504

С. М. Барсуков

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ХВИЛІ НА МЕЖІ РОЗПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

1994

22

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Харківський авіаційний інститут ім. М.Є. Жуковського

С.М. БАРСУКОВ

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ХВИЛІ НА МЕЖІ РОЗПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Навчальний посібник

Харків ХАІ 1994

УДК 537.876:4 (075.8)

Електромагнітні поля та хвилі на межі розподілу середовищ/ С.М. Барсуков. - Навч. посібник. - Харків: Харк. авіац. ін-т, 1994. - 73 стор.

Розглянуто основи теорії електромагнетизму. Проведено обгрунтування рівнянь Максвелла та їх розв'язання для необмеженого простору з різноманітними характеристиками середовищ. Послідовно проаналізовано структуру і характеристики електромагнітного поля на плоскій межі розподілу середовищ та між двома площинами.

Для студентів радіотехнічних факультетів вузів при вивченні курсу "Теорія електромагнітного поля".

Іл. 40. Бібліогр.: 5 н в.

Рецензенти: кафедра вимірювань Харк. ін-ту радіоелектроніки;
канд. фіз.-мат. наук В.І. Ткаченко

1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Поняття електромагнітного поля

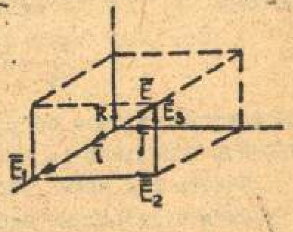
Електромагнітне поле - це особлива форма матерії, за допомогою якої відбувається взаємодія між електрично зарядженими частинками. Електромагнітна взаємодія - одна із фундаментальних взаємодій. Класична електродинаміка вивчає електромагнітне поле. На відміну від квантової електродинаміки, що вивчає взаємодію у малих просторово-часових інтервалах, класична електродинаміка досліджує порівняно слабкі та повільно змінювані електромагнітні поля.

Матеріальність електромагнітного поля підтверджується його основними властивостями: 1) воно є носієм енергії, яка може перетворюватися в інші види енергії; 2) має гравітаційну масу; 3) виявляє корпускулярно-хвильову двоїстість; 4) проявляє силовий вплив на електричні заряди. Силова прояв поля дозволяє використати векторне зображення.

Задамо прямокутну систему координат за допомогою одиничних векторів (ортів) (рис. 1.1):

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{K}| = 1, \quad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{K}.$$

Далі використовуємо праву в'язку трьох векторів, де їх взаємне розташування підпорядковується правилу правого гвинта. Тоді деякий вектор, що характеризує поле у заданій точці простору, запишемо у вигляді



$$\bar{E} = E_x\bar{i} + E_y\bar{j} + E_z\bar{K},$$

Рис. 1.1

де E_x, E_y, E_z - проекції вектора на відповідні орти. Проекції вектора поля визначаються на підставі ортогональності ортів:

$$\bar{j}\cdot\bar{i} = \bar{K}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{K} = 0, \quad \bar{i}\cdot\bar{i} = 1,$$

і, таким чином, $E_x = \bar{E}\bar{i}$. Для визначення поля у деякій області простору треба в кожній точці знайти вектори $\bar{E}(x,y,z)$, $\bar{H}(x,y,z)$, тобто поле векторів. Формальною мовою опису поля є математична теорія поля.

1.2. Силові характеристики електромагнітного поля

У вакуумі поле повністю характеризується двома векторами: напруженістю електричного поля $\bar{E}$ та магнітною індукцією $\bar{B}$. Введемо вектор, що характеризує електричне поле у вакуумі. Нехай електричне поле у просторі задається точковим зарядом Q кулонів (Кл). На відстані r від цього заряду розташуємо пробний заряд q. Сила, що впливає на цей заряд, характеризує поле у даній точці та згідно з законом Кулона дорівнює

$$\bar{F} = k \cdot \frac{Qq}{r^2} \bar{r}_0,$$

де $\bar{r}_0$ – одиничний радіус-вектор, направлений вздовж прямої, яка з'єднує заряди; k – коефіцієнт пропорційності, причому

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

де $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – електрична стала.

Характеристика, яка не залежить від величини пробного заряду, уявляє собою напруженість електричного поля

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \bar{r}_0, \quad [E] = \text{В}/\text{м}. \qquad (1.1)$$

Цей вектор зображає силу, що впливає на одиничний заряд і є основною чисельною характеристикою електричного поля.

Силова дія магнітного поля оцінюється при його взаємодії з рухомим електричним зарядом. На рухомий заряд q зі швидкістю v у магнітному полі з індукцією $\bar{B}$ впливає сила

$$\bar{F} = q[\bar{v} \times \bar{B}].$$

Ця сила має напрямок, перпендикулярний до площини, створеної векторами $\bar{v}$, $\bar{B}$, і тому не змінює кинетичну енергію частинки, тобто не здійснює роботу, а тільки випрявляє траекторію руху. Величина цієї сили залежить від напрямку руху частинки:

$$F = qvB\sin\alpha.$$

Індукція магнітного поля характеризує силу, що впливає на одиничний заряд, який рухається з одиничною швидкістю перпендикулярно до напрямку дії поля, причому $[B] = \text{Тл}$ (тесла).

Таким чином, для чисельного вимірювання електромагнітного поля використовують його силові прояви. У цілому вплив поля на рухому електричну частинку підпорядковується закону Лоренца:

$$\bar{F} = q\bar{E} + q[\bar{v} \times \bar{B}].$$

Вектори напруженості електричного поля та магнітної індукції є достатніми для характеристики поля у вакуумі.

1.3. Середовище та його вплив на характеристики поля

Сила електромагнітної взаємодії у середовищі змінюється, тому що воно "відгукується" на дію поля. Отже, напруженість електричного поля і магнітна індукція не є абсолютними характеристиками електричного та магнітного полів, а їх величини змінюються у залежності від електромагнітних якостей середовища. Зазначимо характеристики поля, що не залежать від якостей середовища.

Вплив електричного поля на середовище супроводжується поляризацією. Під дією електричного поля перерозподіляється заряд молекул середовища, тобто виникає електричний диполь (зв'язаний заряд), орієнтований вздовж поля. Вторинне електричне поле диполів послаблює первинне поле, при цьому сила кулонівської взаємодії зменшується. Дійсно, якщо кулонівська сила у вакуумі

$$F_0 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

то в середовищі

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2},$$

де ε - діелектрична проникність середовища (абсолютна). Порівняємо сили взаємодії:

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r,$$

де ε_r - відносна діелектрична проникність середовища. Вона показує, у скільки разів сила електричної взаємодії у середовищі менша, ніж у вакуумі, наприклад, повітря - $\varepsilon_r = 1{,}0006$, вода - $\varepsilon_r = 81{,}1$.

Таким чином, напруженість електричного поля у середовищі залежить від його діелектричної проникності

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \bar{r}_0 .$$

Вводемо характеристику електричного поля, що не залежить від якостей середовища, - вектор електричної індукції

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \qquad [D] = Кл/м^2 ,$$

тоді

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \bar{r}_0 \qquad (1.2)$$

не залежить від діелектричної проникності. У вакуумі $\bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E}$.

Середовище можна охарактеризувати також вектором поляризації. Якщо зафіксувати вектор напруженості електричного поля у середовищі та вакуумі, то вектор поляризації

$$\bar{P} = \bar{D} - \bar{D}_0 = \varepsilon_0 \varkappa_e \bar{E},$$

де $\varkappa_e = \varepsilon_r - 1$ - діелектрична сприйнятливість середовища.

Величина магнітної індукції змінюється у середовищі в залежності від його магнітних якостей. Під дією магнітного поля середовище намагнічується, додаткове (вторинне) поле змінює силу магнітної взаємодії, тобто коли послаблює - це діамагнетик, посилює - парамагнетик, суттєво посилює - феромагнетик. Напруженість магнітного поля $\bar{H}$ - це характеристика, що не залежить від магнітних якостей середовища, де спостерігається магнітне поле.

За аналогією з електричним полем у вакуумі

$$\bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H},$$

у середовищі

$$\bar{B} = \mu \bar{H},$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнітна стала; μ - магнітна проникність середовища (абсолютна), причому

$$\mu = \mu_0 \mu_r ,$$

де μ_r - відносна магнітна проникність, що показує, у скільки разів сила магнітної взаємодії у середовищі відрізняється від сили взаємодії у вакуумі. Напруженість магнітного поля у середовищі визначає внесок у магнітну індукцію, що вкладають зовнішні джерела поля, тобто є абсолютною характеристикою магнітного поля. Магнітні якості середовища характеризуються також вектором намагніченості

$$\bar{M} = \bar{B} - \bar{B}_0 = \mu_0 \varkappa_M \bar{H} .$$

де $\varkappa_M$ - магнітна сприйнятливість середовища, причому $\varkappa_M = \mu_r - 1$. В залежності від магнітних властивостей середовища маємо:

$\mu_r = 1, \varkappa_M = 0$ - вакуум;

$\mu_r < 1, \varkappa_M < 0$ - діамагнетик;

$\mu_r > 1, \varkappa_M > 0$ - парамагнетик;

$\mu_r \gg 1, \varkappa_M > 0$ -феромагнетик.

1.4. Електромагнітні властивості середовищ. Матеріальні рівняння

Вплив електричного поля на середовище, що має незв'язані рухомі заряди, викликає направлений рух, тобто електричний струм. При нерівномірній густині зарядів вводимо густину електричного струму

$$\bar{j} = \bar{i}_0 \frac{dI}{dS} , \qquad [j] = A/м^2 ,$$

де dS - диференціально мала площадка, перпендикулярна до напрямку руху зарядів; $\bar{i}_0$ - орт напрямку руху зарядів.

Інтенсивність дрейфу носіїв заряду визначається їх рухомою силою - як напруженістю електричного поля, так і провідними якостями середовища. Густину струму знаходять згідно із законом Ома у диференціальній формі:

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} ,$$

де σ - питома електропровідність середовища, $(Ом \cdot м)^{-1}$.

Електромагнітні властивості середовищ характеризуються трьома основними параметрами: ε, μ , σ - відповідно діелектрична, магнітна та провідна якості. Причому проникності середовищ визначають вплив зв'язаних зарядів на первинне поле, а провідність характеризує вільні носії зарядів.

Як випливає з чисельних значень електричної та магнітної сталих, їх взаємозв'язок визначається виразом

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2,$$

де c - швидкість світла у вакуумі.

Взаємозв'язок між основними векторами електромагнітного поля $\bar{E}$, $\bar{B}$ та допоміжними векторами $\bar{D}$, $\bar{H}$ залежить від якостей та стану середовища і визначається рівняннями

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu \bar{H}, \quad \bar{J} = \sigma \bar{E}.$$

Ці рівняння звуться матеріальними, або рівняннями стану. У вакуумі вони спрощуються: $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$, $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$.

Середовище, електродинамічні параметри якого не залежать від просторових координат, тобто незмінні у довільній точці, зветься однорідним. Ізотропні середовища - це середовища, властивості яких не залежать від орієнтації полів, у протилежному випадку вони анізотропні. Якщо параметри середовища не залежать від напруженості полів, то таке середовище є лінійним.

1.5. Графічне зображення полів

Геометричну структуру поля зручно зображати у вигляді силових ліній. Силова лінія (лінія вектора) - це така лінія, у кожній точці якої дотична збігається за напрямком із вектором, що характеризує поле у даній точці. Лінії вектора мають такі властивості:

1) вони мають напрямок;

2) крізь довільну точку простору повинна проходити тільки одна лінія (лінії не перехрещуються), тому що вектори поля - це однозначні функції координат;

3) густина ліній характеризує величину вектора поля, тобто кількість ліній, що проходять крізь одиничну площадку, розташовану перпендикулярно до ліній;

4) лінії електричного поля можуть бути як незамкненими, так і замкненими; лінії магнітного поля завжди замкнені;

5) в електричному полі заряджена частинка пересувається вздовж силової лінії, при цьому сили поля виконують роботу.

Рівняння лінії вектора можна одержати з умови колінеарності двох векторів:

вектора поля

$$\bar{E} = E_x \bar{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}$$

та елемента довжини силової лінії

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}, \quad \bar{E} \times d\bar{r} = 0,$$

звідки $$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Інтегруючи далі систему рівнянь, визначимо вираз для силової лінії.

1.6. Інтегральні та диференціальні характеристики поля

1.6.1. Потік вектора та дивергенція

Визначимо характеристику поля, яка дозволяє знайти кількість ліній вектора, що пронизує деяку площадку або, у загальному випадку, поверхню. Очевидно, що на цю характеристику впливає просторова орієнтація площадки, тому введемо поняття орієнтованої площадки. Розглянемо деяку поверхню S, виокремимо на цій поверхні диференціально малу площадку dS. Поставимо у відповідність до цієї площадки вектор $d\bar{S}$ (рис. 1.2). Вектор-площадка $d\bar{S}$ - це вектор, довжина якого чисельно дорівнює площині цієї площадки, а напрямок збігається із зовнішньою нормаллю до цієї поверхні. Зовнішня нормаль однозначно зв'язана із додатним напрямком обходу площадки.

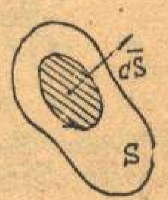


Рис. 1.2

Потік вектора поля - це скалярна величина, яка чисельно дорівнює кількості ліній вектора, що пронизують дану площадку. Обчислимо потік вектора $\bar{D}$ крізь елементарну площадку $d\bar{S}$. Використаємо механічну аналогію. Нехай $\bar{D} = \bar{v}$ - поле швидкостей рідини, що тече. Тоді за одну секунду площадку перетне стовб рідини висотою $\ell = v$, що відповідає об'єму рідини

$$dN = v \cdot dS_1 = v\,dS\cos\alpha = \bar{v} \cdot d\bar{S},$$

тобто потоку рідини за одиницю часу (рис. 1.3). Тоді потік вектора крізь елементарну площадку визначається скалярним добутком цих векторів, тобто $dN = \bar{D}d\bar{S}$ - це елемент потоку. Потік вектора крізь замкнену поверхню знаходять як інтегральну суму елементарних потоків:

$$N = \int\limits_S \bar{D} d\bar{S}.$$

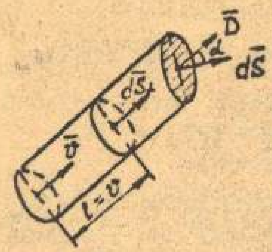


Рис. 1.3

Визначимо основні якості потоку: елемент потоку додатний (площадка dS_1, лінії вектора $\bar{D}$ виходять із поверхні), коли проекція вектора-площадки на вектор поля збігається з напрямком поля, у противному разі потік від'ємний (площадка dS_2, лінії вектора виходять із поверхні) (рис. 1.4). Потік є також критерієм наявності джерел поля у даному об'ємі простору. Нехай існує заряд q, який

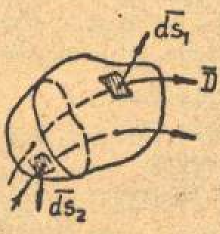


Рис. 1.4

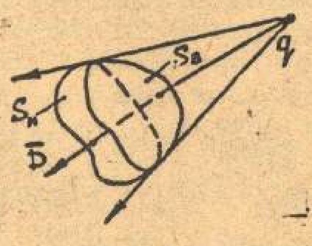


Рис. 1.5

є джерелом електричного поля (рис. 1.5), що задається лініями вектора електричної індукції. Візьмемо деяку замкнену поверхню S, причому заряд розташуємо поза об'ємом, обмеженим цією поверхнею. Кількості ліній вектора, що пронизують поверхню $S_в$ та нижню $S_н$ поверхні, рівні між собою, а тому збігаються і відповідні потоки $N_в = N_н$. Потік крізь нижню півсферу негативний, а крізь верхню - позитивний, тому загальний потік крізь усю поверхню дорівнює нулю.

Висновок: якщо джерело поля знаходиться поза об'ємом, обмеженим даною поверхнею, то потік вектора поля крізь цю поверхню дорівнює нулю.

Інший випадок: джерело поля знаходиться всередині об'єму (рис. 1.6), при цьому

$$\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \bar{r}_0,$$

а елемент потоку $dN = \bar{D}d\bar{S} = DdS\cos\alpha =$
$= DdS_1 = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{dS_1}{r^2}$, де dS_1/r^2 – елементарний тілесний кут, і тоді

$$dN = \frac{q}{4\pi} d\Omega .$$

Повний потік крізь поверхню

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_S q \, d\Omega = q .$$

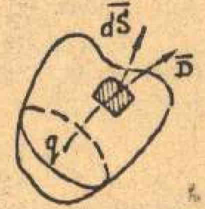


Рис. 1.6

Висновок: якщо джерело поля знаходиться всередині об'єму, обмеженого деякою поверхнею, то потік вектора крізь цю поверхню дорівнює величині заряду

$$\int_S \bar{D} d\bar{S} = q . \qquad (1.3)$$

Отже, при визначенні потоку вектора крізь замкнену поверхню, тобто інтеграла по поверхні, можна зробити висновок про наявність вільних зарядів в об'ємі простору, обмеженого даною поверхнею.

Потік вектора є інтегральною характеристикою поля, яка застосовується до обмеженого об'єму, та не дає інформації про розподіл зарядів в цьому об'ємі. Крім того, цей критерій має ще один суттєвий недолік: якщо алгебраїчна сума зарядів всередині об'єму дорівнює нулю, то потік крізь поверхню буде нульовим.

В зв'язку з цим впроваджується аналогічна диференціальна характеристика – дивергенція вектора, яка застосовується не до об'єму, а до точки. Стягуючи поверхню, що обмежує об'єм простору, до точки, одержимо скалярну характеристику поля – дивергенцію

$$\operatorname{div} \bar{D} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \bar{D} d\bar{S}}{V} .$$

Ця характеристика має значення об'ємної густини потоку. Взаємозв'язок інтегральної та диференціальної характеристик визначається виразом

$$\int\limits_S \bar{D}\,d\bar{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\bar{D}\,dV, \qquad (1.4)$$

який відомий як співвідношення Остроградського-Гаусса.

Інтегральній характеристиці (заряду в деякому об'ємі простору) також відповідає диференціальний аналог - об'ємна густина заряду

$$\rho = \lim_{V\to 0}\frac{q}{V}, \quad \text{тобто} \quad q = \int\limits_V \rho\,dV.$$

Підставляючи у вираз (1.3) диференціальні аналоги, дістанемо

$$\int\limits_V \operatorname{div}\bar{D}\,dV = \int\limits_V \rho\,dV,$$

звідки

$$\operatorname{div}\bar{D} = \rho.$$

Основні властивості дивергенції:

1. Дивергенція вектора $\bar{D}$ у деякій точці простору визначається об'ємною густиною зарядів у цій точці. Якщо заряди відсутні, то дивергенція дорівнює нулю.

2. Дивергенція може бути як позитивною, так і негативною. Вона позитивна у тих областях простору, де зосереджені позитивні заряди.

3. Дивергенція є критерієм існування або відсутності зарядів в даній точці простору.

4. Дивергенція характеризує геометричну структуру поля щодо неперервності ліній вектора. Лінії вектора неперервні навколо тих точок простору, де відсутні вільні заряди. Навколо точок простору, де присутні електричні заряди, лінії вектора $\bar{D}$ розходяться, тобто дивергенція відмінна від нуля.

5. На позитивних зарядах лінії вектора $\bar{D}$ мають початок, а на негативних - стік.

При заданому векторному полі

$$\bar{D} = D_x\bar{i} + D_y\bar{j} + D_z\bar{k}$$

дивергенція визначається із використанням векторного оператора набла:

$$\operatorname{div}\bar{D} = \nabla\bar{D}.$$

У прямокутній системі координат

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

що дає вираз для розрахунку дивергенції на підставі правила скалярного добутку:

$$\operatorname{div}\bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Таким чином, у тих точках простору, де величина вектора $\bar{D}$ не змінюється при зміні просторових координат, дивергенція вектора дорівнює нулю.

1.6.2. Циркуляція та ротор вектора поля

Розглянемо ще одну характеристику поля, яка уточнює його геометричну структуру. Визначимо роботу, що здійснюють сили електричного поля при переміщенні заряду по деякому довільному шляху із точки 1 до точки 2 (рис. 1.7).

Замінемо неперервний шлях переміщення заряду лінійно-ламаним, що складається із диференціально малих елементарних переміщень $d\bar{l}$. На заряд, який знаходиться у полі іншого заряду Q, на відстані r від нього діє кулонівська сила $\bar{F}$. На малому інтервалі переміщення величину та напрямок діючої сили слід вважати постійними. Тому робота по переміщенню заряду на відстань визначається співвідношенням

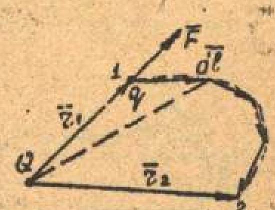


Рис. 1.7

$$dA = \bar{F}d\bar{l}.$$

Відносно одиничного позитивного заряду кулонівська сила та вектор напруженості електричного поля збігаються, тому елемент роботи по переміщенню заряду

$$dA = \bar{E}d\bar{l}.$$

Загальна робота по переміщенню заряду із точки простору 1 до точки 2 (рис. 1.7) визначається інтегральним складанням елементів робіт:

$$A = \int \bar{E}\, d\bar{l} \; . \qquad (1.5)$$

Підставляючи відому $F = \bar{E}q$ в(1.5), дістанемо шукану роботу

$$A = kQ \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{z}_0}{z^2}\, d\bar{l} = kQ \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = kQ \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right). \qquad (1.5 а)$$

Таким чином, робота сил електричного поля не залежить від форми шляху, а визначається тільки місцем положення початкової та кінцевої точок переміщення. Назвемо $dA = \bar{E} d\bar{l}$ елементом циркуляції, а вираз (1.5) - циркуляцією вектора $\bar{E}$, тобто циркуляцією вектора $\bar{E}$ є робота по переміщенню одиничного позитивного заряду по замкненому контуру. Згідно із рівнянням (1.5а) циркуляція вектора $\bar{E}$ електростатичного поля дорівнює нулю.

Властивості циркуляції:

1. Якщо при обході по деякому відрізку шляху проекція вектора поля на напрямок переміщення більша від нуля, то цей елемент циркуляції є позитивним (відрізок abc), у протилежному разі - негативним (cda) (рис. 1.8).

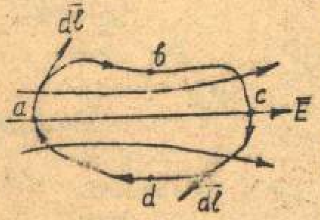


Рис. 1.8

2. Відносно полів, у яких вектор поля на контурі обходу зберігає свій напрямок, циркуляція дорівнює нулю. При цьому лінії вектора поля розімкнені.

3. Якщо вектор поля "обертається", змінює орієнтацію по мірі обходу контура (проекція додержується свого знаку), циркуляція відмінна від нуля. Тоді в середині даного контуру лінії вектора замкнені.

Циркуляція є інтегральною характеристикою поля, яка залежить від площі, що обмежена контуром. Диференціальний аналог цієї характеристики - густина циркуляції (ротор вектора).

Візьмемо довільну площину, орієнтацію якої у просторі задамо нормаллю $\bar{n}_0$ (рис. 1.9). Навколо точки M, що лежить на площині, задамо площадку dS, обмежену контуром Δl. Густина циркуляції за умовою стягнення контура до точки визначає ротор вектора поля у цій точці:

$$\lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta \ell \to 0}} \frac{\oint_{\Delta \ell} \bar{H} d\bar{\ell}}{\Delta S} = \bar{n}_0 \operatorname{rot} \bar{H}.$$

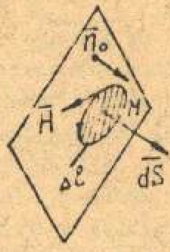


Рис. 1.9

Ротор вектора - це також вектор, напрямок якого відповідає максимальній величині густини циркуляції. Ротор вектора характеризує наявність замкнених ліній поля (вихорів) навколо даної точки.

Циркуляція вектора по деякому контуру визначається потоком його ротора крізь поверхню, що опирається на цей контур:

$$\oint_{\ell} \bar{H} d\bar{\ell} = \int_{S} \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S}. \qquad (1.6)$$

Це співвідношення є відомим як теорема Стокса. Формально ротор визначають із застосуванням векторно-диференціального оператора набла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \nabla \times \bar{H}.$$

У відповідності до правила векторного добутку в прямокутній системі координат

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

2. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

Рівняння Максвелла зв'язують параметри електромагнітного поля (вектори $\bar{E}$, $\bar{B}$, $\bar{D}$, $\bar{H}$) з його джерелами, тобто електричними зарядами (густиною ρ) та струмом (густиною $\bar{j}$), які розподілені у просторі. Рівняння дозволяють визначити вектори електромагнітного поля у будь-якій точці простору для будь-якого моменту часу.

Ці рівняння є постулатом теорії електромагнетизму, тобто узагальнюють сукупність експериментальних законів та не підлягають математичному доказу.

2.1. Перше рівняння Максвелла. Закон повного струму

Це рівняння узагальнює закон Ампера, який визначає взаємозв'язок між електричним струмом та магнітним полем. У площині поперечного перерізу провідника зі струмом J на деякій відстані r від провідника виникає магнітне поле напруженістю $\bar{H}$. На лінії вектора $\bar{H}$ (концентричне коло) напруженість поля незмінна. Тоді циркуляція вектора по контуру L, який збігається з лінією вектора,

$$\oint_L \bar{H}\,d\bar{l} = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi r,$$

що за законом Ампера визначається величиною струму:

$$H = \frac{\quad}{2\pi r},$$

звідки випливає розмірність напруженості магнітного поля [А/м].

Деформація контура не змінює величини циркуляції. Для довільного контура елемент циркуляції (рис. 2.1)

$$\bar{H}\,d\bar{l} = \bar{H}(d\bar{l}_\varphi + d\bar{l}_r) = \bar{H}\,d\bar{l}_\varphi,$$

де $dl_\varphi = r\,d\varphi$.

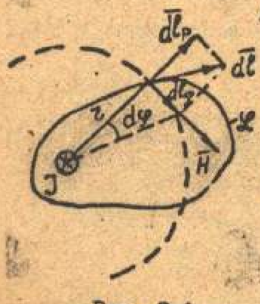


Рис. 2.1

із врахуванням величини H у точці, що розглядається,

$$\bar{H}\,d\bar{l} = H r\,d\varphi = J\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Таким чином, циркуляція по довільному контуру

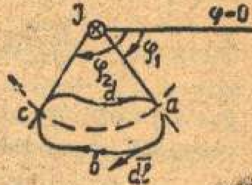
$$\oint_L \bar{H}\,d\bar{l} = \frac{J}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = J.$$

Якщо провідник знаходиться поза контуром, то згідно з якістю циркуляції (лінії вектора в середині контура розімкнуті), остання повинна дорівнювати нулю (рис. 2.2). Дійсно,

$$\oint_L \bar{H}\,d\bar{l} = \int_{abc} \bar{H}\,d\bar{l} + \int_{cda} \bar{H}\,d\bar{l} = \frac{J}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{J}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

При наявності декількох дискретних провідників в середині контура потрібно визначити алгебраїчну суму струмів.

Висновок: циркуляція вектора $\bar{H}$ по довільному контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що пронизує поверхню, обмежену цим контуром:



$$\oint_{\mathscr{L}} \bar{H} d\bar{l} = \sum_i J_i .$$

Рис. 2.2

Використовуючи теорему Стокса та враховуючи зображення повного струму через його густину

$$J = \int_S \bar{j} d\bar{S},$$

одержимо диференціальну форму закону Ампера

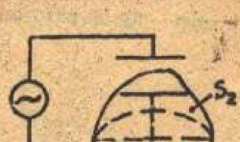
$$\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{j}.$$

Цей запис дозволяє внести деякі узагальнення у закон: розглядати не дискретні провідники зі струмом, а розподілені у просторі напрямлені потоки зарядів із густиною $\bar{j}$. Такі потоки зарядів створюють магнітне поле, причому лінії вектора $\bar{H}$ замкнені та охоплюють ці потоки.

Проведемо подальше узагальнення закону Ампера для випадку змінних струмів. Розглянемо коло, що складається із генератора змінної напруги та конденсатора. Для поверхні S_1 (рис. 2.3) справедливим є співвідношення

$$\oint_{\mathscr{L}} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_1} \bar{j} d\bar{S} = J,$$

тобто циркуляція визначається струмом провідності. Для поверхні S_2 у зв'язку з відсутністю у цій частині простору струму провідності



$$\oint_{\mathscr{L}} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_2} \bar{j} d\bar{S} = 0.$$

Рис. 2.3

Згідно з теоремою Стокса циркуляція вектора по контуру визначається потоком його ротора крізь будь-яку поверхню, що спирається на цей контур, тобто

$$\oint_{\mathcal{L}} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_2} \mathrm{rot}\, \bar{H} d\bar{S} \neq 0.$$

Для усунення протиріччя слід припустити наявність струму крізь поверхню S_2, тобто деякого струму $I_{зм}$:

$$\oint_{\mathcal{L}} \bar{H} d\bar{l} = I + I_{зм}.$$

Фізична природа струму зміщення $I_{зм}$ не пов'язана з рухом носіїв заряду, а зображає потік вектора електричної індукції, що змінюється у часі:

$$I_{зм} = \int_S \bar{j}_{зм} d\bar{S} = \int \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{D} d\bar{S}, \qquad (2.1)$$

густина цього струму

$$\bar{j}_{зм} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \qquad (2.2)$$

Таким чином, перше рівняння Максвелла, що узагальнює закон Ампера у диференціальній формі, має такий вигляд:

$$\oint_{\mathcal{L}} \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{D} d\bar{S}. \qquad (2.3)$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному контуру $\mathcal{L}$ дорівнює сумі струмів провідності та зміщення крізь будь-яку поверхню, що опирається на цей контур (рис. 2.4).

Рис. 2.4

Використовуючи теорему Стокса, із врахуванням рівності підінтегральних виразів маємо диференціальну форму рівняння:

$$\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \qquad (2.4)$$

Ротором вектора напруженості магнітного поля є як густина струму провідности, так і густина струму зміщення.

Фізична суть рівняння:

1. Джерелом магнітного поля є як струм провідності (направлений рух зарядів), так і електричне поле, що змінюється у часі.

2. Рівняння встановлює взаємозв'язок часових змін електричного поля з просторовими змінами магнітного поля (тому що ротор визначається через просторові похідні компонентів поля).

3. При наявності струмів провідності чи зміщення магнітне поле, що створюється ними, має вихровий характер (лінії вектора $\bar{H}$ замкнені).

4. Замкнені магнітні лінії вектора $\bar{H}$ охоплюють вектори густини струму провідності, струму зміщення чи їх суму.

5. У діелектричному середовищі (вакуум) електричне поле, що змінюється у часі, викликає вихрове магнітне поле.

6. Розбіжність вектора густини повного струму дорівнює нулю, тобто лінії вектора повного струму неперервні.

Дійсно,

$$div\ rot\,\bar{H} = div\left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right),$$

тому що $\nabla[\nabla \times \bar{H}] = 0$, звідки $div\left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) = 0.$

2.2. Друге рівняння Максвелла. Узагальнення закону електромагнітної індукції

Рівняння узагальнює вплив закону електромагнітної індукції на електромагнітне поле у просторі. Відповідно до закону Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Якщо поверхня, обмежена провідним контуром $\mathcal{L}$, перетинає магнітний потік, що змінюється у часі, то у контурі виникає ЕРС індукції- $\mathcal{E}$.

Запишемо рівняння термінами теорії поля. ЕРС - це робота по переміщенню одиничного позитивного заряду, і тому

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} \bar{E}\,d\bar{l},$$

а магнітний потік

$$\Phi = \int_S \bar{B}\,d\bar{S},$$

тоді

$$\oint_{L} \bar{E}\,d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S} \bar{B}\,d\bar{S}. \tag{2.5}$$

Використовуючи теорему Стокса, можна перейти від інтегральної до диференціальної форми рівняння:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \tag{2.6}$$

Такий запис закону дозволяє узагальнити його на деякий уявний контур у довільному середовищі, в тому числі і у вакуумі.

Фізична суть рівняння:

1. Зміна у часі магнітного поля, що пронизує поверхню, яка опирається на довільний контур, спричиняє електричне поле, циркуляція напруженості якого по цьому контуру дорівнює швидкості зміни магнітного потоку в часі, яка береться із зворотним знаком.

2. Електричне поле, створене змінним магнітним полем, має вихровий характер. Вихором (ротором) вектора напруженості електричного поля є швидкість зміни вектора магнітної індукції.

3. Замкнені лінії електричного поля охоплюють вектор швидкості зміни індукції магнітного поля.

4. Рівняння встановлює взаємозв'язок просторових змін електричного поля та часових змін магнітного поля.

2.3. Трете та четверте рівняння Максвелла

Ці рівняння визначають початок ліній електричної та магнітної індукцій. Для вектора індукції електричного поля справедливі співвідношення, зображені в інтегральній та диференціальній формах:

$$\int_{S} \bar{D}\,d\bar{S} = \int_{V} \rho\,dv, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho. \tag{2.8}$$

Наведені рівняння узагальнюють закон взаємодії електричних зарядів.

Четверте рівняння встановлює факт відсутності магнітних зарядів (монополів). Щодо структури магнітного поля, то можна стверджувати, що не існує ліній вектора $\bar{B}$,які тільки б входили чи виходили із замкненої поверхні, тобто вони пронизують поверхню наскрізь. Тому є справедливими вирази

$$\int_S \bar{B}\, d\bar{S} = 0, \qquad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \qquad (2.10)$$

Потік вектора D (дивергенція цього вектора) визначається тільки вільними зарядами з густиною ρ , а дивергенція вектора $\bar{E}$ - як вільними, так і зв'язаними зарядами. Враховуємо, що у середовищі

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P},$$

і тоді $\quad \rho = \operatorname{div} \bar{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \bar{E} + \operatorname{div} \bar{P},$

тобто $\quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \bar{E} = \rho - \operatorname{div} \bar{P} = \rho + \rho_{зв}.$

інакше кажучи, початком ліній вектора $\bar{E}$ бувають як вільні, так і зв'язані заряди.

Зведемо рівняння до єдиної системи:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \qquad (2.11)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho,$$

або в інтегральній формі:

$$\oint_L \bar{H}\, d\bar{l} = \int_S \bar{j}\, d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{D}\, d\bar{S}, \quad \int_S \bar{B}\, d\bar{S} = 0,$$

$$\int_L \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \bar{B}\, d\bar{S}, \quad \int_S \bar{D}\, d\bar{S} = \int_V \rho\, dV. \qquad (2.12)$$

Спільно з рівняннями стану ця система являє собою повну систему рівнянь.

2.4. Рівняння Максвелла для монохроматичних полів

Рівняння відносно електромагнітних полів, які змінюються згідно з гармонічним законом, визначимо за допомогою символічного методу. Миттєвий вектор поля, розкладений у прямокутній системі координат по ортах $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, подамо виразом

$$\bar{E}(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_1)\bar{x}_0 + E_y \cos(\omega t + \varphi_2)\bar{y}_0 + E_z \cos(\omega t + \varphi_3)\bar{z}_0,$$

Введемо комплексний миттєвий вектор

$$\dot{\bar{E}}(t) = (E_x e^{i\varphi_1}\bar{x}_0 + E_y e^{i\varphi_2}\bar{y}_0 + E_z e^{i\varphi_3}\bar{z}_0)e^{i\omega t},$$

або в комплексній формі запису:

$$\dot{\bar{E}}(t) = \dot{\bar{E}}_m e^{i\omega t},$$

де комплексна амплітуда вектора відповідає виразу у дужках.

Перше рівняння Максвелла (2.11) відносно комплексних миттєвих векторів подається у вигляді

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m e^{i\omega t} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\bar{D}}_m e^{i\omega t} + \dot{\bar{j}}_m e^{i\omega t}.$$

Ротор - це диференціальний оператор по просторових координатах, і тому

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m,$$

крім того,

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\bar{D}}_m e^{i\omega t} = i\omega \dot{\bar{D}}_m e^{i\omega t}.$$

Скорочуючи обидві частини рівняння на експоненту, маємо

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = i\omega \dot{\bar{D}}_m + \dot{\bar{j}}_m. \qquad (2.13)$$

За аналогією друге рівняння відносно комплексних амплітуд векторів (2.11)

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_m = -i\omega \dot{\bar{B}}_m.$$

Перетворимо перше рівняння (2.13):

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = i\omega\varepsilon \dot{\bar{E}}_m + \sigma \dot{\bar{E}}_m = i\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{i\omega}\right)\dot{\bar{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\bar{E}}_m.$$

Якщо ввести комплексну діелектричну проникність

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}, \tag{2.14}$$

то обидва рівняння Максвелла у комплексній формі стають симетричними:

$$\text{rot}\,\dot{\bar{H}}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\bar{E}}_m,$$
$$\text{rot}\,\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\dot{\bar{H}}_m. \tag{2.15}$$

Тут комплексна діелектрична проникність враховує як провідні, так і діелектричні якості середовища. Реальне середовище зі втратами можна також характеризувати тангенсом кута діелектричних втрат:

$$tg\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}. \tag{2.16}$$

Чим більший цей кут, тим більше частина електромагнітної енергії розсіюється у середовищі у вигляді тепла при протіканні струмів провідності.

2.5. Енергія електромагнітного поля

Розглянемо процеси енергетичного обміну у деякому об'ємі простору V, де існує електромагнітне поле. Поверхня S відокремлює у просторі цей об'єм (рис. 2.5), всередині нього є сторонні джерела потужністю $P_{ст}$, що перетворюють енергію неелектромагнітного поля.

Рис. 2.5

Енергія поля заданого простору в загальному випадку змінюється. Так, наприклад, зменшення енергії пов'язано з поглинанням її середовищем або випромінюванням. Покажемо, що потужність сторонніх джерел розсіюється у середовищі ($P_п$ - потужність втрат), пов'язана з енергетичним обміном крізь поверхню S (P_Σ - потужність випромінювання), а також - зі зміною енергії в середині даного об'єму, тобто

$$P_{ст} = P_п + P_Σ + \frac{dW}{dt}.$$

Використаємо рівняння Максвелла із врахуванням сторонніх джерел. Перемноживши рівняння на відповідний вектор та підсумовуючи їх, маємо

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{rot}\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} + \bar{j}_{ст} & \bar{E} \\ \operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} & -\bar{H} \end{array}.$$

$$\bar{E}\operatorname{rot}\bar{H} - \bar{H}\operatorname{rot}\bar{E} = \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{E}(\bar{j} + \bar{j}_{ст}) + \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

із врахуванням тотожності

$$\operatorname{div}[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{b}\operatorname{rot}\bar{a} - \bar{a}\operatorname{rot}\bar{b},$$

а також переходячи від векторів індукції до векторів напруженості, одержимо

$$-\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] = \bar{E}(\bar{j} + \bar{j}_{ст}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right). \quad (2.17)$$

Введемо вектор

$$\bar{\Pi} = \bar{E} \times \bar{H}, \quad (2.18)$$

скористуємося формулою Остроградського-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}\bar{\Pi}\, dV = \int_S \bar{\Pi}\, d\bar{S}.$$

Після інтегрування рівняння (2.17) по заданому об'єму

$$-\int_V \bar{E}\bar{j}_{ст}\, dV = \int_V \bar{E}\bar{j}\, dV + \int_V \bar{\Pi}\, d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) dV.$$

З'ясуємо фізичний зміст доданків, що входять до цього рівняння. Перший доданок відповідає потужності джоулевих втрат. Дійсно, задаючи для виразності циліндричний об'єм, маємо

$$\int_V \bar{E}\bar{j}\, dV = \int_\ell \int_S \bar{E}\bar{j}\, dS\, d\ell = E\ell \cdot jS = U \cdot I = P_п.$$

Тоді підінтегральний вираз

$$P_п = \bar{j}\bar{E} = \sigma E^2 = \frac{1}{\sigma} j^2$$

зображує об'ємну густину потужності втрат.

Третій доданок (під знаком похідної)

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2)dV = \frac{1}{2}\int\limits_V (\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B})dV$$

- це енергія електромагнітного поля в об'ємі V. Тоді

$$w_э = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\bar{E}\bar{D}}{2}, \qquad w_м = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\bar{H}\bar{B}}{2} \qquad (2.19)$$

- густина енергії відповідно електричного та магнітного полів. Другий доданок

$$P_\Sigma = \int\limits_S \bar{\Pi}\, d\bar{S} \qquad (2.20)$$

- це потік вектора крізь поверхню S, де $\bar{\Pi}$ - вектор Пойнтінга. З'єднуючи ліву частину рівняння з першим доданком, дістанемо повну потужність в об'ємі

$$P = P_п + P_{ст} = \int \bar{E}\bar{j}\,dV + \int\limits_V \bar{E}\bar{j}_{ст}\,dV.$$

Цей вираз визначає рівняння балансу енергії для даного об'єму:

$$P + \int\limits_S \bar{\Pi}\, d\bar{S} + \frac{dW}{dt} = 0.$$

У диференціальній формі

$$P + \operatorname{div}\bar{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Потік (2.20) характеризує обмін енергією між об'ємом та зовнішнім середовищем. Так, при

$$\frac{dW}{dt} + P > 0$$

потік повинен бути негативним, що відповідає режиму поглинання. Таким чином, збільшення запасу енергії ($dW/dt > 0$) та процеси поглинання ($P>0$) пов'язані з припливом енергії крізь поверхню S зовні. Режим випромінювання відповідає $P + dW/dt < 0$, тобто позитивному потоку.

В окремому випадку при $P = 0$

$$\frac{dW}{dt} = -\int\limits_S \bar{\Pi}\, d\bar{S},$$

тобто кожна зміна енергії електромагнітного поля у деякому об'ємі спричиняє потік енергії крізь поверхню, що обмежує даний об'єм. Потік вектора Пойнтінга дорівнює кількості енергії, яка проходить крізь замкнену поверхню за одиницю часу. Тоді вектор Пойнтінга визначає густину потоку енергії за одиницю часу та вимірюється у Вт/м^2 або Дж/с.м^2. Цей вектор має напрямок по нормалі до площини, яка утворюється векторами $\bar{E}$, $\bar{H}$ та показує напрямок розповсюдження енергії.

Визначимо потік вектора Пойнтінга у провіднику зі струмом. За законом Ампера напруженість магнітного поля на поверхні провідника (рис. 2.6)

$$\bar{H}_0 = \bar{\varphi}_0 \frac{I}{2\pi r},$$

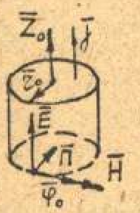


Рис. 2.6

а напруженість електричного поля визначається його провідністю σ :

$$\bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \bar{z}_0 .$$

Вектор Пойнтінга

$$\bar{\Pi} = \bar{E} \times \bar{H} = -\bar{z}_0 \frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \sigma}$$

має напрямок по радіусу в середину провідника. Потік вектора Пойнтінга крізь поверхню провідника

$$N = \int_S \bar{\Pi} d\bar{S} = \frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \sigma} \cdot 2\pi r \cdot \ell = I^2 \frac{\ell}{\sigma (\pi r)^2} = I^2 R$$

дорівнює потужності теплових втрат.

Висновки. 1. Енергія електромагнітного поля, яка проникає у провідник, повністю поглинається, при $\sigma \to \infty$ потік енергії у провідник зникає. 2. Енергія, що переноситься вздовж провідника, визначається нормальною компонентою вектора $\bar{E}$, тобто провідник - це напрямлююча система.

3. МЕЖОВІ УМОВИ ВЕКТОРІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Простір, в якому існує магнітне поле, можна відокремити будь-якими поверхнями. Ці поверхні відокремлюють середовища з різноманітними електродинамічними характеристиками, на яких вектори поля можуть зазнавати розриву. У цьому випадку рівняння Максвелла повинні доповнюватись межовими умовами.

Нехай S - межа розподілу двох середовищ, позначених на рис. 3.1 індексами 1 та 2. Одиничні вектори $\bar{n}$, $\bar{\tau}$ задають нормальні і тангенціальні напрямки відносно межі розподілу. Розглянемо межові умови окремо для нормальних і тангенціальних векторів.

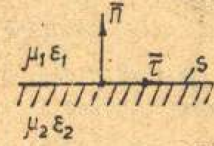


Рис. 3.1

3.1. Нормальні компоненти поля

Геометрія задачі наведена на рис. 3.2. Тут R - поверхня, що відокремлює обидва середовища, $\bar{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні розподілу. Візьмемо циліндричну поверхню S, яка об'єднує частину об'єму як 1-го, так і 2-го середовищ. Зорієнтуємо основу циліндра паралельно межовій поверхні ($\bar{n}'$, $\bar{n}''$ - зовнішні одиничні нормалі основ). Нормальні компоненти визначимо, розраховуючи потік крізь циліндричну поверхню, висоту якої далі спрямуємо до нуля.

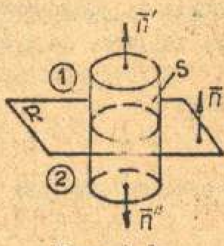


Рис. 3.2

Потік вектора електричної індукції крізь зазначену поверхню визначається третім рівнянням Максвелла

$$\int_S \bar{D}d\bar{S} = \int \rho dv,$$

де $V = \Delta S \cdot \Delta h$ - об'єм циліндра, а повна поверхня циліндра

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + S_Б$$

складається із площини основ та площини бокової поверхні $S_Б$.

Густина заряду ρ об'єднує як об'ємний заряд, що знаходиться в середині об'єму, так і поверхневий заряд площини розподілу R , який характеризується густиною поверхневого заряду

$$\rho_R = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta R}.$$

Зобразимо повний потік як суму окремих потоків:

$$\bar{D}_1\bar{n}'\Delta S_1+\bar{D}_2\bar{n}''\Delta S_2+N_Б=q+\rho_R\Delta R.$$

Якщо спрямувати висоту циліндра до нуля ($\Delta h\to 0$), діостанемо $N_Б\to 0$, $q\to 0$, тобто

$$\bar{D}_1\bar{n}'\Delta S_1+\bar{D}_2\bar{n}''\Delta S_2=\rho_R'\Delta R.$$

У зв'язку з тим, що $\bar{n}'=\bar{n}$, $\bar{n}''=-\bar{n}$, $\Delta S_1=\Delta S_2=\Delta R$, то межова умова набуває вигляду

$$(\bar{D}_1-\bar{D}_2)\bar{n}=\rho_R,$$

або у скалярній формі:

$$D_{n1}-D_{n2}=\rho_R.$$

Нормальна компонента вектора $\bar{D}$ на межі розподілу середовищ має стрибок, який дорівнює густині поверхневого заряду.

Межова умова для вектора $\bar{E}$ є наслідком одержаного рівняння

$$\varepsilon_1 E_{n1}-\varepsilon_2 E_{n2}=\rho_R.$$

В окремому випадку при відсутності поверхневого заряду

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Отож, нормальна компонента вектора $\bar{E}$ при переході крізь незаряджену поверхню зазнає стрибок, що дорівнює відношенню діелектричних проникностей середовищ. Наявність поверхневого заряду збільшує або зменшує величину розриву.

Для векторів магнітного поля, виходячи із 4-го рівняння Максвелла, за аналогічною методикою межова умова має вигляд

$$(\bar{B}_1-\bar{B}_2)\bar{n}=0,\quad B_{n1}-B_{n2}=0.$$

Ця умова відповідає безперервності нормальної компоненти вектора $\bar{B}$ на межі розподілу середовищ або розриву нормальної компоненти вектора $\bar{H}$:

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}}=\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

3.2. Тангенціальні компоненти поля

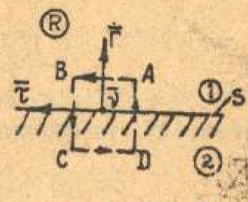


Рис. 3.3

Геометрія задачі зображена на рис. 3.3. Тут S - поверхня розподілу 1-го та 2-го середовищ, $\bar{n}$ - одинична нормаль до площини розподілу, R - допоміжна площина, перпендикулярна до межової площини.

Візьмемо у площині R контур ABCD, який обмежує частину площини ΔR та вміщує як перше, так і друге середовища. Задамо додатний напрямок обходу контура та відповідний до цього напрямку вектор нормалі $\bar{\nu}$. Одиничний вектор задає тангенціальний напрямок $\bar{\tau} = \bar{\nu} \times \bar{n}$. Тангенціальні компоненти на межі розподілу можна одержати, якщо визначити циркуляцію за знайденим контуром, а наступним спрямуванням висоти контуру до нуля.

У відповідності до рівняння Максвелла

$$\oint\limits_{ABCD} \bar{E} d\bar{l} = -\int\limits_{\Delta S} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$$

розіб'ємо циркуляцію на складові елементи:

$$\int\limits_{AB} \bar{E} d\bar{l} + \int\limits_{BC} \bar{E} d\bar{l} + \int\limits_{CD} \bar{E} d\bar{l} + \int\limits_{DA} \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Delta l \cdot \Delta h \cdot \bar{\nu},$$

тобто

$$\bar{E}_1 \bar{\tau} \Delta l + C_Б + \bar{E}_2 \bar{\tau} \Delta l + C_Б = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Delta l \cdot \Delta h \cdot \bar{\nu}.$$

Вектори складових переміщень, які беруться до уваги: AB : $d\bar{l} = \bar{\tau} \Delta l$, CD: $d\bar{l} = -\bar{\tau} \Delta l$, $C_Б$ - це елементи циркуляції по бокових сторонах контура. Напрямлюючи висоту контура до нуля ($\Delta h \to 0$), маємо $C_Б \to 0$. Тоді межова умова

$$(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \bar{\tau} = 0,$$

або у скалярній формі

$$E_{\tau_1} - E_{\tau_2} = 0.$$

Межову умову зручно представити через нормаль до межі розподілу. У зв'язку з тим, що $\bar{\tau} = \bar{\nu} \times \bar{n}$, у відповідності до правила змішаного добутку

$$(\bar{E}_1-\bar{E}_2)\bar{\tau} = (\bar{E}_1-\bar{E}_2)(\bar{\nu}\times\bar{n}) = \bar{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2)\cdot\bar{\nu},$$

тобто

$$\bar{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2) = 0.$$

Якщо тангенціальна компонента вектора $\bar{E}$ неперервна на межі розподілу, то тангенціальна компонента вектора $\bar{D}$ має розрив

$$\frac{D_{\tau_1}}{D_{\tau_2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Межові умови для векторів магнітного поля визначають за аналогічною методикою, виходячи із рівняння Максвелла

$$\oint_l \bar{H}d\bar{l} = \int_{\Delta S} \bar{j}\,d\bar{S} + \int_{\Delta S} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\,d\bar{S}.$$

Внаслідок граничного переходу $\Delta h \to 0$ другий доданок перетворюється у нуль, а в лівій частині рівняння залишаються елементи циркуляції по горизонтальних сторонах контура:

$$(\bar{H}_1-\bar{H}_2)\bar{\tau}\,\Delta l.$$

Граничний перехід для першого доданка дає скінченну величину

$$\int_{\Delta l\Delta h} \bar{j}\,d\bar{S} = \int_{\Delta l\Delta h} \bar{j}\,\bar{\nu}\,dS = \bar{\nu}\int_{\Delta l\Delta h} \bar{j}\,dl\,dh = \bar{\nu}\,\Delta l\int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \bar{j}\,dh.$$

Враховуючи вираз густини струму, дістанемо

$$\int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \bar{j}\,dh = \bar{\tau}\lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ \Delta h\to 0}} \frac{I}{\Delta l\Delta h}\int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} dh = \tau\lim_{\Delta l\to 0}\frac{I_s}{\Delta l} = \bar{j}_s.$$

Прирівнюючи ліву та праву частини рівняння, одержані внаслідок граничного переходу, маємо

$$(\bar{H}_1-\bar{H}_2)\bar{\tau} = \bar{\nu}\,\bar{j}_s.$$

Виразимо рівняння через вектор нормалі до межі розподілу:

$$(\bar{H}_1-\bar{H}_2)\cdot(\bar{\nu}\times\bar{n}) = \bar{\nu}\cdot\bar{j}_s,$$

звідки маємо межову умову для вектора $\bar{H}$

$$\bar{n}\times(\bar{H}_1-\bar{H}_2) = \bar{j}_s,$$

або у скалярній формі:

$$H_{\tau_1} - H_{\tau_2} = j_{s\nu},$$

де $j_{s\nu}$ - проекція вектора поверхневого струму на напрямок, що є нормальним до межі розподілу.

Зведемо межові умови до єдиної системи при поданні їх як у векторній, так і скалярній формах запису:

$$
\begin{aligned}
&(\bar{D}_1-\bar{D}_2)\bar{n}=\rho_s, && D_{n1}-D_{n2}=\rho_s,\\
&(\bar{B}_1-\bar{B}_2)\bar{n}=0, && B_{n1}-B_{n2}=0,\\
&\bar{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2)=0, && E_{\tau1}-E_{\tau2}=0,\\
&\bar{n}\times(\bar{H}_1-\bar{H}_2)=\bar{j}_s, && H_{\tau1}-H_{\tau2}=j_{s\nu},
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

де $\bar{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні розподілу, напрямленого із другого середовища у перше.

3.3. Межові умови на поверхні ідеального провідника

Припустимо, що межею розподілу двох середовищ є поверхня ідеального провідника. Нехай ідеально провідному середовищу відповідає індекс 2, тобто питома провідність $\sigma_2 \to \infty$. Тоді електричне поле у цьому середовищі відсутнє, інакше скінченна напруженість поля спричинила б нескінченно великий струм.

У відповідності до другого рівняння Максвелла в ідеально провідному середовищі відсутнє також і змінне магнітне поле. Визначимо компоненти векторів поля у першому середовищі. У зв'язку з тим, що тангенціальна компонента вектора $\bar{E}$ неперервна на межі розподілу, $E_{\tau1}=E_{\tau2}=0$. Аналогічно з умови неперервності нормальної компоненти вектора $\bar{B}$ маємо

$$B_{n1}=B_{n2}=0, \quad \text{або} \quad H_{n1}=H_{n2}=0.$$

Нормальна компонента вектора $\bar{D}$ на межі

$$D_{n1}-D_{n2}=\rho_s \quad \text{тобто} \quad D_{n1}=\rho_s,$$

звідки

$$E_{n1}=\frac{\rho_s}{\varepsilon_1}.$$

Таким чином, на екрануючій поверхні обов'язково мусить бути поверхневий заряд, інакше електричне поле у цілому було б відсутнім.

Тангенціальна компонента вектора $\bar{H}$ на межі розподілу

$$\bar{n} \times \bar{H}_1 = \bar{j}_s , \qquad (3.2)$$

тобто на екрануючій поверхні обов'язково є поверхневий струм, інакше магнітне поле було б цілком відсутнім.

Структура поля над поверхнею ідеального провідника зображена на рис. 3.4. Взаємне розташування векторів напруженості

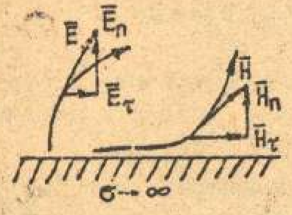


Рис. 3.4

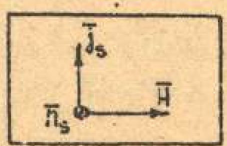


Рис. 3.5

магнітного поля та густини поверхневого струму наведено на рис. 3.5, у відповідності до виразу (3.2) вектор нормалі до поверхні провідника проектується у точку.

3.4. Фізична суть межових умов

1. Нормальна компонента електричного поля. Процеси поляризації діелектричних середовищ при нормальній орієнтації електричного поля наведені на рис. 3.6. Електричне поле створює на межі розподілу середовищ зв'язаний заряд (нескомпенсований заряд диполів). Поле цього заряду у першому середовищі підсилює, а у другому - ослаблює зовнішнє поле, що призводить до розриву нормальної складової поля. Дійсно (рис. 3.6,б),

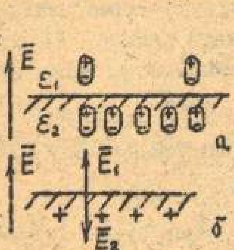


Рис. 3.6

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s ,$$

або у разі відсутності на межі розподілу вільних (незв'язаних) зарядів $\rho_s = 0$ маємо

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

2. <u>Тангенціальна компонента електричного поля</u>. Процеси поляризації у цьому випадку відображає рис. 3.7. При орієнтації електричного поля паралельно межі розподілу середовищ зв'язаного заряду на межі немає, і тому тангенціальна компонента поля неперервна.

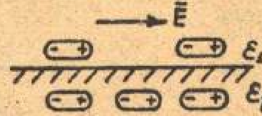


Рис. 3.7

3. <u>Компоненти магнітного поля</u>. Зовнішнє магнітне поле, що має напрямок, паралельний межі розподілу середовищ, орієнтує молекулярні струми (рис. 3.8,а). Ці струми підсумовуються і дають молекулярні поверхневі струми $\bar{j}_{M1}$, $\bar{j}_{M2}$, що напрямлені назустріч один одному (рис. 3.8,б). Загальний поверхневий молекулярний струм $\bar{j}_M$ спричиняє замкнуті лінії вектора $\bar{B}$ (рис.3.8,в). На цьому рисунку точка зору зміщена у площині на 90^0. Нормальні компоненти вторинного магнітного поля "сусідніх" молекулярних струмів взаємно компенсуються, а тангенціальні - підсумовуються, що дає додаткові магнітні поля $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, орієнтовані також паралельно межі розподілу середовищ.

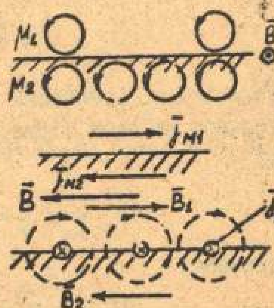


Рис. 3.8

Тому нормальні компоненти вектора $\bar{B}$ неперервні ($B_{n1} = B_{n2}$), а тангенціальні мають розрив. Дійсно, $H_{\tau1} - H_{\tau2} = j_S$, при відсутності поверхневого струму провідності $j_S = 0$, тобто $B_{\tau1}/B_{\tau2} = \mu_1/\mu_2$.

4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ У НЕОБМЕЖЕНОМУ ПРОСТОРІ

Хвиля являє собою зміну становища середовища (збурення), яка розповсюджується у цьому середовищі та переносить деяку енергію. У випадку електромагнітних хвиль таким збурюючим фактором є зміна напруженості електричного або магнітного поля у деякій точці простору.

Для завдання електромагнітного хвильового процесу необхідно визначити зміну векторів поля у часі для деякої просторової координати. Згідно з кінцевістю швидкості розповсюдження електромагнітної хвилі зміна поля, яка виникла у точці 1, позначатиметься у точці 2 як $t_з = z/v$, тобто при гармонічному законі зміни поля

$$E_1 = E_m \cos \omega t,$$

$$E_2 = E_m \cos \omega (t - t_з) = E_m \cos(\omega t - kz),$$

де $k = \frac{\omega}{v}$ - хвильове число, яке із врахуванням $\omega = 2\pi/T$ набуває іншого вигляду:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (4.1)$$

Таким чином, хвильовий процес визначається як часовою, так і просторовою змінами збурення, які характеризуються відповідно часовим

$$\Psi_t = \omega t = 2\pi \frac{t}{T}$$

та просторовим

$$\Psi_z = kz = 2\pi \frac{z}{\lambda}$$

набігами фази. Тому якщо циклічна частота ω визначає швидкість часового набігу фази, то хвильове число - швидкість просторового набігу фази. При цьому хвильове число дорівнює набігу фази при зміні відстані на один метр.

Фронт хвилі - це поверхня, у кожній точці якої у даний момент часу фази хвилі однакові (тобто це є поверхня рівних фаз). Для плоскої хвилі, якщо зафіксувати її фазу

$$\Psi = \omega t_0 - kz = \mathrm{const}$$

у даний момент t_0, фронт хвилі являє собою площину $z = \mathrm{const}$.

4.1. Хвильові рівняння

Розв'яжемо рівняння Максвелла для вільного необмеженого простору. Нехай поля змінюються згідно з гармонічним законом

$$\dot{\vec{E}}(t) = \dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}.$$

Використаємо рівняння Максвелла у комплексній формі:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \dot{\varepsilon} \dot{\vec{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \dot{\vec{H}}_m.$$

Застосовуючи операцію ротора до обох частин рівняння, із врахуванням незалежності параметрів $\dot{\varepsilon}$, μ від просторових координат маємо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega\dot{\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m.$$

Підставимо у праві частини рівняння значення роторів із початкових рівнянь

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \omega^2 \dot{\varepsilon}\mu \dot{\vec{H}}_m,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = \omega^2 \dot{\varepsilon}\mu \dot{\vec{E}}_m.$$

Враховуючи тотожність

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \operatorname{grad}\operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m,$$

беручи до уваги 3-е та 4-е рівняння Максвелла

$$\mu \operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m = 0, \qquad \operatorname{div} \dot{\vec{E}}_m = \dot{\rho}_m/\dot{\varepsilon}$$

та вважаючи $\dot{\rho}_m = 0$, одержимо однорідні рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon}\mu \dot{\vec{H}}_m = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon}\mu \dot{\vec{E}}_m = 0, \tag{4.2}$$

де ∇^2 - тривимірний лапласіан.

4.2. Плоска електромагнітна хвиля в однорідному діелектричному середовищі

Розглянемо найпростіший електромагнітний процес, який змінюється тільки вздовж однієї просторової координати, наприклад z. Середовище є діелектричним, тобто $\dot{\varepsilon} = \varepsilon$.

Тоді рівняння Гельмгольца (4.2) набуває вигляду

$$\frac{d^2\dot{\bar{E}}_m}{dz^2} + K^2\dot{\bar{E}}_m = 0, \qquad (4.3)$$

де $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Розв'язок рівняння:

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{\eta}_0\left(\dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}\right),$$

де $\dot{A}$, $\dot{B}$ - комплексні сталі.

Перейдемо від комплексної амплітуди до дійсної форми:

$$\bar{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{\bar{E}}_m e^{i\omega t}\right) = \bar{\eta}_0\left[A\cos(\omega t - kz + \varphi) + B\cos(\omega t - kz + \varphi)\right].$$

Таким чином, розв'язок рівняння - це суперпозиція двох плоских хвиль, що розповсюджуються у протилежних напрямках.

Визначимо проекції векторів електромагнітної хвилі у декартовій системі координат. Наведемо початкову систему рівнянь Максвелла у проекціях, вважаючи $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}}_m = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}\bar{x}_0 + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}\bar{y}_0 .$$

Дорівнюючи проекції ротора з проекціями вектора $\dot{\bar{H}}_m$ у рівнянні

$$\mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\left(\dot{H}_x\bar{x}_0 + \dot{H}_y\bar{y}_0 + \dot{H}_z\bar{z}_0\right),$$

маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu\dot{H}_x, \\ \dfrac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu\dot{H}_y, \\ \dot{H}_z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon\dot{E}_x, \\ \dfrac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = i\omega\varepsilon\dot{E}_y, \\ \dot{E}_z = 0. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Другу систему рівнянь одержуємо аналогічно з відповідного початкового рівняння Максвелла. Її можна записати одразу, використовуючи симетрію рівнянь із заміною $\mu \leftrightarrow -\varepsilon$, $\dot{E} \leftrightarrow \dot{H}$.

Поздовжні компоненти поля відсутні, тому виберемо орієнтацію вектора $\dot{E}$, що збігається з однією із осей координат, наприклад $\bar{x}_0 = \bar{\eta}_0$. Тоді $\dot{E}_y = 0$, тобто $\partial \dot{E}_y / \partial z = 0$, а також $\dot{H}_x = 0$, як це випливає з одержаних рівнянь, і рівняння (4.4) спрощуються:

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu \dot{H}_y, \qquad \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon \dot{E}_x,$$

$$\dot{E}_y = \dot{E}_z = \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0.$$

Обмежуючись прямою хвилею, що розповсюджується вздовж напрямку осі z,

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{x}_0 \dot{A} e^{-ikz},$$

із рівняння (4.4) дістанемо магнітну компоненту хвилі

$$\dot{\bar{H}}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial z} = \bar{y}_0 \frac{k}{\omega\mu} A e^{-ikz}. \tag{4.5}$$

Визначимо співвідношення електричної та магнітної компонент хвилі, порівнюючи їх комплексні амплітуди:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{4.6}$$

де Z_c – хвильовий опір середовища;

для вакууму $\quad Z_{c0} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$.

Таким чином, комплексні амплітуди векторів плоскої електромагнітної хвилі у діелектричному середовищі:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_m &= \bar{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \\ \dot{\bar{H}}_m &= \bar{y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_c} e^{-ikz} \end{aligned} \tag{4.7}$$

а миттєві значення векторів поля:

$$\bar{E}(t) = \bar{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

$$\overline{H}(t)=\overline{Y}_0\frac{A}{Z_c}\cos(\omega t-kz+\varphi).$$

Особливості хвилі: 1) вектори хвилі ортогональні, 2) хвиля - поперечна, 3) напруженості електричного та магнітного полів змінюються у часі синфазно, тому хвильовий опір середовища - дійсний, 4) фазова швидкість хвилі не залежить від частоти електромагнітної хвилі.

4.3. Плоска електромагнітна хвиля у поглинальному середовищі

Поглинальне середовище - це середовище із скінченною провідністю. Електромагнітне поле у такому середовищі спричиняє струми провідності, на підтримання яких втрачається частина енергії поля. Очевидно, хвиля повинна бути загасаючою.

Поле плоскої хвилі формально описується тими ж залежностями, що і у середовищі без втрат (4.7). Однак у середовищі зі втратами діелектрична проникність має комплексний характер:

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon-i\frac{\sigma}{\omega}. \tag{4.8}$$

Тоді хвильове число також комплексне:

$$\dot{k}=\omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\mu}=\beta-i\alpha. \tag{4.9}$$

Визначимо складові хвильового числа та з'ясуємо їх фізичний зміст. Квадрат модуля хвильового числа

$$\beta^2+\alpha^2=\omega^2\mu\sqrt{\varepsilon^2+\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}. \tag{4.10}$$

Піднесемо до квадрата обидві частини виразу (4.9):

$$\omega^2\mu\left(\varepsilon-i\frac{\sigma}{\omega}\right)=\beta^2-\alpha^2-2i\beta\alpha,$$

порівняємо дійсні та уявні частини:

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\varepsilon\mu, \tag{4.11}$$

$$2\beta\alpha=\omega\mu\sigma. \tag{4.12}$$

Додаючи та віднімаючи рівняння (4.9), (4.10), дістанемо

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}+1\right)}, \tag{4.13}$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}-1\right)}.$$

із врахуванням комплексного характеру хвильового числа (4.9), на підставі (4.7) комплексні амплітуди хвилі мають такий вигляд:

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{X}_0 \dot{E}_m e^{-\alpha z} \cdot e^{-i\beta z},$$

$$\dot{\bar{H}}_m = \bar{Y}_0 \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_c} e^{-\alpha z} \cdot e^{-i\beta z}.$$

Хвильовий опір середовища також комплексний:

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\dot{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1 - i\,tg\Delta)}} = z_c e^{i\Psi}. \quad (4.14)$$

Переходячи від комплексних амплітуд до миттєвих значень, одержимо

$$\bar{E}(t) = \bar{X}_0 E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z),$$

$$\bar{H}(t) = \bar{Y}_0 \frac{E_m}{z_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \Psi).$$

Особливості електромагнітної хвилі:

1. Амплітуда хвилі при її розповсюдженні вздовж напрямку z згасає за законом експоненти. Інтенсивність згасання характеризується коефіцієнтом згасання $\alpha = Jm(\dot{K})$. Коефіцієнт згасання має зворотну пропорційність відстані, на якій амплітуда зменшується у e разів.

2. Коефіцієнт фази хвилі - це дійсна частина комплексного хвильового числа $\beta = Re(\dot{K})$, яка визначає швидкість руху хвильової поверхні $v = \omega/\beta$, а також інтенсивність просторового набігу фази $\Psi_z = \beta z$.

3. Вектори напруженостей електричного та магнітного полів зсунуті у часі по фазі на кут, що дорівнює аргументу комплексного хвильового опору середовища.

4. У порівнянні із діелектричним середовищем присутність втрат у середовищі спричиняє зменшення хвильового опору середовища і, як наслідок, дає відносне збільшення магнітної компоненти.

5. Фазова швидкість хвилі у середовищі зі втратами

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\sqrt{2} \cdot v_0}{\sqrt{(\sqrt{1 + tg^2\Delta} + 1)}} \quad (4.15)$$

менша, ніж фазова швидкість в середовищі без втрат. Фазова швидкість залежить від частоти електромагнітного поля, яка зростає при збільшенні частоти до граничного значення, що дорівнює фазовій швидкості у середовищі без втрат. Фазова швидкість залежить від питомої провідності середовища, зменшуючись при збільшенні провідності.

6. Довжина хвилі у провідному середовищі менша, ніж у середовищі без втрат:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}+1\right)}}.$$

Враховуючи, що в середовищі без втрат $v_0 = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, а також взаємозв'язок $\lambda_0 = v_0 T = v_0/f$, маємо

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\,\lambda_0}{\sqrt{\sqrt{1+tg^2\Delta}+1}}. \qquad (4.16)$$

7. Середовище зі втратами має комплексні параметри: діелектричну проникність, хвильовий опір, хвильове число.

4.4. Електромагнітна хвиля у діелектричному середовищі зі втратами

Умовою середовища, що досліджується, є мализна тангенса кута діелектричних втрат

$$tg\,\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1. \qquad (4.17)$$

Параметри хвилі визначаються із відповідних виразів для середовища зі втратами. Беручи до уваги умову мализни тангенса кута втрат, одержимо коефіцієнт згасання із виразу (4.13):

$$\alpha^2 = \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+tg^2\Delta}-1\right) \simeq \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1+\frac{1}{2}tg^2\Delta-1\right), \qquad (4.18)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (4.19)$$

Знехтуючи другим порядком мализни тангенса кута втрат у виразі (4.18), знайдемо коефіцієнт фази

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

і тоді фазова швидкість хвилі

$$v = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Характеристичний опір середовища визначимо із виразу (4.14)

$$Z_c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Таким чином, параметри хвилі у діелектричному середовищі зі втратами у першому наближенні збігаються з відповідними параметрами хвилі у діелектричному середовищі без втрат, за виключенням коефіцієнта згасання, причому він пропорційно залежить від кута діелектричних втрат. Так, використовуючи вираз (4.17), при малому куті втрат $\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ маємо

$$\alpha = \frac{\Delta}{2}\beta. \qquad (4.20)$$

4.5. Електромагнітна хвиля у добре провідному середовищі

Характеристики хвилі у цьому середовищі також є окремим випадком середовища зі втратами і визначаються із врахуванням умови добре провідного середовища:

$$tg\,\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1. \qquad (4.21)$$

На підставі загальних виразів для середовища зі втратами (4.13), враховуючи умову (4.21), знайдемо характеристики хвилі у добре провідному середовищі. Коефіцієнт згасання та фази

$$\alpha = \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\,tg\Delta}, \qquad (4.22a)$$

тобто

$$\alpha = \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}. \qquad (4.22)$$

Фазова швидкість (4.15)

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}}. \qquad (4.23)$$

Модуль хвильового опору (4.14)

$$Z_c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\,tg\Delta}} = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{tg\Delta}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}. \qquad (4.24)$$

Аргумент хвильового опору одержимо, перетворюючи вираз для комплексного опору:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\omega}{\omega}\sqrt{\frac{\mu^2}{\varepsilon\mu}} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\beta - i\alpha},$$

тоді

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} \simeq \frac{\pi}{4}.$$

Особливості електромагнітної хвилі:

1. У добре провідному середовищі згасання хвилі значне і зростає із збільшенням частоти зміни хвилі (4.22).

2. Амплітуда хвилі згасає за законом експоненти $\exp(-\alpha z)$, із коефіцієнтом згасання має зв'язок параметр d – глибина проникності поля, тобто відстань, на якій амплітуда згасає у e разів:

$$\alpha d = 1, \qquad \text{або} \qquad d = 1/\alpha.$$

Якщо довжина хвилі у середовищі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \simeq \frac{2\pi}{\alpha}, \qquad \text{то } d = \frac{\lambda}{2\pi},$$

тобто середовище є добре провідним (металоподібним), якщо хвиля згасає на відстані, меншій, ніж довжина хвилі. Так, наприклад, для міді, що має $\sigma = 5{,}7\cdot10^7$ См/м на частоті $f = 10$ ГГц (3см), глибина проникності поля (4.22)

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} = 0{,}6 \text{ мкм}.$$

3. Коефіцієнт фази у добре провідному середовищі (у порівнянні з діелектричним – β_0) різко зростає (4.22а):

$$\beta = \beta_0\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}},$$

і це спричиняє інтенсивний просторовий натяг фази.

4. Фазова швидкість (у порівнянні з діелектричним середовищем – v_0) істотно зменшується (4.22а):

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg}\Delta}}\, v_0,$$

що приводить до сильного скорочення довжини хвилі.

5. Порівняємо довжини хвиль у діелектричному, та добре провідному середовищах:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \qquad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\beta_0}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{(tg\Delta)/2}} \ll 1.$$

Добре провідним середовищем, наприклад, є сухий грунт, який має параметри

$$\sigma = 0{,}01 \text{ См/м}, \qquad \varepsilon = 3{,}56 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$$

на частоті $f = 1$ МГц, $tg\Delta = 50$.

Таким чином, на частоті радіомовних діапазонів сухий грунт поводиться як метал.

6. Величина хвильового опору у добре провідному середовищі незначна (4.24):

$$Z_c = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{tg\Delta}},$$

що означає переважний вплив магнітного поля, тому що $Z_c = E/H$.

4.6. Плоска електромагнітна хвиля, що розповсюджується у довільному напрямку

Визначимо комплексну амплітуду хвилі, що розповсюджується у довільному напрямку, тобто вектор Пойнтінга не збігається ні з однією координатною віссю.

Геометрія поставленої задачі наведена на рис. 4.1. Тут $\bar{n}_0$ - орт напрямку розповсюдження хвилі, S - площина фронту хвилі, $\bar{z}$ - вектор відстані до довільної точки на фронті хвилі.

У прямокутній системі координат орт напрямку хвилі задамо його проекціями на осі координат:

$$\bar{n}_0 = \bar{X}_0 \ell + \bar{Y}_0 m + \bar{Z}_0 n,$$

де $\ell = \cos(\bar{n}_0, \bar{X}_0)$, $m = \cos(\bar{n}_0, \bar{Y}_0)$,

$$n = \cos(\bar{n}_0, \bar{Z}_0)$$

- напрямляні конуси (проекції одиничного вектора). Поточний вектор відстані

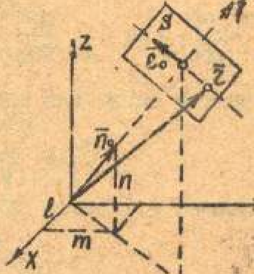


Рис. 4.1

$$\bar{z} = \bar{X}_0 x + \bar{Y}_0 y + \bar{Z}_0 z.$$

Комплексна амплітуда хвилі, що розповсюджується вздовж довільного напрямку:

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{\eta}_0 \dot{E}_0 e^{-i\kappa\xi},$$

де $\bar{\eta}_0$ - одиничний вектор, що лежить у площині фронту хвилі.

Перейдемо від координати ξ до заданої системи координат. Очевидно, що поточну відстань, яку проходить хвиля ξ, можна визначити, проектуючи вектор $\bar{z}$ на $\bar{n}_0$, тобто

$$\xi = \bar{z}\bar{n}_0 = \ell x + m y + m z,$$

і тоді

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{\eta}_0 \dot{E}_0 e^{-i\kappa \bar{z}\bar{n}_0} = \bar{\eta}_0 \dot{E}_0 e^{-i\bar{K}\bar{z}}, \qquad (4.25)$$

де $\bar{K} = \kappa \bar{n}_0$ - хвильовий вектор, який визначає не тільки величину набігу фази, але й напрямок, вздовж якого виникає цей набіг.

4.7. Швидкості електромагнітних хвиль

Монохроматична хвиля характеризується виключно фазовою швидкістю. Фазова швидкість - це швидкість переміщення фіксованої фази чи фронту хвилі у просторі. Монохроматична плоска хвиля

$$E = E_m \cos(\omega t - \kappa z)$$

має площину сталої фази

$$\Psi = \omega t - \kappa z = const,$$

яка переміщується вздовж напрямку z з фазовою швидкістю

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega - \kappa \frac{dz}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \vartheta_\varphi, \quad \vartheta_\varphi = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Підставляючи вираз для хвильового числа, маємо

$$\vartheta_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

В порівнянні з фазовою швидкістю у вакуумі

$$C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

фазова швидкість у діелектричному середовищі зменшується:

$$\vartheta_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}.$$

Крім того, у діелектричному середовищі зі втратами фазова швидкість залежить від частоти електромагнітного поля (4.15). Таке явище зветься дисперсією, а середовище - дисперсійним.

Інформаційне електромагнітне коливання не є монохроматичним, а має деякий спектр частот. Швидкість розповсюдження такого хвильового пакету є груповою. Нехай сигнал зображається дискретним спектром

$$\bar{E} = \mathrm{Re}\left[\bar{E}_0 e^{i(\omega_0 t - K_0 z)} + \bar{E}_1 e^{i(\omega_1 t - K_1 z)} + \ldots\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega_0 t - K_0 z)} \cdot \bar{F}(t,z)\right],$$

де K_0, $K_1, \ldots$ - хвильові числа дискретних частот, які відрізняються один від одного у випадку дисперсного середовища $K_i = \omega/v_i$.

$$\bar{F}(t,z) = \bar{E}_0 + \bar{E}_1 e^{i(K_1 - K_0)\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{K_1 - K_0} t - z\right)} + \ldots$$

- обвідна сигналу. При вузькому спектрі частот

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0}\right| \ll 1, \quad \text{тому} \quad \left|\frac{K_1 - K_0}{K_0}\right| \ll 1.$$

Обвідна є повільно змінною функцією у порівнянні з експоненціальним множником несучої частоти ω_0. Для вузького спектра справедлива рівність відносних приростів

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{K_1 - K_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{K_2 - K_0} = \frac{d\omega}{dK},$$

тому обвідна визначається єдиним аргументом

$$\bar{F}(t,z) = \bar{F}\left(\frac{d\omega}{dK} t - z\right).$$

Фіксуючи точку на обвідній

$$\frac{d\omega}{dK} t - z = \mathrm{const},$$

визначаємо швидкість переміщення її у просторі:

$$v_г = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dK}. \tag{4.26}$$

Таким чином, вона є швидкістю переміщення у просторі обвідної групи монохроматичних хвиль, які мають близькі частоти, та швидкістю переносу електромагнітної енергії у просторі. Групова та фазова швидкості взаємозв'язані. Дійсно,

$$\frac{d v_\varphi}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{k - \omega\frac{dk}{d\omega}}{k^2},$$

звідки

$$v_г = \frac{v_\varphi}{1 - \frac{\omega}{v_\varphi}\frac{d v_\varphi}{d\omega}}. \qquad (4.27)$$

У середовищах без дисперсії фазова швидкість не залежить від частоти, тому фазова та групова швидкості збігаються.

5. ПАДІННЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА МЕЖУ РОЗПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Цілий ряд практично важливих задач потребує розгляду електромагнітної хвилі у разі присутності двох середовищ з різноманітними електродинамічними параметрами. До таких задач відносяться, наприклад, радіолокаційні задачі обчислення діаграм направленості у техніці антенних пристроїв та інші.

На межі розподілу середовищ виникають явища відбиття та заломлення хвиль.

5.1. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі

Геометричний зміст задачі наведено на рис. 5.1. Площина L відокремлює два півпростори (індекси 1,2) з різними електродинамічними параметрами. Вектор Пойнтінга плоскої хвилі має кут 90° з площиною розподілу середовищ. Потрібно визначити поле (комплексні амплітуди векторів) в обох середовищах.

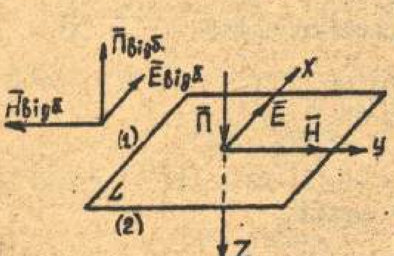


Рис. 5.1

Задамо правосторонню систему координат так, щоб початок системи координат знаходився на площині розподілу, вісь Z - збігалася з напрямком розповсюдження хвилі, а вектор $\bar{E}$ - з віссю X.

Тоді комплексні амплітуди падаючої хвилі набувають вигляду

$$\dot{E}_{m\,пад} = \bar{x}_0 \dot{A} e^{-ik_1 z},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,\text{пад}} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_1} e^{-ik_1 z},$$

де хвильовий опір середовища

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

і хвильове число

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}.$$

Разом з падаючою хвилею у 1-му середовищі присутня відбита хвиля (вектор розповсюдження хвилі має протилежний напрямок):

$$\dot{\bar{E}}_{m\,\text{відб}} = \bar{X}_0 \dot{C} e^{ik_1 z},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,\text{відб}} = -\bar{Y}_0 \frac{\dot{C}}{Z_1} e^{ik_1 z}.$$

Вектор $\bar{H}$ відбитої хвилі змінив напрямок на протилежний, як наслідок зміни напрямку вектора Пойнтінга. Зміна знака у показнику експоненти теж з цим пов'язана.

Хвиля, що пройшла у друге середовище, описується співвідношеннями, аналогічними падаючій хвилі:

$$\dot{\bar{E}}_{m\,\text{заломл}} = \bar{X}_0 \dot{B} e^{-ik_2 z},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,\text{заломл}} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{B}}{Z_2} e^{-ik_2 z}.$$

На межі розподілу двох середовищ повинні виконуватися межові умови неперервності тангенціальних складових:

$$\dot{\bar{E}}_{m\,\text{пад}} + \dot{\bar{E}}_{m\,\text{відб}} = \dot{\bar{E}}_{m\,\text{заломл}},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,\text{пад}} + \dot{\bar{H}}_{m\,\text{відб}} = \dot{\bar{H}}_{m\,\text{заломл}}.$$

Підставляючи комплексні амплітуди хвиль, одержимо при $z=0$

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B},$$

$$\frac{\dot{A}}{Z_1} - \frac{\dot{C}}{Z_1} = \frac{\dot{B}}{Z_2}. \qquad (5.1)$$

Введемо характеристики явищ відбиття та заломлення на межі розподілу середовищ, тобто коефіцієнт відбиття

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{E}_{m\,\text{відб}}}{\dot{E}_{m\,\text{пад}}} = \frac{\dot{C}}{\dot{A}},$$

коефіцієнт заломлення

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{E}_{m\,заломл}}{\dot{E}_{m\,пад}} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}}.$$

Тоді межові умови (5.1) набувають вигляду

$$1 + \dot{\rho} = \dot{\tau},$$

$$Z_2(1 - \dot{\rho}) = \dot{\tau} Z_1.$$

Розв'язуючи систему відносно впроваджених коефіцієнтів, знайдемо коефіцієнти відбиття та заломлення, записані через хвильові опори середовищ

$$\dot{\rho} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$\dot{\tau} = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1}. \qquad (5.2)$$

Поле у першому середовищі являє собою суперпозицію падаючої та відбитої хвиль, тому, складаючи комплексні амплітуди, маємо

$$\dot{\bar{E}}_{m1} = \bar{X}_0 \dot{A} (e^{-ik_1 z} + \dot{\rho} e^{ik_1 z}),$$

$$\dot{\bar{H}}_{m1} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_1} (e^{-ik_1 z} - \dot{\rho} e^{ik_1 z}).$$

Поле у другому середовищі визначається тільки заломленою хвилею, тому

$$\dot{\bar{E}}_{m2} = \bar{X}_0 \dot{A} \dot{\tau} e^{-ik_2 z},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m2} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_2} \dot{\tau} e^{-ik_2 z}.$$

Проаналізуємо структуру поля у 1-му середовищі. Для непоглинальних середовищ хвильовий опір, а відповідно і коефіцієнти відбиття та заломлення, дійсні. Тоді комплексні амплітуди хвилі у 1-му середовищі

$$\dot{E}_{m1} = \bar{X}_0 \dot{A} e^{-ik_1 z}\left(1 + \rho e^{i2k_1 z}\right),$$

$$\dot{H}_{m1} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_1} e^{-ik_1 z}\left(1 - \rho e^{i2k_1 z}\right).$$

Амплітуда хвилі визначається як модуль комплексної амплітуди:

$$E_{m1} = A\left|1 + \rho e^{2ik_1 z}\right|.$$

Таким чином, амплітуда напруженості поля над межею розподілу залежить від просторової координати. Цю залежність відображає рис. 5.2. Тут використано векторне зображення комплексних чисел на комплексній площині. Результуючий вектор прямо пропорційно залежить від амплітуди поля та являє собою векторну суму одиничного (нерухомого) вектора та вектора, що змінює орієнтацію у залежності від просторової координати (обертовий вектор).

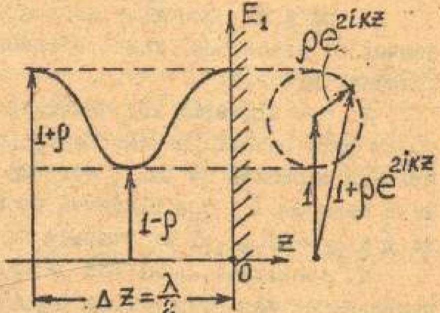


Рис. 5.2

Просторова розгортка векторної діаграми дає закон зміни амплітуди поля. Фазова періодичність обертового вектора $2kz = 2\pi$ приводить до просторової періодичності $\Delta z = \lambda/2$.

Розглянемо структуру поля над ідеальним провідником. У добре провідному середовищі хвильовий опір

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}} \simeq \sqrt{i\frac{\omega\mu}{\sigma}}.$$

У випадку ідеально провідного середовища очевидно, що хвильовий опір дорівнює нулю. Тоді $\rho = -1$, $\tau = 0$, а поле над ідеальним провідником набуває вигляду

$$\dot{E}_{m1} = \bar{X}_0 \dot{A}\left(e^{-ik_1 z} + \rho e^{ik_1 z}\right) = -\dot{A}\, 2i \bar{X}_0 \sin k_1 z,$$

$$\dot{H}_{m1} = \bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_1}\left(e^{-ik_1 z} - \rho e^{ik_1 z}\right) = 2\bar{Y}_0 \frac{\dot{A}}{Z_1} \cos k_1 z.$$

Переходячи від комплексних амплітуд до миттєвих значень векторів, маємо

$$\bar{E}(t) = \mathrm{Re}[\dot{\bar{E}}_m e^{i\omega t}] = 2\bar{X}_0 A \sin k_1 z \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\bar{H}(t) = 2\bar{Y}_0 \frac{A}{Z_1} \cos k_1 z \cos(\omega t + \varphi).$$

Висновки:

1. У середовищі без втрат хвильові опори дійсні, тому що дійсні діелектричні проникності. Коефіцієнти відбиття та заломлення на межі розподілу також дійсні.

2. На межі розподілу двох діелектричних середовищ фази падаючої та заломленої хвилі збігаються (тому що коефіцієнти заломлення дійсні).

3. При відбитті від поверхні розподілу діелектричних середовищ фаза однієї із компонент відбитої хвилі (E чи H) змінюється стрибком на $180°$, тому що $\bar{\Pi}_{пад} = -\bar{\Pi}_{відб}$, а $\bar{\Pi} = \bar{E} \times \bar{H}$. Фаза вектора $\bar{E}$ при відбитті не змінюється, якщо $Z_2 > Z_1$ (5.2) та $\dot{E}_{відб} = \rho \dot{E}_{пад}$, і змінюється на $180°$ при $Z_2 < Z_1$.

4. Амплітуда хвилі над площиною розподілу середовищ має коливальний характер вздовж нормалі до межі розподілу (рис.5.2). Просторові зміни амплітуди є періодичними і мають період, який дорівнює половині довжини хвилі. Поле - це сума стоячої хвилі амплітудою $2A\rho$ та біжучої хвилі амплітудою $A(1-\rho)$. Інтенсивність стоячої хвилі (коливальність зміни амплітуди) визначається коефіцієнтом відбиття. При малому коефіцієнті відбиття, тобто середовищах із близькими хвильовими опорами, коливання амплітуди незначні. При суттєвій відміні хвильових опорів середовищ $\rho \to 1$ коливання амплітуди збільшуються, тобто біжуча хвиля практично відсутня. У відсутності відбитої хвилі (при узгодженні середовищ $Z_1 = Z_2$) над межею розподілу присутня тільки біжуча хвиля.

5. При відбитті від ідеального провідника, тобто $Z_2 = 0$, $\rho = -1$, амплітуди падаючої та відбитої хвиль однакові, а фази протилежні. У зв'язку з тим, що фаза хвилі не залежить від просторової координати, з'являється стояча хвиля з фіксованими у просторі вузлами та пучностями (рис. 5.3). Фази стоячої хвилі електричної та магнітної компонент зсунуті у просторі на $\lambda/4$,

а зміни напруженостей електричного та магнітного полів зсунуті у часі на $T/4$, тобто на 90° по фазі. Таким чином, є моменти часу виключно електричного або магнітного полів. На поверхні ідеального провідника з'являється поверхневий струм з густиною (див. рис. 3.5):

$$\bar{j}_s = -\bar{z}_0 \times \bar{H}_m(0).$$

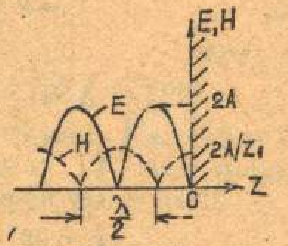


Рис. 5.3

6. У зв'язку з тим, що вузли стоячої хвилі у просторі фіксовані, розташування другої провідної площини у координаті вузла не змінює розподіл поля (рис.5.3). Таким чином, якщо відстань між паралельними площинами кратна півдовжині хвилі $d = n\lambda/2$, то ця система утворює плоский резонатор.

5.2. Похиле падіння плоскої хвилі на межу розподілу середовищ

Геометрія поставленої задачі наведена на рис. 5.4, де S - площина розподілу двох середовищ із різними параметрами, $\bar{\Pi}$ - вектор Пойнтінга похило-падаючої хвилі, R - площина падіння (площина, що задається вектором Пойнтінга та нормаллю до площини розподілу).

Розглянемо випадок нормальної поляризації хвилі (вектор $\bar{E}$ є перпендикулярним до площини падіння).

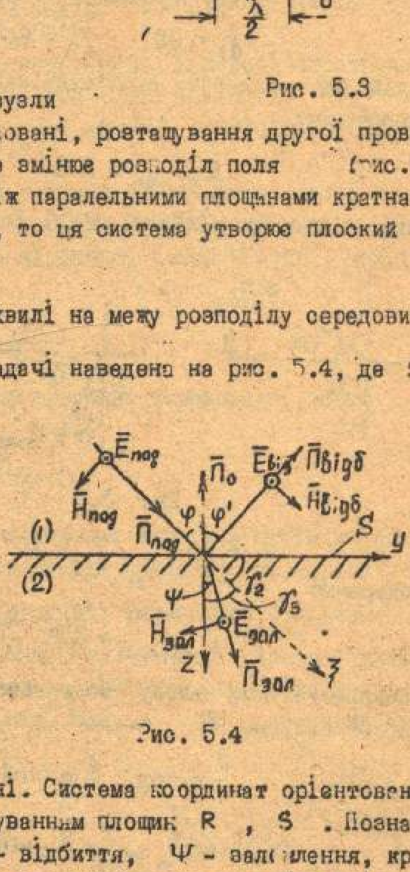


Рис. 5.4

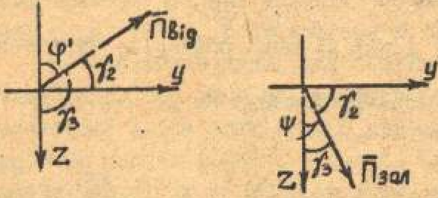
Середовище 1 та 2 діелектричні. Система координат орієнтована згідно із просторовим розташуванням площин R, S. Позначені кути: φ - падіння, φ' - відбиття, ψ - заломлення, крім того, ζ - просторова координата напрямку падаючої хвилі.

Комплексна амплітуда падаючої хвилі, що розповсюджується вздовж довільного напрямку (4.25):

$$\dot{E}_{m\,пад} = A e^{-ik_1\zeta},$$

де
$$\xi = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3,$$
а також
$$\cos\gamma_1 = \bar{\xi}_0\bar{X}_0, \quad \cos\gamma_2 = \bar{\xi}_0\bar{Y}_0, \quad \cos\gamma_3 = \bar{\xi}_0\bar{Z}_0$$
– напрямляючі косинуси, тобто проекції одиничного вектора напрямку хвилі $\bar{\xi}_0$ на відповідні координатні осі.

Після запису напрямляючих кутів через кут падіння
$$\gamma_1 = 90^\circ, \quad \gamma_2 = 90^\circ - \varphi, \quad \gamma_3 = \varphi$$
знайдемо комплексну амплітуду падаючої хвилі в основній системі координат:
$$\dot{E}_{m\,пад} = A e^{-ik_1(y\sin\varphi + z\cos\varphi)}. \qquad (5.3)$$
Аналогічно для відбитої хвилі (рис. 5.5,а)
$$\gamma_1 = 90^\circ, \quad \gamma_2 = 90^\circ - \varphi', \quad \gamma_3 = 180^\circ - \varphi'$$
маємо
$$\dot{E}_{m\,відб} = C e^{-ik_1(y\sin\varphi' - z\cos\varphi')}, \qquad (5.4)$$



а Рис. 5.5 б

а для заломленої хвилі (рис. 5.5,б)
$$\gamma_1 = 90^\circ, \quad \gamma_2 = 90^\circ - \psi, \quad \gamma_3 = \psi$$
одержимо
$$\dot{E}_{m\,заломл} = B e^{-ik_2(y\sin\psi + z\cos\psi)}. \qquad (5.4а)$$
Використовуючи межову умову неперервності тангенціальної складової вектора $\dot{E}$, маємо
$$\dot{E}_{m\,пад} + \dot{E}_{m\,відб} = \dot{E}_{m\,заломл}, \quad z = 0,$$
тобто
$$A e^{-ik_1 y\sin\varphi} + C e^{-ik_1 y\sin\varphi'} = B e^{-ik_2 y\sin\psi}.$$
Очевидно, рівняння повинно виконуватися у деякій точці падіння, тому
$$k_1\sin\varphi = k_1\sin\varphi' = k_2\sin\psi.$$

Знайдене рівняння відповідає двом умовам:

$$\varphi = \varphi',$$

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \frac{n_1}{n_2},$$

де з урахуванням виразів

$$K = \frac{\omega}{\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

де n - коефіцієнт заломлення середовища. Наведені співвідношення являють собою закони Снеліуса.

Граничні випадки при суттєвій відміні коефіцієнтів заломлення середовищ:

1. Падіння хвилі на менш густинне середовище, тобто $n_1 < n_2$. Тоді $\sin\psi > \sin\varphi$, або $\psi > \varphi$. При дальшому збільшенні кута падіння виникає явище повного відбиття, тобто $\psi = 90°$, так що для критичного кута падіння

$$\sin\varphi_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

2. Падіння хвилі на більш густинне середовище, тобто $n_2 >> n_1$. Тоді

$$\sin\psi = \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi \approx 0.$$

Таким чином, у цьому випадку незалежно від кута падіння хвиля входить у друге (густинне) середовище практично по нормалі.

5.3. Структура поля при відбитті від ідеального провідника

Розглянемо випадок нормальної поляризації падаючої хвилі. Середовище, від якого відбувається відбиття, ідеально провідне. Геометрія задачі наведена на рис. 5.6, де xyz - основна система координат, що "прив'язана" до площини провідника, xoy - поверхня провідника, $\ell\eta\xi$ - система координат електромагнітної хвилі, причому $\bar{\ell}_0 \times \bar{\eta}_0 = \bar{\xi}_0$. Комплексні амплітуди векторів падаючої хвилі

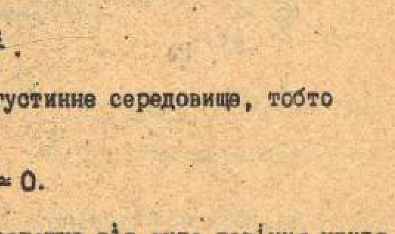


Рис. 5.6

$$\dot{\bar{E}}_{m\,пад} = A\bar{l}_0 e^{-ik_1\xi},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,пад} = \frac{A}{Z_1}\bar{\eta}_0 e^{-ik_1\xi}.$$

Поточна координата напрямку розповсюдження хвилі

$$\xi = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3.$$

Перейдемо від системи координат хвилі до основної системи координат. Для падаючої хвилі

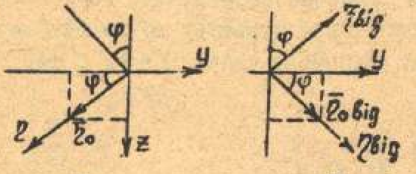
$$\bar{\eta}_0 = \bar{X}_0\cos\beta_1 + \bar{Y}_0\cos\beta_2 + \bar{Z}_0\cos\beta_3,$$

де β_1, β_2, β_3 - напрямлюючі кути одиничного вектора $\bar{\eta}_0$.

Розкладаючи вектор $\bar{\eta}_0$ у системі координат yz та враховуючи $\beta_1 = 90^\circ$, маємо (рис. 5.7,а)

$$\bar{\eta}_0 = -\bar{Y}_0\cos\varphi + \bar{Z}_0\sin\varphi,$$

$$\bar{l}_0 = -\bar{X}_0.$$



а б

Рис. 5.7

Комплексні амплітуди векторів відбитої хвилі:

$$\dot{\bar{E}}_{m\,відб} = C\bar{l}_0 e^{-ik_1\xi_{відб}},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,відб} = \frac{C}{Z_1}\bar{\eta}_{0\,відб} e^{-ik_1\xi_{відб}},$$

або, у відповідності до рис. 5.7,б,

$$\dot{\bar{E}}_{m\,відб} = -C\bar{X}_0 e^{-ik_1\xi_{відб}},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,відб} = \frac{C}{Z_1}(\bar{Y}_0\cos\varphi + \bar{Z}_0\sin\varphi) e^{-ik_1\xi_{відб}}.$$

Поточні просторові координати падаючої та відбитої хвиль в основній системі координат наведені у попередньому розділі (5.3), (5.4). Результуюче поле над ідеально відбиваючою поверхнею зображає суму падаючої та відбитої хвиль. Враховуючи, що коефіцієнт відбиття $\rho = -1$, тобто $C = -A$, сумарне поле

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{X}_0 A\left[e^{ik_1 z\cos\varphi} - e^{-ik_1 z\cos\varphi}\right] e^{-ik_1 y\sin\varphi}.$$

Таким чином,

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{X}_0 (2iA) \sin(\kappa_1 z \cos\varphi) e^{-i\kappa_1 y \sin\varphi},$$

а комплексна амплітуда магнітної складової

$$\dot{\bar{H}}_m = \frac{A}{Z_1}\Big[(-\bar{Y}_0 \cos\varphi + \bar{Z}_0 \sin\varphi) e^{-i\kappa_1 (y\sin\varphi + z\cos\varphi)} -$$

$$- (\bar{Y}_0 \cos\varphi + \bar{Z}_0 \sin\varphi) e^{-i\kappa_1 (y\sin\varphi - z\cos\varphi)}.$$

Перетворюючи окремо компоненти y та z, одержимо

$$\bar{Y}_0 : -\bar{Y}_0 \cos\varphi \left[e^{-i\kappa_1 z\cos\varphi} + e^{i\kappa_1 z\cos\varphi}\right] e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi} =$$

$$= -2\bar{Y}_0 \cos\varphi \cdot \cos(\kappa_1 z \cos\varphi)\, e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi},$$

$$\bar{Z}_0 : \bar{Z}_0 \sin\varphi \left[e^{-i\kappa_1 z\cos\varphi} - e^{i\kappa_1 z\cos\varphi}\right] e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi} =$$

$$= -\bar{Z}_0\, 2i \sin\varphi \cdot \sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\, e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi}.$$

Таким чином,

$$\dot{\bar{H}}_m = -\frac{A}{Z_1}\left[2\bar{Y}_0 \cos\varphi \cdot \cos(\kappa_1 z\cos\varphi) + 2\bar{Z}_0 i \sin\varphi \sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\right] e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi}$$

Вводячи комплексну амплітуду $\dot{E}_0 = 2Ai$, знайдемо компоненти поля:

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{X}_0 \dot{E}_0 \sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\, e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi}, \qquad (5.5)$$

$$\dot{\bar{H}}_m = -\frac{\dot{E}_0}{Z_1}\left[-i\bar{Y}_0 \cos\varphi \cdot \cos(\kappa_1 z\cos\varphi) + \bar{Z}_0 \sin\varphi \sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\right] e^{-i\kappa_1 y\sin\varphi}.$$

Висновки:

1. Вздовж площини розподілу середовищ (координата y) розповсюджується біжуча хвиля. Вздовж нормалі до площини розподілу (координата z) установлюється стояча хвиля.

2. Хвиля має як поздовжні, так і поперечні компоненти.

3. Біжучу хвилю характеризує поздовжне хвильове число

$$h = \kappa_1 \sin\varphi,$$

стоячу хвилю - поперечне хвильове число

$$g = \kappa_1 \cos\varphi,$$

причому

$$h^2 + g^2 = K_1^2.$$

4. Структуру поля описує розподіл амплітуди напруженості поля (рис. 5.8) у відповідності до виразу (5.5). Внаслідок просторової періодичності поля на відстані від поверхні

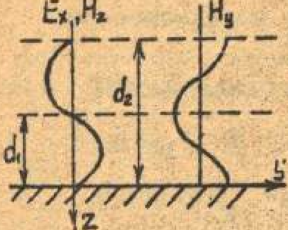


Рис. 5.8

$$gz = gd_n = n\pi,$$

тобто

$$d_n = \frac{n\pi}{g},$$

компоненти електромагнітного поля задовольняють межові умови на ідеально провідній поверхні $E_\tau = H_n = 0$, і тому $E_x = H_z = 0$. Друга провідна площина, розташована на одній із відстаней d_n, не змінює структури поля. Таким чином, між двома паралельними провідними площинами хвиля розповсюджуватиметься, якщо її поперечне хвильове число задовольняє умову

$$g_n = \frac{n\pi}{d},$$

тобто між площинами укладатиметься ціле число стоячих півхвиль.

Структура поля простівої хвилі наведена на рис. 5.9. Поле

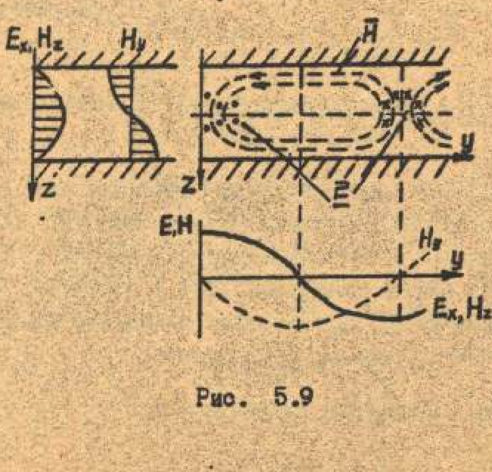


Рис. 5.9

будується згідно з епюрами напруженостей для складових хвилі та відповідає виразам хвилі у дійсній формі, які дістаються з комплексних амплітуд (5.5):

$$E_x = E_0 \sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\cos(\omega t - \kappa_1 y\sin\varphi),$$

$$H_y = -\frac{E_0}{Z_1}\cos\varphi\cdot\cos(\kappa_1 z\cos\varphi)\sin(\omega t - \kappa_1 y\sin\varphi),$$

$$H_z = -\frac{E_0}{Z_1}\sin\varphi\cdot\sin(\kappa_1 z\cos\varphi)\cos(\omega t - \kappa_1 y\sin\varphi).$$

5. Критичне значення частоти електромагнітної хвилі можна визначити з таких умов: при фіксованій відстані між площинами (d) розповсюдження хвилі залежить від частоти електромагнітного поля. Дійсно, поздовжне хвильове число

$$h = \sqrt{\kappa_1^2 - g^2} = \sqrt{\omega^2\varepsilon_1\mu_1 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}.$$

При $\omega^2\varepsilon\mu - g^2 < 0$ поздовжне хвильове число стає уявним: $h = \pm i\beta$. Тоді на підставі (5.5) миттєве значення електричної компоненти хвилі

$$E(t) = Re\left[E_0\sin(\kappa_1 z\cos\varphi)e^{-iy(i\beta)}\cdot e^{i\omega t}\right] =$$

$$= E_0\sin(\kappa_1 z\cos\varphi)e^{-\beta y}\cos\omega t,$$

тобто зникає хвильовий процес (просторовий набіг фази є відсутнім).

Граничне значення частоти, при якій стала розповсюдження перетворюється у нуль, - це критична частота

$$\omega_\kappa^2\varepsilon_1\mu_1 - g^2 = 0,$$

$$\omega_\kappa = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon\mu_1}} = \frac{n\pi}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}.$$

При зменшенні частоти електромагнітної хвилі, починаючи зі значення $\omega = \omega_\kappa$, стала розповсюдження стає уявною, зникає хвильовий характер поля, причому напруженість поля згасає як експонента вздовж осі розповсюдження y .

У просторі між двома провідними площинами можуть розповсюджуватися тільки хвилі з частотами $\omega > \omega_к$ або довжинами хвиль $\lambda < \lambda_к$, де

$$\lambda_к = \frac{2d}{n},$$

тому що $h = 0$ при $k = g$, тобто $\frac{2\pi}{\lambda_к} = \frac{n\pi}{d}$.

6. Зміна частоти електромагнітної хвилі потребує зміни кута падіння, щоб гарантувати умови існування хвилі між двома площинами. Дійсно, умова існування хвилі накладає обмеження на поперечне хвильове число

$$g = k_1 \cos\varphi = \frac{n\pi}{d}$$

і, відповідно, на кут падіння

$$\cos\varphi = \frac{n\pi}{k_1 d}. \qquad (5.6)$$

Враховуючи сталу розповсюдження у необмеженому просторі

$$k_1 = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1},$$

знайдемо

$$\cos\varphi = \frac{\omega_к}{\omega}.$$

Мінімальний кут падіння ($\varphi = 0$, тобто нормальне падіння) обмежує діапазон хвиль між двома провідними площинами частотою, яка дорівнює критичній.

7. Система із двох паралельних провідних площин є багатохвильовою напрямлюючою системою. Тип хвилі визначається кількістю стоячих півхвиль, що укладаються між площинами. Умовою існування різноманітних типів хвиль є співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{n\lambda}{2d},$$

яке одержано із (5.6). Так, для даного типу хвилі (n) та відстані між площинами (d) зміна довжини хвилі необмеженого простору (λ) потребує означеного кута падіння, причому збільшення довжини хвилі обмежено її критичним значенням $\lambda_к$. Кожен тип хвилі має своє критичне значення довжини хвилі. Хвиля, яка має найбільше значення $\lambda_к$, зветься основною, тобто $\lambda_{к1} = 2d$; хвиля другого типу має $\lambda_{к2} = d$. Таким чином, при умові $2d > \lambda > d$ у напрямлюючій системі існує тільки один тип хвилі - основна хвиля. Якщо довжина хвилі генератора фіксована, існування основної хвилі забезпечується при умові

$$\frac{\lambda}{2} < d < \lambda .$$

Перейти від основної хвилі до хвилі другого типу, як випливає із (5.7), можливо при збереженні кута падіння, якщо збільшити удвічі відстань між площинами, або при постійній відстані - шляхом збільшення удвічі $\cos\varphi$ (при умові, що це можливо, тобто $d > \lambda$).

8. Характеристики хвилі, що розповсюджується між двома площинами.

Фазова швидкість хвилі

$$v = \frac{\omega}{h} .$$

Враховуючи, що поздовжне хвильове число

$$h = \sqrt{k_1^2 - g^2} = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{g}{k_1}\right)^2} ,$$

$g/k_1 = \cos\varphi$, а також $k_1 = \omega / v_1$, маємо

$$h = \frac{\omega}{v_1}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\omega}{v_1}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_к}{\omega}\right)^2} .$$

Отже,

$$v = \frac{v_1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_к}{\omega}\right)^2}} ,$$

де v_1 - швидкість хвилі у необмеженому просторі.

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi \cdot v_1}{\omega\sqrt{1-\left(\frac{\omega_к}{\omega}\right)^2}} .$$

і тому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_к}\right)^2}} .$$

Групова швидкість

$$v_{гр} = v_1 \sqrt{1-\left(\frac{\omega_к}{\omega}\right)^2}$$

визначається із загального правила розрахунку групової швидкості:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dh} = \frac{1}{\frac{dh}{d\omega}}.$$

5.4. Падіння плоскої хвилі на межу розподілу діелектрик-провідник

Розглянемо заломлену хвилю при падінні на плоску поверхню реального провідника (рис. 5.10). Використаємо результати, одержані при розв'язанні задачі похилого падіння хвилі на межу розподілу двох діелектричних середовищ (5.4a). При цьому слід враховувати комплексний характер сталої розповсюдження провідного (другого) середовища:

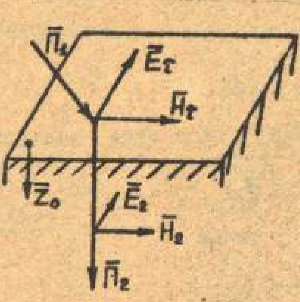


Рис. 5.10

$$\dot{E}_{m\,пр} = B e^{-i\dot{k}_2(y\sin\Psi + z\cos\Psi)},$$

$$\dot{K}_2 = \sqrt{\dot{\varepsilon}_2\mu_2} = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2(1 - i\,tg\,\Delta)} = \beta_2 - i\alpha_2.$$

у відповідності до закону Снеліуса

$$\dot{K}_2 \sin\Psi = K_1 \sin\varphi = \beta_y,$$

крім того,

$$\dot{K}_2\cos\Psi = \sqrt{\dot{K}_2^2 - (\dot{K}_2\sin\Psi)^2} = \sqrt{\dot{K}_2^2 - \beta_y^2} = \beta_z - i\alpha,$$

і тому

$$\dot{E}_{m\,пр} = B e^{-\alpha z}\cdot e^{-i(\beta_y y + \beta_z z)}.$$

У заломленої хвилі поверхня рівних амплітуд $z = const$ не збігається з поверхнею рівних фаз:

$$\beta_y y + \beta_z z = const,$$

тому така хвиля є неоднорідною. Однак у більш густинному середовищі (металі) кут заломлення наближається до нуля, тому практично справедливий вираз

$$\dot{E}_{m\,зал} = \mathcal{E}\, e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{-i\beta_2 z}. \qquad (5.8)$$

Компоненти електричного та магнітного полів у другому середовищі пов'язані між собою:

$$\dot{E}_{m2} = Z_{c2}\,\dot{H}_{m2}.$$

На межі розподілу тангенціальні компоненти безперервні, тому

$$\dot{E}_{\tau 1} = Z_{c2}\,\dot{H}_{\tau 1}, \qquad z = 0. \qquad (5.9)$$

У зв'язку з тим, що різниця між реальним та ідеальним металом незначна, тангенціальну компоненту H_τ біля поверхні металу можна замінити на H_τ біля поверхні ідеального металу, що спрощує розрахунки.

Хвильовий опір доб провідного середовища (реального металу) задовольняє вирази (4.14), (4.24):

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{-i\varepsilon_2 \operatorname{tg}\Delta}}.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

маємо

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}}\,(1+i) = \frac{1+i}{\sigma_2 d},$$

де глибина проникнення у метал $d = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\sigma_2\mu_2}}$.

Рівняння (5.9) має назву межової умови Леонтовича, або у векторній формі

$$\dot{\bar{E}}_{\tau 1} = Z_{c2}\left[\dot{\bar{H}}_{\tau 1} \times \bar{z}_0\right]. \qquad (5.10)$$

На відміну від ідеального провідника, де $\dot{E}_\tau = 0$, скінченна компонента реального провідника $\dot{E}_{\tau 1}$ визначає нормальну складову вектора Пойнтінга, тобто характеризує енергію поля, яка поглинається металом.

Таким чином, замість межових умов на поверхні реального провідника можна використовувати межову умову ідеального провідника ($E_\tau = 0$). Якщо далі визначити величину E_τ на поверхні реального провідника відповідно до умов Леонтовича, то це дає можливість врахування втрат, які виникають внаслідок скінченної провідності середовища. Межова умова може застосовуватися також у разі неплоских меж розподілу, якщо радіус кривини поверхні $R_{min} >> d$.

Визначимо струм, що виникає у реальному провіднику при падінні електромагнітної хвилі. Напруженість електричного поля у добре провідному середовищі на підставі (5.8) із врахуванням $\alpha \simeq \beta$:

$$\dot{E}_m = E_\tau e^{-(1+i)\alpha z},$$

де E_τ - напруженість поля на поверхні провідника;

$\alpha = \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}}$ - коефіцієнт згасання, пов'язаний з глибиною проникнення.

Згідно із законом Ома у тонкому поверхневому шарі провідника з'являється струм з неоднорідною густиною вздовж нормальної координати:

$$j = \sigma \dot{E}_m .$$

На одиницю довжини вздовж координати y густина струму, А/м, становить (рис. 5.11)

$$j_s = \int_0^\infty \sigma E_\tau e^{-(1+i)\alpha z} dz = \frac{\sigma}{(1+i)\alpha} E_\tau .$$

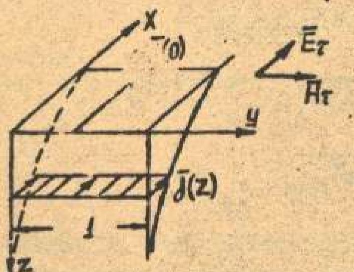


Рис. 5.11

Цей струм є густиною поверхневого струму реального провідника. З цим струмом пов'язаний поверхневий опір

$$Z_s = \frac{E_\tau}{j_s} = \frac{1+i}{d\sigma} .$$

- Активна складова поверхневого опору

$$R_s = \frac{1}{\sigma d} .$$

визначається паралелепіпедом з поперечним перерізом $d \times 1$ та одиничною довжиною. Реактивну складову, що має індуктивний характер, визначає магнітне поле всередені провідника.

Хвильовий опір провідника збігається з його поверхневим опором: $Z_c = Z_s$. У відповідності до межових умов

$$\dot{E}_\tau = Z_{c2}[\dot{H}_\tau \times \bar{Z}_0],$$

а також

$$\dot{E}_\tau = \dot{J}_s Z_s \text{ , звідки маємо } \bar{J}_s = \dot{H}_\tau \times \bar{Z}_0 .$$

Таким чином, величини поверхневих струмів реального та ідеального провідників практично збігаються.

5.5. Структура поля при повному відбитті від діелектрика

Розглянемо похиле падіння хвилі на плоску межу з менш густинним середовищем (рис. 5.12), тобто $n_1 \gg n_2$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$.

Згідно із законом Снеліуса

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_2} .$$

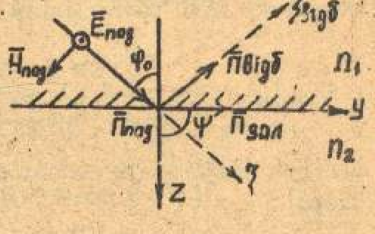


Рис. 5.12

У зв'язку з тим, що $n_1 \gg n_2$, маємо $\psi > \varphi$, та при деякому критичному куті падіння $\varphi_0 < \pi/2$ виникає явище повного внутрішнього відбиття

$$\sin\psi = \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_0 = 1.$$

Якщо далі збільшувати кут падіння:

$$\varphi > \varphi_0 ; \quad \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi > 1,$$

внаслідок чого

$$\cos\psi = \pm\sqrt{1-\sin^2\psi} = \pm i\sqrt{\left|1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)^2\right|},$$

то кут заломлення стає комплексним.

Визначимо коефіцієнти відбиття та заломлення для довільного кута падіння при нормальній поляризації хвилі (вектор $\bar{E}$ має кут 90° до площини падіння). Отже, електричні компоненти поля

$$\dot{\bar{E}}_{m\,пад} = -\bar{X}_0 \dot{A}\, e^{-ik_1\xi},$$

$$\dot{\bar{E}}_{m\,відб} = -\bar{X}_0 \dot{C}\, e^{-ik_1\xi_{відб}},$$

$$\dot{\bar{E}}_{m\,заломл} = -\bar{X}_0 \dot{B}\, e^{-ik_2\xi_{заломл}},$$

а тангенціальні компоненти магнітного поля

$$\dot{\bar{H}}_{m\,пад}(y) = \frac{\dot{A}}{Z_1}(-\bar{Y}_0\cos\varphi)\, e^{-ik_1\xi},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,відб}(y) = \frac{\dot{C}}{Z_1}(\bar{Y}_0\cos\varphi)\, e^{-ik_1\xi_{відб}},$$

$$\dot{\bar{H}}_{m\,заломл}(y) = \frac{\dot{B}}{Z_2}(-\bar{Y}_0\cos\psi)\, e^{-ik_2\xi_{заломл}}.$$

Використовуючи межові умови неперервності тангенціальних компонент на межі розподілу середовищ $\xi = \xi_{відб} = \xi_{заломл} = 0$, знайдемо

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B},$$

$$\frac{\dot{A}}{Z_1}(-\cos\varphi) + \frac{\dot{C}}{Z_1}\cos\varphi = \frac{\dot{B}}{Z_2}(-\cos\psi).$$

Вводячи коефіцієнти заломлення $\dot{\tau} = \dot{B}/\dot{A}$ та відбиття $\dot{\rho} = \dot{C}/\dot{A}$, маємо

$$1 + \dot{\rho} = \dot{\tau},$$

$$1 - \dot{\rho} = \frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\,\dot{\tau}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, визначаємо коефіцієнти

$$\dot{\tau} = \frac{2Z_2\cos\varphi}{Z_1\cos\psi + Z_2\cos\varphi},$$

$$\dot{\rho} = \frac{Z_2\cos\varphi - Z_1\cos\psi}{Z_2\cos\varphi + Z_1\cos\psi}. \qquad (5.11)$$

При повному внутрішньому відбитті, тобто уявному $\cos\psi$, коефіцієнт відбиття

$$|\dot{\rho}| = \frac{|Z_2\cos\varphi - iZ_1|\cos\psi||}{|Z_2\cos\psi + iZ_1|\cos\psi||},$$

тому його можна визначити як $\dot{\rho} = e^{i\theta}$, де θ - аргумент коефіцієнта відбиття.

Комплексна амплітуда напруженості електричного поля у 1-му середовищі

$$\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{m\,пад} + \dot{E}_{m\,відб}.$$

Використовуючи амплітуди падаючої та відбитої хвиль, визначені при розгляді похилого падіння на межу розподілу середовищ (5.3), (5.4), маємо

$$\dot{E}_{m1} = -\bar{X}_0 A\left[e^{-ik_1 z\cos\varphi} + e^{i\theta}\cdot e^{ik_1 z\cos\varphi}\right]\cdot e^{-ik_1 y\sin\varphi},$$

тобто

$$\dot{E}_{m1} = -\bar{X}_0 E_0 \cos\left(k_1 z\cos\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{-i\left(k_1 y\sin\varphi - \frac{\theta}{2}\right)}, \quad (5.12)$$

де введено позначення $E_0 = 2A$.

За аналогією з випадком відбиття від ідеально провідної поверхні, враховуючи $\dot{\rho} = e^{i\theta}$ (замість $\rho = -1$), знайдемо

$$\dot{\bar{H}}_{m1} = \frac{E_0}{Z_1}\left[\bar{Y}_0\cos\varphi\cdot\sin\left(k_1 z\cos\psi + \frac{\theta}{2}\right) - \right. \quad (5.13)$$
$$\left. - i\bar{Z}_0\sin\varphi\cdot\cos\left(k_1 z\cos\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right]\cdot e^{-i\left(k_1 y\sin\varphi - \frac{\theta}{2}\right)}.$$

Висновки:

1. У першому, більш густинному середовищі, вздовж межі розподілу (вісь y) розповсюджується біжуча хвиля. У поперечному напрямку (вісь z) поле розподілено відповідно до закону стоячої хвилі. Хвилі характеризуються відповідно поздовжнім хвильовим числом

$$h = k_1\sin\varphi$$

та поперечним хвильовим числом

$$g = k_1\cos\varphi$$

2. Електромагнітна хвиля крім поперечних компонент (E_x , H_y) має поздовжню компоненту (H_z)

3. На відміну від випадку падіння хвилі на ідеально провідне середовище, біжуча та стояча хвилі мають початкові

фазовий зсув $\theta/2$, що визначається аргументом коефіцієнта відбиття.

4. Фазова швидкість хвилі має такі особливості:

При повному внутрішньому відбитті $\varphi > \varphi_0$

$$\frac{K_1}{K_2} \sin\varphi > 1,$$

тобто $h = K_1 \sin\varphi > K_2$, $K_1 < h < K_2$ та $v = \omega/h$, і тоді $v_1 < v < v_2$. Хвиля, що розповсюджується в обмеженому густинному діелектричному середовищі, є сповільненою в порівнянні із фазовою швидкістю в менш густинному середовищі – v_2.

5. На відстанях d_n від межі розподілу середовищ, що задовольняють рівняння (рис. 5.13)

$$g d_n + \frac{\theta}{2} = \frac{n\pi}{2},$$

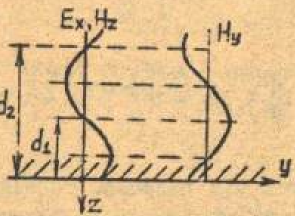


Рис. 5.13

компоненти хвилі відповідають межовим умовам на поверхні ідеального провідника ($E_\tau = H_n = 0$). Якщо обмежити шар діелектрика d_n ідеально провідною площиною, то одержимо плоску напрямляючу систему.

6. Структура поля у шарі діелектрика над металом задається компонентами стоячої хвилі, які на підставі виразів (5.12), (5.13) набувають вигляду:

$$E_x = -E_0 \cos\left(K_1 z \cos\varphi + \frac{\theta}{2}\right);$$

$$H_y = \frac{E_0}{Z_1} \cos\varphi \cdot \sin\left(K_1 z \cos\varphi + \frac{\theta}{2}\right);$$

$$H_z = -\frac{E_0}{Z_1} \sin\varphi \cdot \cos\left(K_1 z \cos\varphi + \frac{\theta}{2}\right).$$

Структура поля, що побудована на підставі епюр напруженостей стоячої (рис. 5.14,а) та біжучої (рис. 5.14,б) хвиль, наведена на рис. 5.14.

7. Структура поля у шарі діелектрика може визначатися з таких умов. Обмеживши півпростір діелектрика площиною, паралельною початковій площині, знайдемо смугу діелектрика товщиною

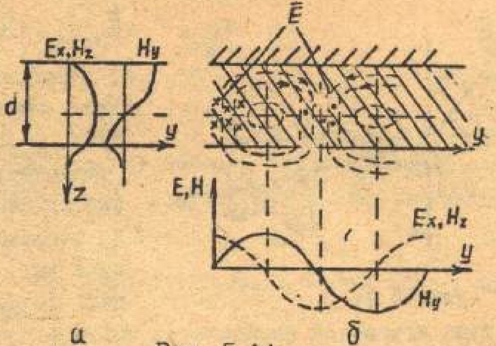


Рис. 5.14

d . Товщину виберемо умови забезпечення повного внутрішнього відбиття від обох граничних поверхонь. При цьому розподіл напруженості поля у поперечному напрямку повинен бути симетричним (рис. 5.15). Дана структура являє собою діелектричну напрямляючу систему.

8. Структура поля заломленої хвилі (поле у менш густинному середовищі) має такі особливості:

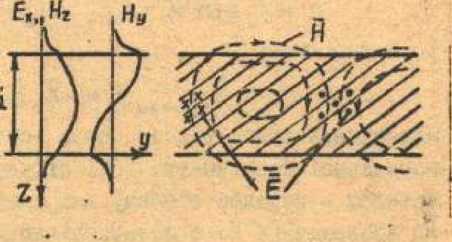


Рис. 5.15

$$\dot{E}_{m\,залом} = -B\overline{X}_0 e^{-i k_2 \xi_{залом}},$$

$$\dot{H}_{m\,залом} = \frac{B}{Z_2}\overline{\eta}_0 e^{-i k_2 \xi_{залом}},$$

де $\xi_{залом} = \xi_0 \overline{z}_0$.

В основній системі координат xyz на підставі рис. 5.16 маємо

$$\overline{\eta}_0 = -\overline{Y}_0 \cos\Psi + \overline{Z}_0 \sin\Psi,$$

$$\xi_{зал} = y \sin\Psi + z\cos\Psi.$$

У відповідності до закону Снеліуса

$$k_2 \sin\Psi = k_1 \sin\varphi = h,$$

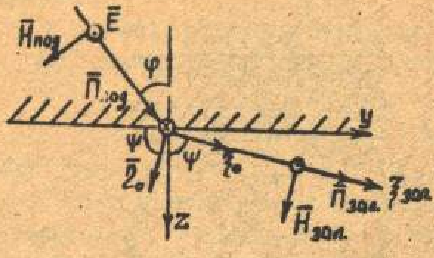


Рис. 5.16

та

$$\dot{E}_{m зал} = -\bar{X}_0 \dot{B} e^{-\beta z} \cdot e^{-ihy}.$$

Таким чином, при повному внутрішньому відбитті у другому, менш густинному середовищі вздовж площини розподілу розповсюджується біжуча хвиля. Вздовж нормалі до поверхні розподілу амплітуда згасає як експонента, тобто є поверхневою хвилею. У даному випадку згасання хвилі не пов'язано з поглинанням енергії, а є особливістю структури поля. При зменшенні кута падіння (у граничному випадку $\varphi = \varphi_0$) маємо

$$\frac{K_1}{K_2} \sin \varphi_0 = 1,$$

тобто $\psi = \pi/2$, і тоді

$$h = K_2 \sin \psi = K_2, \quad g_2 = K_2 \cos \psi = 0, \quad \beta = 0,$$

і, таким чином,

$$\dot{E}_{m зал.сма} = -\bar{X}_0 \dot{B} e^{-iK_2 y}.$$

Поверхнева хвиля зникає, поле розподілено рівномірно вздовж нормальної координати. Тоді структура - смуга діелектрика над металом - втрачає основну напрямляючу властивість. Енергія поля зосереджена не в діелектричному шарі, а розподілена у нескінченному просторі.

Визначимо критичну частоту, при якій в досліджуваній структурі зникає поверхнева хвиля. У середовищі над діелектриком (повітря) поздовжні та поперечні хвильові числа відповідно дорівнюють

$$h = K_2 \sin \psi, \quad g_2 = K_2 \cos \psi, \quad K_2^2 = h^2 + g_2^2,$$

а в діелектрику

$$h = K_1 \sin \varphi, \quad g_1 = K_1 \cos \varphi, \quad K_1^2 = h^2 + g_1^2.$$

Віднімаючи останнє рівняння, одержимо

$$K_1^2 - K_2^2 = g_1^2 - g_2^2 .$$

При повному відбитті $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \pi/2$, $g_2 = 0$, і тоді

$$g_1^2 = K_1^2 - K_2^2 . \qquad (5.14)$$

У зв'язку з тим, що в цьому випадку коефіцієнт відбиття $\dot{\rho} = 1$, тобто його аргумент $\theta = 0$, умова обмежуючої провідної площини

$$g_1 d = n \frac{\pi}{2} .$$

Враховуючи залежність хвильового числа $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, на підставі (5.14) маємо

$$\left(\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{1}{d}\right) = \omega_K^2 (\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2) ,$$

звідки критичне значення частоти

$$\omega_K = \frac{n\pi}{2d}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}} .$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны.- М.: Сов. радио, 1971. - 664 с.

Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Сов. радио, 1979. - 374 с.

Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн.- М.: Наука, 1973. - 607 с.

ЗМІСТ

4/3 1

1 жу

Сергій Миколайович Барсуков

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ ТА ХВИЛІ
НА МЕЖІ РОЗПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Редактор Є. О. Александрова

Зв. план, 1994, поз. 56
Підписано до друку 01.06.94
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 4. Облік.-вид. арк. 4,56. Т. 100 прим.
Замовлення 25. Ціна 900 крб.

Харківський авіаційний інститут
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні ХАІ
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
