи пояснюється накладанням на рух тіла певних обмежень геометричного характеру. Такі наперед задані обмеження, накладені на рух тіла, називаються в'язями. Розглянемо лише ті в'язі, що накладають безпосередні обмеження на координати точок тіла і можуть бути подані у вигляді рівнянь

$$f_k(t, x_i, y_i, z_i) = 0, \quad k = \overline{1,\ell}, \quad i = \overline{1,k},$$

які називають рівняннями голономних в'язей. Якщо в рівняння в'язі не входить час, то в'язь називається стаціонарною, при наявності очевидної залежності від часу - нестаціонарною.

Вище зазначалося, що числом ступенів свободи є число незалежних один від одного параметрів, необхідних для опису руху тіла. За допомогою рівнянь в'язей можна виразити яку-небудь одну змінну через інші, тому ℓ рівнянь в'язей дозволяють виразити ℓ незалежних змінних. Як видно з розд. 2 координати усіх точок невільного тіла можна виразити шістьома незалежними параметрами, а ℓ в'язей, які описуються рівняннями

$$f_k(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, \varphi, \psi, \theta) = 0, \quad k = \overline{1,\ell},$$

зменшують це число на кількість рівнянь в'язей. Отже, число ступенів свободи невільного твердого тіла визначається формулою

$$S = 6 - \ell.$$

На основі введених понять в'язей та числа ступенів свободи твердого тіла можна з рівнянь руху вільного твердого тіла як окремі випадки одержати рівняння руху невільного тіла та визначити особливості такого руху.

3.I. <u>Поступальний рух твердого тіла</u>

Поступальним називається такий рух твердого тіла, коли його орієнтація у просторі залишається незмінною.

З цього означення випливає, що незалежно від того, яким чином здійснюються в'язі, які забезпечують поступальний рух, їхній ефект аналітично можна виразити рівняннями

$$\varphi = const, \quad \psi = const, \quad \theta = const, \qquad /3.I/$$

або, якщо відповідно вибрати нерухому і зв'язану системи координат,

$$\varphi \equiv 0, \quad \psi \equiv 0, \quad \theta \equiv 0.$$

Отже, положення та рух тіла у цьому випадку цілком задаються трьома незалежними параметрами-координатами деякої точки цього тіла, яка називається полюсом. Це означає, що при поступальному русі максимальне число ступенів свободи твердого тіла дорівнює трьом.

З рівнянь /2.9/ руху вільного твердого тіла виходить, що поступальний рух цілком можна описати рівняннями

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \quad x_{iA} = x_{iA}(t), \quad i = \overline{1,3}, \qquad /3.2/$$

а рівняння руху довільної точки такого тіла у векторній формі має вигляд

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M , \qquad /3.3/$$

де $\vec{\rho}_M = const$, тому що цей вектор з'єднує дві точки твердого тіла, яке не змінює своєї орієнтації.

З формули /3.3/ видно, що траєкторії усіх точок твердого тіла, яке рухається поступально, однакові і можуть бути суміщені паралельним переносом. Крім того, з умови $\vec{\rho}_M = const$ випливає, що при поступальному русі тіла будь-яка пряма у ньому залишається паралельною самій собі /це може служити означенням поступального руху/.

Диференціюючи /3.3/ послідовно два рази за часом, одержимо

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A , \qquad /3.4/$$

$$\vec{W}_M = \ddot{\vec{r}}_M = \ddot{\vec{r}}_A = \vec{W}_A , \qquad /3.5/$$

звідки видно, що при поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок для кожного моменту часу геометрично однакові. Те ж саме можна сказати про прискорення усіх точок твердого тіла.

Особливо зазначимо, що тільки при поступальному русі можна говорити про лінійні швидкість і прискорення твердого тіла як единого цілого, у загальному випадку руху ці поняття безглузді.

3.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо протягом усього часу руху дві точки тіла залишаються нерухомими, то рух тіла називається обертальним, а пряма, яка проходить через нерухомі точки, - віссю обертання тіла.

З метою більш раціонального опису такого руху сумістимо осі Ox_3 і $O\xi_3$ нерухомої і зв'язаної систем координат з віссю обертання тіла. У цьому випадку $\vec{r}_A \equiv 0$ /початок відліку суміщено з нерухомою точкою на осі обертання, вибраною за полюс/, $\theta \equiv 0$, а кути φ і Ψ не визначені, тому що площини Ox_1x_2 та $O\xi_1\xi_2$ суміщені. Але сума цих двох кутів дорівнює кутові між осями Ox_1 та $O\xi_1$. При вивченні обертального руху ця сума, яку будемо позначати Φ і називати кутом повороту тіла /рис. 3.I/, цілком характеризує обертальний рух, і тому рівність

$$\Phi = \Phi(t) \qquad /3.6/$$

називатимемо рівнянням обертального руху твердого тіла.

Те, що обертальний рух можна описати заданням лише одного параметр., видно із розглянутих нами раніше міркувань: вільне тверде тіло має шість ступенів свободи; нерухомість осі при обертальному русі накладає на рух тіла обмеження, відповідні до рівнянь

$$\vec{r}_A \equiv 0, \quad \theta \equiv 0, \quad \Phi = \varphi + \Psi, \qquad /3.7/$$

які випливають з означення обертального руху. Число ступенів свободи обчислюється як різниця числа ступенів свободи вільного тіла і кількості рівнянь в'язей: $S = 6 - 5 = I$.

Таким чином, тверде тіло при обертанні навколо нерухомої осі має один ступінь свободи, і тому його рух може характеризуватися одним параметром.

Кутова швидкість тіла, що обертається, відповідно до формул /2.36/, /2.37/ дорівнює:

$$\omega_{x_1} = 0, \quad \omega_{x_2} = 0, \quad \omega_{x_3} = \dot{\Phi}, \qquad /3.8/$$

звідки

$$\vec{\omega} = \dot{\Phi}\vec{j}_3 = \dot{\Phi}\vec{e}_3 . \qquad /3.9/$$

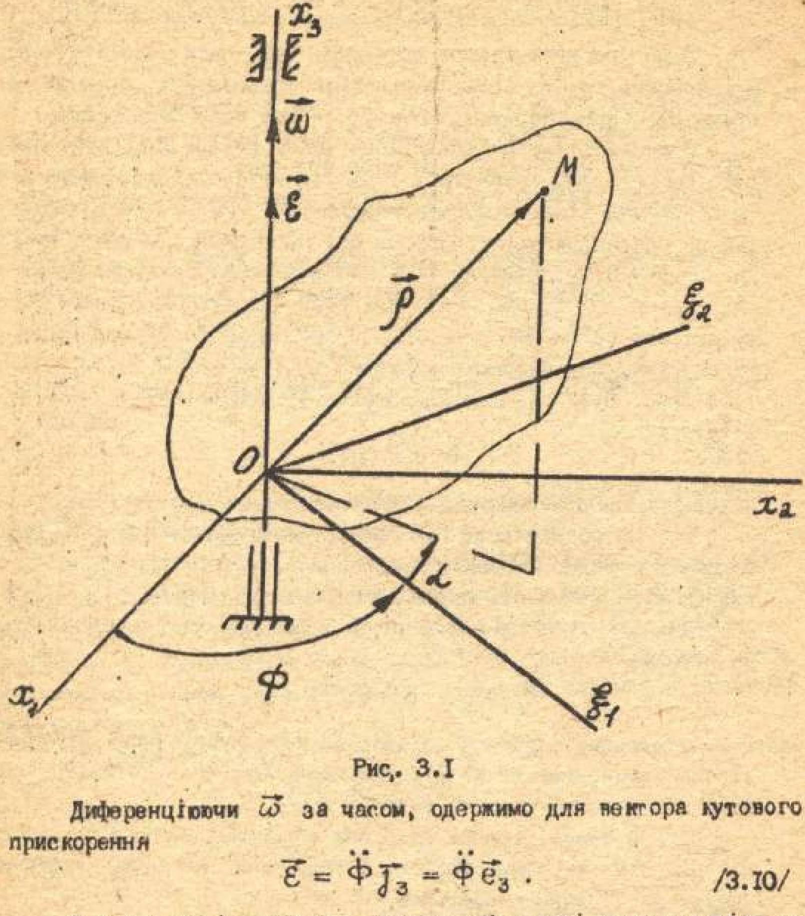


Рис. 3.I

Диференціюючи $\vec{\omega}$ за часом, одержимо для вектора кутового прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{\jmath}_3 = \ddot{\varphi}\vec{e}_3 . \qquad /3.10/$$

З цих виразів виходить, що при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі вектори кутової швидкості та кутового прискорення тіла мають напрямки вздовж цієї осі, а їх проекції на неї відповідно дорівнюють:

$$\omega_{x_3} = \dot{\varphi} = \omega_{\xi_3} , \quad \varepsilon_{x_3} = \varepsilon_{\xi_3} = \ddot{\varphi} . \qquad /3.11/$$

Іншими словами, напрямок вектора кутової швидкості вздовж осі обертання такий, що з його кінця можна бачити обертання тіла проти руху стрілки годинника /див. рис. 3.І/.

Характер обертального руху твердого тіла /аналогічно до характеру руху точки/ будемо визначати залежно від знака добутку $\vec{\varepsilon}\,\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\ddot{\varphi}$. Аналіз цього добутку показує, що обертання прискорене, якщо вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ мають однакові напрямки, і сповільнене, коли їх напрямки протилежні. При рівномірному русі модуль кутової швидкості сталий.

Закон руху будь-якої точки тіла, що обертається, легко одержати або із загальних співвідношень /2.І/, (2.16), або геометричним способом /рис. 3.2/:

$$x_1 = \xi_1 \cdot \cos\varphi - \xi_2 \cdot \sin\varphi = h \cdot \cos(\alpha+\varphi);$$
$$x_2 = \xi_1 \cdot \sin\varphi + \xi_2 \cdot \cos\varphi = h \cdot \sin(\alpha+\varphi); \qquad /3.12/$$
$$x_3 = \xi_3 = \text{const}.$$

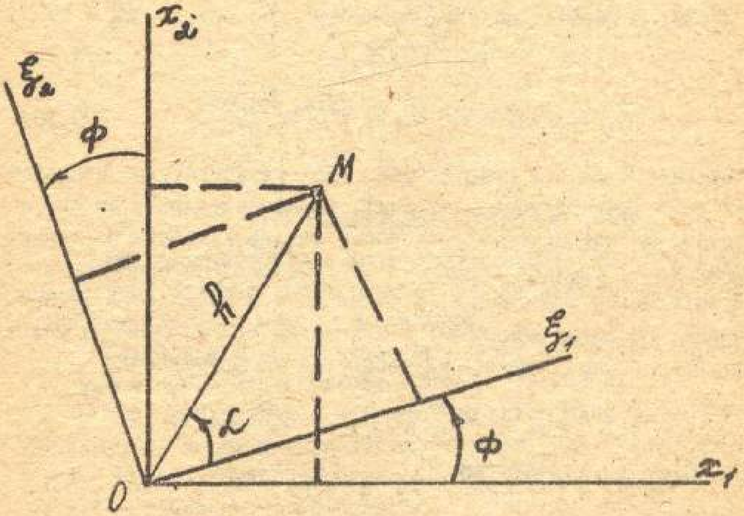


Рис. 3.2

У цих формулах h - відстань від точки до осі обертання, α - кут, що визначає разом з h положення цієї точки у площині, перпендикулярній до осі обертання. Траєкторія будь-якої точки - це коло радіусом h з центром на осі обертання, яке лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання.

Швидкість та прискорення точки можна дістати диференціюванням /3.12/:

$$V_{x_1} = -h\dot{\varphi}\cdot\sin(\alpha+\varphi) = -x_2\dot{\varphi},$$

$$V_{x_2} = h\dot{\varphi}\cdot\cos(\alpha+\varphi) = x_1\dot{\varphi}, \quad V_{x_3} = 0;$$

$$W_{x_1} = -h\ddot{\varphi}\cdot\sin(\alpha+\varphi) - h\dot{\varphi}^2\cdot\cos(\alpha+\varphi) = -x_2\ddot{\varphi} - x_1\dot{\varphi}^2; \quad /3.13/$$

$$W_{x_2} = h\ddot{\varphi}\cdot\cos(\alpha+\varphi) - h\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) = x_1\ddot{\varphi} - x_2\dot{\varphi}^2; \quad /3.14/$$

$$W_{x_3} = 0.$$

Ті ж самі результати одержуються із загальних співвідношень /2.39/ і /2.41/, де слід покласти $\vec{V}_A = 0$, $\vec{W}_A = 0$:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega}\times\vec{\rho}; \quad /3.15/$$

$$\vec{W}_M = \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\cdot\vec{V}_M = \vec{W}_M^{об} + \vec{W}_M^{ос}. \quad /3.16/$$

Очевидно, що при обертальному русі твердого тіла швидкість кожної його точки лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання, що має цю точку. Напрямок швидкості точки перпендикулярний до її радіуса обертання $П$. Обертальне прискорення точки збігається з дотичним, а доосьове - з нормальним її прискоренням. Величини швидкості і складових прискорення, а також модуль повного прискорення визначаються за формулами:

$$V_M = \omega h_M, \quad W_M^{об} = \varepsilon h_M, \quad W_M^{ос} = \omega^2 h_M;$$
$$W_M = h_M\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}, \quad tg\,\mu = W^{об}/W^{ос} = \varepsilon/\omega^2. \quad /3.17/$$

Напрямки векторів швидкості та прискорення точки показані на рис. 3.3. Вектор доосьового прискорення під прямим кутом перетинає вісь обертання, а вектор обертального прискорення перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}$, так само, як і вектор швидкості даної точки. Напрямки векторів $\vec{V}$ і $\vec{W}^{об}$

збігаються при прискореному обертанні тіла і є протилежними - при сповільненому.

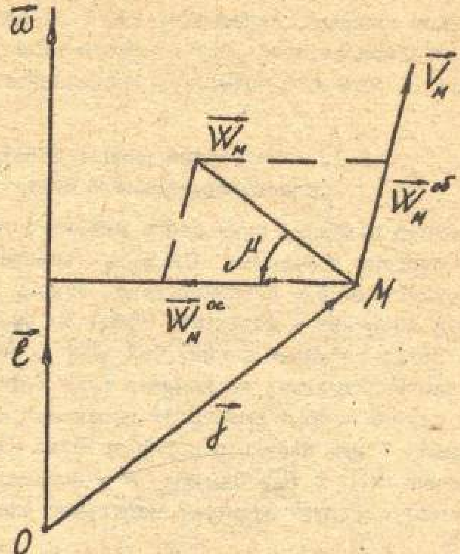


Рис. 3.3

3.3. Плоскопаралельний рух тіла

Рух твердого тіла, коли відстань від його точки до деякої нерухомої площини протягом усього часу руху залишається незмінною, називається плоскопаралельним.

Такий вид руху викликає особливий інтерес, тому що він часто має місце в рухах різних машин та їх частин.

При плоскопаралельному русі у всіх точок тіла, розміщених на прямій, перпендикулярній до площини руху, траєкторії, швидкості та прискорення - однакові. Це випливає з рівнянь руху довільної точки на такій прямій:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M , \qquad /3.18/$$

де $\vec{r}_A$ - радіус-вектор полюса A, який лежить на тій же прямій; $\vec{\rho}_M = const$ - радіус-вектор, що з'єднує полюс A з даною точкою M.

Отже, будь-яка площина, паралельна заданій нерухомій площині, відносно якої відбувається плоскопаралельний рух, має ті ж самі кінематичні характеристики руху, що й будь-яка інша зв'язана з тілом площина, паралельна їй. У зв'язку з цим при дослідженні плоскопаралельного руху твердого тіла досить розглянути рух одного її плоского перерізу, паралельного опорній нерухомій площині.

3.3.1. Аналітичний опис і дослідження плоскопаралельного руху.

Одержимо рівняння руху цього плоского перерізу, для чого нерухому систему координат $Ox_1x_2x_3$ виберемо так, щоб площина Ox_1x_2 сумістилася з площиною руху. Рухому систему $A\xi_1\xi_2\xi_3$ візьмемо з початком у довільній точці A перерізу, а її осі $A\xi_1$ і $A\xi_2$ жорстко зв'яжемо з ним. Осі Ox_3 і $A\xi_3$ паралельні одна одній і перпендикулярні до площини руху /рис. 3.4/.

При такому виборі рухомої і нерухомої систем відліку видно, що положення і рух плоского перерізу тіла цілком визначаються координатами x_{1A} і y_{3A} полюса A, а також кутом Φ, що задає орієнтацію фігури відносно нерухомих осей:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad x_{2A} = x_{2A}(t), \quad \Phi = \Phi(t). \qquad /3.19/$$

Закон руху довільної точки M цього перерізу має такий вигляд:

$$x_{1M} = x_{1A} + AM \cdot \cos(\alpha + \Phi);$$

$$x_{2M} = x_{2A} + AM \cdot \sin(\alpha + \Phi); \qquad /3.20/$$

$$x_{3M} = x_{3A} = \mathrm{const}.$$

Швидкість та прискорення цієї точки обчислюють звичайним диференціюванням за часом співвідношень /3.20/. Очевидно, що швидкість і прискорення точки M розташовані протягом усього часу руху в площині рухомої фігури.

Таким чином, рівняння плоскопаралельного руху /3.19/ тіла в сукупності із законом руху /3.20/ його довільної точки M повністю описують рухи тіла і всіх його точок.

Ясно, що плоскопаралельний рух можна визначити за допомо-

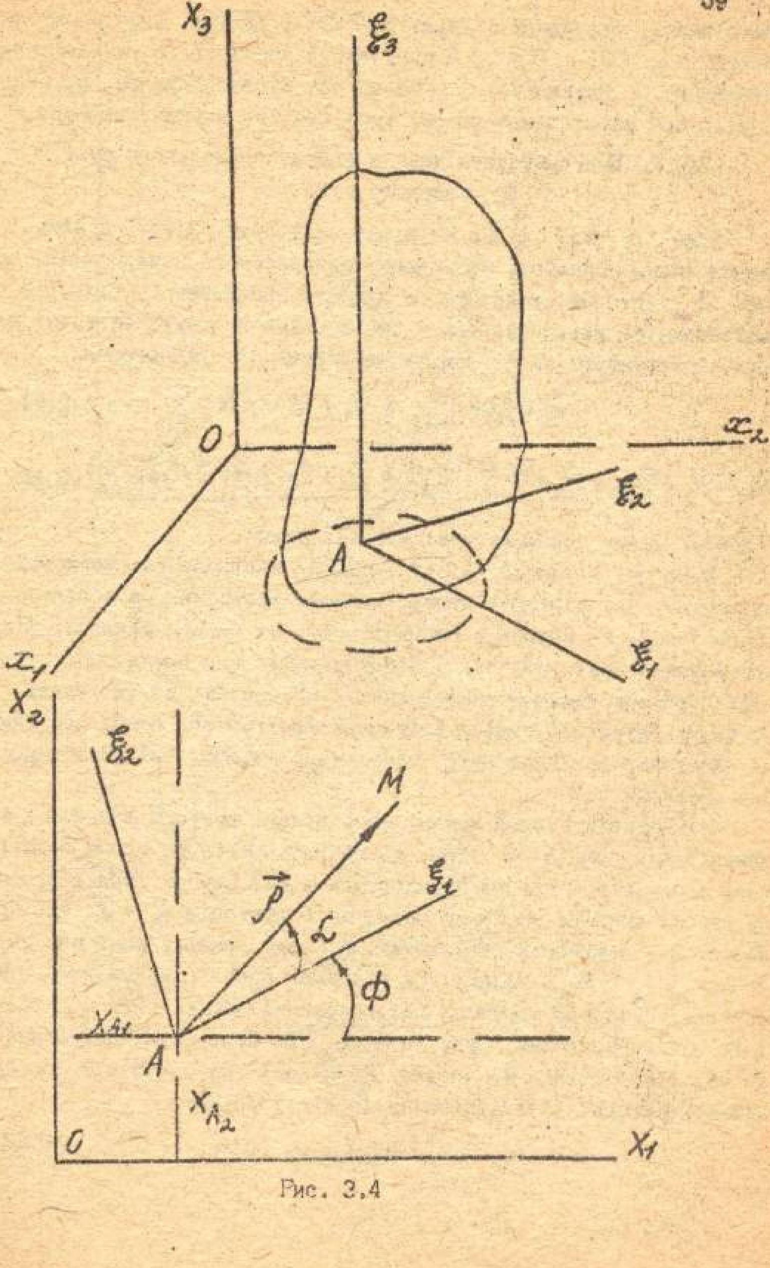


Рис. 3.4

гою рівнянь, одержаних з виразів /2.9/ і /2.10/, якщо у них покласти $x_{03} = 0$, $\theta = 0$, а суму кутів прецесії Ψ і власного обертання φ позначити Φ. Це ще раз підтверджує те, що тверде тіло при плоскопаралельному русі має три ступені свободи.

3.3.2. Векторне дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла

Якщо рух тіла задано не рівняннями руху /3.19/, а якимнебудь іншим способом, наприклад, швидкістю та прискоренням полюса A, кутовою швидкістю та кутовим прискоренням тіла, то раціональніше використовувати для дослідження руху векторні методи, що грунтуються на раніше одержаних співвідношеннях

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AM}, \qquad /3.21/$$

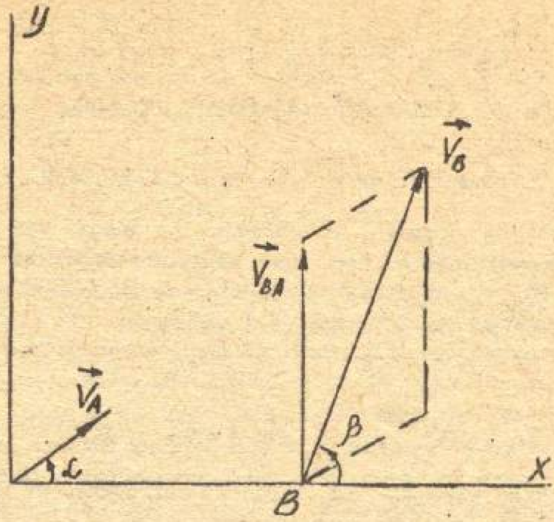
$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA} = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{об} + \vec{W}_{MA}^{ос} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AM}) \qquad /3.22/$$

і деяких нових поняттях, які введені нижче.

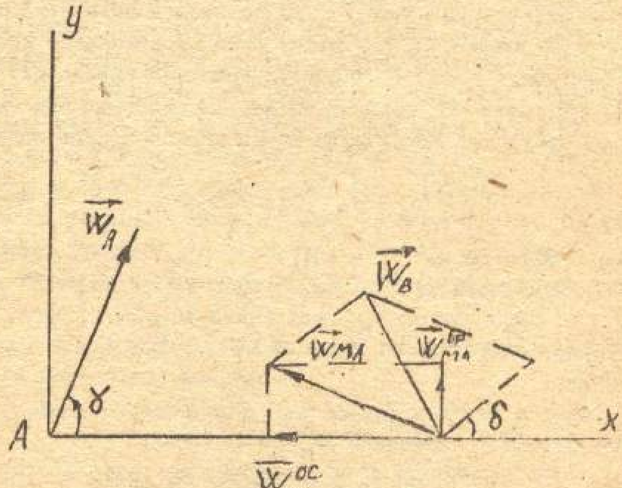
Векторні рівності /3.21/ і /3.22/ еквівалентні чотирьом скалярним, які дістають проекціюванням векторних на довільно вибрані осі, що лежать у площині руху. Ці чотири скалярні рівності можна розглядати як систему рівнянь для визначення будьяких чотирьох величин /незалежних/, що входять до їх складу. На цьому базується графоаналітичний /векторний/ метод дослідження плоскопаралельного руху. Розглянемо задачі, які розв'язуються цим методом.

I. Нехай у деякий момент часу відомі вектори швидкості та прискорення полюса A тіла, що розглядається, а також його кутова швидкість і кутове прискорення в цей момент /при векторному методі дослідження руху орієнтацію векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ умовно позначають круговими стрілками/. У цьому випадку додатним значенням ω_{x_3} і ε_{x_3} відповідає напрямок проти руху годинникової стрілки. Виберемо нерухомі осі координат $Oxyz$ так, щоб осі Ox і Oy лежали у площині руху, а вісь Oz була перпендикулярна до неї і спрямована на читача. На ці осі /рис. 3.5,а,б/ спроекціюємо векторні співвідношення /3.21/ і /3.22/:

$$V_{Mx} = V_M \cdot \cos\beta = V_A \cos\alpha ; \qquad /3.23/$$


y
$\vec{V}_б$
$\vec{V}_{BA}$
$\vec{V}_A$
β
α
x
B

а


y
$\vec{W}_A$
$\vec{W}_B$
$\vec{W}_{MA}$
$\vec{W}^{ВР}_{ТА}$
γ
δ
x
A
$\vec{W}^{ОС}_{MA}$

б

Рис. 3.5

$$V_{My} = V_M \cdot \sin\beta = V_A \cdot \sin\alpha + |\omega_z| \cdot AM; \qquad /3.24/$$

$$W_{Mx} = W \cdot \cos\delta = W_A \cos\gamma - \omega_z^2 AM; \qquad /3.25/$$

$$W_{My} = W \cdot \sin\delta = W_A \cdot \sin\gamma + |\varepsilon_z| AM. \qquad /3.26/$$

Оскільки величини, які належать до правої частини цих співвідношень, задані, то можна визначити проекції V_{Mx}, V_{My}, W_{Mx}, W_{My}, швидкості та прискорення довільної точки M тіла, а вслід за цим – їх модулі і напрямки:

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}, \quad \cos\beta = V_{Mx} / V_M; \qquad /3.27/$$

$$W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2}, \quad \cos\beta = W_{Mx} / W_M. \qquad /3.28/$$

2. Якщо величини ω_z і ε_z є невідомими, то мають бути задані деякі характеристики руху точки M.

Нехай задано швидкість $\vec{V}_A$ і прискорення $\vec{W}_A$ полюса A, а також траєкторію точки M та положення останньої на траєкторії в даний момент часу. У цьому випадку визначено напрямок вектора швидкості точки M і радіус кривизни траєкторії у заданому положенні точки M відомий. Отже, за теоремою про проекції швидкостей /3.23/ точок тіла можна знайти модуль швидкості точки

$$V_M = V_A \cdot \cos\alpha / \cos\beta, \qquad /3.29/$$

а знаючи його та кут β – V_{Mx}, – і V_{My}. Далі з рівняння /3.24/ визначаємо модуль ω, а знак ω_z – за такої умови: $\omega_z > 0$, якщо вектор $\vec{V}_{MA}$ має такий самий напрямок, як при обертанні відрізка AM навколо A, тобто проти руху стрілки годинника.

Тепер з рівнянь /3.24/ і /3.26/ можна знайти W_M^τ і ε_z, якщо попередньо визначити W_M^n за формулою

$$W_M^n = V_M^2 / \rho = V_A^2 \cdot \cos^2\alpha / \rho \cdot \cos^2\beta. \qquad /3.30/$$

Обчислимо W_M^τ і ε_z за допомогою рівнянь /3.25/ і /3.26/:

$$W_M^\tau \cos\beta + W_M^n \cdot \sin\beta = W_A \cdot \cos\gamma - \omega_z^2 AM; \qquad /3.31/$$

$$W_M^{\tau}\sin\beta - W_M^{n}\cos\beta = W_A\sin\gamma - |\varepsilon_z|\,AM. \qquad /3.32/$$

Одержані при розв'язанні цієї задачі ω_z і ε_z можна використовувати для розрахунку поля швидкостей та прискорень точок даного тіла.

3.3.3. Миттьові центри швидкостей і прискорень та їх використання

Із співвідношення /3.21/ при $\omega = 0$ випливає, що швидкості усіх точок тіла в даний момент часу однакові, як і при поступальному русі твердого тіла. Тому стан тіла у випадку $\omega = 0$ називають миттьово-поступальним рухом /це стосується лише розподілу швидкостей!/.

Якщо $\omega \neq 0$, то існує миттьовий центр швидкостей /МЦШ/ – єдина точка плоскої фігури, або нескінченної, незмінно зв'язаної з нею рухомої площини, швидкість якої дорівнює нулю.

Позначимо цю точку буквою $\mathcal{P}$. Очевидно, що швидкості усіх точок прямої, яка проходить через $\mathcal{P}$ перпендикулярно до площини руху, також дорівнюють нулю, а тому цю пряму можна назвати миттьовою віссю обертання тіла. Отже, плоскопаралельний рух у кожний момент часу можна розглядати як миттьове обертання навколо цієї осі. У цьому русі розподіл швидкостей точок твердого тіла цілком відповідає їх розподілу при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Дійсно, з виразу /3.21/ при $\vec{V}_P = 0$ випливає $\vec{V}_M = \vec{V}_{M\mathcal{P}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}M}$, тобто швидкість кожної точки M перпендикулярна до відрізка, який з'єднує її з миттьовим центром швидкостей, або миттьовий центр швидкостей тіла може бути визначений як точка перетину перпендикулярів до напрямків швидкостей його точок.

Відстані від точок тіла до миттьового центра швидкостей визначаються очевидними формулами

$$M\mathcal{P} = V_M/\omega, \quad A\mathcal{P} = V_A/\omega, \quad B\mathcal{P} = V_B/\omega, \ldots, \qquad /3.33/$$

які виходять з того, що швидкості усіх точок дорівнюють

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}M}, \quad \vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}A}, \quad \vec{V}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathcal{P}B}, \ldots \qquad /3.34/$$

Із цих же співвідношень видно, що модулі швидкостей точок фігури при плоскопаралельному русі відносяться як відстані від цих точок до миттьового центра швидкостей:

$$\frac{V_M}{V_A}=\frac{M\mathcal{P}}{A\mathcal{P}},\quad \frac{V_A}{V_B}=\frac{A\mathcal{P}}{B\mathcal{P}},\quad \frac{V_B}{V_M}=\frac{B\mathcal{P}}{M\mathcal{P}},\ldots \qquad /3.35/$$

Виходячи з перелічених властивостей МЦШ можна зробити такі висновки:

1. Якщо швидкості двох точок фігури не паралельні одна одній, то положення МЦШ знаходиться як точка перетину перпендикулярів до напрямків швидкостей цих точок /рис. 3.6,а/.

2. Якщо швидкості точок A і B фігури паралельні, а самі точки лежать на прямій, перпендикулярній до їх швидкостей, то положення МЦШ визначається побудовами, показаними на рис.3.6,б,в.

3. У випадках, коли плоска фігура котиться не ковзаючи по нерухомій кривій /рис. 3.6,г/, МЦШ фігури знаходиться у точці дотику до цієї кривої; це випливає з умови кочення без ковзання: швидкості точок дотику фігури і опорної кривої повинні бути однаковими.

З рівняння /3.22/ випливає, що при $\omega=0$ і $\varepsilon=0$ $\vec{W}_M=\vec{W}_A$, тобто розподіл прискорень /тільки прискорень!/ такий самий, як і при поступальному русі тіла. Якщо ж ω і ε одночасно не дорівнюють нулю, то на фігурі або на рухомій площині, незмінно з нею зв'язаній, є єдина точка, прискорення якої в даний момент часу перетворюється на нуль. Цю точку називають миттьовим центром прискорень /МЦП/ плоскої фігури.

Положення цієї точки, позначеної буквою Q, визначимо за допомогою співвідношення /3.22/. Нехай прискорення цієї точки дорівнює нулю, і тоді

$$\vec{W}_Q=0=\vec{W}_A+\vec{W}_{QA}=\vec{W}_A+\vec{W}_{QA}^{oc}+\vec{W}_{QA}^{o\delta},$$

звідки $\vec{W}_A=-\vec{W}_{QA}$, тобто обидва ці вектори утворюють з відрізком QA однаковий кут μ /рис. 3.7/, значення якого знаходять за очевидною формулою

$$tg\,\mu=\frac{\left|\vec{W}_{QA}^{o\delta}\right|}{\left|\vec{W}_{QA}^{oc}\right|}=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad /3.36/$$

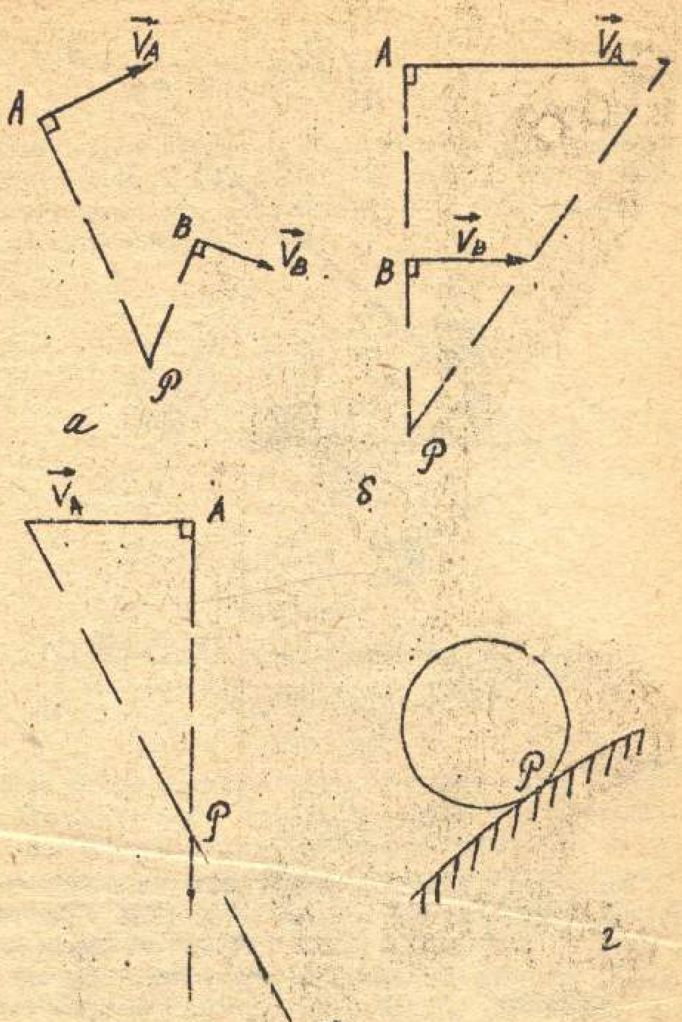


Рис. 3.6

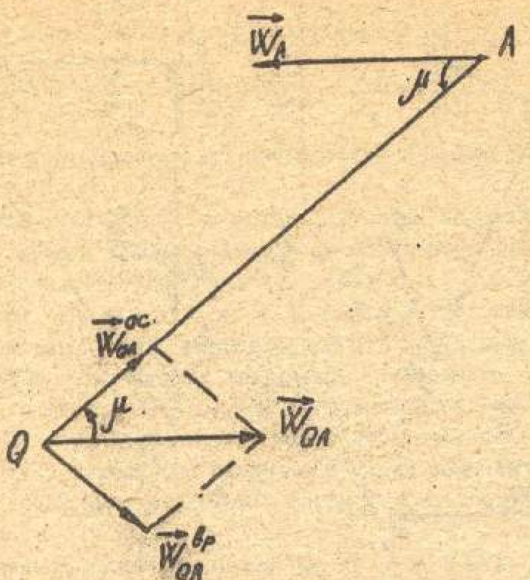


Рис. 3.7

Відстань QA визначимо з умови $|\vec{W}_A| = |\vec{W}_{QA}|$:

$$|\vec{W}_A| = |\vec{QA}| \cdot \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}, \qquad /3.37/$$

звідки

$$QA = \frac{|\vec{W}_A|}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}. \qquad /3.38/$$

Таким чином, для побудови МЦП треба знати прискорення якої-небудь точки фігури, а також її ω та ε. Використовуючи ці величини, за формулами /3.36/ і /3.38/ обчислюємо кут μ і відстань QA. Потім відкладаємо від напрямку $\vec{W}_A$ кут μ проти руху годинникової стрілки, якщо $\varepsilon_z > 0$, і за рухом стрілки годинника, якщо $\varepsilon_z < 0$. Під цим кутом проводимо промінь, на якому відкладаємо відстань QA /3.38/.

Якщо за полюс вибрати МЦП, то для прискорень інших точок рухомої фігури справедливі співвідношення

$$\vec{W}_A = \vec{W}_{QA}, \quad |\vec{W}_A| = QA \cdot \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},$$

$$\vec{W}_B = \vec{W}_{QB}, \quad |\vec{W}_B| = QB \cdot \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},$$

звідки

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{QA}{QB}. \qquad /3.39/$$

Отже, модулі прискорень точок тіла при плоскопаралельному русі відносяться як відстані від цих точок до МЦП, а напрямки їх векторів утворюють однакові кути μ з відрізками, які з'єднують ці точки з МЦП /рис. 3.8/.

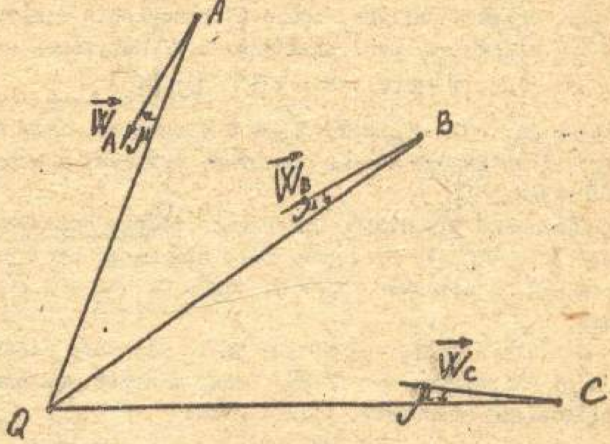


Рис. 3.8

Якщо відомі положення МЦП та прискорення хоча б однієї точки фігури, то за формулою /3.39/ можна знайти прискорення усіх інших її точок. Проте використання поняття МЦП при розв'язуванні конкретних задач обмежується необхідністю неодноразового розрахунку косокутних трикутників для визначення відстаней від МЦП до точок, прискорення яких треба обчислити. Наведемо деякі окремі випадки, коли побудова МЦП і обчислення за допомогою нього прискорень точок фігури значно спрощуються:

а/ $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$, $\mu = \pi/2$;

б/ $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$;

в/ $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$; МЦП не існує, прискорення усіх точок геометрично однакові;

г/ $\vec{W}_A \,/\, \vec{W}_B$ – МЦП є точкою перетину відрізка AB і такого відрізка, що з'єднує кінці векторів прискорень точок A і B.

Відповіді до розглянутих випадків побудови зображені на рис. 3.9.

3.4. Сферичний рух твердого тіла

Рух твердого тіла, коли лише одна його точка весь час залишається нерухомою, називається сферичним. Така назва пов'язана з тим, що у процесі руху кожна точка тіла знаходиться на поверхні сфери сталого радіуса, тобто її траєкторія є сферичною кривою.

При сферичному русі рівняння /2.9/ набувають вигляду

$$\varphi=\varphi(t),\ \Psi=\Psi(t),\ \theta=\theta(t), \qquad /3.40/$$

оскільки $X_{10}=0$, $X_{20}=0$, $X_{30}=0$ у випадку, коли початки нерухомої і зв'язаної систем координат суміщені з нерухомою точкою O тіла.

Сферичний рух цілком описується трьома незалежними параметрами / φ, Ψ, θ /, і тому тіло при цьому русі має три ступені свободи, а рівняння $X_{10}=0$, $X_{20}=0$, $X_{30}=0$ є рівняннями в'язей.

Швидкість довільної точки такого твердого тіла розраховується із співвідношення /2.39/, якщо в ньому покласти $\vec{V}_{01}=0$, що відповідає сферичному рухові тіла:

$$\vec{V}_M=\dot{\vec{\rho}}_M=\vec{\omega}\times\vec{\rho}_M=\vec{\omega}\times\vec{OM}, \qquad /3.41/$$

де $\vec{\rho}_M$ – радіус-вектор точки M, проведений з нерухомої точки O; $\vec{\omega}$ – кутова швидкість тіла відносно нерухомої системи координат.

Якщо покладемо $\vec{V}_M=0$, то одержимо рівняння геометричного місця точок, швидкості яких у даний момент часу дорівнюють нулю:

$$\omega\times\rho=\begin{vmatrix}\vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j} \\ \omega_{x_1} & \omega_{x_2} & \omega_{x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_{\xi_1} & \omega_{\xi_2} & \omega_{\xi_3} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{vmatrix}=0, \qquad /3.42/$$

або

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}}=\frac{x_2}{\omega_{x_2}}=\frac{x_3}{\omega_{x_3}},\qquad \frac{\xi_1}{\omega_{\xi_1}}=\frac{\xi_2}{\omega_{\xi_2}}=\frac{\xi_3}{\omega_{\xi_3}}. \qquad /3.43/$$

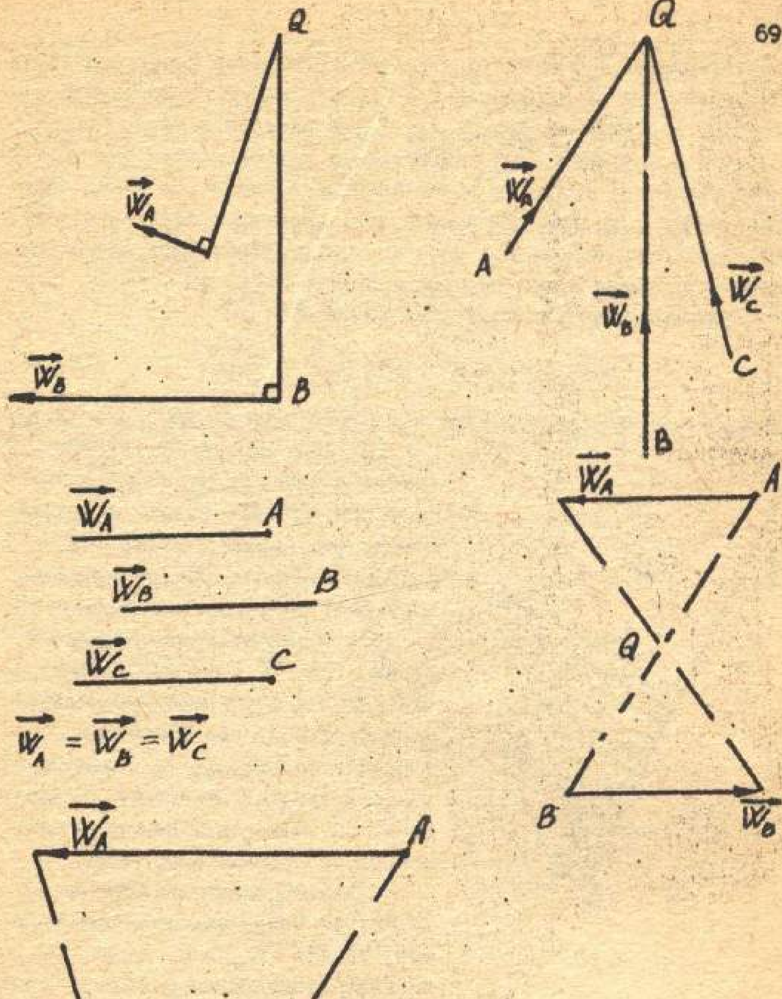

Q
$\vec{W}_A$
$\vec{W}_B$
B
Q
$\vec{W}_A$
A
$\vec{W}_B$
$\vec{W}_C$
C
B
$\vec{W}_A$
A
$\vec{W}_B$
B
$\vec{W}_C$
C
$\vec{W}_A = \vec{W}_B = \vec{W}_C$
$\vec{W}_A$
A
Q
B
$\vec{W}_B$
$\vec{W}_A$
A
$\vec{W}_B$
B
C

Рис. 3.9

Рівняння /3.43/ цього геометричного місця точок з нульовими швидкостями /у нерухомій і зв'язаній системах координат відповідно/ є рівнянням прямої лінії, що проходить через нерухому точку O, напрямок якої збігається з напрямком вектора $\vec{\omega}$ кутової швидкості тіла. Цю пряму називають миттьовою віссю обертання /МВО/ тіла при сферичному русі. Вектор кутової швидкості має такий напрямок вздовж МВО, що з його кінця миттьове обертання тіла видно проти руху годинникової стрілки.

Визначимо модуль швидкості точки M:

$$V_M = \omega \rho_M \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{\rho}_M) = \omega h_M , \qquad /3.44/$$

де h_M - найкоротша відстань від цієї точки до МВО /рис. 3.10/.

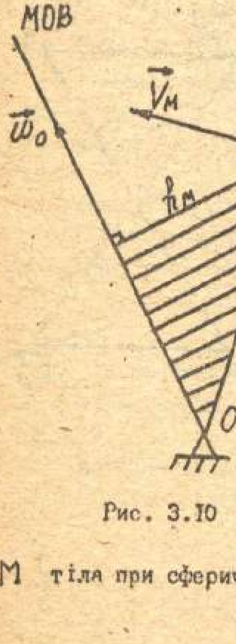


Рис. 3.10

Зі сказаного вище випливає, що розподіл швидкостей точок твердого тіла при сферичному русі в кожний момент часу такий, нібито тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, що збігається з МВО.

За означенням кутове прискорення тіла $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$, але, на відміну від обертання його навколо нерухомої осі, при сферичному русі напрямок не збігається з лінією дії вектора кутової швидкості, оскільки останній змінюється не тільки за величиною, а й за напрямком.

Диференціюючи співвідношення /3.42/ за часом або вважаючи у формулі /2.41/ $\vec{W}_{01} = 0$, одержуємо для вектора прискорення довільної точки M тіла при сферичному русі залежність

$$\vec{W}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_M , \qquad /3.45/$$

де $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M = \vec{W}_M^{об}$, $\quad \vec{\omega} \times \vec{V}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = \vec{W}_M^{ос}$.

Вектор $\vec{W}_M^{об}$ обертального прискорення точки M перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}_M$, а вектор $\vec{W}_M^{oc}$ доосьового прискорення – до площини векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_M$. Оскільки при сферичному русі вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ у загальному випадку не мають однакових напрямків, не можна ототожнювати $\vec{W}^{об}$ з $\vec{W}^{\tau}$ і $\vec{W}^{oc}$ – з $\vec{W}^{n}$. Більше за те, кут між $\vec{W}_M^{об}$ і $\vec{W}_M^{oc}$ не дорівнює 90°.

Відповідно до правила обчислення модуля векторного добутку для $\vec{W}_M^{об}$ і $\vec{W}_M^{oc}$ дістанемо:

$$W_M^{об} = \varepsilon \rho_M \cdot \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}_M) = \varepsilon d_M ; \qquad /3.46/$$

$$W_M^{oc} = \omega V_M \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{V}_M) = \omega^2 h_M , \qquad /3.47/$$

де d_M – найкоротша відстань від точки M до напрямку вектора кутового прискорення тіла /рис. 3.II/.

Отже, якщо задано рівняння $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, то за кінематичними формулами Ейлера /2.20/ або /2.37/ можна знайти проекції векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ на нерухомі або зв'язані з тілом осі, а за формулами /3.4I/ і /3.45/ – швидкості та прискорення точок, які нас цікавлять. Таким чином буде проведений повний аналіз сферичного руху тіла.

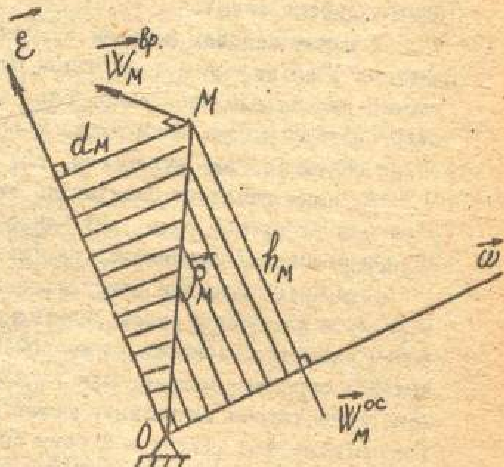


Рис. 3.II

У конкретних задачах рівняння руху тіла можуть бути невідомі, однак з природи руху в кожний момент часу можна визначити положення МВО і швидкість якої-небудь точки тіла. Тоді за виразами /3.4I/ і /3.45/ знаходять швидкості і прискорення точок тіла, оскільки $\omega = V_A / h_A$, а модуль і напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ – з очевидної аналогії співвідношень

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt, \quad \vec{V} = d\vec{r}/dt, \qquad /3.48/$$

з яких видно, що вектор $\vec{\varepsilon}$ геометрично дорівнює швидкості кінця вектора $\vec{\omega}$ при неперервній його зміні з плином часу.

Таким чином, кутове прискорення тіла при сферичному русі може бути визначене як швидкість кінця вектора $\vec{\omega}$ у русі по його годографу. Подальше розв'язування задачі зводиться до обчислення швидкостей і прискорень точок тіла за формулами /3.41/ і /3.45/.

4. СКЛАДЕНИЙ РУХ ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

Розв'язування багатьох задач механіки суттєво полегшується або набуває більш очевидного фізичного трактування, якщо вводяться одночасно дві або більше систем відліку, що рухаються одна відносно іншої.

В одних задачах повинен розглядатися рух об'єкта відносно системи відліку, що певним чином рухається відносно іншої, яка умовно вважається нерухомою. Так, водій автомобіля, судноводій, пілот літака мусять мати чітке уявлення про свій рух відносно інших об'єктів, які рухаються, або про їхній рух відносно себе.

В інших випадках спеціально вибираються рухомі систем відліку для того, щоб рухи, які важко описати в нерухомій системі, подати у вигляді сукупності декількох рухів, відомих наперед, або таких, що простіше описуються і досліджуються. Наприклад, горіння з наступним рухом реактивного струменя через вихідне сопло ракетного двигуна легше описати у системі координат, зв'язаній з корпусом ракети, ніж відносно системи, зв'язаної з Землею, хоча задача розрахунку траєкторії і закону руху центра мас ракети може нас цікавити й сама по собі. Задача визначення коливань і деформацій крила літака під час його маневру також простіше розв'язується спостерігачем, який рухається разом з центром мас літака. Також нескладно досліджується й рух гіроскопів приладів і систем керування літального апарата відносно самого рухомого апарата.

Як і в більшості підручників з теоретичної механіки, використаємо в даному виданні традиційні термінологію та поняття, хоча можливий і менш абстрактний виклад за допомогою спостерігачів, зв'язаних з різними системами відліку.

Звичайно, систему координат, рухом якої при розв'язуванні конкретної задачі можна знехтувати, називають основною, або абсолютною, а рух, швидкість і прискорення точки відносно цієї системи – абсолютними і позначають індексом a / $\vec{r}_a$, $\vec{V}_a$, $\vec{W}_a$ /.

Рухому систему координат, що певним чином рухається відносно основної, називають допоміжною, а рух, швидкість і прискорення точки у цій системі – відносними і позначають індексом r / $\vec{r}_r$, $\vec{V}_r$, $\vec{W}_r$ /.

Рух точки разом з допоміжною системою координат як точки абсолютно твердого тіла відносно основної системи називають переносним рухом, а швидкість та прискорення точки у цьому русі – переносними і позначають індексом e / $\vec{V}_e$, $\vec{W}_e$ /.

Абсолютний рух точки, одержаний як результат "додавання" відносного і переносного рухів, називають ще складним, або складеним, причому другий термін більше відповідає смислові методу, ніж слово "складний". При означенні абсолютного руху слова "... результат "додавання" відносного і переносного рухів ..." не слід розуміти буквально, тому що для опису і дослідження руху за допомогою запропонованого методу використовуються правила "додавання", які дещо відрізняються від звичних.

Відмітимо, що назви "основна" і "допоміжна" системи відліку, "абсолютний" та "відносний" рухи не слід сприймати як такі, що властиві якій-небудь координатній системі незмінно. При розв'язуванні однієї й тієї ж задачі кожна з вибраних систем координат може бути основною або допоміжною залежно від поставленої мети.

4.1. Рівняння складеного руху точки

Рухи об'єктів відносно різних рухомих систем відліку описуються різними математичними формулами. Мета полягає у тому, щоб навчитися переходити від опису руху в одній системі до опису того самого руху в іншій системі.

За основний об'єкт спостереження візьмемо точку і уявимо собі, що вона рухається одночасно відносно двох систем координат: $Ox_1x_2x_3$ – основної і $A\xi_1\xi_2\xi_3$ – допоміжної. Рух цієї точки M відносно першої задається радіусом-вектором

$$\vec{r} = \sum_{i=1} \vec{j}_i x_i , \quad x_i = x_i(t), \quad \vec{j}_i = \overrightarrow{const} , \qquad /4.1/$$

а відносно другої – вектором

$$\vec{\rho} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \xi_k , \quad \xi_k = \xi_k(t), \quad \vec{e}_k = \vec{e}_k(t) . \qquad /4.2/$$

Якщо, крім цього, задано рух системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно осей $0x_1x_2x_3$, то

$$\vec{r}_A = \sum_{i=1}^{3} \vec{j}_i x_{Ai} , \quad x_{Ai} = x_{Ai}(t), \qquad /4.3/$$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(t), \quad i,k = \overline{1,3},$$

де $\vec{j}_i$ і $\vec{e}_i$ – одиничні вектори нерухомих і рухомих осей; α_{ik} - напрямні косинуси осей $A\xi_1\xi_2\xi_3$; x_i і ξ_k – координати точки M у нерухомій та рухомій системах /визначення α_{ik} через кути Ейлера див. у розд. 2/.

Як видно з рис. 4.1, між описами рухів точки M відносно $0x_1x_2x_3$ і $A\xi_1\xi_2\xi_3$ існує очевидна залежність

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}, \qquad /4.4/$$

звідки проекціюванням на нерухомі осі одержимо

$$x_i = x_{Ai} + \sum_{k=1}^{3} \xi_k \alpha_{ik} , \qquad /4.5/$$

а розв'язуючи ці співвідношення відносно ξ_k, –

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} (x_i - x_{Ai}). \qquad /4.6/$$

Ці співвідношення дозволяють визначити рівняння абсолютного руху за заданими відносним $\xi_k = \xi_k(t)$ і переносним $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}(t)$, $\vec{r}_A = \vec{r}(t)$ рухами або, навпаки – відносний знайти за заданими абсолютним і переносним. Простим диференціюванням за часом можна обчислити швидкість і прискорення точки M у відповідних рухах.

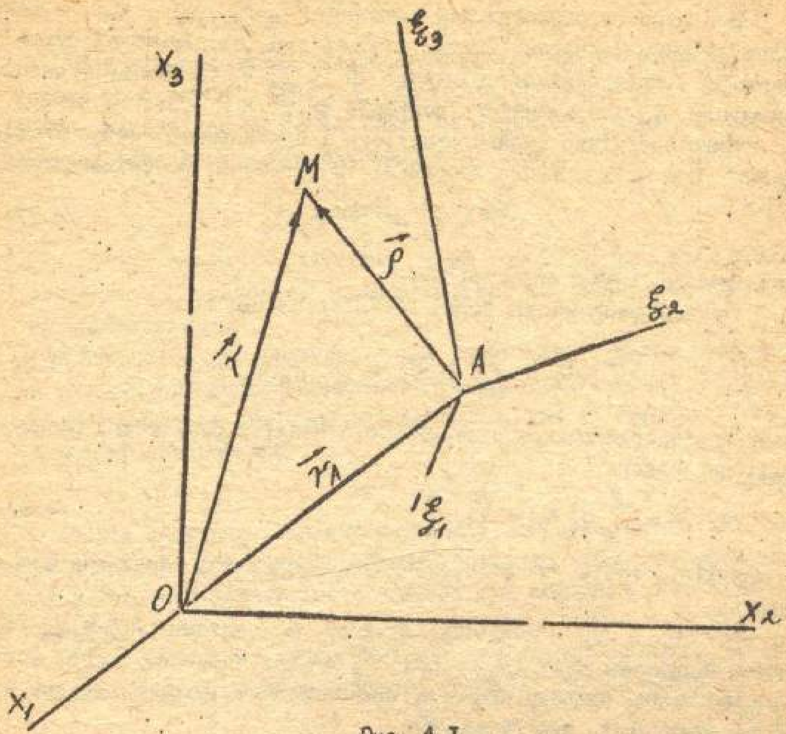


Рис. 4.I

4.2. Залежності між швидкостями та прискореннями точки у складеному русі

Іноді потрібно визначити швидкості та прискорення точки в абсолютному або відносному русі, минаючи стадію формування співвідношень /4.5/ і /4.6/. Тому одержимо залежності між швидкостями та прискореннями точки в абсолютному і відносному рухах диференціюванням за часом співвідношень /4.4/ або /4.5/.

Для того, щоб при виконанні математичних перетворень не загубився кінематичний смисл, використаємо двох спостерігачів: першого – незмінно зв'язаного з системою $Ox_1x_2x_3$, яку умовно будемо вважати нерухомою; другого – що рухається разом із системою $A\xi_1\xi_2\xi_3$, і так само, як вона.

Для першого спостерігача вектори $\vec{r}$, $\vec{r}_A$, $\vec{\rho}$, $\vec{e}_K$, а також ξ_K є змінними з часом. Другий спостерігач, слідкуючи за рухом точки M, буде помічат" у виразі $\vec{\rho} = \sum_{K=1}^{3} \xi_K \vec{e}_K$ зміну з часом координат ξ_K і незмінність векторів $\vec{e}_K$, $K = \overline{1,3}$.

Якщо необхідно знайти швидкість і прискорення точки M відносно $Ox_1x_2x_3$, тобто абсолютні їх значення, то співвідношення

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \sum_{K=1}^{3} \xi_K \vec{e}_K \ . \qquad /4.7/$$

диференціює перший спостерігач.

Продиференціювавши вираз /4.7/ за часом, тобто

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \sum_{K=1}^{3} \dot{\xi}_K \vec{e}_K + \sum_{K=1}^{3} \xi_K \dot{\vec{e}}_K \,, \qquad /4.8/$$

цей спостерігач шляхом кінематичного аналізу результата одержує такі висновки:

$$а/ \quad \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \vec{j}_i \dot{x}_i = \vec{V}_M \qquad /4.9/$$

– швидкість точки M відносно $Ox_1x_2x_3$, або абсолютна швидкість;

б/ $\dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$ – швидкість початку A системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно нерухомих осей $Ox_1x_2x_3$; $\dot{\vec{e}}_K = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_K$ – на основі формул Пуассона, причому ω_e – кутова швидкість рухомої системи відносно нерухомої, або переносна:

$$\sum_{K=1}^{3} \xi_K \dot{\vec{e}}_K = \sum_{K=1}^{3} \xi_K (\vec{\omega}_e \times \vec{e}_K) = \vec{\omega}_e \times \sum_{K=1}^{3} \xi_K \vec{e}_K = \vec{\omega}_e \times \rho = \vec{V}_{M_0A}$$

– швидкість точки M системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ як твердого тіла при нерухомій точці A.

Об'єднуючи все це, перший спостерігач приходить до висновку, що

$$\dot{\vec{r}}_A + \sum \xi_K \dot{\vec{e}}_K = \vec{V}_A + \vec{V}_{M_0A} = \vec{V}_{M_0}$$

– швидкість точки M_0 системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ у її русі відносно осей $Ox_1x_2x_3$.

Відповідно до раніше прийнятих означень швидкість того місця M_0 рухомої /допоміжної/ системи координат, в якому в даний момент часу знаходиться точка M, будемо називати її переносною швидкістю і позначати $\vec{V}_e$:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overline{AM}. \qquad /4.10/$$

Для першого спостерігача залишається незрозумілим кінематичний смисл суми $\sum \dot{\xi}_K \vec{e}_K$. Другий спостерігач може дати однозначну відповідь: це не що інше, як швидкість точки M відносно системи координат цього спостерігача. Отже,

$$\sum_{K=1}^{3} \dot{\xi}_K \vec{e}_K = \overset{*}{\vec{\rho}} = \vec{V}_r \text{*)} \qquad /4.11/$$

– швидкість точки M відносно осей $A\xi_1\xi_2\xi_3$, яку назвемо відносною / $\vec{V}_r$ означає похідну вектора за часом, обчислену другим спостерігачем/.

Відповідно до прийнятої нами термінології можна сформулювати теорему про додавання швидкостей: швидкість точки M в її абсолютному русі дорівнює геометричній сумі її переносної та відносної швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \qquad /4.12/$$

Слід відмітити, що про переносну швидкість точки M як про швидкість допоміжної системи координат відносно основної можна говорити тільки тоді, коли її рух поступальний, тобто при $\vec{\omega}_e \equiv 0$.

Для визначення залежності між прискореннями точки M у складеному русі продиференціюємо вираз /4.12/ за часом:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_e}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt}. \qquad /4.13/$$

Очевидно, що

$$\frac{d\vec{V}_a}{dr} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \vec{i}_i \ddot{x}_i = \vec{W}_a \qquad /4.14/$$

– абсолютне прискорення точки M, яке фіксує перший спостерігач.

Виходячи з означення переносної швидкості обчислимо

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_e \times \sum_{K=1}^{3} \xi_K \vec{e}_K\right) =$$

$$= \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \sum_{K=1}^{3} \dot{\xi}_K \vec{e}_K + \vec{\omega}_e \times \sum_{K=1}^{3} \xi_K \dot{\vec{e}}_K =$$

$$=\vec{W}_A+\vec{\varepsilon}_e\times\vec{\rho}+\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r+\vec{\omega}_e\times\left(\sum_{K=1}^{3}\xi_K\,\vec{\omega}_e\times\vec{e}_K\right)=$$

$$=\vec{W}_A+\vec{\varepsilon}\;\times\vec{\rho}+\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r+\vec{\omega}_e\times(\vec{\omega}_e\times\vec{\rho})\,. \qquad /4.15/$$

Тут

$$\vec{W}_A+\vec{\varepsilon}_e\times\vec{\rho}+\vec{\omega}_e\times(\vec{\omega}_e\times\vec{\rho})=\vec{W}_{M_0}=\vec{W}_e \qquad /4.16/$$

– прискорення точки M_0 рухомої системи координат відносно нерухомої, тобто переносне прискорення точки M .

Продиференціюємо відносну швидкість за часом:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{K=1}^{3}\dot{\xi}_K\vec{e}_K=\sum_{K=1}^{3}\ddot{\xi}_K\vec{e}_K+\sum_{K=1}^{3}\dot{\xi}_K\dot{\vec{e}}_K=\overset{**}{\vec{\rho}}+\vec{\omega}_e\times\sum_{K=1}^{3}\dot{\xi}_K\vec{e}_K=$$

$$=\overset{**}{\vec{\rho}}+\vec{u}_e\times\vec{V}_r=\vec{W}_r+\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r\,. \qquad /4.17/$$

Підставляючи /4.14/, /4.15/ і /4.17/ в /4.13/, одержимо

$$\vec{W}_a=\vec{W}_e+\vec{W}_r+2\,\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r\,,$$

де доповняльний доданок $2\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r$ називають прискоренням Коріоліса, або поворотним прискоренням, і позначають $\vec{W}_{Cor}$.

Таким чином, ми прийшли до теореми про додавання прискорень, або до теореми Коріоліса: прискорення точки M в абсолютному русі дорівнює геометричній сумі її переносного, відносного та коріолісового прискорень:

$$\vec{W}_a=\vec{W}_e+\vec{W}_r+\vec{W}_{Cor}\,. \qquad /4.18/$$

Відповідно до означення

$$\vec{W}_{Cor}=2\,\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r \qquad /4.19/$$

вектор коріолісового прискорення перпендикулярний до площини векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$, а його напрямок такий, що з його кінця поворот від першого до другого вектора видно проти годинникової стрілки по найкоротшій відстані, тобто такий, що вектори / $\vec{W}_{Cor}$, $\vec{\omega}_e$, $\vec{V}_r$ / утворюють праву трійку, як осі x, y, z декартової системи координат /рис. 4.2/.

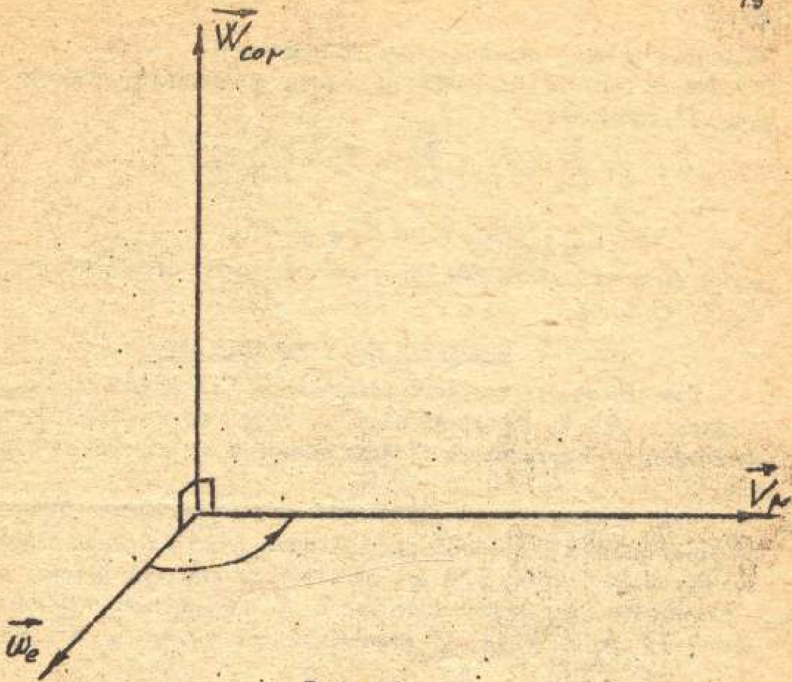


Рис. 4.2

Модуль цього вектора обчислюється за формулою

$$W_{cor} = 2\omega_e V_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r). \qquad /4.20/$$

З виразів /4.19/ і /4.20/ випливає, що коріолісове прискорення перетворюється на нуль у таких випадках:

1/ вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ паралельні;

2/ допоміжна система рухається відносно основної поступально, $\vec{\omega}_e \equiv 0$;

3/ точка M нерухома у допоміжній системі, $\vec{V}_r = 0$.

Крім того, одержано результат, який полягає у тому, що похідна вектора $a = \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k$, заданого своїми проекціями на осі рухомої системи координат, обчислена першим спостерігачем, дорівнює сумі похідної того самого вектора, знайденої другим спостерігачем, і векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{a}$, де $\vec{\omega}$ - кутова

швидкість рухомої системи відносно нерухомої.
Останнє твердження має назву: це - лема про локальну похідну вектора. Її доведення

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \dot{a}_k \vec{e}_k + \sum_{k=1}^{3} a_k \dot{\vec{e}}_k =$$

$$= \overset{*}{\vec{a}} + \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k = \overset{*}{\vec{a}}_k + \vec{\omega} \times \vec{a}_k$$

можна використовувати для того, щоб одержати співвідношення /4.12/ і /4.18/.

4.3. Складений рух твердого тіла

Розглянемо рух твердого тіла відносно нерухомої $Ox_1x_2x_3$ і рухомої $A\xi_1\xi_2\xi_3$ систем відліку. Розв'яжемо задачу визначення абсолютного руху цього тіла за заданими переносним та відносним.

Якщо переносний рух допоміжної системи координат відносно основної задано рівняннями руху її початку та матрицею напрямних косинусів $A_e = \|\alpha^e_{ik}\|$, а рух самого тіла відносно рухомих осей - рівняннями руху деякої його точки C та матрицею напрямних косинусів $A_r = \|\alpha^r_{ik}\|$, то абсолютний рух полюса C визначиться рівнянням

$$x_{C_i} = x_{A_i} + \sum_{k=1}^{3} \xi_{C_k} \alpha^e_{ik} ,$$

а матрицю абсолютних напрямних косинусів для тіла можна одержати перемноженням матриць A_r і A_e.

Задача розрахунку складеного руху тіла, таким чином, цілком розв'язана: за відомими законами руху полюса C тіла і зміни з часом його напрямних косинусів з нерухомими осями визначаються усі кінематичні характеристики твердого тіла в цілому і кожної його точки відповідно до методів і правил, розглянутих у розд. 2. Такий спосіб опису складеного руху твердого тіла використовується досить широко у динаміці твердого тіла та в динаміці польоту. Цю саму задачу розв'яжемо в іншій постановці. Нехай відносний рух тіла задано векторами $\vec{V}_C'$ і $\vec{\omega}_1$, переносний рух - векторами $\vec{V}_A$ і $\vec{\omega}_2$, що відповідає вільному рухові твердого тіла /рис. 4.3/. Необхідно визначити вид абсолютного руху тіла за розподілом швидкостей та прискорень його точок.

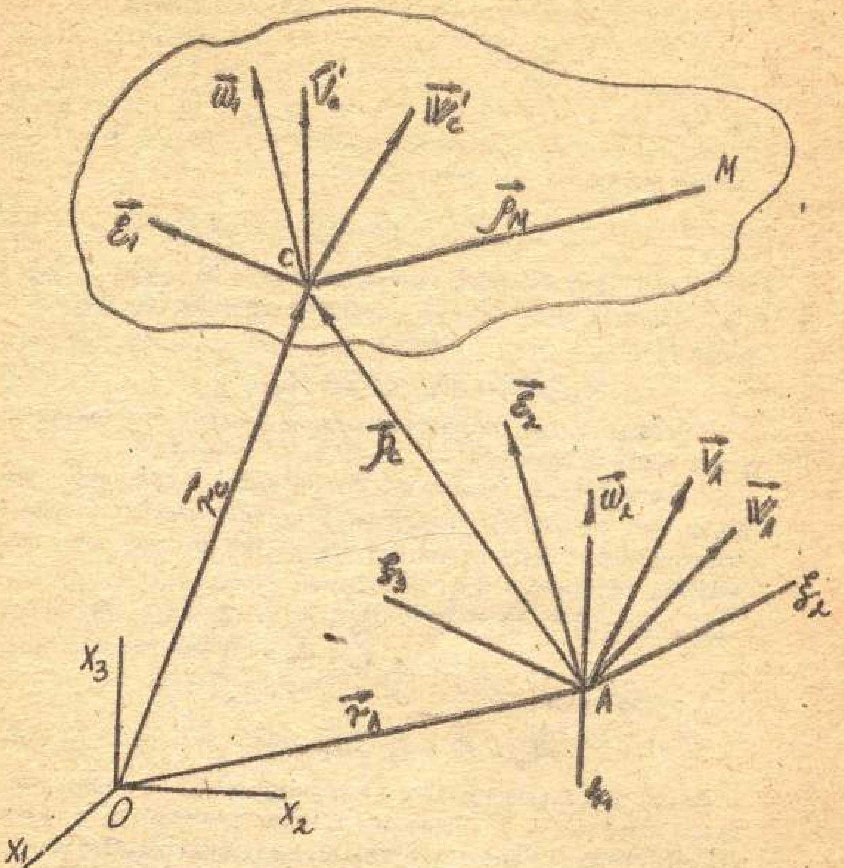


Рис. 4.3

Для розв'язання цієї задачі знайдемо вирази швидкості і прискорення довільної точки тіла відносно нерухомої системи координат за допомогою теореми про додавання швидкостей і прискорень.

У цьому випадку

$$\vec{V}_{1r} = \vec{V}_c' + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1 ,$$

$$\vec{V}_{1e} = \vec{V}_a + \vec{\omega}_2 (\vec{AC} + \vec{\rho}_1),$$

$$\vec{V}_{ia} = \vec{V}_c' + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_i + \vec{V}_a + \vec{\omega}_2 \, (\vec{AC} + \vec{\rho}_i) =$$
$$= \vec{V}_a + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{V}_c' + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_i \,,$$

де $\vec{V}_a + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} = \vec{V}_{ce}$, $\vec{V}_c' = V_{cr}$; $\vec{V}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{V}_c' = \vec{V}_{ca}$ - переносна, відносна та абсолютна швидкості полюса C. Тоді абсолютна швидкість довільної точки тіла

$$\vec{V}_{ia} = \vec{V}_{ca} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}_i = \vec{V}_{ca} + \vec{\omega}_a \times \vec{\rho}_i \,. \qquad /4.21/$$

Відповідно до даних раніше означень $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_r$, $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_e$. Тому, природно, суму $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ називають абсолютною кутовою швидкістю тіла:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e \,. \qquad /4.22/$$

Останнє співвідношення має назву теореми про додавання кутових швидкостей.

Диференціюючи формулу /4.22/ за часом і враховуючи при цьому, що вектор $\vec{\omega}_r$ визначений у рухомій системі координат, тобто повинен диференціюватися відповідно до леми про локальну похідну, одержимо

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \dot{\vec{\omega}}_e + \dot{\vec{\omega}}_r \,, \quad \dot{\vec{\omega}}_a = \vec{\varepsilon}_a \,, \quad \dot{\vec{\omega}}_e = \vec{\varepsilon}_e \,, \quad \dot{\vec{\omega}}_r = \overset{*}{\vec{\omega}}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r =$$
$$= \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \,.$$

Таким чином,

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \qquad /4.23/$$

- кутове прискорення тіла у складеному русі - є геометричною сумою переносного і відносного кутових прискорень, а також векторного добутку переносної кутової швидкості на відносну. Це твердження іноді називають теоремою про додавання кутових прискорень.

В окремому випадку, коли вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\omega}_r$ незмінні в системах координат, де вони визначені, співвідношення /4.23/ набуває простішого вигляду:

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \,. \qquad /4.24/$$

Рух твердого тіла з нерухомою точкою, що відповідає таким умовам, називається регулярною прецесією.

Визначимо прискорення довільної точки твердого тіла, для чого продиференціюємо за часом співвідношення /4.2I/:

$$\vec{W}_{ia} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{V}_C' + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + \vec{W}_C' + \vec{\omega}_2 \times \vec{V}_C' +$$

$$+ (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{\rho}_i + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\overset{*}{\vec{\rho}}_i + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_i),$$

де

$$\vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) = \vec{W}_{ce}, \quad \vec{W}_C' = \vec{W}_{cr}, \quad 2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_C' = \vec{W}_{C\,cor},$$

тобто їх сума дорівнює абсолютному прискоренню точки C тіла.

За виразом /4.23/ $\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 + \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}_a$, а з /4.22/ випливає, що $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_a$. Тому

$$(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) \times \vec{\rho}_i = \vec{W}_{M_iC}^{об},$$

$$(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\overset{*}{\vec{\rho}}_r + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_i) = \vec{\omega}_a \times \vec{V}_{M_iC} = \vec{W}_{M_iC}^{oc}.$$

Отже,

$$\vec{W}_i^a = \vec{W}_C + \vec{W}_{M_iC}^{об} + \vec{W}_{M_iC}^{oc}. \qquad /4.25/$$

Це співвідношення свідчить про те, що в результаті додавання двох вільних рухів твердого тіла приходимо до вільного руху з параметрами:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{V}_C', \quad \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,$$

$$\vec{W}_C = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + \vec{W}_C' + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_C',$$

$$\vec{\varepsilon}_0 = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1.$$

На основі викладеного вище можна зробити висновок про тип складеного руху в таких випадках: I/ тіло бере участь у двох поступальних рухах; 2/ тіло здійснює два обертальні рухи навколо нерухомих паралельних осей з кутовими швидкостями, що мають однакові або протилежні напрямки; 3/ тіло обертається навколо осей, що перетинаються у нерухомій точці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. М., 1982. Т.I. Статика и кинематика.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1986.

Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. Киев, 1985.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др. М., 1985.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: В 2 ч. М., 1966. Ч.I. Статика и кинематика.

ЗМІСТ

Сергій Володимирович Спрейне,
Микола Андрійович Супруненко,
Олексій Михайлович Старов

КІНЕМАТИКА

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 1995
Підписано до друку 31.08.95
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 4,7. Облік.-вид. арк. 5,37. Т. 100 прим.
Замовлення 61. Ціна вільна

Харківський авіаційний інститут
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні ХАІ
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17