



М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков,
Д. А. Ткаченко

РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОГОНОВИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК. РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ



2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»

М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков, Д. А. Ткаченко

**РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОГОНОВИХ НЕРОЗРІЗНИХ
БАЛОК. РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2026

УДК 539.3/.6 (075.8)

Г79

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Н. В. Сметанкіна,
д-р техн. наук, проф. С. І. Планковський

Гребенніков, М. М.

Г79

Розрахунок багатопрогонових нерозрізних балок. Рівняння трьох моментів [Електронний ресурс] : навч. посіб. / М. М. Гребенніков, В. Ю. Мірошніков, Д. А. Ткаченко. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Харків. авіац. ін-т», 2026. – 94 с.

ISBN 978-966-996-077-1

Викладено методику розкриття статичної невизначеності конструктивних елементів типу «балка» за допомогою рівняння трьох моментів. Розглянуто особливості наявності жорсткого затиснення, консолі та моменту на проміжній опорі. Наведено таблиці довідкових даних та приклади розв'язання задач.

Для здобувачів освіти, які вивчають курс «Механіка матеріалів та конструкцій».

Іл. 54. Табл. 6. Бібліогр.: 11 назв

УДК 539.3/.6 (075.8)

© Гребенніков М. М., Мірошніков В. Ю.,
Ткаченко Д. А., 2026

© Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут», 2026

ISBN 978-966-996-077-1

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ

- a, c – довжина ділянки бруса, m
- b, h – ширина, висота прямокутного перерізу, m
- D, d – зовнішній та внутрішній діаметри кільцевого поперечного перерізу, m
- E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга), Pa
- I_y – осьовий момент інерції площі поперечного перерізу відносно осі y , m^4
- K_T – коефіцієнт запасу міцності, б/р
- k – відношення висоти прямокутного поперечного перерізу до його ширини, б/р; ступінь статичної невизначеності, б/р
- l – довжина прогону, m
- M – момент зовнішньої зосередженої пари сил, $H \cdot m$
- M_y – згинальний момент відносно осі y , $H \cdot m$
- m – загальна кількість прогонів, б/р
- P – зосереджена сила, H
- Q_z – поперечна сила, що діє вздовж осі z , H
- q – інтенсивність розподіленого навантаження за довжиною, H/m
- $[q]$ – допустиме значення навантаження, H/m
- R – опорна реакція, H
- W_y – момент опору поперечного перерізу відносно осі y , m^3
- X_k – невідома реакція зв'язку
- x, y, z – осі декартової системи координат
- α – коефіцієнт тонкостінності кільцевого поперечного перерізу, б/р
- $\alpha_{i,k}$ – кут повороту в рівнянні трьох моментів, rad
- δ, Δ – лінійне переміщення поперечного перерізу, m
- θ – кут повороту поперечного перерізу, rad
- $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження, Pa
- $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, Pa
- ω – площа фігури, m^2

1. БАГАТОПРОГОНОВА НЕРОЗРІЗНА БАЛКА

Нерозрізними називають балки, що лежать більш ніж на двох опорах і не мають проміжних (конструктивних) шарнірів. Крайні опори можуть бути шарнірними або затисненими.

Багатопрогонові нерозрізні балки широко застосовуються в різних конструкціях (елементи механізації крила літака, валки прокатних станів, підкранові балки, довгі шпинделі, залізничні мости, рейки на шпалах, надземні магістральні нафто- і газопроводи на окремих опорах).

На рис. 1 показано приклади конструкцій, які можна звести до розрахункової схеми «нерозрізна балка».



Рис. 1

Розглянемо розрахункову схему нерозрізної багатопрогової балки, що спирається на $m + 1$ шарнірні опори (рис. 2). Одна з опор (зазвичай ліва) виконується шарнірно-нерухомою для сприйняття осового навантаження, інші – шарнірно-рухомими, що дає можливість балці вільно змінювати свою довжину при зміні температури (компенсація температурних подовжень).

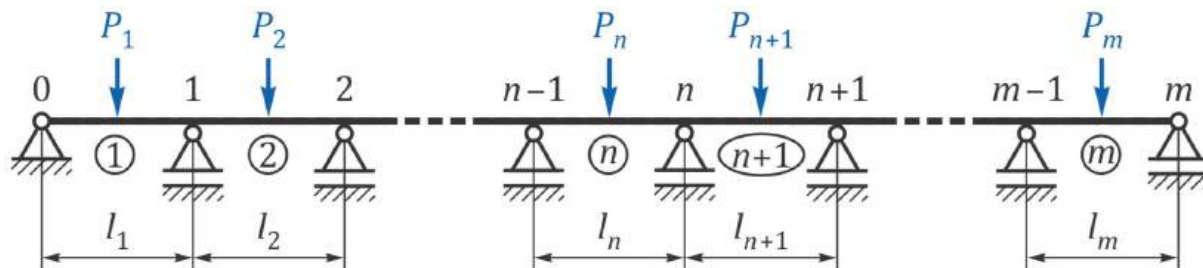


Рис. 2

При розв'язанні задач з багатопроговими нерозрізними балками вважають таке:

– опори нумерувати зліва направо: 0, 1, 2, ..., $m - 1$, m . Крайня ліва опора має номер «0»;

– прогони (частина балки між двома сусідніми опорами) нумерувати за номером правої опори (1, 2, ..., m).

l_i – довжина i -го прогону балки;

P_i – будь-яке зовнішнє навантаження, що діє в межах i -го прогону.

Консолі не є прогонами.

Ступінь статичної невизначеності такої конструкції дорівнює кількості проміжних опор (надлишкових, зайвих зв'язків):

$$k = m - 1, \quad (1)$$

де k – ступінь статичної невизначеності балки;

m – загальна кількість прогонів.

Якщо один із крайніх перерізів жорстко затиснений, це, відповідно, підвищує ступінь статичної невизначеності конструкції на одиницю.

Зауваження

Для визначення ступеня статичної невизначеності можна скористатися універсальною формулою

$$k = m - n,$$

де k – ступінь статичної невизначеності системи;

m – загальна кількість зовнішніх зв'язків, накладених на систему;

n – кількість необхідних зв'язків (кількість незалежних рівнянь статичної рівноваги).

Для нерозрізної балки $n = 2$, тоді $k = m - 2$.

Проаналізуємо цю основну систему, яка являє собою один геометрично незмінний елемент:

1. Жодне одиничне переміщення δ_{ik} не дорівнюватиме нулю, отже, до системи канонічних рівнянь методу сил (2) будуть входити *усі невідомі* X_k (рис. 3, в, г, д), що ускладнить розв'язання системи рівнянь.

2. У цій основній системі коефіцієнти δ_{ik} виходять зазвичай такими, що при розв'язанні системи рівнянь доводиться мати справу з малими різницями великих чисел, а це може призвести до *великих похибок* під час визначення X_k за недостатньої точності обчислення коефіцієнтів.

3. У такій основній системі *складніше* обчислюються коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь, оскільки епюри згинальних моментів для вантажної та одиничних систем поширюються на всю довжину балки (їх перемноження є трудомістким).

Таким чином, для нерозрізних багатопрогнових балок, ступінь статичної невизначеності яких перевищує $k = 2$, розглянутий варіант основної системи є *нераціональним*.

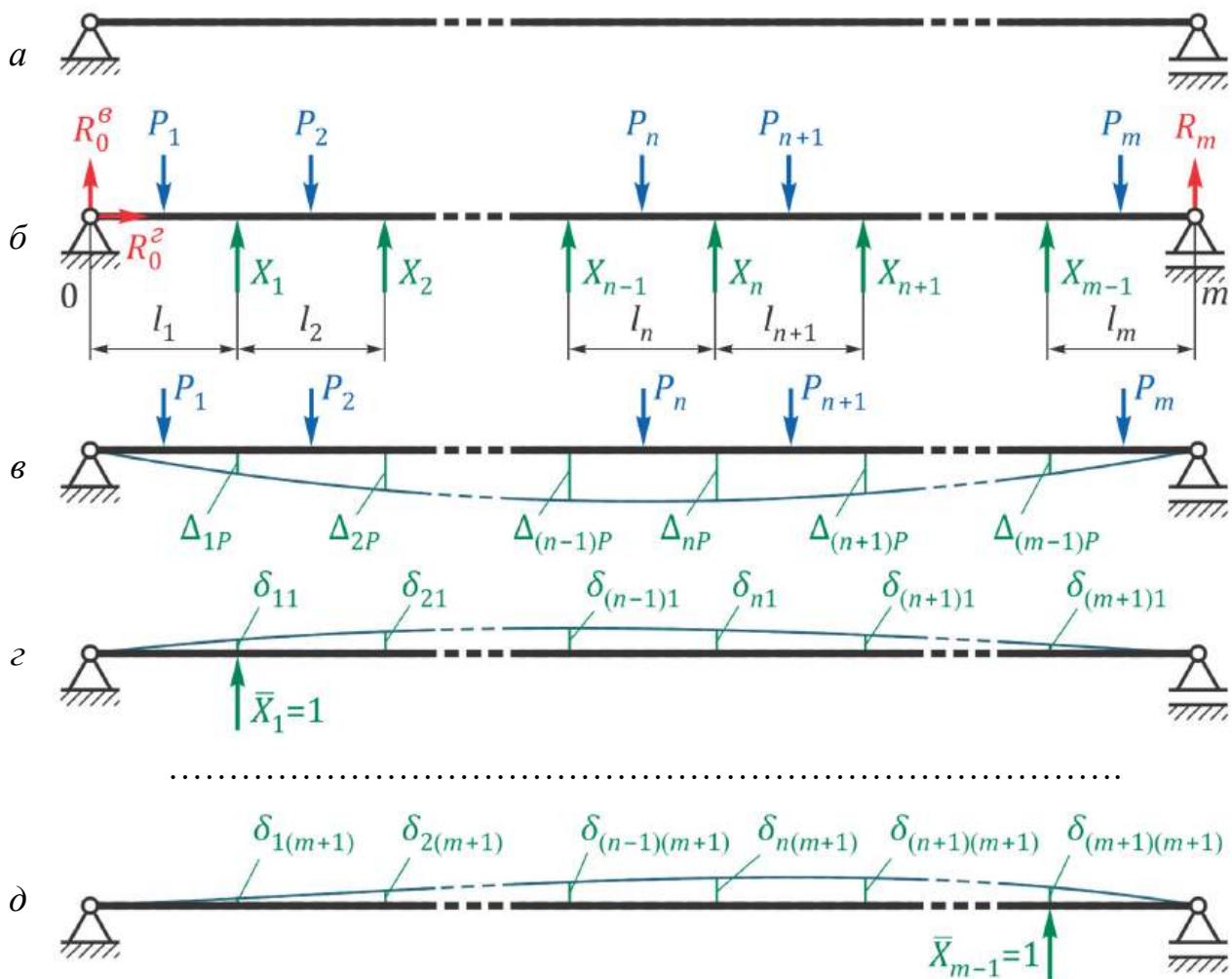


Рис. 3

Розглянемо інший варіант основної системи, згідно з яким можна користуватися властивістю регулярності (однотипності) нерозрізних балок.

При виборі основної системи відкинемо із заданої системи внутрішні зв'язки (**внутрішня статична невизначеність**), які запобігають взаємному повороту перерізів над опорами, тобто введемо в тіло балки шарніри над проміжними опорами (рис. 4, а).

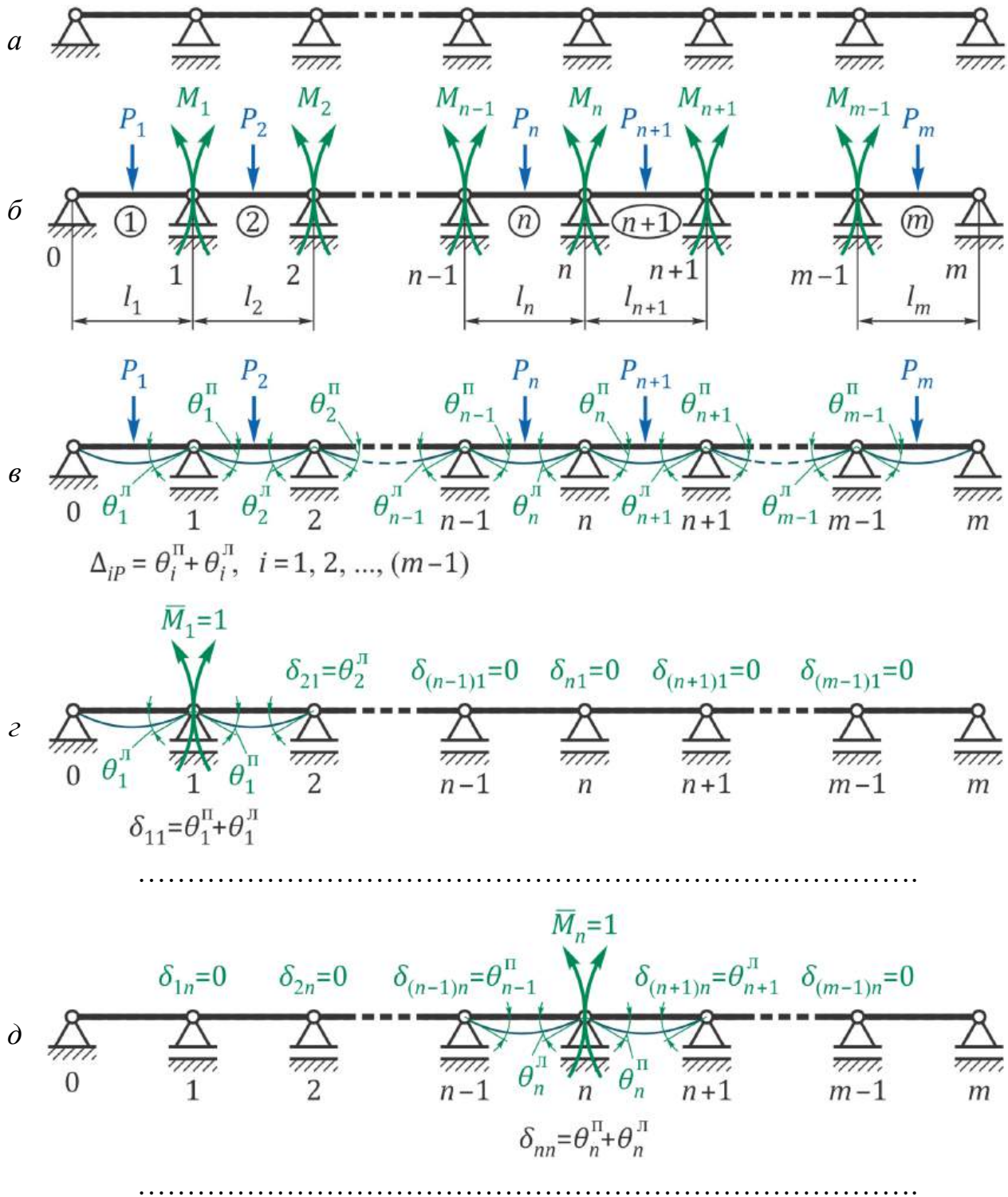


Рис. 4

У цьому випадку невідомими будуть згинальні моменти в перерізах над проміжними опорами $X_1 = M_1, X_2 = M_2, \dots, X_{m-1} = M_{m-1}$, тобто еквівалентна система являє собою ряд простих шарнірно опертих балок, навантажених заданими навантаженнями P_i і невідомими згинальними моментами M_i , прикладеними в опорних перерізах, в яких встановлено шарніри (рис. 4, б).

Вигляд канонічної системи рівнянь методу сил (2) не зміниться, але фізичний зміст коефіцієнтів та невідомих тепер буде іншим:

Δ_{iP} – кутове переміщення перерізу, в якому встановлено зв'язок i , під дією зовнішніх зусиль P ;

δ_{ik} – кутове переміщення перерізу, в якому встановлено зв'язок i , під дією одиничного згинального моменту, прикладеного в k -му перерізі;

X_k – невідомі згинальні моменти над проміжними опорами.

Проаналізуємо цю основну систему.

1. За такого вибору основної системи отримуємо *окремі, незалежні* двох-опорні балки, кожна з яких деформується самостійно. Це означає, що дія заданого навантаження P_i поширюється лише на прогоні, де це навантаження прикладено. Його вплив на інші прогони виявляється лише у вигляді опорних згинальних моментів M_i (моментів взаємодії) (рис. 4, в).

2. При дії одиничного моменту $\bar{M}_1$ будуть деформуватися лише два суміжні прогони 1 і 2, тому тільки переміщення δ_{11} і δ_{21} будуть відмінні від нуля, а всі інші одиничні переміщення дорівнюють нулю (рис. 4, г). При дії одиничного моменту $\bar{M}_{m-1}$ будуть деформуватися тільки два суміжні прогони $m - 1$ і m , тому тільки переміщення $\delta_{(m-2)(m-1)}$ і $\delta_{(m-1)(m-1)}$ будуть відмінні від нуля, а всі інші одиничні переміщення дорівнюватимуть нулю. При дії одиничного моменту $\bar{M}_n$ будуть деформуватися тільки два суміжні прогони n і $n + 1$, тому лише переміщення $\delta_{(n-1)n}$, δ_{nn} і $\delta_{(n+1)n}$ будуть відмінні від нуля, а всі інші одиничні переміщення дорівнюватимуть нулю (рис. 4, д). Отже, за такої основної системи **багато одиничних переміщень перетворюються на нуль**, внаслідок чого в перше і останнє канонічні рівняння увійдуть тільки по два невідомі опорні моменти (відповідно M_1, M_2 і M_{m-2}, M_{m-1}), в інші ж рівняння – не більше трьох моментів, що діють в опорних перерізах двох суміжних прогонів.

Тому така основна система є *раціональною* і розв'язання задач щодо розкриття статичної невизначеності багатопрогонових нерозрізних балок у цьому випадку виявляється більш вдалим.

3. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ

Розглянемо два суміжні прогони n та $n + 1$ нерозрізної балки (рис. 5, а) постійної жорсткості ($EI_y = \text{const}$). Дію відкинутих елементів замінимо моментами взаємодії (опорними моментами) сусідніх прогонів на відповідних опорах M_{n-1} , M_{n+1} . Показаний напрямок моментів взаємодії (що вигинають прогін опуклістю вниз) будемо вважати **позитивним**.

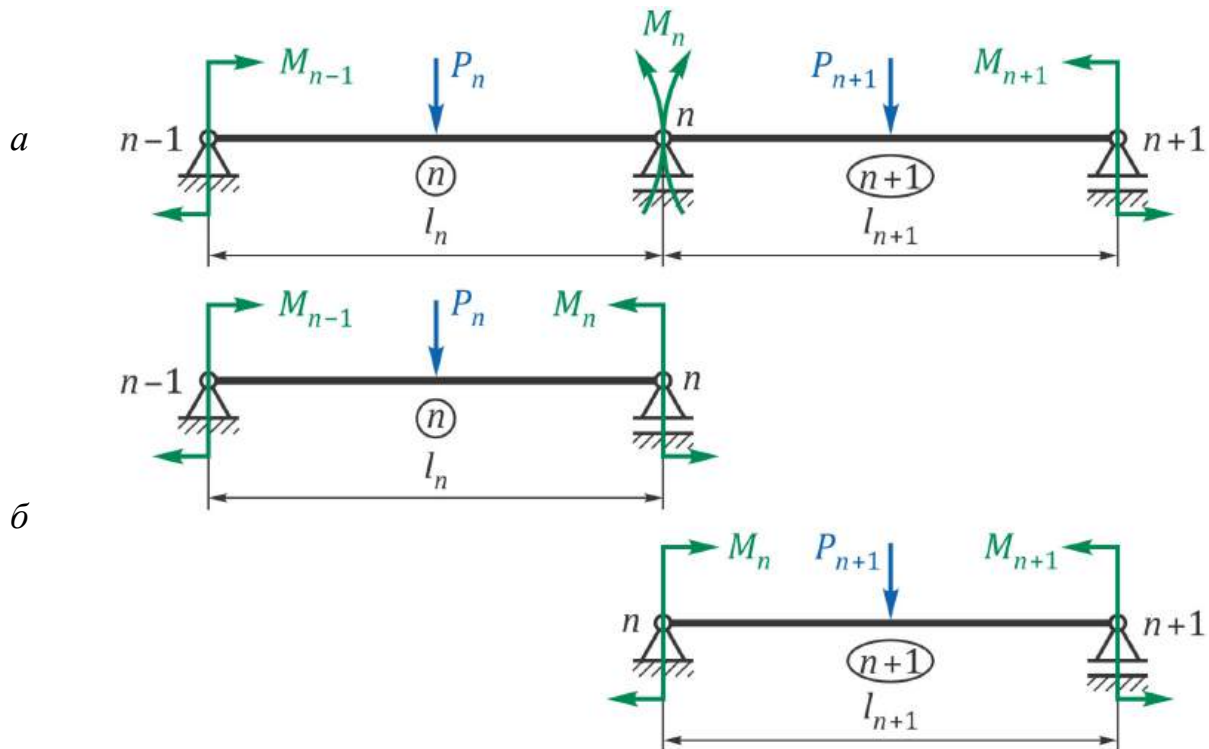


Рис. 5

Якщо визначити величину та напрямок моментів взаємодії, то роботу кожного з прогонів можна розглядати ізольовано як роботу статично визначеної однопрогонової балки (рис. 5, б).

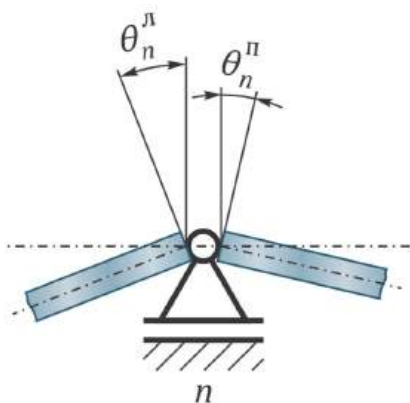


Рис. 6

Оскільки кожна двохопорна балка еквівалентної системи під дією заданого навантаження і опорних моментів деформується незалежно від інших, це означає, що торці двох суміжних балок, що примикають до однієї опори, наприклад n -ї, можуть повернутися на деякі кути θ_n^l і θ_n^p (рис. 6) і ці кути у загальному випадку не дорівнюватимуть один одному.

Оскільки у вихідній статично невизначеній балці через умови суцільності пружна лінія змінюється плавно (без зламів) по її довжині,

а кожна пара таких перерізів є єдиним перерізом, то при спільній роботі лівої і правої частин балки їх взаємний кут повороту має дорівнювати нулю. Отже, кут повороту перерізу на опорі n , що належить до лівої частини балки, від навантажень, що діють на цю частину, дорівнює куту повороту перерізу на цій же опорі, що належить до правої частини балки від навантажень, що діють на праву частину (рис. 7).

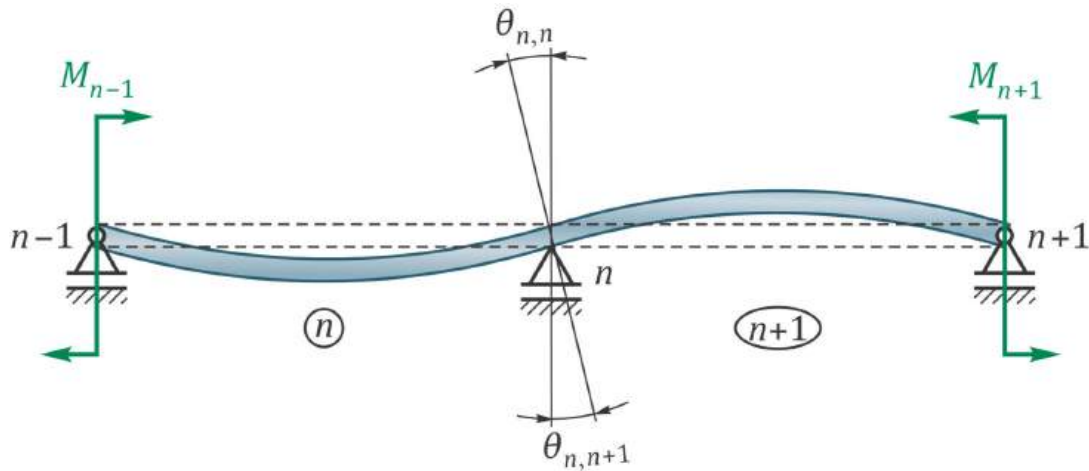


Рис. 7

Таким чином, можемо записати умову спільності деформацій

$$\theta_{n,n} = \theta_{n,n+1}, \quad (3)$$

де $\theta_{n,n}$ – кут повороту лівої балки на опорі n від дії прогонового навантаження прогону n ;

$\theta_{n,n+1}$ – кут повороту правої балки на опорі n від дії прогонового навантаження прогону $(n + 1)$;

1-й індекс – номер опори;

2-й індекс – номер прогону.

Для визначення кутів $\theta_{n,n}$ і $\theta_{n,n+1}$ розглянемо окремо прогони n (рис. 8) та $n + 1$ (рис. 9), навантажені прогоновим навантаженнями та опорними моментами (моментами взаємодії).

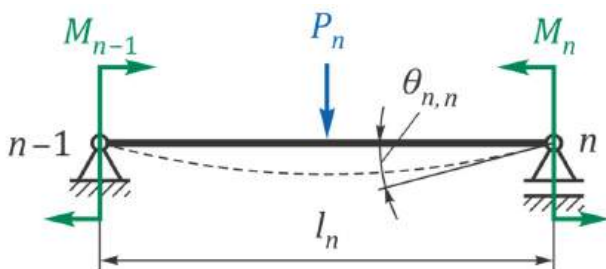


Рис. 8

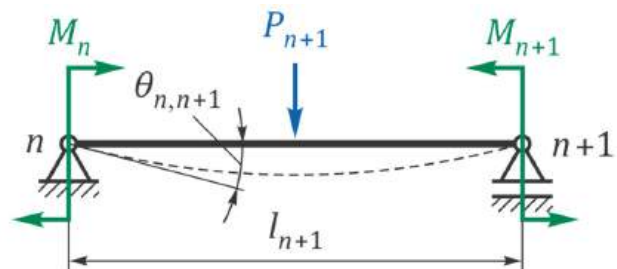


Рис. 9

Прогін n . Повний кут повороту $\theta_{n,n}$ складатиметься з окремих кутів від заданого внутрішньопрогонного навантаження P_n та дії опорних моментів M_{n-1} і M_n :

$$\theta_{n,n} = \theta_{n,n}(P_n) + \theta_{n,n}(M_{n-1}) + \theta_{n,n}(M_n). \quad (4)$$

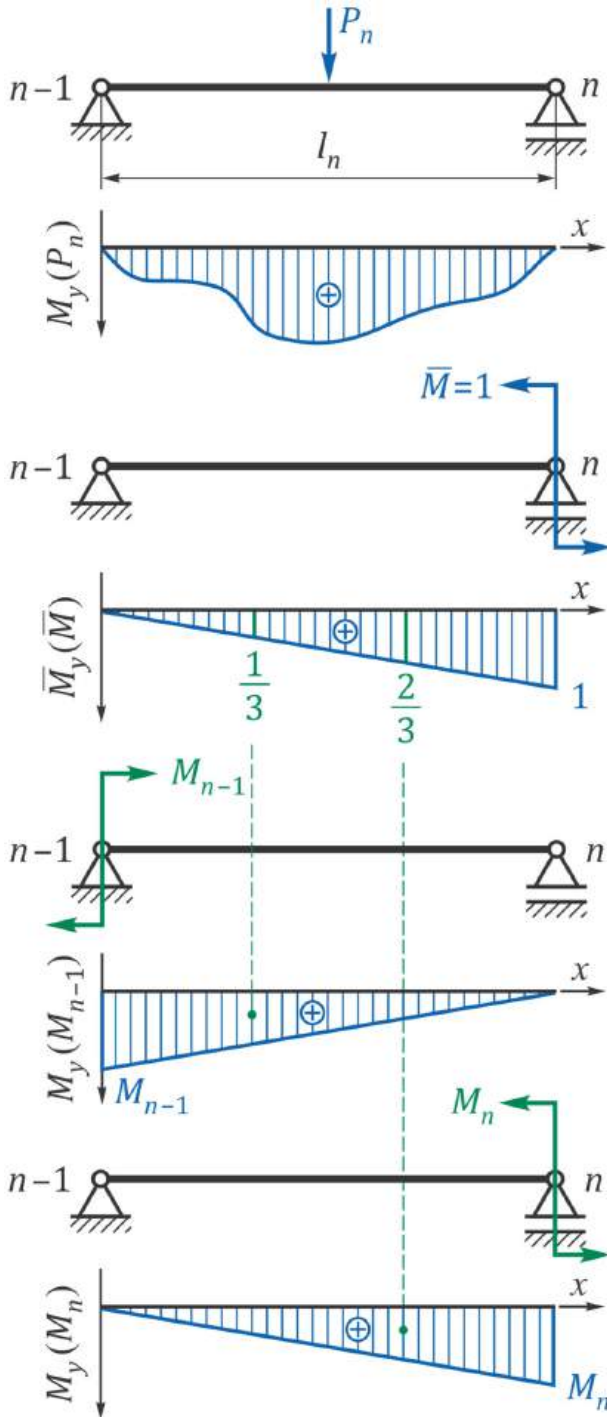


Рис. 10

Для визначення кутів повороту, що входять до рівняння (4), побудуємо епюри згинальних моментів в еквівалентній системі окремо від заданого внутрішньопрогонного навантаження P_n і від кожного невідомого моменту M_{n-1} і M_n , а також епюру від одиничного моменту $\bar{M} = 1$, прикладеного до опори n (рис. 10).

Застосувавши метод Мора, запишемо кут повороту перерізу на опорі n лівого прогону, який виникає від дії зовнішніх сил, прикладених до цього прогону, і позначимо його $\alpha_{n,n}$:

$$\theta_{n,n}(P_n) = \frac{1}{EI_y} \int_{l_n} M_y(P_n) \bar{M}_y dx = \alpha_{n,n}.$$

За способом Верещагіна визначимо кут повороту перерізу на опорі n лівого прогону, який виникає від дії моменту M_{n-1} :

$$\theta_{n,n}(M_{n-1}) = \frac{1}{EI_y} \frac{M_{n-1} l_n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_y}.$$

За способом Верещагіна знайдемо кут повороту перерізу на опорі n лівого прогону, який виникає від дії моменту M_n :

$$\theta_{n,n}(M_n) = \frac{1}{EI_y} \frac{M_n l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{M_n l_n}{3EI_y}.$$

Підставивши знайдені значення кутів у рівняння (4), отримаємо

$$\theta_{n,n} = \alpha_{n,n} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_y} + \frac{M_n l_n}{3EI_y}. \quad (5)$$

Прогін $n + 1$. Повний кут повороту $\theta_{n,n+1}$ складатиметься з окремих кутів від заданого внутрішньопрогонового навантаження P_{n+1} та дії опорних моментів M_n і M_{n+1} :

$$\theta_{n,n+1} = \theta_{n,n}(P_{n+1}) + \theta_{n,n+1}(M_n) + \theta_{n,n+1}(M_{n+1}). \quad (6)$$

Для визначення кутів повороту, що входять до рівняння (6), побудуємо епюри згинальних моментів в еквівалентній системі окремо від заданого внутрішньопрогонового навантаження P_{n+1} і від кожного невідомого моменту M_n і M_{n+1} , а також епюру від одиничного моменту $\bar{M} = 1$, прикладеного до опори n (рис. 11).

Застосувавши метод Мора, запишемо кут повороту перерізу на лівій опорі правого прогону, який виникає від дії зовнішніх сил, прикладених до цього прогону, і позначимо його $\alpha_{n,n+1}$:

$$\begin{aligned} \theta_{n,n+1}(P_{n+1}) &= \\ &= \frac{1}{EI_y} \int_{l_{n+1}} M_y(P_{n+1}) \bar{M}_y dx = \alpha_{n,n+1}. \end{aligned}$$

За способом Верещагіна визначимо кут повороту перерізу на опорі n правого прогону, який виникає від дії моменту M_n :

$$\theta_{n,n+1}(M_n) = \frac{1}{EI_y} \frac{M_n l_{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_y}.$$

За способом Верещагіна знайдемо кут повороту перерізу на опорі n правого прогону, який виникає від дії моменту M_{n+1} :

$$\begin{aligned} \theta_{n,n+1}(M_{n+1}) &= \\ &= \frac{1}{EI_y} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_y}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення кутів у рівняння (6), отримаємо

$$\theta_{n,n+1} = \alpha_{n,n+1} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_y} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_y}. \quad (7)$$

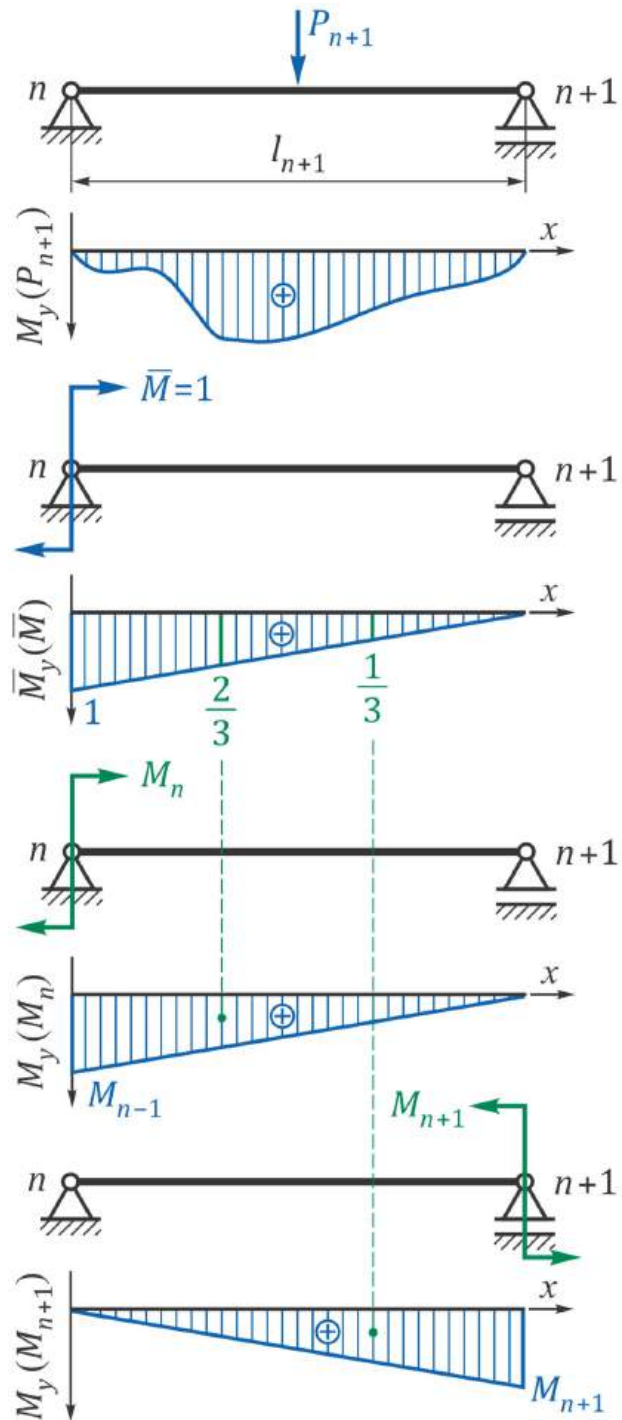


Рис. 11

Підставимо вирази (5) та (7) в умову спільності деформацій (3). Оскільки при визначенні $\theta_{n,n}$ і $\theta_{n,n+1}$ одиничні моменти на допоміжних системах спрямовані протилежно, то знак однієї з величин вгадано, а знак іншої необхідно змінити при підстановці на протилежний. Таким чином, отримаємо

$$\alpha_{n,n} + \frac{M_{n-1}l_n}{6EI_y} + \frac{M_n l_n}{3EI_y} = -\alpha_{n,n+1} - \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_y} - \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_y}.$$

Перенесемо невідомі величини до лівої частини рівняння, а відомі до правої

$$\frac{M_{n-1}l_n}{6EI_y} + \frac{M_n l_n}{3EI_y} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EI_y} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI_y} = -(\alpha_{n,n} + \alpha_{n,n+1})$$

і помножимо на $6EI_y$

$$M_{n-1}l_n + 2M_n l_n + 2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1} = -6EI_y \alpha_{n,n} - 6EI_y \alpha_{n,n+1}.$$

Після перетворення остаточно отримаємо

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EI_y(\alpha_{n,n} + \alpha_{n,n+1}), \quad (8)$$

де M_{n-1} – невідомий внутрішній момент на опорі $(n - 1)$;

M_n – невідомий внутрішній момент на опорі n ;

M_{n+1} – невідомий внутрішній момент на опорі $(n + 1)$;

l_n та l_{n+1} – довжини відповідних прогонів;

$\alpha_{n,n}$ – кут повороту на опорі n від дії прогонового навантаження прогону n ;

$\alpha_{n,n+1}$ – кут повороту на опорі n від дії прогонового навантаження прогону $(n + 1)$.

Вираз (8) називається **рівнянням трьох моментів**.

Якщо жорсткість прогонів нерозрізної балки різна, то рівняння (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{EI_{y(n)}} + 2M_n \left(\frac{l_n}{EI_{y(n)}} + \frac{l_{n+1}}{EI_{y(n+1)}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{EI_{y(n+1)}} = \\ = -6(\alpha_{n,n} + \alpha_{n,n+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

де $I_{y(n)}$ і $I_{y(n+1)}$ – осьові моменти інерції поперечних перерізів балки на прогонах n і $(n + 1)$.

Для будь-якої багатопрогової нерозрізної балки рівняння трьох моментів записують для кожної пари суміжних прогонів з перекриттям попереднього прогону. Кількість таких рівнянь дорівнює ступеню статичної невизначеності системи, тобто кількості проміжних опор (кількості надлишкових зв'язків).

Наприклад, у разі тричі статично невизначеної балки отримаємо три рівняння трьох моментів, що пов'язують сусідні прогони, як показано на рис. 12:

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}); \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 &= -6EI_y(\alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}). \end{aligned}$$

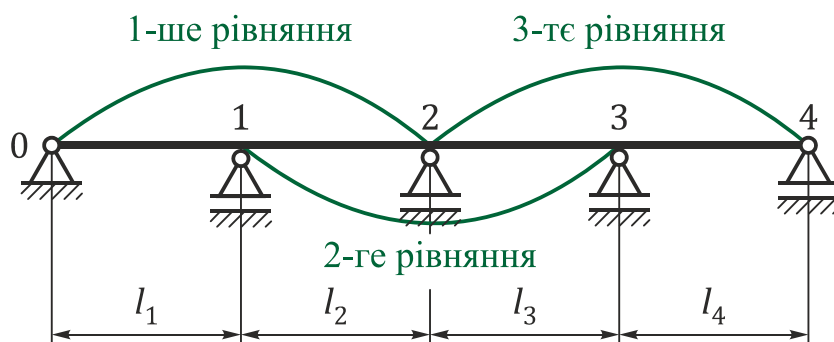


Рис. 12

Розв'язавши систему рівнянь, можна визначити опорні моменти на всіх проміжних опорах і цим розкрити статичну невизначеність багатопрогової нерозрізної балки.

Зауваження

Якщо якийсь із опорних моментів M_i вийшов негативним під час розв'язання системи рівнянь трьох моментів, його напрям в еквівалентній системі необхідно змінити на протилежний.

Після знаходження значень опорних моментів кожен прогін розглядається як окрема вільно оперта однопрогонова балка, на яку крім заданого прогонового навантаження діють знайдені опорні моменти, що розглядаються як зовнішні.

Далі необхідно визначити опорні реакції для кожної статично визначеної двохопорної балки, записати вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів і, зістикувавши епюри окремих балок (зобразивши їх на одній осі x), побудувати епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки.

Необхідно також виконати деформаційну перевірку, тобто перевірити правильність розкриття статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки.

4. ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ

1. Якщо нерозрізна балка має за межами однієї з крайніх опор навантажену консоль (рис. 13, а), то її як прогін до рівняння трьох моментів не включають. Консоль необхідно відкинути, замінивши дію консольних навантажень моментом, обчисленим щодо найближчої опори і прикладеним до неї з відповідним знаком, зводячи таким чином задану балку до вигляду, поданому на рис. 13, б. Цей момент доцільно розглядати як *внутрішній* і додати *до лівої частини* рівняння трьох моментів, при цьому *не враховувати* його при визначенні кутів повороту, що входять до правої частини рівняння.

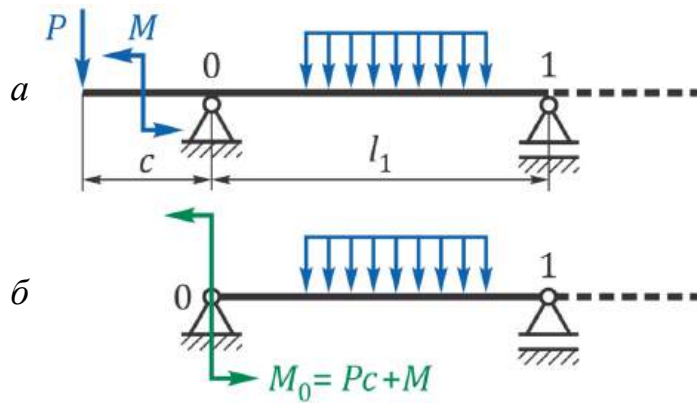


Рис. 13

2. Якщо зовнішній момент прикладено у перерізі над крайньою опорою нерозрізної балки, його доцільно вважати *внутрішнім* і враховувати *у лівій частині* рівняння трьох моментів і не враховувати при визначенні кутів повороту, які входять до правої частини рівняння (див. рис. 13, б).

Зауваження | Опорний момент (зовнішній або внутрішній) вважається *позитивним*, якщо він згинає прогін *опуклістю вниз*.

3. Якщо зовнішній момент прикладено у перерізі *над проміжною опорою* нерозрізної балки (рис. 14, а), то його слід вважати *внутрішньоопроговим навантаженням* і враховувати при визначенні кута повороту. Цей момент можна віднести або до лівого прогону (рис. 14, б) або до правого (рис. 14, в).

При обчисленні кутів повороту за методом Мора (спосіб Верещагіна) момент над проміжною опорою доцільно відносити до менш навантаженого прогону для мінімізації розрахунків.

При використанні табличних формул для кутів повороту краще такий момент віднести до більш навантаженого прогону, а сумарний кут повороту на опорі знайти, використовуючи принцип суперпозиції.

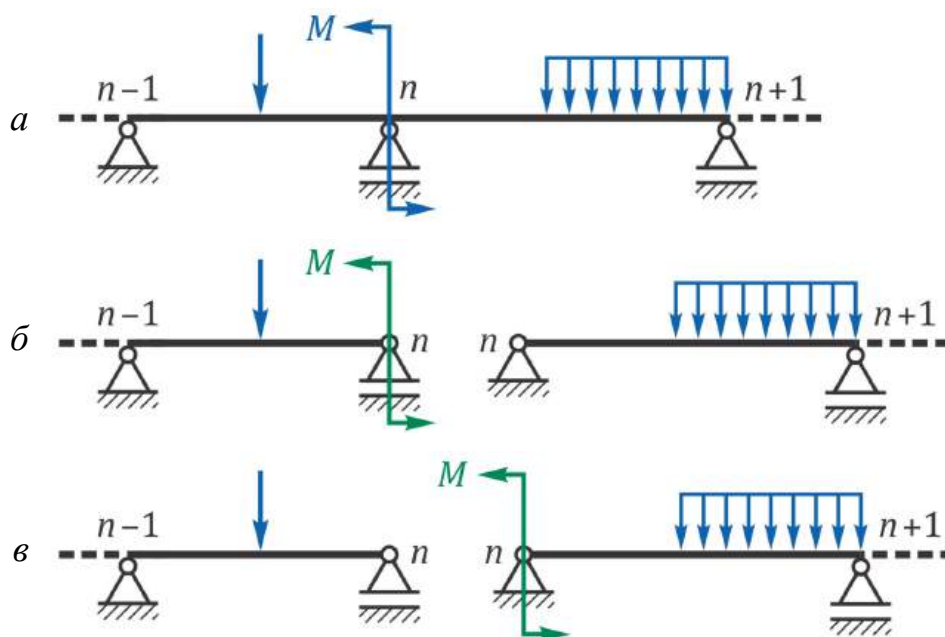


Рис. 14

4. Якщо кінцевий переріз нерозрізної балки жорстко затиснено, наприклад зліва (рис. 15, а), то його кут повороту дорівнює нулю ($\alpha_{1,1} = 0$). У розкритому вигляді цю умову можна описати рівнянням трьох моментів, замінивши затиснення фіктивним прогоном нульової довжини ($l_1 = l_\phi = 0$) (рис. 15, б).

Тоді, наприклад, при затисненні зліва, перше рівняння системи

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2})$$

з урахуванням $\alpha_{1,1} = 0$ та $l_1 = 0$ набуде такого вигляду:

$$2M_1 l_2 + M_2 l_2 = -6EI_y \alpha_{1,2}.$$

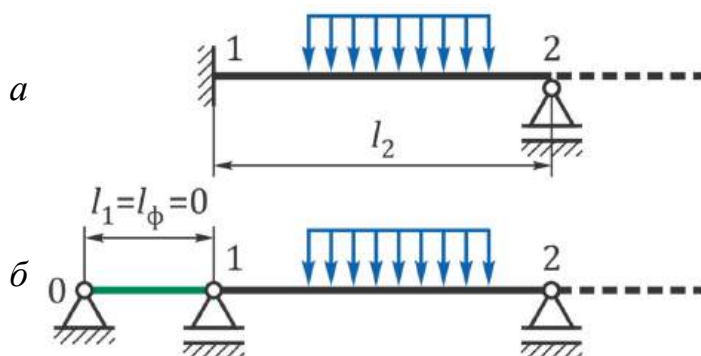


Рис. 15

5. ПОРЯДОК РОЗРАХУНКУ БАГАТОПРОГОНОВОЇ НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ

1. Визначити ступінь статичної невизначеності нерозрізної багатопрогонової балки, яка дорівнює кількості проміжних опор, а за наявності жорсткого затиснення збільшується на одиницю.

2. Вибрати основну систему шляхом відкидання внутрішніх зв'язків по куту повороту на всіх проміжних опорах і зв'язку по куту повороту в жорсткому затисненні, якщо воно є. За наявності жорсткого затиснення додати фіктивний прогін нульової довжини. Фактично це означає врізання шарнірів над усіма проміжними опорами, на які спирається балка, і перетворення її з багатопрогонової на систему двохопорних статично визначених балок.

Побудувати еквівалентну систему балки, доклавши реакції відкинутих зв'язків (опорні моменти) M_i на кожній із проміжних опор (де врізані шарніри). Прикласти задані навантаження. Пронумерувати опори зліва направо, починаючи з «0», прогони за номером правої опори, а невідомі моменти – за номером опори, над якою вони прикладені.

3. Скласти систему рівнянь трьох моментів для визначення невідомих опорних моментів, розглядаючи послідовно кожну пару прогонів, що належать до всіх проміжних опор. Кількість невідомих моментів завжди дорівнює кількості рівнянь. Проаналізувати параметри, що входять до системи рівнянь. Моменти, задані на крайніх опорах і моменти від зусиль на консолях, записані щодо найближчої опори, доцільно вважати внутрішніми і включати до лівої частини рівняння трьох моментів, не враховуючи при визначенні кутів повороту, що входять до правої частини рівняння.

На відміну від класичної системи канонічних рівнянь методу сил, до кожного з яких входять усі невідомі параметри, кожне рівняння трьох моментів містить два для першого і останнього і три для інших рівнянь невідомих опорних моментів.

4. Визначити кути повороту від внутрішньопрогонового навантаження $\alpha_{n,n}$ і $\alpha_{n,n+1}$, що входять до правих частин рівнянь трьох моментів, за допомогою методу Мора, способу Верещагіна або за довідковими таблицями. За наявності заданого моменту на проміжній опорі необхідно віднести його до одного з прогонів. Для деякого спрощення розрахунків цей момент при використанні методу Мора або довідкових таблиць доцільно відносити до навантаженого прогону, при використанні способу Верещагіна – до менш навантаженого. При використанні методу Мора та способу Верещагіна побудувати допоміжні системи: прогони із

заданим прогоном навантаженням та прогони з одиничними моментами на проміжних опорах. Записати рівняння згинальних моментів для всіх допоміжних систем, побудувати епюри та обчислити кути повороту перерізів на опорах.

5. Розв'язати систему рівнянь трьох моментів з урахуванням знайдених кутів та визначити значення невідомих опорних моментів M_i .

6. В еквівалентній системі замінити невідомі опорні моменти на знайдені значення. При цьому слід враховувати, що якщо якийсь із опорних моментів M_i вийшов негативним, його напрямок в еквівалентній системі необхідно змінити на протилежний. Визначити опорні реакції кожної статично визначеної двох-опорної балки від заданого навантаження з урахуванням знайдених опорних моментів M_i , перевірити правильність визначення опорних реакцій. Розбити балки на ділянки, записати вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів і, стикувавши епюри окремих балок (зобразивши їх на одній осі x), отримати епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки. Перевірити епюри за стрибками у характерних перерізах та за диференціальними співвідношеннями.

7. Виконати перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки, тобто виконати деформаційну перевірку. Для перевірки слід використовувати рівність нулю лінійних переміщень на опорах багатопрогової нерозрізної балки. Для цього необхідно вибрати нову основну систему, відкинувши надлишкові (зайві) шарнірні опори (для балки з жорстким затисненням – усі шарнірні опори). Для нової системи побудувати нову еквівалентну систему. Ця еквівалентна система і використана раніше (з врізаними шарнірами) мають ту саму епюру згинальних моментів. Для визначення лінійного переміщення перерізу над відкинутою опорою побудувати допоміжну систему з одиничною силою, прикладеною у цьому перерізі. Побудувати епюру згинальних моментів для допоміжної системи. Ця епюра завжди буде одного знака (незалежно від того, переміщення перерізу під якою відкинутою опорою визначається). Перемножити епюру для еквівалентної системи з епюрою від одиничної сили методом Мора. Якщо статична невизначеність розкрита правильно, то результатом такого перемноження має бути нульове переміщення. Оскільки епюра від одиничної сили одного знака, то щоб вийшло нульове переміщення, епюра для еквівалентної системи багатопрогової нерозрізної балки повинна мати як позитивні, так і негативні зони.

8. Виконати розрахунок балки на міцність за максимальним згинальним моментом. Перевірити підібраний переріз за дотичними напруженнями за допомогою формули Журавського. За необхідності перевірити балку на жорсткість.

6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1

Балка двотаврового поперечного перерізу спирається на три шарнірні опори (рис. 16) і навантажена зосередженими силами P та розподіленим навантаженням q . З умови міцності підібрати номер двотавра за таких значень параметрів: $a = 1 \text{ м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $q = 4 \text{ кН/м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

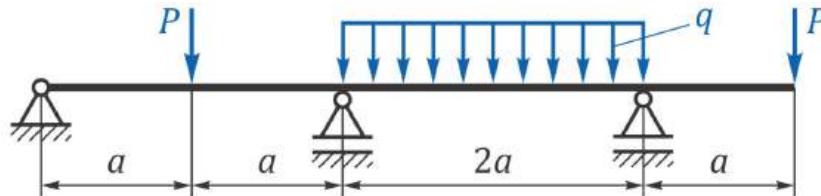


Рис. 16

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції:

$$k = m - 1 = 2 - 1 = 1,$$

тобто балка один раз статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середньою опорою в тіло балки шарнір (рис. 17).

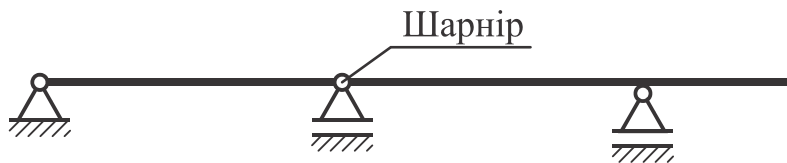


Рис. 17

На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 18), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакцію відкинутого зв'язку у вигляді згинального моменту M_1 . Цей момент спочатку зобразимо позитивними для суміжних прогонів. Пронумеруємо опори зліва направо (0, 1, 2) і позначимо прогони номером опори праворуч від прогону (l_1 і l_2).

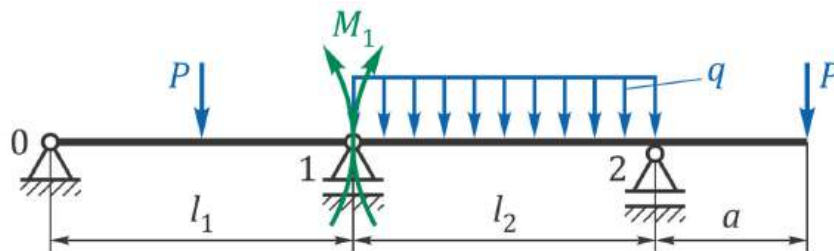


Рис. 18

3. Запишемо рівняння трьох моментів та проаналізуємо його:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}),$$

де $M_0 = 0$ – момент на лівій опорі (відсутній за умовою завдання);

M_1 – невідома величина (підлягає визначенню);

$M_2 = -Pa = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – момент на правій опорі від сили P на консолі;

$l_1 = l_2 = 2a = 2 \text{ м}$ – довжина прогонів, тобто відстані між опорами;

$\alpha_{1,1}$ та $\alpha_{1,2}$ – кути поворотів на середній опорі в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень (перший індекс – номер опори, другий – прогону).

Зауваження

Навантаження на консолі необхідно замінити моментом, обчисленим щодо найближчої опори. Такий момент доцільно розглядати як внутрішній і включати до лівої частини рівняння трьох моментів.

Опорний момент (зовнішній або внутрішній) вважається **позитивним**, якщо він згинає прогін, до якого прикладений, **опуклістю вниз**.

4. Визначимо кути $\alpha_{1,1}$ і $\alpha_{1,2}$ за методом Мора. Для цього побудуємо вантажні системи та відповідні їм одиничні.

Лівий прогін (рис. 19)

Вантажна система

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad R_{B_1} \cdot 2a - Pa = 0;$$

$$R_{B_1} = \frac{P}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad -R_A \cdot 2a + Pa = 0;$$

$$R_A = \frac{P}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = R_{B_1} + R_A - P = 10 - 5 - 5 = 0.$$

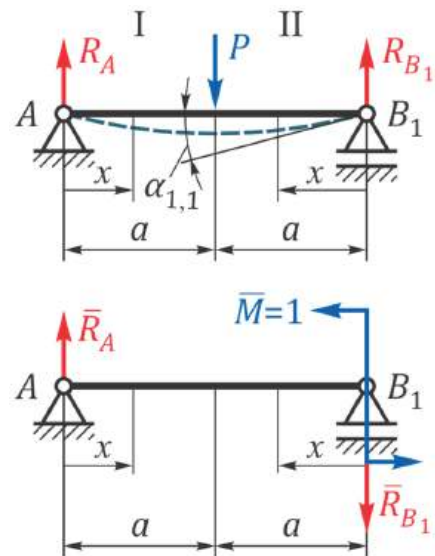


Рис. 19

Розіб'ємо балку на ділянки, виберемо оптимальний напрям обходу кожної з ділянок і запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$M_y^I = R_A x = 5x;$$

$$M_y^{II} = R_{B_1} x = 5x.$$

Одинична система

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad -\bar{R}_{B_1} \cdot 2a + \bar{M} = 0; \quad \bar{R}_{B_1} = \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad -\bar{R}_A \cdot 2a + \bar{M} = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{R}_{B_1} + \bar{R}_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Розіб'ємо балку на ділянки і виберемо напрямок обходу кожної з ділянок ідентично вантажній системі. Запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_A x = \frac{1}{2} x;$$

$$\bar{M}_y^{II} = -\bar{R}_{B_1} x + \bar{M} = -\frac{1}{2} x + 1.$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^1 5x \frac{1}{2} x dx + \int_0^1 5x \left(-\frac{1}{2} x + 1 \right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{5x^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{5x^3}{2 \cdot 3} + 5 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right) = \frac{5}{2EI_y}. \end{aligned}$$

Правий прогін (рис. 20)

Вантажна система

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{B_2} = 0; \quad R_C \cdot 2a - q \cdot 2a \frac{2a}{2} = 0; \quad R_C = \frac{q \cdot 2a^2}{2a} = qa = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad -R_{B_2} \cdot 2a + q \cdot 2a \frac{2a}{2} = 0; \quad R_{B_2} = \frac{q \cdot 2a^2}{2a} = qa = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = 2qa - R_{B_2} - R_C = 4 \cdot 2 - 4 - 4 = 0.$$

Виберемо напрямок обходу ділянки та запишемо рівняння згинальних моментів:

$$M_y^I = R_C x - \frac{qx^2}{2} = 4x - 2x^2.$$

Одинична система

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{B_2} = 0; \quad \bar{R}_C \cdot 2a - \bar{M} = 0; \quad \bar{R}_C = \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{R}_{B_2} \cdot 2a - \bar{M} = 0; \quad \bar{R}_{B_2} = \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{R}_{B_2} + \bar{R}_C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Виберемо напрямок обходу ділянки ідентично вантажній системі та запишемо рівняння згинальних моментів:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_C x = \frac{1}{2} x.$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{1}{EI_y} \int_0^{2a} M_y^I \bar{M}_y^I dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^{2a} (4x - 2x^2) \cdot \frac{1}{2} x dx = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^{2a} \right) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{2 \cdot 8}{3} - 4 \right) = \frac{4}{3EI_y}. \end{aligned}$$

Зауваження

Кути $\alpha_{1,1}$ і $\alpha_{1,2}$ можна обчислити, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними в дод. 1:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= \frac{Pl_1^2}{16EI_y} = \frac{P(2a)^2}{16EI_y} = \frac{10 \cdot 2^2}{16EI_y} = \frac{5}{2EI_y}; \\ \alpha_{1,2} &= \frac{ql_2^3}{24EI_y} = \frac{q(2a)^3}{24EI_y} = \frac{4 \cdot 2^3}{24EI_y} = \frac{4}{3EI_y}. \end{aligned}$$

5. Підставимо знайдені величини у рівняння трьох моментів і розв'яжемо його:

$$2M_1(2 + 2) - 10 \cdot 2 = -6EI_y \left(\frac{5}{2EI_y} + \frac{4}{3EI_y} \right);$$

$$8M_1 = -3; \quad M_1 = -0,375 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки момент M_1 вийшов негативним, його напрям в еквівалентній системі необхідно змінити на протилежний.

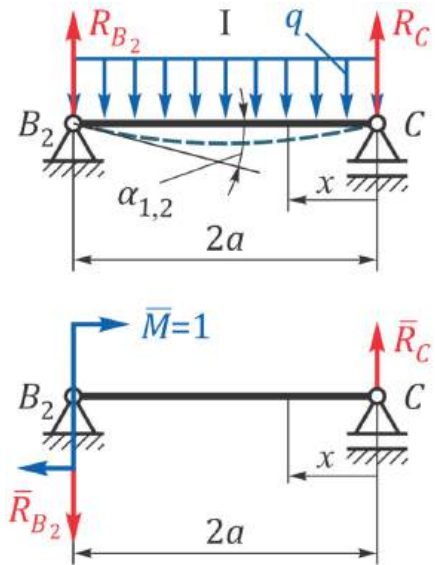


Рис. 20

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо розділені введеним шарніром окремі двохопорні балки AB_1 і B_2C , навантажені заданими зусиллями і знайденим моментом M_1 з урахуванням його справжнього напрямку.

Зауваження | При визначенні опорних реакцій та запису рівнянь внутрішніх силових факторів слід використовувати справжній напрямок знайденого опорного моменту та модуля його значення.

Для кожної з найпростіших балок знайдемо опорні реакції.

Балка AB_1 (рис. 21, б)

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad -Pa - M_1 + R_{B_1} \cdot 2a = 0;$$

$$R_{B_1} = \frac{Pa + M_1}{2a} = \frac{10 \cdot 1 + 0,375}{2 \cdot 1} = 5,19 \text{ кН};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad -R_A \cdot 2a + Pa - M_1 = 0;$$

$$R_A = \frac{Pa - M_1}{2a} = \frac{10 \cdot 1 - 0,375}{2 \cdot 1} = 4,81 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = P - R_{B_1} - R_A = 10 - 5,19 - 4,81 = 0.$$

Балка B_2C (рис. 21, в)

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{B_2} = 0; \quad M_1 - q \cdot 2a \frac{2a}{2} + R_C \cdot 2a - P \cdot 3a = 0;$$

$$R_C = \frac{-M_1 + q \cdot 2a^2 + P \cdot 3a}{2a} = \frac{-0,375 + 4 \cdot 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 18,81 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_{B_2} \cdot 2a + M_1 + q \cdot 2a \frac{2a}{2} - Pa = 0;$$

$$R_{B_2} = \frac{-M_1 - q \cdot 2a^2 + Pa}{2a} = \frac{-0,375 - 4 \cdot 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 0,81 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = R_{B_2} + q \cdot 2a + P - R_C = 0,81 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 10 - 18,81 = 0.$$

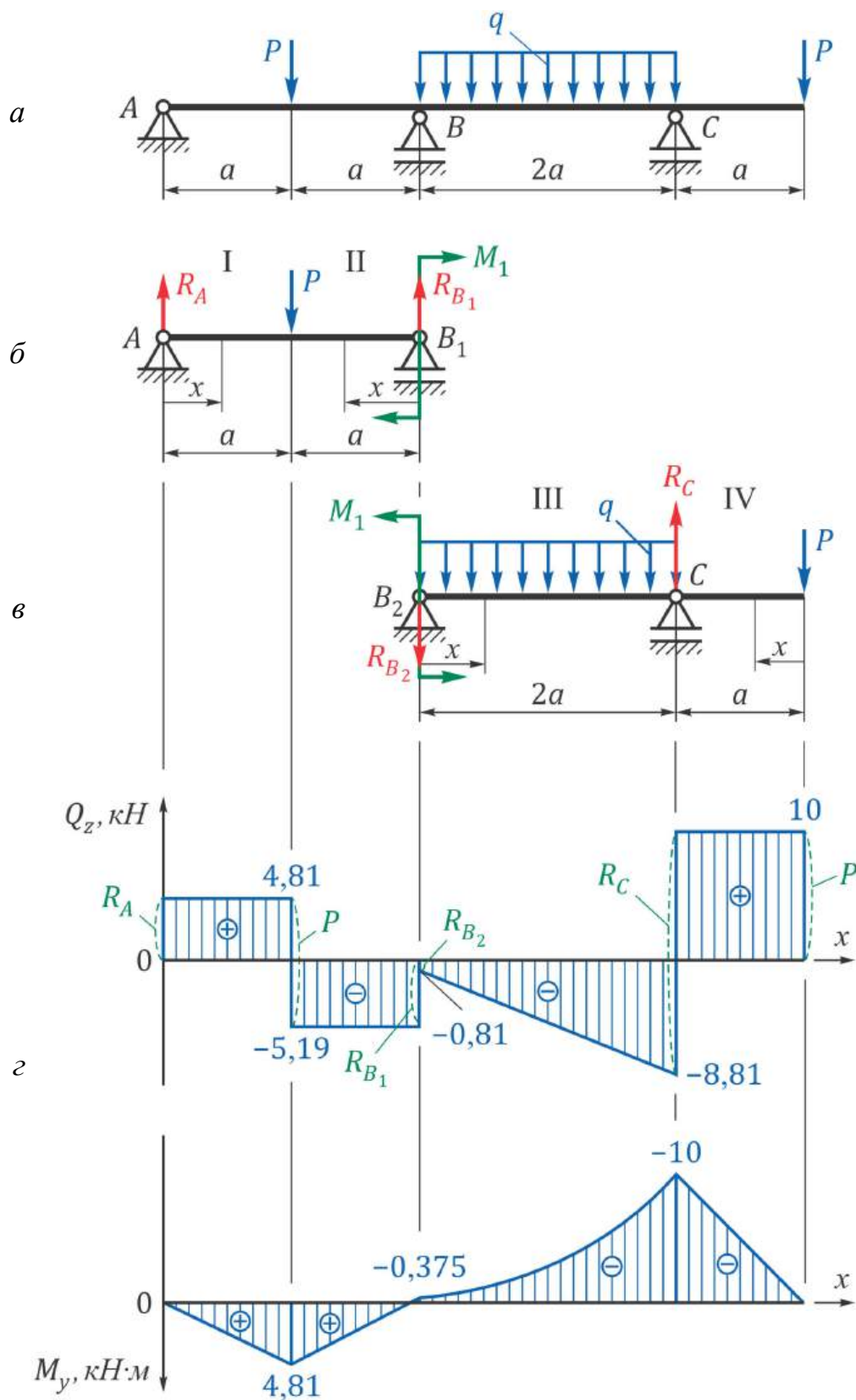


Рис. 21

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів:

$$Q_Z^I = R_A = 4,81 \text{ кН};$$

$$Q_Z^{II} = -R_{B_1} = -5,19 \text{ кН};$$

$$Q_Z^{III} = -R_{B_2} - qx = -0,81 - 4x \quad \Big|_{x=0} = -0,81 \text{ кН}$$

$$\Big|_{x=2a=2 \text{ м}} = -0,81 - 4 \cdot 2 = -8,81 \text{ кН};$$

$$Q_Z^{IV} = P = 10 \text{ кН};$$

$$M_y^I = R_A x = 4,81x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=1 \text{ м}} = 4,81 \cdot 1 = 4,81 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -M_1 + R_{B_1} x = -0,375 + 5,19x \quad \Big|_{x=0} = -0,375 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=a=1 \text{ м}} = -0,375 + 5,19 \cdot 1 = 4,81 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = -R_{B_2} x - \frac{qx^2}{2} - M_1 = -0,81x - 2x^2 - 0,375 \quad \Big|_{x=0} = -0,375 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=2a=2 \text{ м}} = -0,81 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 2^2}{2} - 0,375 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = -Px = -10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=1 \text{ м}} = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки (рис. 21, а), зістикувавши епюри окремих двохопорних балок, тобто зобразивши їх на одній осі x (рис. 21, з).

Зауваження | Для статично невизначеної балки епюра M_y повинна мати різні знаки.

Перевіримо епюри за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційну перевірку).

Для цього необхідно перевірити рівність нулю переміщень перерізів балки, які не використовувалися при розкритті статичної невизначеності. У разі багатопрогонової нерозрізної балки такими переміщеннями є лінійні переміщення в опорних перерізах, які мають дорівнювати нулю.

Наприклад, перевіримо рівність нулю вертикального переміщення перерізу B . Для цього виберемо нову основну систему, відкинувши як надлишковий (зайвий) зв'язок проміжну опору B (рис. 22, a) і побудуємо нову еквівалентну систему (рис. 22, b). Ця еквівалентна система і використана раніше (з врізаними шарнірами) мають ту саму епюру згинальних моментів (див. рис. 21, z). Напрямок і величина R_B взяті з епюри Q_z .

Зауваження | Варіантів нових основних систем може бути досить багато. Вибирати потрібно ту, яка дає змогу найпростішим чином обчислити інтеграл Мора.

Лінійне переміщення перерізу B визначимо за методом Мора, побудувавши допоміжну одиничну систему з прикладеною у цьому перерізі одиничною силою $\bar{P} = 1$ (рис. 22, $в$).

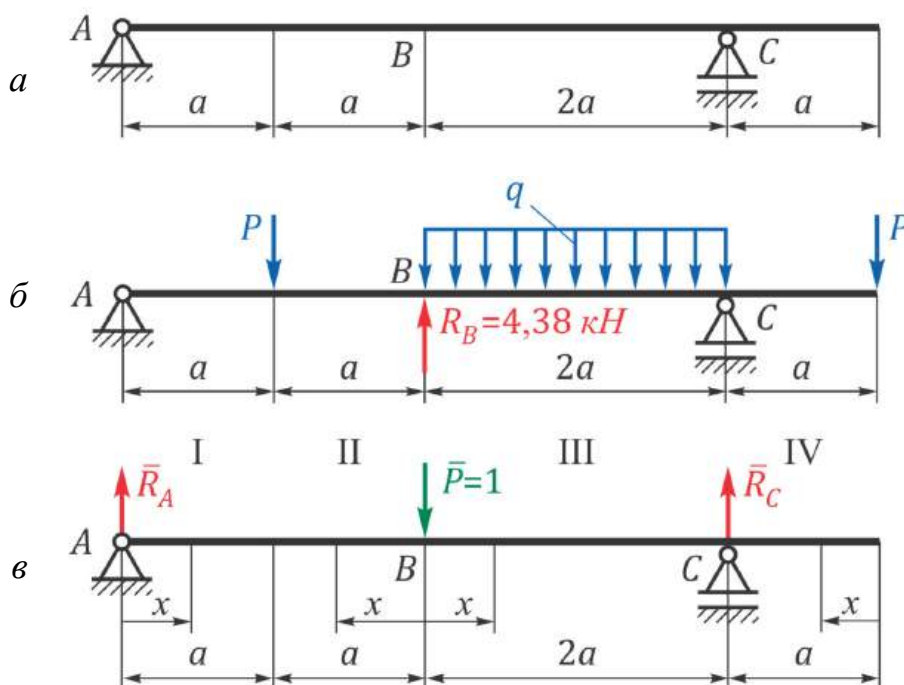


Рис. 22

Визначимо опорні реакції одиничної системи:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad \bar{R}_C \cdot 4a - \bar{P} \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_C &= \frac{\bar{P} \cdot 2a}{4a} = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2}; \\ \sum M_C = 0; \quad -\bar{R}_A \cdot 4a + \bar{P} \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_A &= \frac{\bar{P} \cdot 2a}{4a} = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} - \bar{R}_A - \bar{R}_C = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ділянок ідентично еквівалентній системі з врізаними шарнірами, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_A x = \frac{1}{2} x;$$

$$\bar{M}_y^{II} = \bar{R}_C(2a + x) - \bar{P}x = \frac{1}{2}(2 + x) - x = 1 - \frac{1}{2}x;$$

$$\bar{M}_y^{III} = \bar{R}_A(2a + x) - \bar{P}x = \frac{1}{2}(2 + x) - x = 1 - \frac{1}{2}x;$$

$$\bar{M}_y^{IV} = 0.$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + \int_0^{2a} M_y^{III} \bar{M}_y^{III} dx + \int_0^a M_y^{IV} \bar{M}_y^{IV} dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^1 4,81x \frac{1}{2} x dx + \int_0^1 (-0,375 + 5,19x) \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 (-0,81x - 2x^2 - 0,375) \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_0^1 (-10x) \cdot 0 dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\left. \frac{4,81}{2} \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left(-0,375x + 5,19 \frac{x^2}{2} + \frac{0,375}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{5,19}{2} \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 + \\ &\quad + \left(-0,81 \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^3}{3} - 0,375x + \frac{0,81}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{0,375}{2} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 0 \Big) = \\ &= \frac{1}{EI_y} (0,802 - 0,375 + 2,595 + 0,094 - 0,865 - 1,62 - 5,333 - 0,75 + \\ &\quad + 1,08 + 4 + 0,375) = \frac{1}{EI_y} (8,946 - 8,943) = 0,003 \frac{1}{EI_y}. \end{aligned}$$

Похибка розрахунку становить

$$\Delta \% = \left| \frac{0,003}{8,946} \right| \cdot 100 \% = 0,0033 \% < 1 \%,$$

таким чином, розкриття статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки зроблено правильно.

У деяких випадках простішим виявляється визначення переміщення за способом Верещагіна, який полягає у перемноженні епюри згинальних моментів M_y багатопрогонової балки на епюру згинальних моментів $\bar{M}_y$ від одиничної сили, прикладеної в перерізі, лінійне або кутове переміщення якого необхідно визначити:

$$\delta = \frac{1}{EI_y} \sum_1^k \omega_i y_i,$$

де ω_i – площа i -ї фігури на епюрі;

y_i – ордината під (над) центром ваги i -ї фігури вантажної системи;

k – кількість фігур (ділянок).

Зауваження

При використанні способу Верещагіна необхідно враховувати таке:

1. Якщо епюра згинальних моментів M_y вантажної системи має складний вигляд, то її необхідно розбити на прості фігури, для яких легко визначити площу та положення центру ваги. При цьому кожену площу множать на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі.
2. Якщо на якійсь ділянці епюри M_y і $\bar{M}_y$ є лінійними функціями, то вони мають властивість комутативності, тобто рівноцінним є множення площі першої епюри на ділянці, що розглядається, на ординату другої, і навпаки.
3. При перемноженні площ на ординати необхідно враховувати знаки епюр.

Знайдемо вертикальне переміщення перерізу B способом Верещагіна.

Для цього побудуємо епюру згинальних моментів (рис. 23, б) допоміжної одиничної системи (рис. 23, а).

Оскільки епюра M_y на ділянках II та III має складний вигляд (рис. 23, в), розіб'ємо її на прості фігури (показано пунктирними лініями), для яких легко визначити площу (ω_i) та положення центру ваги (указано точкою).

Ділянку II подано комбінацією двох трикутників (ω_2 і ω_3).

Ділянку III розбито на прямокутник (ω_4), трикутник (ω_5) та симетричну параболу (ω_6).

Площі та центри ваги трикутників і прямокутника легко визначити на епюрі згинальних моментів M_y .

Для визначення площі симетричної параболи найкраще використовувати формулу

$$\omega = \frac{ql^3}{12},$$

де q – рівномірно розподілене навантаження, що діє на ділянці, що розглядається;

l – довжина цієї ділянки.

Центр ваги симетричної параболи знаходиться посередині ділянки.

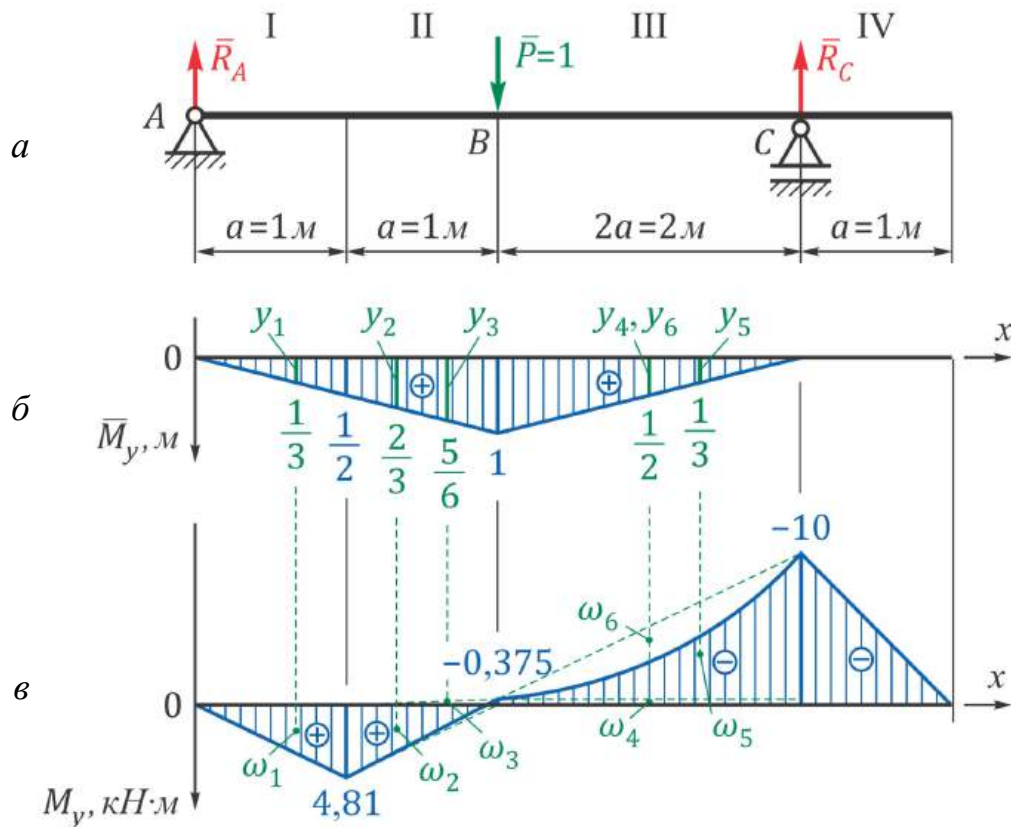


Рис. 23

Перемножимо з урахуванням знаків площі фігур на епюрі M_y (рис. 23, в) з ординатами під цими центрами на епюрі $\bar{M}_y$:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{1}{EI_y} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EI_y} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 + \omega_6 y_6) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{4,81 \cdot 1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{4,81 \cdot 1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{-0,375 \cdot 1}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{5}{6} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (-0,375) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{(-9,625) \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} - \left(-4 \cdot \frac{2^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI_y} (0,802 + 1,603 - 0,156 - 0,375 - 3,208 + 1,333) =$$

$$= \frac{1}{EI_y} (3,738 - 3,739) = \frac{1}{EI_y} 0,001.$$

Похибка розрахунку становить

$$\Delta \% = \left| \frac{0,001}{3,738} \right| \cdot 100 \% = 0,0027 \% < 1 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності зроблено правильно.

Зауваження | Параболічний виріз на ділянці III віднімається.

8. Підберемо двотавровий поперечний переріз.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 21, з) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{max} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Запишемо умову міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y^T} \leq [\sigma],$$

з якої отримаємо вираз для визначення мінімального теоретичного моменту опору

$$W_y^T \geq \frac{|M_y|_{max}}{[\sigma]} = \frac{10 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 62,5 \times 10^{-6} \text{ м}^3.$$

За сортаментом (дод. 2) підберемо двотаври

$$\text{№ 12} \quad W_y = 58,4 \times 10^{-6} \text{ м}^3 \quad \text{та} \quad \text{№ 14} \quad W_y = 81,7 \times 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Визначимо перевантаження найближчого меншого двотавра

$$\Delta \sigma \% = \left| \frac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{\frac{|M_y|_{max}}{W_y^T} - \frac{|M_y|_{max}}{W_y}}{\frac{|M_y|_{max}}{W_y^T}} \right| \cdot 100 \% =$$

$$= \left| \frac{W_y - W_y^T}{W_y} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{58,4 - 62,5}{58,4} \right| \cdot 100 \% = 7 \% > 5 \%.$$

Оскільки перевантаження перевищує допустимі 5 %, то остаточно виберемо двотавр № 14, недовантаження якого становитиме

$$\Delta \sigma \% = \left| \frac{81,7 - 62,5}{81,7} \right| \cdot 100 \% = 22,57 \%.$$

Приклад 2

Балка прямокутного поперечного перерізу ($k = h/b = 2$) спирається на три шарнірні опори (рис. 24) і навантажена зосередженою силою P , моментом M та розподіленим навантаженням q . З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу балки при таких значеннях параметрів: $a = 2 \text{ м}$; $P = 1 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

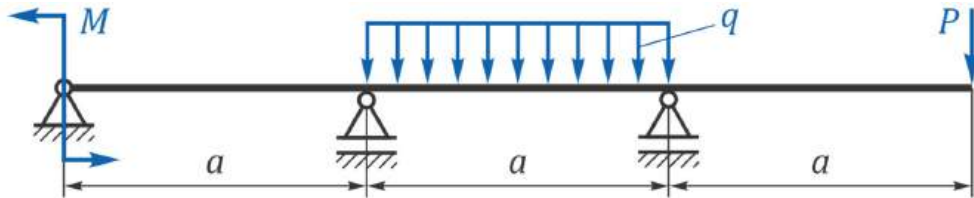


Рис. 24

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції:

$$k = m - 1 = 2 - 1 = 1,$$

тобто балка один раз статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середньою опорою в тіло балки шарнір. На її основі побудуємо еквівалентну систему (рис. 25), додавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакцію відкинутого зв'язку у вигляді згинального моменту M_1 . Пронумеруємо опори зліва направо та позначимо прогони номером опори праворуч від прогону.

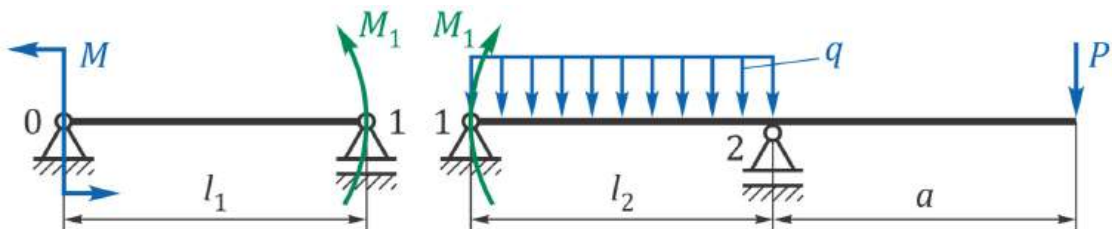


Рис. 25

3. Запишемо рівняння трьох моментів та проаналізуємо його:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}),$$

де $M_0 = -M = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – момент на лівій опорі;

M_1 – невідома величина (підлягає визначенню);

$M_2 = -Pa = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – момент на правій опорі від сили P на консолі;

$l_1 = l_2 = a = 2 \text{ м}$ – довжина прогонів, тобто відстані між опорами;

$\alpha_{1,1}$ і $\alpha_{1,2}$ – кути поворотів на 1-й опорі в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень (перший індекс – номер опори, другий – прогону).

4. Знайдемо кут $\alpha_{1,2}$, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними у дод. 1 (рис. 26).

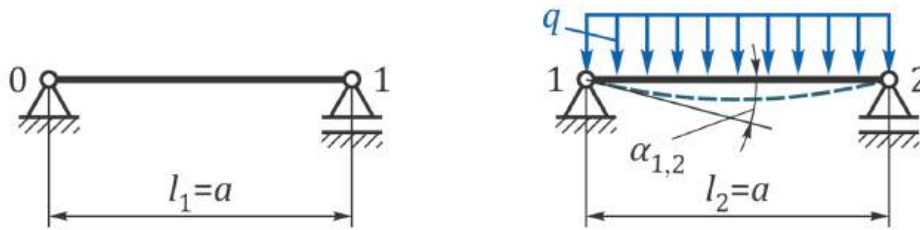


Рис. 26

На лівому прогоні кут $\alpha_{1,1} = 0$, оскільки відсутнє внутрішньопрогонове навантаження.

На правому прогоні

$$\alpha_{1,2} = \frac{ql_2^3}{24EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} = \frac{2 \cdot 2^3}{24EI_y} = \frac{2}{3EI_y}.$$

5. Підставимо знайдені величини у рівняння трьох моментів і вирішимо його:

$$-Ma + 2M_1 \cdot 2a - Pa a = -6EI_y \left(0 + \frac{2}{3EI_y} \right);$$

$$-8 + 8M_1 - 4 = -4;$$

$$8M_1 = 8;$$

$$M_1 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо розділені введеним шарніром окремі двохопорні балки AB_1 і B_2C , навантажені заданими зусиллями і знайденим моментом M_1 (рис. 27).

Для кожної з найпростіших балок знайдемо реакції опор.

Балка AB_1 (рис. 27, а)

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad M + M_1 - R_{B_1}a = 0; \quad R_{B_1} = \frac{M + M_1}{a} = \frac{4 + 1}{2} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad M + M_1 - R_A a = 0; \quad R_A = \frac{M + M_1}{a} = \frac{4 + 1}{2} = 2,5 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = R_{B_1} - R_A = 2,5 - 2,5 = 0.$$

Балка B_2C (рис. 27, б)

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned}\sum M_{B_2} &= 0; & -M_1 - qa \frac{a}{2} + R_C a - P \cdot 2a &= 0; \\ R_C &= \frac{M_1 + \frac{qa^2}{2} + P \cdot 2a}{a} = \frac{1 + \frac{2 \cdot 2^2}{2} + 1 \cdot 2 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ кН}; \\ \sum M_C &= 0; & -R_{B_2} a - M_1 + qa \frac{a}{2} - Pa &= 0; \\ R_{B_2} &= \frac{-M_1 + \frac{qa^2}{2} - Pa}{a} = \frac{-1 + \frac{2 \cdot 2^2}{2} - 1 \cdot 2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_{B_2} + qa - R_C + P = -0,5 + 2 \cdot 2 - 4,5 + 1 = 0.$$

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів.

$$Q_z^I = R_A = 2,5 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = R_{B_2} - qx = 0,5 - 2x \quad \Big|_{x=0} = 0,5 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 0,5 - 2 \cdot 2 = -3,5 \text{ кН};$$

Оскільки в межах цієї ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_z^{II} = 0$. У цьому перерізі буде локальний максимум на епюрі M_y :

$$R_{B_2} - qx_e = 0; \quad x_e = \frac{R_{B_2}}{q} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м};$$

$$Q_z^{III} = P = 1 \text{ кН};$$

$$M_y^I = R_A x - M = 2,5x - 4 \quad \Big|_{x=0} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 2,5 \cdot 2 - 4 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y^{II} = M_1 + R_{B_2} x - \frac{qx^2}{2} = 1 + 0,5x - x^2 \quad \Big|_{x=0} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 1 + 0,5 \cdot 2 - 2^2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\Big|_{x=x_e=0,25 \text{ м}} = 1 + 0,5 \cdot 0,25 - 0,25^2 = 1,06 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y^{III} = -Px = -x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки, зістикувавши епюри окремих двохопорних балок, тобто зобразивши їх на одній осі x (рис. 27, в).

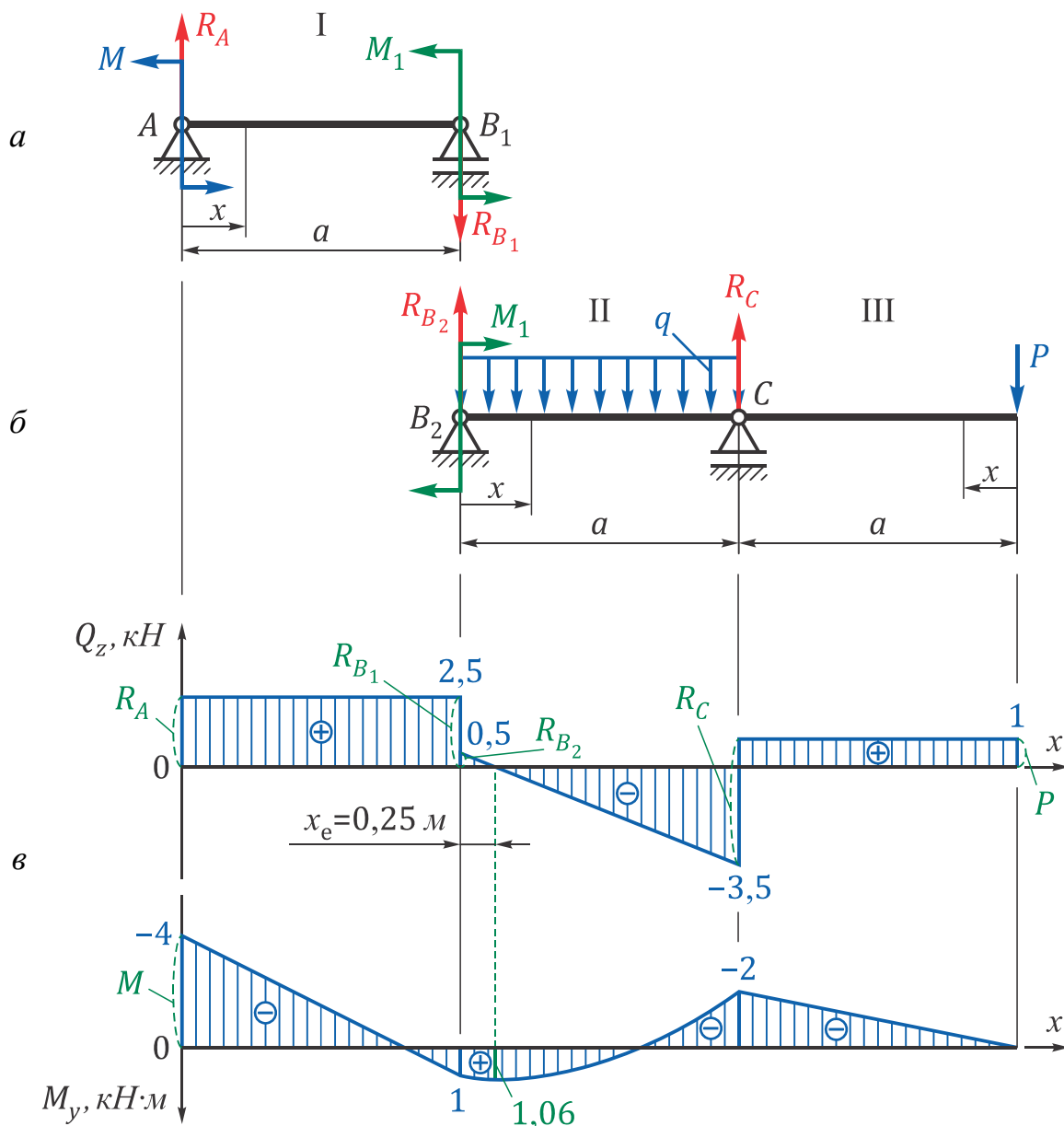


Рис. 27

Перевіримо епюри за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Перевіримо рівність нулю вертикального переміщення перерізу C . Для цього виберемо нову основну систему, відкинувши як надлишковий (зайвий) зв'язок проміжну опору C (рис. 28, а) і побудуємо нову еквівалентну систему

(рис. 28, б). Ця еквівалентна система і використана раніше (з врізаними шарнірами) мають ту саму епюру згинальних моментів (див. рис. 27, в).

Лінійне переміщення перерізу C визначимо методом Мора, для чого побудуємо допоміжну одиничну систему з прикладеною в цьому перерізі одиничною силою $\bar{P} = 1$ (рис. 28, в).

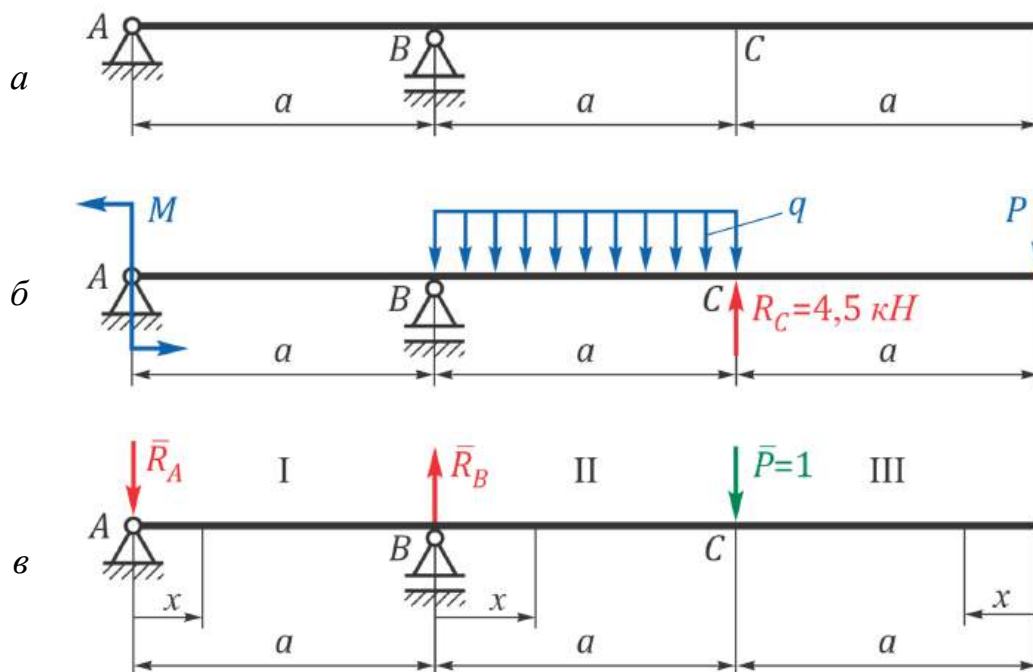


Рис. 28

Визначимо опорні реакції одиничної системи:

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{R}_B a - \bar{P} \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{\bar{P} \cdot 2a}{a} = 2\bar{P} = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$\sum M_B = 0; \quad \bar{R}_A a + \bar{P} a = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{\bar{P} a}{a} = \bar{P} = 1.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} + \bar{R}_A - \bar{R}_B = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ідентично еквівалентній системі з врізаними шарнірами, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = -\bar{R}_A x = -x;$$

$$\bar{M}_y^{II} = -\bar{R}_A(a + x) + \bar{R}_B x = -(2 + x) + 2x = x - 2;$$

$$\bar{M}_y^{III} = 0.$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + \int_0^a M_y^{III} \bar{M}_y^{III} dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^2 (2,5x - 4)(-x) dx + \int_0^2 (1 + 0,5x - x^2)(x - 2) dx + \int_0^2 (-x) \cdot 0 dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\left(-2,5 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} + 0,5 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} (-6,667 + 8 + 2 + 1,333 - 4 - 4 - 2 + 5,333) = \\ &= \frac{1}{EI_y} (16,666 - 16,667) = -0,001 \frac{1}{EI_y}.\end{aligned}$$

Похибка розрахунку становить

$$\Delta \% = \left| \frac{-0,001}{16,666} \right| \cdot 100 \% = 0,006 \% < 1 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогонової балки зроблено правильно.

8. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 27, з) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{max} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Запишемо умову міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

З урахуванням того, що

$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \left\{ h = kb \right\} = \frac{k^2 b^3}{6},$$

отримаємо формулу для конструкторського розрахунку прямокутного поперечного перерізу балки та визначимо розмір b :

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_y|_{max}}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 4 \times 10^3}{2^2 \cdot 160 \times 10^6}} = 0,0335 \text{ м}.$$

Тоді $h = kb = 2 \cdot 0,0335 = 0,067 \text{ м}.$

Приклад 3

Балка прямокутного поперечного перерізу ($k = h/b = 2$) з жорстким затисненням на лівому кінці спирається на дві шарнірні опори (рис. 29) і навантажена зосередженою силою P , моментом M та розподіленим навантаженням q . З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу балки при таких значеннях параметрів: $a = 3 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

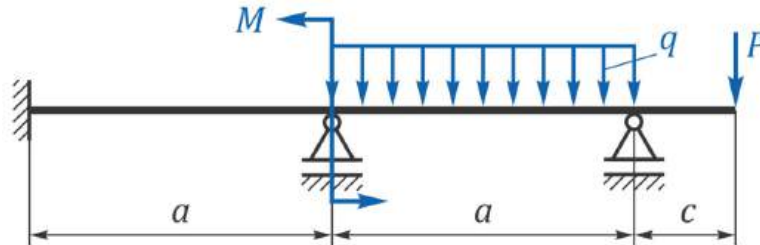


Рис. 29

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції з урахуванням того, що защемлення збільшує ступінь статичної невизначеності на одиницю:

$$k = m - 1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2,$$

тобто балка двічі статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середньою опорою в тіло балки шарнір і замінивши жорстке защемлення фіктивним прогоном нульової довжини $l_\phi = 0$. На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 30), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакції відкинутих зв'язків у вигляді згинальних моментів M_1 та M_2 . Пронумеруємо опори зліва направо (0, 1, 2), позначимо прогони номером опори праворуч від прогону. Заданий момент M віднесемо до прогону l_3 .

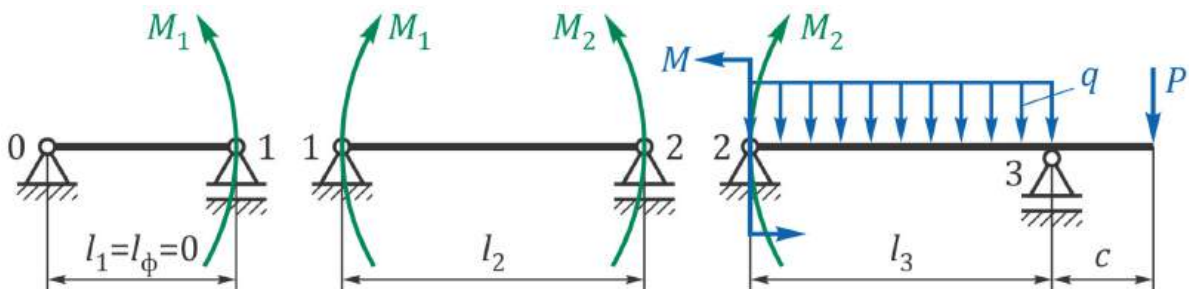


Рис. 30

3. Запишемо систему рівнянь трьох моментів та проаналізуємо її:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}), \end{cases}$$

де $M_0 = 0$ – момент на лівій опорі фіктивного прогону (опора 0);

M_1, M_2 – невідомі величини (підлягають визначенню);

$M_3 = -Pc = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – момент на правій опорі від сили P на консолі;

$l_1 = 0$ – довжина першого (фіктивного) прогону;

$l_2 = l_3 = a = 3 \text{ м}$ – довжини другого і третього прогонів;

$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$ і $\alpha_{2,3}$ – кути поворотів на опорах 1 та 2 в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень.

Зауваження | Момент на проміжній опорі слід відносити до лівого або правого прогону, виходячи зі способу розв’язання задачі.

4. Знайдемо кути повороту від заданих навантажень на прогонах, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними у дод. 1 (рис. 31).

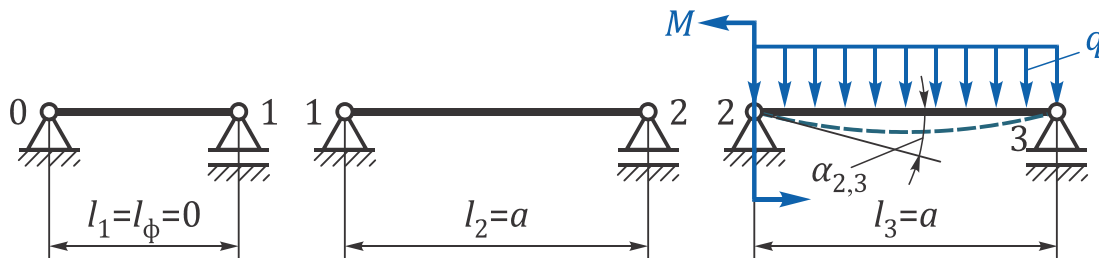


Рис. 31

Зауваження | Якщо заданий момент M віднести до менш навантаженого прогону (l_2), необхідно визначати кути повороту на цьому прогоні від дії внутрішньопрогонового навантаження.

На першому та другому прогонах кути повороту дорівнюють нулю, оскільки відсутні внутрішньопрогонові навантаження:

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 0.$$

На третьому прогоні кут повороту отримаємо шляхом підсумовування кутів від дії рівномірно розподіленого навантаження q та зосередженого згинального моменту M :

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} &= \frac{ql_3^3}{24EI_y} - \frac{Ml_3}{3EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} - \frac{Ma}{3EI_y} = \frac{20 \cdot 3^3}{24EI_y} - \frac{30 \cdot 3}{3EI_y} = \\ &= \frac{45}{2EI_y} - \frac{30}{EI_y} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{45}{2} - \frac{30 \cdot 2}{2} \right) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{45 - 60}{2} \right) = -\frac{15}{2EI_y}. \end{aligned}$$

Зауваження | Кут повороту від дії зосередженого моменту взято з негативним знаком, оскільки цей момент згинає балку опуклістю вгору.

5. Підставимо знайдені величини у систему рівнянь трьох моментів

$$\begin{cases} 0 \cdot 0 + 2M_1(0 + 3) + M_2 \cdot 3 = -6EI_y(0 + 0); \\ M_1 \cdot 3 + 2M_2(3 + 3) + (-10) \cdot 3 = -6EI_y \left(0 - \frac{15}{2EI_y} \right) \end{cases}$$

і після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = 0; \\ M_1 + 4M_2 = 25. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь зручним способом, знайдемо невідомі опорні моменти

$$M_1 = -3,57 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 7,14 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки момент M_1 вийшов негативним, його напрямок необхідно змінити на протилежний.

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо окремі двохопорні балки AB_1 та B_2C , навантажені заданими зусиллями та знайденими моментами M_1 та M_2 (рис. 32).

Для кожної з найпростіших балок знайдемо реакції опор.

Балка AB_1 (рис. 32, а)

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad -M_1 - M_2 + R_{B_1}a = 0;$$

$$R_{B_1} = \frac{M_1 + M_2}{a} = \frac{3,57 + 7,14}{3} = 3,57 \text{ кН};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad -M_1 - M_2 + R_Aa = 0;$$

$$R_A = \frac{M_1 + M_2}{a} = \frac{3,57 + 7,14}{3} = 3,57 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = R_{B_1} - R_A = 3,57 - 3,57 = 0.$$

Балка B_2C (рис. 32, б)

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{B_2} = 0; \quad M - M_2 - qa \frac{a}{2} + R_Ca - P(a + c) = 0;$$

$$\begin{aligned}
R_C &= \frac{M_2 - M + qa \frac{a}{2} + P(a + c)}{a} = \\
&= \frac{7,14 - 30 + 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 10 \cdot (3 + 1)}{3} = \frac{107,14}{3} = 35,71 \text{ кН}; \\
\sum M_C &= 0; \quad M - M_2 - R_{B_2} a + qa \frac{a}{2} - Pc = 0; \\
R_{B_2} &= \frac{M - M_2 + qa \frac{a}{2} - Pc}{a} = \\
&= \frac{30 - 7,14 + 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 10 \cdot 1}{3} = \frac{102,86}{3} = 34,29 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_{B_2} - R_C + P + qa = -35,71 - 34,29 + 10 + 30 = 0.$$

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів:

$$Q_Z^I = R_A = 3,57 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned}
Q_Z^{II} = R_{B_2} - qx &= 34,29 - 20x \quad \Big|_{x=0} = 34,29 \text{ кН} \\
&\quad \Big|_{x=a=3 \text{ м}} = 34,29 - 20 \cdot 3 = -25,71 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

Оскільки в межах цієї ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_Z^{II} = 0$:

$$R_{B_2} - qx_e = 0; \quad x_e = \frac{R_{B_2}}{q} = \frac{34,29}{20} = 1,71 \text{ м};$$

$$Q_Z^{III} = P = 10 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned}
M_y^I = R_A x - M_1 &= 3,57x - 3,57 \quad \Big|_{x=0} = -3,57 \text{ кН}\cdot\text{м} \\
&\quad \Big|_{x=a=3 \text{ м}} = 3,57 \cdot 3 = 7,14 \text{ кН}\cdot\text{м};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y^{II} = M_2 - M + R_{B_2} x - \frac{qx^2}{2} &= -22,86 + 34,29x - 10x^2 \quad \Big|_{x=0} = -22,86 \text{ кН}\cdot\text{м} \\
&\quad \Big|_{x=a=3 \text{ м}} = -22,86 + 34,29 \cdot 3 - 10 \cdot 3^2 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}
\end{aligned}$$

$$\Big|_{x=x_e=1,71\text{ м}} = -22,86 + 34,29 \cdot 1,71 - 10 \cdot 1,71^2 = 6,53 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{\text{III}} = -Px = -10x \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=c=1\text{ м}} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки (рис. 32, в). Перевіримо епюри поперечних сил і згинальних моментів за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

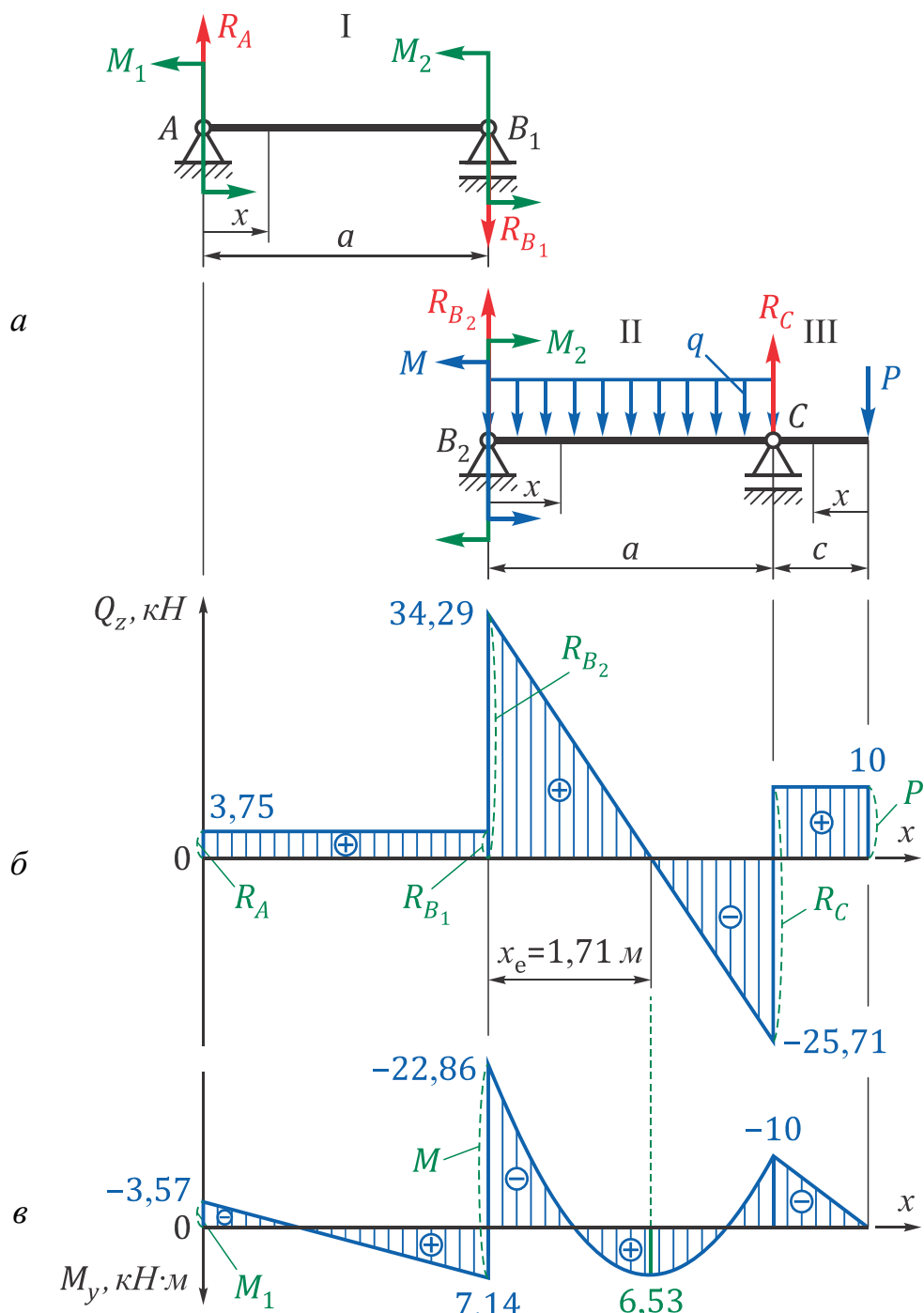


Рис. 32

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Для перевірки необхідно вибрати нову основну систему шляхом відкидання двох надлишкових зв'язків. Варіантів нових систем може бути багато. Вибирати потрібно ту, яка дає змогу найпростішим чином обчислити інтеграл Мора.

Порівняємо кілька варіантів нових основних систем, побудувавши епюри згинальних моментів для допоміжних одиничних систем, що відповідають основним (рис. 33).

У першому варіанті відкинути всі шарнірні опори з вихідної системи. У цьому випадку епюри одиничних систем для визначення переміщень перерізів B (рис. 33, a) і C (рис. 33, b) можна побудувати без визначення опорних реакцій.

Зауваження

У варіанті (a) (див. рис. 33, a) результат перемноження епюр можна визначити одразу. Справді, використавши властивість комутативності, бачимо, що під центром ваги одиничної епюри на першій ділянці буде нульова ордината на епюрі M_y (див. рис. 32, $в$).

У другому варіанті відкинута крайня опора (рис. 33, $в$). У цьому випадку епюру згинальних моментів для визначення переміщення перерізу C також можна побудувати без визначення реакцій.

У третьому випадку відкинута проміжна опора (рис. 33, $г$).

Зауваження

Якщо відкинута проміжна опора, то при визначенні переміщень перерізів, в яких відкинуті зв'язки, одинична сила завжди буде між опорами, а епюра згинальних моментів буде ненульовою на всій довжині балки. Це призводить до перемноження епюри на всіх ділянках.

Перевіримо рівність нулю вертикального переміщення перерізу C , скориставшись варіантом ($б$) (див. рис. 33, $б$). Визначимо опорні реакції одиничної системи:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; & \bar{M}_A - \bar{P} \cdot 2a &= 0; & \bar{M}_A &= \bar{P} \cdot 2a = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ м}; \\ \sum P_z &= 0; & -\bar{R}_A + \bar{P} &= 0; & \bar{R}_A &= \bar{P} = 1. \end{aligned}$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ідентично еквівалентній системі з врізаними шарнірами, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_A x - \bar{M}_A = x - 6;$$

$$\bar{M}_y^{\text{II}} = \bar{R}_A(a + x) - \bar{M}_A = 3 + x - 6 = x - 3;$$

$$\bar{M}_y^{\text{III}} = 0.$$

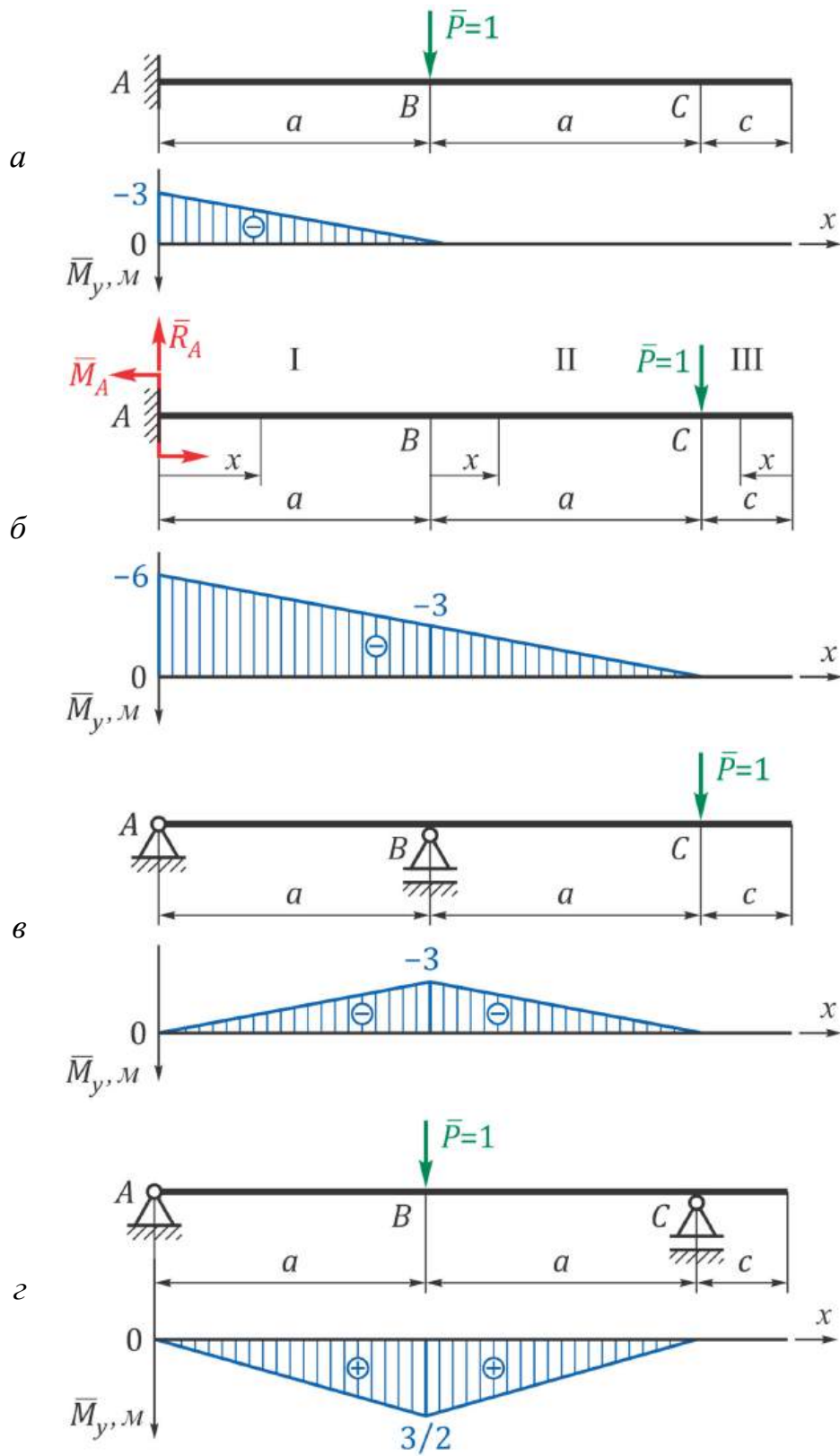


Рис. 33

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned}
 \delta_C &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + \int_0^c M_y^{III} \bar{M}_y^{III} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^3 (3,57x - 3,57)(x - 6) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^3 (-22,86 + 34,29x - 10x^2)(x - 3) dx + 0 \right) = \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left(\left(3,57 \frac{x^3}{3} - 3,57 \frac{x^2}{2} - 21,42 \frac{x^2}{2} + 21,42x \right) \Big|_0^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-22,86 \frac{x^2}{2} + 34,29 \frac{x^3}{3} - 10 \frac{x^4}{4} + 68,58x - 102,87 \frac{x^2}{2} + 30 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \right) = \\
 &= \frac{1}{EI_y} (32,13 - 16,065 - 96,39 + 64,26 - \\
 &\quad - 102,87 + 308,61 - 202,5 + 205,74 - 462,915 + 270) = \\
 &= \frac{1}{EI_y} (880,74 - 880,74) = 0.
 \end{aligned}$$

Розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогонової балки зроблено правильно.

8. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 32, в) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{\max} = 22,86 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Запишемо умову міцності при згинанні

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|_{\max}}{W_y} = \left\{ \text{з урахуванням } W_y = \frac{k^2 b^3}{6} \right\} = \frac{6|M_y|_{\max}}{k^2 b^3} \leq [\sigma],$$

з якої отримаємо формулу для конструкторського розрахунку прямокутного поперечного перерізу балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_y|_{\max}}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 22,86 \times 10^3}{2^2 \cdot 180 \times 10^6}} = 0,058 \text{ м}.$$

$$\text{Тоді } h = kb = 2 \cdot 0,058 = 0,116 \text{ м}.$$

Приклад 4

Балка прямокутного поперечного перерізу ($k = h/b = 2$) спирається на чотири шарнірні опори (рис. 34) і навантажена зосередженою силою P , моментами M та розподіленим навантаженням q . З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу балки при таких значеннях параметрів: $a = 1$ м; $P = 20$ кН; $M = 30$ кН·м; $q = 10$ кН/м; $[\sigma] = 180$ МПа.

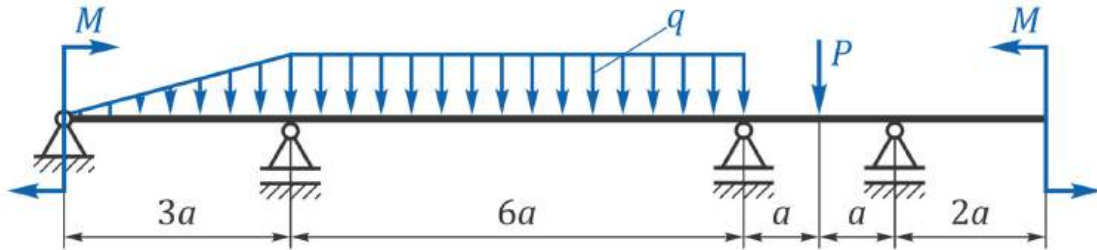


Рис. 34

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції:

$$k = m - 1 = 3 - 1 = 2,$$

тобто балка двічі статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши в тіло балки над середніми опорами шарніри. На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 35), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакції відкинутих зв'язків у вигляді згинальних моментів M_1 та M_2 . Пронумеруємо опори зліва направо (0, 1, 2, 3), позначимо прогони номером опори праворуч від прогону.

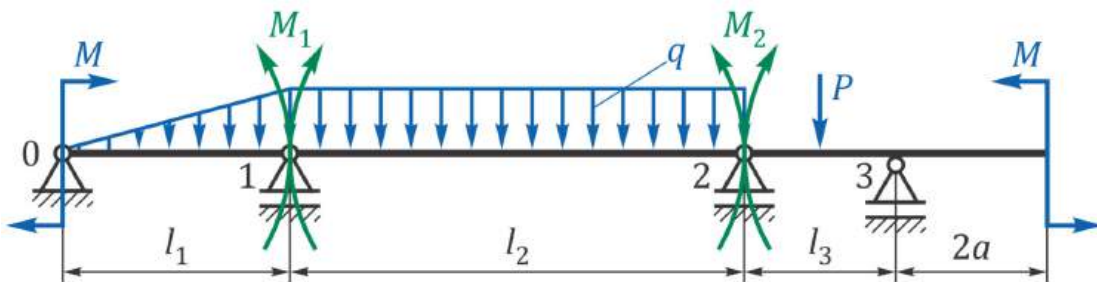


Рис. 35

3. Запишемо систему рівнянь трьох моментів та проаналізуємо її:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}), \end{cases}$$

де $M_0 = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – заданий момент на лівій опорі;

M_1, M_2 – невідомі величини (підлягають визначенню);

$M_3 = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – момент на правій опорі від консольного навантаження;

$l_1 = 3a = 3 \text{ м}$ – довжина першого прогону;

$l_2 = 6a = 6 \text{ м}$ – довжина другого прогону;

$l_3 = 2a = 2 \text{ м}$ – довжина третього прогону;

$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$ і $\alpha_{2,3}$ – кути поворотів на опорах 1 та 2 в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень.

4. Знайдемо кути повороту від заданих навантажень на прогонах, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними в дод. 1 (рис. 36).

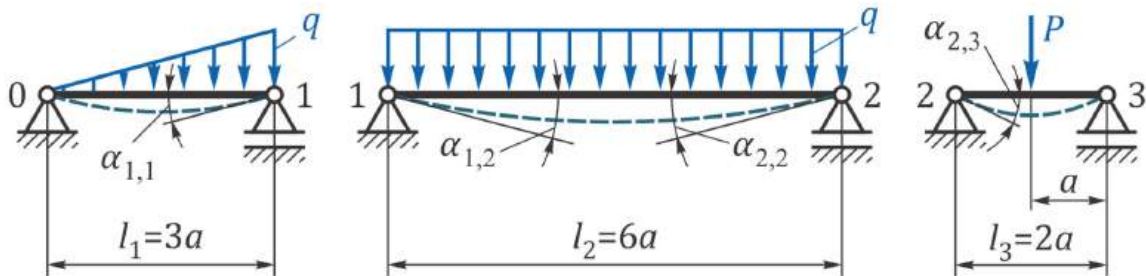


Рис. 36

$$\alpha_{1,1} = \frac{ql_1^3}{45EI_y} = \frac{q(3a)^3}{45EI_y} = \frac{10 \cdot 3^3}{45EI_y} = \frac{6}{EI_y};$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = \frac{ql_2^3}{24EI_y} = \frac{q(6a)^3}{24EI_y} = \frac{10 \cdot 6^3}{24EI_y} = \frac{90}{EI_y};$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{Pl_3^2}{16EI_y} = \frac{P(2a)^2}{24EI_y} = \frac{20 \cdot 2^2}{24EI_y} = \frac{10}{3EI_y}.$$

5. Підставимо знайдені величини у систему рівнянь трьох моментів

$$\begin{cases} 30 \cdot 3 + 2M_1(3 + 6) + M_2 \cdot 6 = -6EI_y \left(\frac{6}{EI_y} + \frac{90}{EI_y} \right); \\ M_1 \cdot 6 + 2M_2(6 + 2) + 30 \cdot 2 = -6EI_y \left(\frac{90}{EI_y} + \frac{10}{3EI_y} \right) \end{cases}$$

і після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} 3M_1 + M_2 = -111; \\ 3M_1 + 8M_2 = -310. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь зручним способом, знайдемо невідомі опорні моменти

$$M_1 = -27,52 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = -28,43 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки обидва моменти вийшли негативними, їх напрям змінимо на протилежний.

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо окремі двохопорні балки AB_1 , B_2C_1 і C_2D , які навантажені заданими зусиллями та знайденими моментами M_1 та M_2 (рис. 37, а).

Для кожної з найпростіших балок знайдемо реакції опор.

Балка AB_1

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -M - M_1 - \frac{q \cdot 3a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a + R_{B_1} \cdot 3a = 0; \\ R_{B_1} &= \frac{M + M_1 + \frac{q \cdot 3a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a}{3a} = \\ &= \frac{30 + 27,52 + \frac{10 \cdot 3 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{87,52}{3} = 29,17 \text{ кН}; \\ \sum M_{B_1} = 0; \quad & -M - M_1 + \frac{q \cdot 3a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3a + R_A \cdot 3a = 0; \\ R_A &= \frac{M + M_1 - \frac{q \cdot 3a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3a}{3a} = \\ &= \frac{30 + 27,52 - \frac{10 \cdot 3 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{42,52}{3} = 14,17 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = R_A - R_{B_1} + \frac{q \cdot 3a}{2} = 14,17 - 29,17 + 15 = 0.$$

Балка B_2C_1

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_{B_2} = 0; \quad & M_1 - M_2 - q \cdot 6a \frac{6a}{2} + R_{C_1} \cdot 6a = 0; \\ R_{C_1} &= \frac{-M_1 + M_2 + q \cdot 6a \frac{6a}{2}}{6a} = \\ &= \frac{-27,52 + 28,43 + 10 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 1}{2}}{6 \cdot 1} = \frac{180,91}{6} = 30,15 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum M_{C_1} = 0; \quad M_1 - M_2 - R_{B_2} \cdot 6a + q \cdot 6a \frac{6a}{2} = 0;$$

$$R_{B_2} = \frac{M_1 - M_2 + q \cdot 6a \frac{6a}{2}}{6a} =$$

$$= \frac{27,52 - 28,43 + 10 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 1}{2}}{6 \cdot 1} = \frac{179,09}{6} = 29,85 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = q \cdot 6a - R_{B_2} - R_{C_1} = 60 - 29,85 - 30,15 = 0.$$

Балка C_2D

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{C_2} = 0; \quad M_2 + M - R_D \cdot 2a - Pa = 0;$$

$$R_D = \frac{M_2 + M - Pa}{2a} = \frac{28,43 + 30 - 20 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{38,43}{2} = 19,215 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad M_2 + M - R_{C_2} \cdot 2a + Pa = 0;$$

$$R_{C_2} = \frac{M_2 + M + Pa}{2a} = \frac{28,43 + 30 + 20 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{78,43}{2} = 39,215 \text{ кН}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_{C_2} + R_D + P = -39,215 + 19,215 + 20 = 0.$$

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів:

$$Q_z^I = -R_A - \frac{qx^2}{2(3a)} = -14,17 - \frac{5}{3}x^2 \quad \Big|_{x=0} = -14,17 \text{ кН}$$

$$\Big|_{x=3a=3 \text{ м}} = -29,17 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = R_{B_2} - qx = 29,85 - 10x \quad \Big|_{x=0} = 29,85 \text{ кН}$$

$$\Big|_{x=6a=6 \text{ м}} = 29,85 - 10 \cdot 6 = -30,15 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах цієї ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_z^{\text{II}} = 0$:

$$R_{B_2} - qx_e = 0; \quad x_e = \frac{R_{B_2}}{q} = \frac{29,85}{10} = 2,985 \text{ м};$$

$$Q_z^{\text{III}} = R_{C_2} = 39,215 \text{ кН};$$

$$Q_z^{\text{IV}} = R_{C_2} - P = 39,215 - 20 = 19,215 \text{ кН};$$

$$Q_z^{\text{V}} = 0;$$

$$M_y^{\text{I}} = M - R_A x - \frac{qx^3}{6(3a)} = 30 - 14,17x - \frac{5}{9}x^3 \quad \Big|_{x=0} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=3a=3 \text{ м}} = 30 - 14,17 \cdot 3 - \frac{5}{9}3^3 = -27,51 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{\text{II}} = -M_1 + R_{B_2}x - \frac{qx^2}{2} = -27,52 + 29,85x - 5x^2 \quad \Big|_{x=0} = -27,52 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=6a=6 \text{ м}} = -27,52 + 29,85 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = -28,42 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=x_e=2,985 \text{ м}} = -27,52 + 29,85 \cdot 2,985 - 5 \cdot 2,985^2 = 17,03 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{\text{III}} = -M_2 + R_{C_2}x = -28,43 + 39,215x \quad \Big|_{x=0} = -28,43 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=a=1 \text{ м}} = 10,785 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{\text{IV}} = -M_2 + R_{C_2}(a + x) - Px = 10,785 + 19,215x \quad \Big|_{x=0} = 10,785 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=a=1 \text{ м}} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_y^{\text{V}} = M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки (рис. 37, б).

Перевіримо епюри поперечних сил і згинальних моментів за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

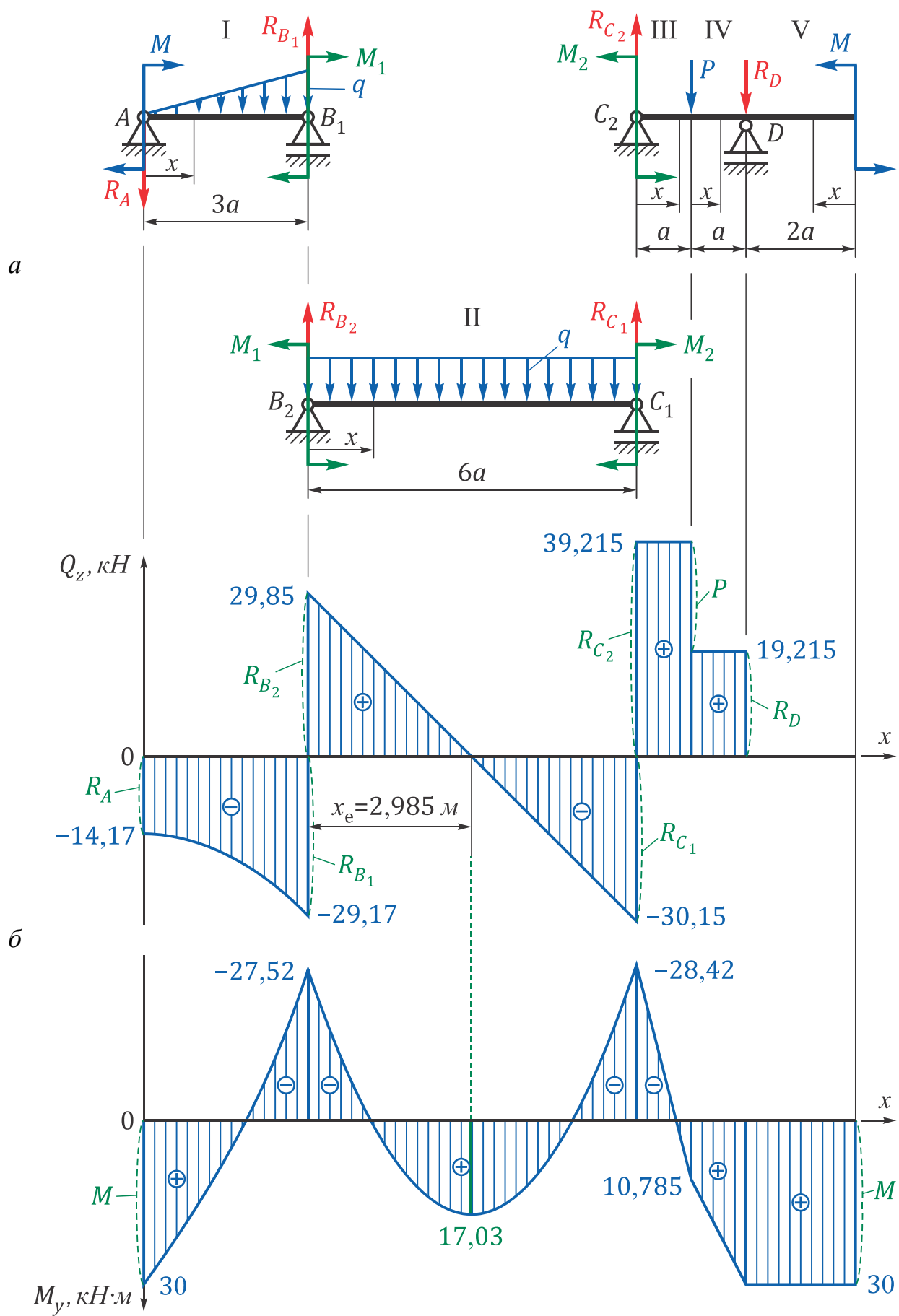


Рис. 37

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Перевіримо рівність нулю вертикального переміщення перерізу B . Для цього виберемо нову основну систему шляхом відкидання двох надлишкових зв'язків та на її основі побудуємо допоміжну одиничну систему (рис. 38).

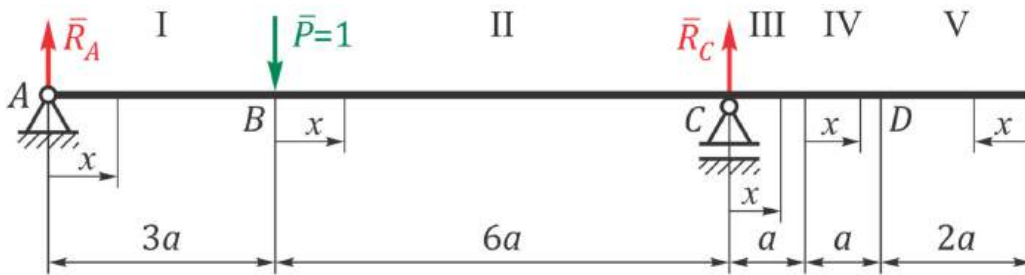


Рис. 38

Визначимо опорні реакції одиничної системи:

$$\sum M_A = 0; \quad \bar{R}_C \cdot 9a - \bar{P} \cdot 3a = 0; \quad \bar{R}_C = \frac{\bar{P} \cdot 3a}{9a} = \frac{1}{3};$$

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{P} \cdot 6a - \bar{R}_A \cdot 9a = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{\bar{P} \cdot 6a}{9a} = \frac{2}{3};$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} - \bar{R}_A - \bar{R}_C = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ідентично еквівалентній системі з врізаними шарнірами, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_A x = \frac{2}{3}x;$$

$$\bar{M}_y^{II} = \bar{R}_A(3a + x) - \bar{P}x = \frac{2}{3}(3 + x) - x = 2 - \frac{1}{3}x;$$

$$\bar{M}_y^{III} = \bar{R}_A(9a + x) - \bar{P}(6a + x) + \bar{R}_C x = \frac{2}{3}(9 + x) - (6 + x) + \frac{1}{3}x = 0;$$

$$\bar{M}_y^{IV} = 0;$$

$$\bar{M}_y^V = 0.$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\delta_C = \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^{3a} M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^{6a} M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + 0 + 0 + 0 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^3 \left(30 - 14,17x - \frac{5}{9}x^3 \right) \left(\frac{2}{3}x \right) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^6 \left(-27,52 + 29,85x - 5x^2 \right) \left(2 - \frac{1}{3}x \right) dx + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{EI_y} \left(\left(20 \frac{x^2}{2} - 14,17 \cdot \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} - \frac{10}{27} \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 + \right. \\
&\quad \left. + \left(-27,52 \cdot 2 \cdot x + 29,85 \cdot 2 \frac{x^2}{2} - 10 \frac{x^3}{3} + \frac{27,52}{3} \frac{x^2}{2} - \frac{29,85}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3} \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^6 \right) = \\
&= \frac{1}{EI_y} (90 - 85,02 - 18 - \\
&\quad - 330,24 + 1074,6 - 720 + 165,12 - 716,4 + 540) = \\
&= \frac{1}{EI_y} (1869,72 - 1869,66) = 0,06.
\end{aligned}$$

Похибка розрахунку становить

$$\Delta \% = \left| \frac{-0,06}{1869,72} \right| \cdot 100 \% = 0,003 \% < 1 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогової балки зроблено правильно.

8. Визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 37, б) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{max} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Запишемо умову міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \left\{ \text{з урахуванням } W_y = \frac{k^2 b^3}{6} \right\} = \frac{6|M_y|_{max}}{k^2 b^3} \leq [\sigma],$$

з якої отримаємо формулу для конструкторського розрахунку прямокутного поперечного перерізу балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_y|_{max}}{k^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 30 \times 10^3}{2^2 \cdot 180 \times 10^6}} = 0,063 \text{ м}.$$

Тоді $h = kb = 2 \cdot 0,063 = 0,126 \text{ м}$.

Приклад 5 (розрахунок за допустимими навантаженнями)

Балка виготовлена з двотавра № 20 ($W_y = 184 \text{ см}^4$), жорстко затиснута на правому кінці, спирається на три шарнірні опори (рис. 39) і навантажена розподіленим навантаженням q та моментом $M = 0,2qa^2$. З умови міцності визначити допустиме значення зовнішнього навантаження при таких значеннях параметрів: $a = 3 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

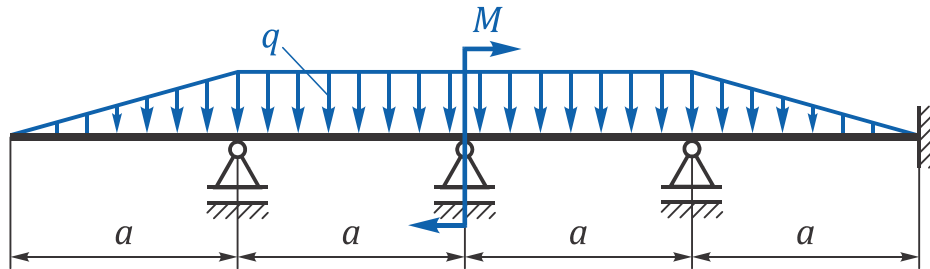


Рис. 39

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції з урахуванням того, що затиснення збільшує ступінь статичної невизначеності на одиницю:

$$k = m - 1 + 1 = 3 - 1 + 1 = 3,$$

тобто балка тричі статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середніми опорами в тіло балки шарніри і замінивши жорстке затиснення фіктивним прогоном нульової довжини $l_\phi = 0$.

На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 40), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакції відкритих зв'язків у вигляді згинальних моментів M_1 , M_2 і M_3 . Пронумеруємо опори зліва направо, позначимо прогони номером опори праворуч від прогону. Вказаний момент віднесемо до другого прогону.

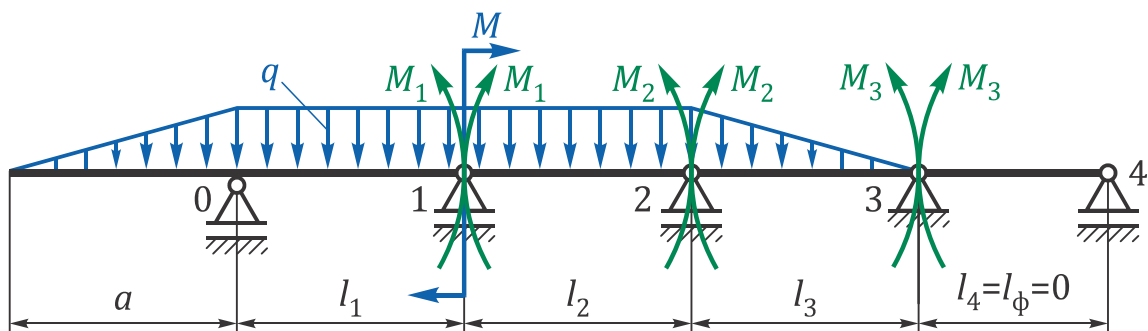


Рис. 40

3. Запишемо систему рівнянь трьох моментів та проаналізуємо її:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}); \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6EI_y(\alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}), \end{cases}$$

де M_0 – момент на лівій опорі:

$$M_0 = -\frac{qa}{2} \cdot \frac{1}{3}a = -\frac{1}{6}qa^2;$$

M_1, M_2, M_3 – невідомі величини (підлягають визначенню);

$M_4 = 0$ – момент на правій опорі фіктивного прогону;

$l_1 = l_2 = l_3 = a = 3 \text{ м}$ – довжини прогонів 1, 2, 3;

$l_4 = l_\phi = 0$ – довжина четвертого (фіктивного) прогону;

$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}$ и $\alpha_{3,4}$ – кути поворотів на опорах 1, 2 та 3 в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень.

4. Знайдемо кути повороту від заданих навантажень на прогонах, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними в дод. 1 (рис. 41):

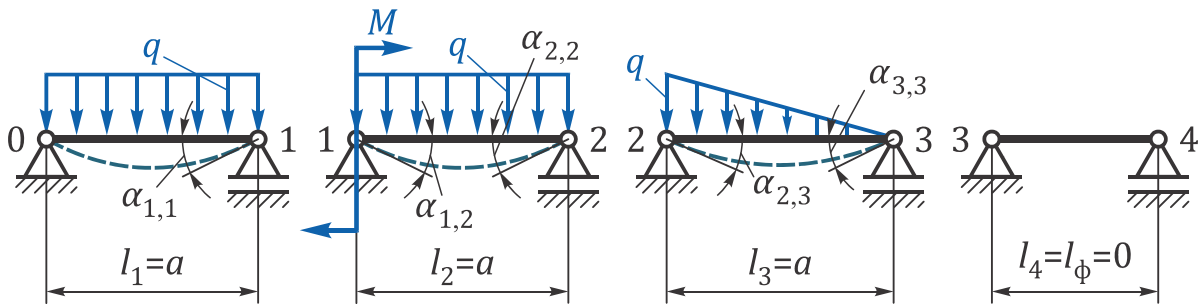


Рис. 41

$$\alpha_{1,1} = \frac{ql_1^3}{24EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y};$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{ql_2^3}{24EI_y} + \frac{Ml_2}{3EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} + \frac{0,2qa^2a}{3EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} + \frac{qa^2a}{15EI_y} = \frac{13qa^3}{120EI_y};$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{ql_2^3}{24EI_y} + \frac{Ml_2}{6EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} + \frac{0,2qa^2a}{6EI_y} = \frac{qa^3}{24EI_y} + \frac{qa^2a}{30EI_y} = \frac{3qa^3}{40EI_y};$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{ql_3^3}{45EI_y} = \frac{qa^3}{45EI_y};$$

$$\alpha_{3,3} = \frac{7ql_3^3}{360EI_y} = \frac{7qa^3}{360EI_y};$$

$$\alpha_{3,4} = 0.$$

5. Підставимо знайдені величини у систему рівнянь трьох моментів

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}qa^2a + 2M_1(a + a) + M_2a = -6EI_y \left(\frac{qa^3}{24EI_y} + \frac{13qa^3}{120EI_y} \right); \\ M_1a + 2M_2(a + a) + M_3a = -6EI_y \left(\frac{3qa^3}{40EI_y} + \frac{qa^3}{45EI_y} \right); \\ M_2a + 2M_3(a + 0) + M_4 \cdot 0 = -6EI_y \left(\frac{7qa^3}{360EI_y} + 0 \right) \end{cases}$$

і після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} 60M_1 + 15M_2 = -11qa^2; \\ 12M_1 + 48M_2 + 12M_3 = -7qa^2; \\ 60M_2 + 120M_3 = -7qa^2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь зручним способом, знайдемо невідомі опорні моменти

$$M_1 = -0,157qa^2; \quad M_2 = -0,105qa^2; \quad M_3 = -0,006qa^2.$$

Оскільки моменти вийшли негативними, їх напрямки змінимо на протилежні.

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо окремі двохопорні балки AB_1 , B_2C_1 і C_2D , навантажені заданими зусиллями та знайденими моментами M_1 , M_2 та M_3 (рис. 42, а).

Для кожної з найпростіших балок знайдемо реакції опор.

Балка AB_1

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \quad \frac{qa}{2} \cdot \frac{1}{3}a - M_1 - qa \cdot \frac{1}{2}a + R_{B_1}a = 0; \\ R_{B_1} &= \frac{-\frac{qa}{2} \cdot \frac{1}{3}a + M_1 + qa \cdot \frac{1}{2}a}{a} = \frac{-\frac{1}{6}qa^2 + 0,157qa^2 + \frac{1}{2}qa^2}{a} = 0,49qa; \\ \sum M_{B_1} &= 0; \quad \frac{qa}{2} \left(\frac{1}{3}a + a \right) - M_1 + qa \cdot \frac{1}{2}a - R_Aa = 0; \\ R_A &= \frac{\frac{qa}{2} \left(\frac{1}{3}a + a \right) - M_1 + qa \cdot \frac{1}{2}a}{a} = \frac{\frac{2}{3}qa^2 - 0,157qa^2 + \frac{1}{2}qa^2}{a} = 1,01qa. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_A + \frac{qa}{2} + qa - R_{B_1} = -1,01qa + 0,5qa + qa - 0,49qa = 0.$$

Балка B_2C_1

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{B_2} = 0; \quad -M + M_1 - M_2 - qa \frac{a}{2} + R_{C_1} a = 0;$$

$$R_{C_1} = \frac{M - M_1 + M_2 + qa \cdot \frac{1}{2} a}{a} = \frac{0,2qa^2 - 0,157qa^2 + 0,105qa^2 + \frac{1}{2}qa^2}{a} =$$

$$= 0,648qa;$$

$$\sum M_{C_1} = 0; \quad -M + M_1 - M_2 - R_{B_2} a + qa \frac{a}{2} = 0;$$

$$R_{B_2} = \frac{-M + M_1 - M_2 + qa \cdot \frac{1}{2} a}{a} = \frac{-0,2qa^2 + 0,157qa^2 - 0,105qa^2 + \frac{1}{2}qa^2}{a} =$$

$$= 0,352qa.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = qa + R_{B_2} - R_{C_1} = qa - 0,352qa - 0,648qa = 0.$$

Балка C_2D

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{C_2} = 0; \quad M_2 - M_3 - \frac{qa}{2} \cdot \frac{1}{3} a + R_D a = 0;$$

$$R_D = \frac{-M_2 + M_3 + \frac{qa}{2} \cdot \frac{1}{3} a}{a} = \frac{-0,105qa^2 + 0,006qa^2 + \frac{1}{6}qa^2}{a} = 0,068qa;$$

$$\sum M_D = 0; \quad M_2 - M_3 - R_{C_2} a + \frac{qa}{2} \cdot \frac{2}{3} a = 0;$$

$$R_{C_2} = \frac{M_2 - M_3 + \frac{qa}{2} \cdot \frac{2}{3} a}{a} = \frac{0,105qa^2 - 0,006qa^2 + \frac{1}{3}qa^2}{a} = 0,432qa.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \frac{qa}{2} - R_{C_2} - R_D = 0,5qa - 0,432qa - 0,068qa = 0.$$

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами (див. рис. 42, а) і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів:

$$Q_z^I = -\frac{qx^2}{2a} = \left|_{x=0} = 0 \right|_{x=a} = -0,5qa;$$

$$Q_z^{II} = -R_{B_1} + qx = -0,49qa + qx \left|_{x=0} = -0,49qa \right.$$

$$\left|_{x=a} = -0,49qa + qa = 0,51qa.$$

Оскільки в межах другої ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_z^{II} = 0$:

$$-0,49qa + qx_e^{II} = 0;$$

$$x_e^{II} = \frac{0,49qa}{q} = 0,49a;$$

$$Q_z^{III} = -R_{C_1} + qx = -0,648qa + qx \left|_{x=0} = -0,648qa \right.$$

$$\left|_{x=a} = -0,648qa + qa = 0,352qa.$$

Оскільки в межах третьої ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_z^{III} = 0$:

$$-0,648qa + qx_e^{III} = 0;$$

$$x_e^{III} = \frac{0,648qa}{q} = 0,648a;$$

$$Q_z^{IV} = -R_D + \frac{qx^2}{2a} = -0,068qa + \frac{qx^2}{2a} \left|_{x=0} = -0,068qa \right.$$

$$\left|_{x=a} = -0,068qa + 0,5qa = 0,432qa.$$

Оскільки в межах четвертої ділянки поперечна сила змінює знак, визначимо відстань до перерізу, в якому $Q_z^{IV} = 0$:

$$-0,068qa + \frac{q(x_e^{IV})^2}{2a} = 0;$$

$$x_e^{IV} = \sqrt{\frac{0,068qa \cdot 2a}{q}} = \sqrt{0,136a^2} = 0,369a;$$

$$M_y^I = -\frac{qx^3}{6a} = \left|_{x=0} = 0 \right|_{x=a} = -\frac{qa^3}{6a} = -0,167qa^2;$$

$$\begin{aligned} M_y^{II} &= -M_1 + R_{B_1}x - \frac{qx^2}{2} = -0,157qa^2 + 0,49qax - \frac{qx^2}{2} = \\ &= \left|_{x=0} = -0,157qa^2 \right|_{x=a} = -0,157qa^2 + 0,49qa^2 - 0,5qa^2 = -0,167qa^2; \\ &\left|_{x=x_e^{II}=0,49a} = -0,157qa^2 + 0,49qa \cdot 0,49a - \frac{q(0,49a)^2}{2} = -0,037qa^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y^{III} &= -M_2 + R_{C_1}x - \frac{qx^2}{2} = -0,105qa^2 + 0,648qax - \frac{qx^2}{2} = \\ &= \left|_{x=0} = -0,105qa^2 \right|_{x=a} = -0,105qa^2 + 0,648qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 0,043qa^2 \\ &\left|_{x=x_e^{III}=0,648a} = -0,105qa^2 + 0,648qa \cdot 0,648a - \frac{q(0,648a)^2}{2} = 0,105qa^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y^{IV} &= -M_3 + R_Dx - \frac{qx^3}{6a} = -0,006qa^2 + 0,068qax - \frac{qx^3}{6a} \left|_{x=0} = -0,006qa^2 \right. \\ &\left|_{x=a} = -0,006qa^2 + 0,068qa^2 - \frac{1}{6}qa^2 = -0,105qa^2 \right. \\ &\left|_{x=x_e=0,369a} = -0,006qa^2 + 0,068qa \cdot 0,369a - \frac{q(0,369a)^3}{6a} = 0,011qa^2. \end{aligned}$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки (рис. 42, б).

Перевіримо епюри поперечних сил і згинальних моментів за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

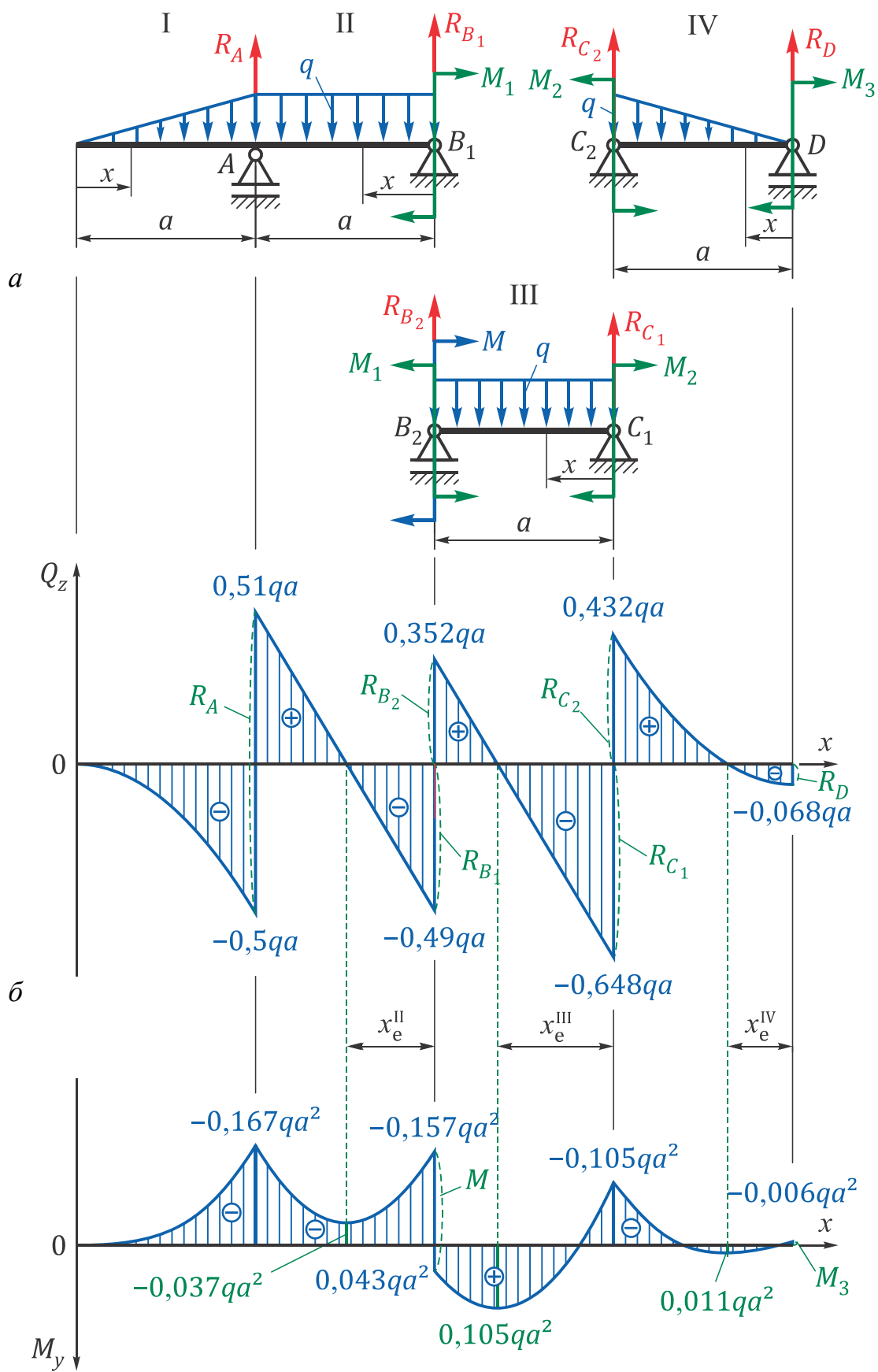


Рис. 42

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Знайдемо вертикальне переміщення перерізу A . Для цього виберемо нову основну систему шляхом відкидання трьох надлишкових зв'язків (рис. 43, a) та на її базі побудуємо еквівалентну систему (рис. 43, b). Деформація цієї еквівалентної системи має бути ідентична деформації еквівалентної системи з врізаними шарнірами, це означає, що вертикальне переміщення перерізу A має дорівнювати нулю.

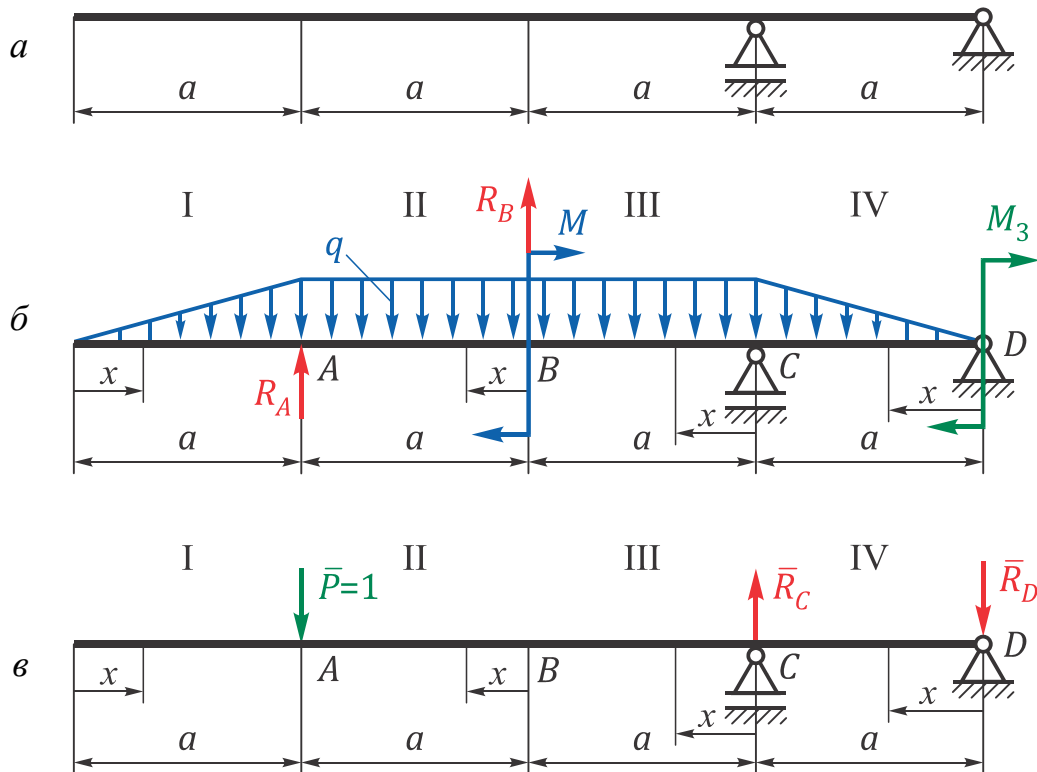


Рис. 43

Для визначення вертикального переміщення перерізу A побудуємо допоміжну одиничну систему (рис. 43, c) і визначимо в ній опорні реакції:

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{R}_D a - \bar{P} \cdot 2a = 0; \quad \bar{R}_D = \frac{\bar{P} \cdot 2a}{a} = 2;$$

$$\sum M_D = 0; \quad \bar{P} \cdot 3a - \bar{R}_C a = 0; \quad \bar{R}_C = \frac{\bar{P} \cdot 3a}{a} = 3.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} - \bar{R}_C + \bar{R}_D = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ідентично еквівалентній системі, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = 0;$$

$$\bar{M}_y^{II} = -\bar{R}_D(2a + x) + \bar{R}_C(a + x) = -4a - 2x + 3a + 3x = x - a;$$

$$\bar{M}_y^{III} = -\bar{R}_D(a + x) + \bar{R}_C x = -2a - 2x + 3x = x - 2a;$$

$$\bar{M}_y^{IV} = -\bar{R}_D x = -2x.$$

Підставимо ці рівняння та рівняння згинальних моментів еквівалентної системи в інтеграл Мора

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + \int_0^a M_y^{III} \bar{M}_y^{III} dx + \int_0^a M_y^{IV} \bar{M}_y^{IV} dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a \left(-\frac{qx^3}{6a} \right) \cdot 0 dx + \int_0^a \left(0,49qax - 0,157qa^2 - \frac{qx^2}{2} \right) (x - a) dx + \right. \\ &+ \int_0^a \left(-0,105qa^2 + 0,648qax - \frac{qx^2}{2} \right) (x - 2a) dx + \\ &+ \left. \int_0^a \left(-0,006qa^2 + 0,068qax - \frac{qx^3}{6a} \right) (-2x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a \left(0,49qax^2 - 0,157qa^2x - \frac{qx^3}{2} - 0,49qa^2x + 0,157qa^3 + \frac{qa}{2}x^2 \right) dx + \right. \\ &+ \int_0^a \left(-0,105qa^2x + 0,648qax^2 - \frac{qx^3}{2} + 0,21qa^3 - 1,296qa^2x + qax^2 \right) dx + \\ &+ \left. \int_0^a \left(0,012qa^2x - 0,136qax^2 + \frac{qx^4}{3a} \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\left(0,49qa \frac{x^3}{3} - 0,157qa^2 \frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{8} - 0,49qa^2 \frac{x^2}{2} + 0,157qa^3x + \frac{qa}{2} \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^a + \\ &+ \left(-0,105qa^2 \frac{x^2}{2} + 0,648qa \frac{x^3}{3} - \frac{qx^4}{8} + 0,21qa^3x - 1,296qa^2 \frac{x^2}{2} + qa \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(0,012qa^2 \frac{x^2}{2} - 0,136qa \frac{x^3}{3} + \frac{q}{3a} \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^a = \\
& = \frac{1}{EI_y} (0,163qa^4 - 0,0785qa^4 - 0,125qa^4 - 0,245qa^4 + 0,157qa^4 + \\
& + 0,167qa^4 - 0,0525qa^4 + 0,216qa^4 - 0,125qa^4 + 0,11qa^4 - 0,648qa^4 + \\
& + 0,333qa^4 + 0,006qa^4 - 0,0453qa^4 + 0,0667qa^4) = \\
& = \frac{1}{EI_y} (1,3187qa^4 - 1,3193qa^4) = -\frac{1}{EI_y} 0,0006qa^4.
\end{aligned}$$

Похибка розрахунку становить

$$\Delta \% = \left| \frac{-0,0006qa^4}{1,3187qa^4} \right| \cdot 100 \% = 0,045 \% < 1 \%,$$

тобто розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогонової балки зроблено правильно.

8. Визначимо з умови міцності допустиме значення зовнішнього навантаження.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 42, б) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{max} = |-0,167qa^2|.$$

З умови міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

отримаємо

$$|M_y|_{max} = 0,167qa^2 \leq [\sigma]W_y.$$

Тоді максимальна величина допустимого навантаження

$$[q] \leq \frac{[\sigma]W_y}{0,167a^2} = \frac{160 \times 10^6 \cdot 184 \times 10^{-6}}{0,167 \cdot 3^2} = 19,587 \times 10^3 \text{ Н} = 19,587 \text{ кН},$$

а згинального моменту –

$$M = 0,2qa^2 = 0,2 \cdot 19,587 \cdot 3^2 = 35,257 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Приклад 6

Балка, виготовлена із сталеві труби із співвідношенням діаметрів $\alpha = d/D$ із жорсткими затисненнями на кінцях, лежить на двох опорах і навантажена зосередженою силою P (рис. 44). З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу, величину прогину балки посередині центрального прогону (у точці прикладання сили P) і кут повороту на одній із проміжних опор при таких значеннях параметрів: $a = 2 \text{ м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $\alpha = 0,7$; $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

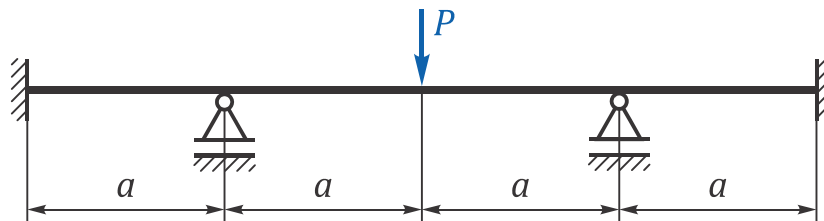


Рис. 44

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції з урахуванням того, що кожне затиснення збільшує ступінь статичної невизначеності на одиницю

$$k = m - 1 + 2 = 3 - 1 + 2 = 4,$$

тобто балка чотири рази статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середніми опорами в тіло балки шарніри і замінивши жорсткі затиснення фіктивними прогонами нульової довжини $l_\phi = 0$.

На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 45), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакції відкинутих зв'язків у вигляді згинальних моментів M_1 , M_2 , M_3 і M_4 . Пронумеруємо опори зліва направо, позначимо прогони номером опори праворуч від прогону.

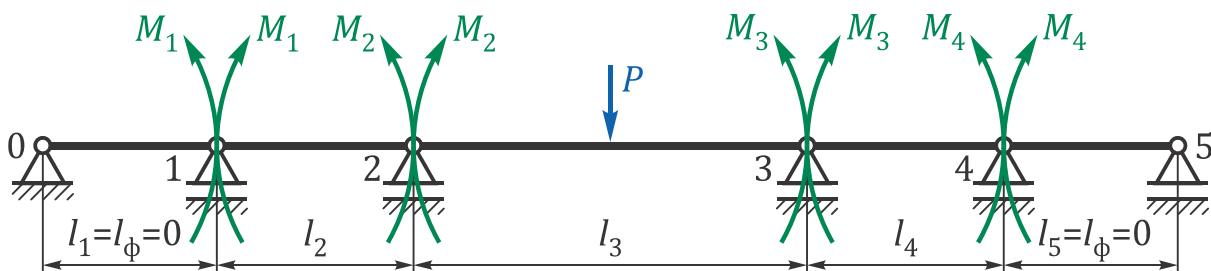


Рис. 45

3. Запишемо систему рівнянь трьох моментів та проаналізуємо її:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}); \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6EI_y(\alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}); \\ M_3 l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) + M_5 l_5 = -6EI_y(\alpha_{4,4} + \alpha_{4,5}), \end{cases}$$

де $M_0 = M_5 = 0$ – моменти на крайніх опорах;

M_1, M_2, M_3, M_4 – невідомі величини (підлягають визначенню);

$l_1 = l_5 = l_\phi = 0$ – довжини першого і п'ятого (фіктивних) прогонів;

$l_2 = l_4 = a = 2 \text{ м}$ – довжини прогонів 2, 4;

$l_3 = 2a = 4 \text{ м}$ – довжина прогону 3;

$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$ і $\alpha_{4,5}$ – кути поворотів на опорах 1, 2, 3 і 4 в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень.

4. Знайдемо кути повороту від заданих навантажень на прогонах, скориставшись довідковими матеріалами, наведеними в дод. 1 (рис. 46):

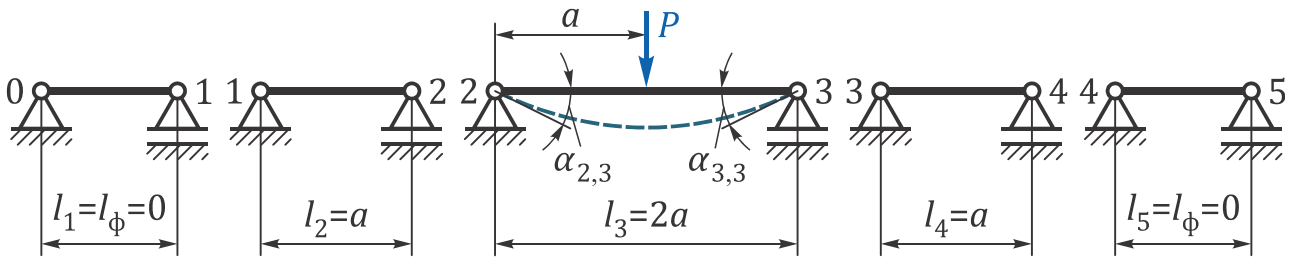


Рис. 46

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,4} = \alpha_{4,5} = 0;$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = \frac{Pl_3^2}{16EI_y} = \frac{P(2a)^2}{16EI_y} = \frac{Pa^2}{4EI_y}.$$

5. Підставимо знайдені величини у систему рівнянь трьох моментів

$$\begin{cases} 0 \cdot 0 + 2M_1(0 + a) + M_2 a = -6EI_y(0 + 0); \\ M_1 a + 2M_2(a + 2a) + M_3 \cdot 2a = -6EI_y\left(0 + \frac{Pa^2}{4EI_y}\right); \\ M_2 \cdot 2a + 2M_3(2a + a) + M_4 a = -6EI_y\left(\frac{Pa^2}{4EI_y} + 0\right); \\ M_3 a + 2M_4(a + 0) + M_5 \cdot 0 = -6EI_y(0 + 0) \end{cases}$$

і після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = 0; \\ M_1 + 6M_2 + 2M_3 = -30; \\ 2M_2 + 6M_3 + M_4 = -30; \\ M_3 + 2M_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь зручним способом, знайдемо невідомі опорні моменти

$$M_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_4 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки моменти M_2 і M_3 вийшли негативними, їх напрямки змінимо на протилежні.

6. Повернімося до еквівалентної системи. Розглянемо окремі двохопорні балки AB_1 , B_2C_1 і C_2D , навантажені заданими зусиллями і знайденими моментами M_1 , M_2 , M_3 і M_4 (рис. 47, а).

Для кожної з найпростіших балок знайдемо реакції опор.

Балка AB_1

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad -M_1 - M_2 + R_{B_1}a = 0; \quad R_{B_1} = \frac{M_1 + M_2}{a} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum M_{B_1} = 0; \quad -M_1 - M_2 + R_Aa = 0; \quad R_A = \frac{M_1 + M_2}{a} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_A + R_{B_1} = -3 + 3 = 0.$$

Балка B_2C_1

Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_{B_2} &= 0; \quad M_2 - M_3 - Pa + R_{C_1} \cdot 2a = 0; \\ R_{C_1} &= \frac{-M_2 + M_3 + Pa}{2a} = \frac{-4 + 4 + 10 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_1} &= 0; \quad M_2 - M_3 - R_{B_2} \cdot 2a + Pa = 0; \\ R_{B_2} &= \frac{M_2 - M_1 + Pa}{2a} = \frac{4 - 4 + 10 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = P + R_{B_2} - R_{C_1} = 10 - 5 - 5 = 0.$$

Балка C_2D

Визначимо опорні реакції:

$$\sum M_{C_2} = 0; \quad M_3 + M_4 - R_D a = 0; \quad R_D = \frac{M_3 + M_4}{a} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum M_D = 0; \quad M_1 + M_2 - R_{C_2} a = 0; \quad R_{C_2} = \frac{M_3 + M_4}{a} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = -R_{C_2} + R_D = -3 + 3 = 0.$$

Зауваження Напрямок та значення опорних реакцій у балці C_2D можна знайти, використовуючи симетрію конструкції, за результатами розрахунку балки AB_1 .

Розіб'ємо елементарні балки на ділянки, виберемо оптимальні напрямки обходу кожної ділянки, пронумеруємо ділянки римськими цифрами (див. рис. 47, а) і запишемо вирази для визначення поперечних сил і згинальних моментів:

$$Q_z^I = -R_A = -3 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = R_{B_2} = 5 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = -R_{C_1} = -5 \text{ кН};$$

$$Q_z^{IV} = R_D = 3 \text{ кН};$$

$$M_y^I = M_1 - R_A x = 2 - 3x = \left|_{x=0} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=a=2 \text{ м}} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -M_2 + R_{B_2} x = -4 + 5x = \left|_{x=0} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=a=2 \text{ м}} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = -M_3 + R_{C_1} x = -4 + 5x = \left|_{x=0} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=a=2 \text{ м}} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = M_4 - R_D x = 2 - 3x \left|_{x=0} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м} \right|_{x=a=2 \text{ м}} = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими результатами побудуємо епюри Q_z і M_y для всієї нерозрізної балки (рис. 47, б).

Перевіримо епюри поперечних сил і згинальних моментів за стрибками та диференціальними співвідношеннями.

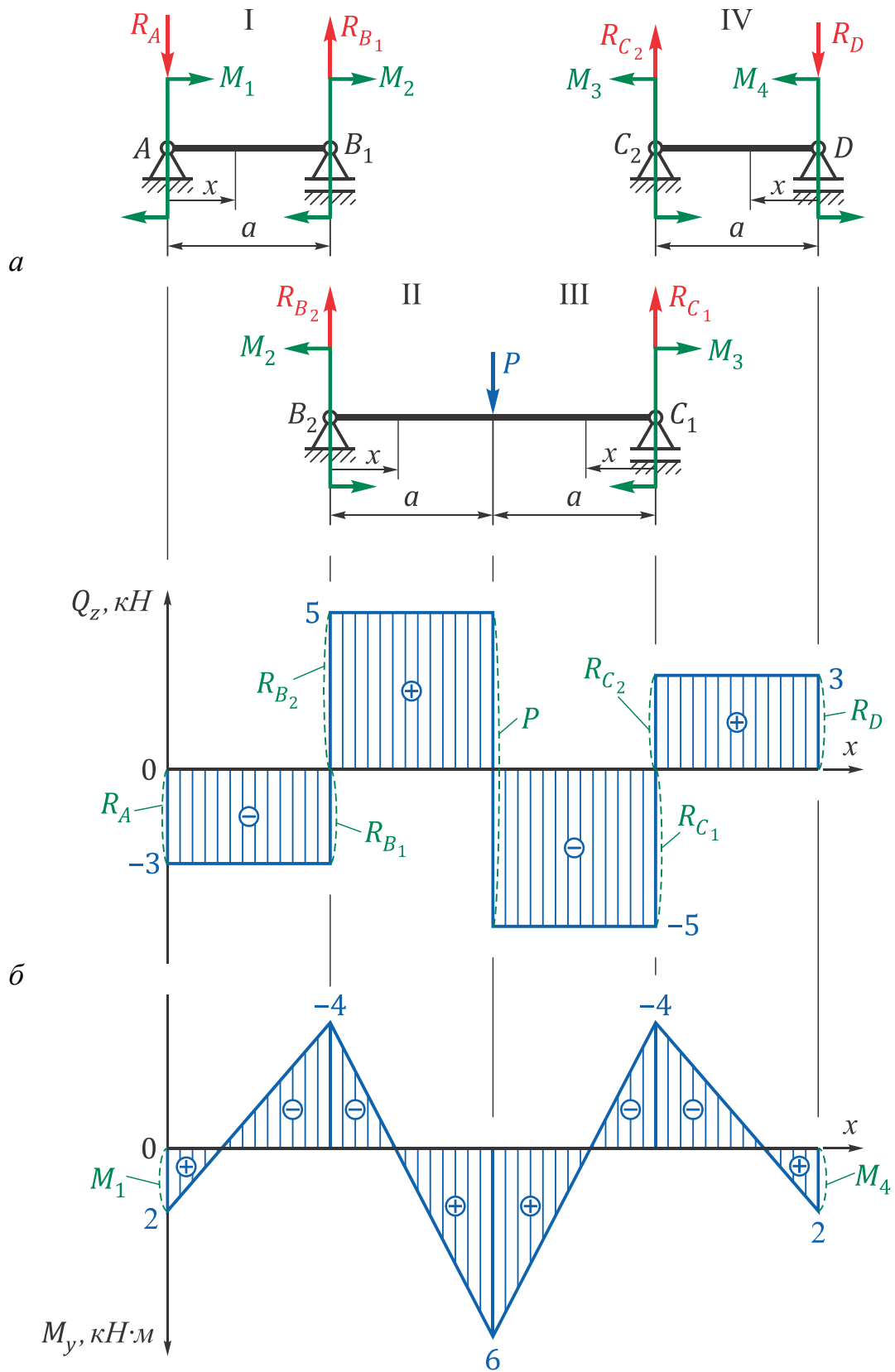


Рис. 47

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Знайдемо вертикальне переміщення перерізу B . І тому виберемо нову основну систему шляхом відкидання чотирьох надлишкових зав'язків (рис. 48, a) і на її основі побудуємо еквівалентну систему (рис. 48, b). Деформація цієї еквівалентної системи має бути ідентичною деформації еквівалентної системи з урізаними шарнірами, а це означає, що вертикальне переміщення перерізу B має дорівнювати нулю.

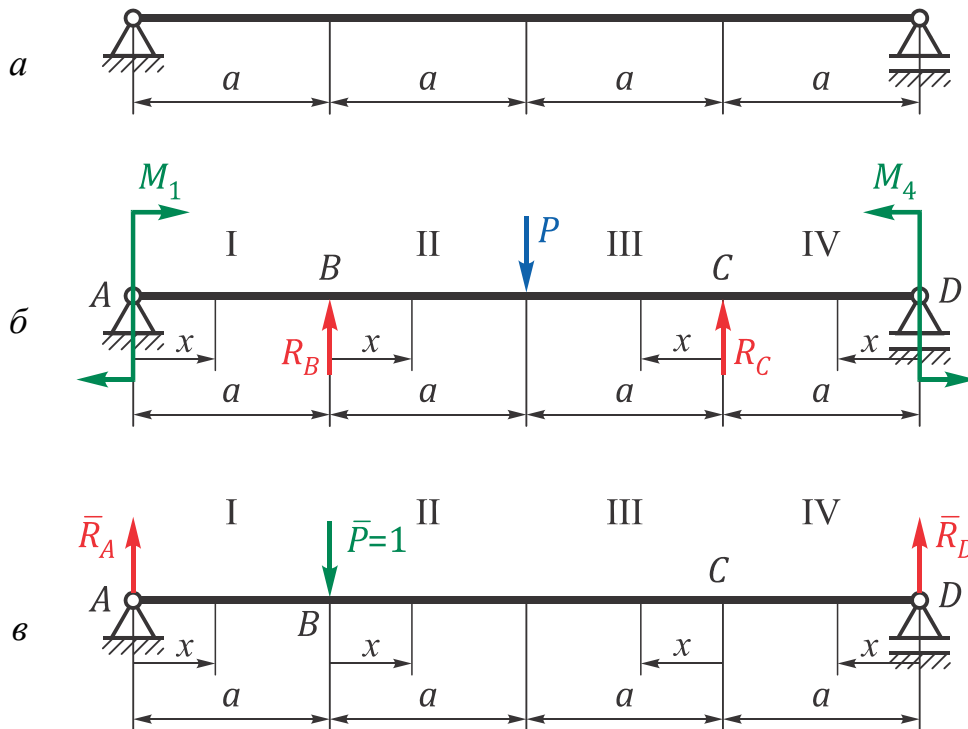


Рис. 48

Зауваження Напрям сил R_B і R_C у новій еквівалентній системі взяті з епюри Q_z (див. рис. 47, b), а їх величини дорівнюють стрибкам у відповідних перерізах (по 8 кН кожна).

Для визначення вертикального переміщення перерізу побудуємо допоміжну одиничну систему (рис. 48, $в$) і визначимо в ній опорні реакції B :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad \bar{R}_D \cdot 4a - \bar{P}a = 0; \quad \bar{R}_D &= \frac{\bar{P}a}{4a} = \frac{1}{4}; \\ \sum M_D = 0; \quad \bar{P} \cdot 3a - \bar{R}_A \cdot 4a = 0; \quad \bar{R}_A &= \frac{\bar{P} \cdot 3a}{4a} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} - \bar{R}_A - \bar{R}_D = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки та виберемо напрямки обходу ідентично еквівалентній системі, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^I = \bar{R}_A x = \frac{3}{4}x;$$

$$\bar{M}_y^{II} = \bar{R}_A(a+x) - \bar{P}x = \frac{3}{4}(2+x) - x = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x - x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x;$$

$$\bar{M}_y^{III} = \bar{R}_D(a+x) = \frac{1}{4}(2+x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x;$$

$$\bar{M}_y^{IV} = \bar{R}_D x = \frac{1}{4}x.$$

Підставимо ці рівняння та рівняння згинальних моментів еквівалентної системи в інтеграл Мора і отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a M_y^I \bar{M}_y^I dx + \int_0^a M_y^{II} \bar{M}_y^{II} dx + \int_0^a M_y^{III} \bar{M}_y^{III} dx + \int_0^a M_y^{IV} \bar{M}_y^{IV} dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a (2-3x) \frac{3}{4} x dx + \int_0^a (-4+5x) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a (-4+5x) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x \right) dx + \int_0^a (2-3x) \frac{1}{4} x dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a \left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}x^2 \right) dx + \int_0^a \left(-6 + \frac{15}{2}x + x - \frac{5}{4}x^2 \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a \left(-2 + \frac{5}{2}x - x + \frac{5}{4}x^2 \right) dx + \int_0^a \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{9}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \left(-6x + \frac{15}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \right. \\ &\quad \left. + \left(-2x + \frac{5}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{9}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \left(-6x + \frac{15}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(-2x + \frac{5x^2}{2 \cdot 2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{4 \cdot 3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1x^2}{2 \cdot 2} - \frac{3x^3}{4 \cdot 3} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{EI_y} \left(3 - 6 - 12 + 15 + 2 - \frac{10}{3} - 4 + 5 - 2 + \frac{10}{3} + 1 - 2 \right) = 0,$$

тобто розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогової балки зроблено правильно.

8. Визначимо розміри кільцевого поперечного перерізу.

За епюрою згинальних моментів (див. рис. 47, б) знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому діє максимальний згинальний момент

$$|M_y|_{max} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

З умови міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \left\{ \text{оскільки } W_y = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{32} \right\} = \frac{32 |M_y|_{max}}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma]$$

отримаємо

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 |M_y|_{max}}{\pi [\sigma] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \times 10^3}{\pi \cdot 160 \times 10^6 (1 - 0,7^4)}} = 0,0795 \text{ м}.$$

Оскільки кільцевий переріз належить до тонкостінних, тому необхідно виконати перевірочний розрахунок за дотичними напруженнями.

Максимальна величина поперечної сили (за епюрою)

$$|Q_z|_{max} = 5 \text{ кН}.$$

Максимальні дотичні напруження в кільцевому поперечному перерізі будуть діяти на нейтральній осі (осі у) і не мають перевищувати допустимих дотичних напружень, які для пластичних матеріалів приблизно дорівнюють половині допустимих нормальних напружень:

$$\tau_{max} = \frac{4 Q_z}{3 F} \frac{(1 - \alpha^3)}{(1 + \alpha^2)(1 - \alpha)} = \frac{16 Q_z}{3 \pi D^2} \frac{(1 - \alpha^3)}{(1 - \alpha^4)(1 - \alpha)} \leq [\tau] \approx 0,5[\sigma];$$

$$\tau_{max} = \frac{16 \cdot 5 \times 10^3 (1 - 0,7^3)}{3 \cdot \pi \cdot 0,0795^2 (1 - 0,7^4)(1 - 0,7)} = 3,87 \text{ МПа} \leq 0,5[\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

Отримані дотичні напруження менше допустимих.

9. Для визначення прогину в точці прикладання сили P та кута повороту на опорі B_2 розглянемо окремо балку B_2C_1 (рис. 49, а).

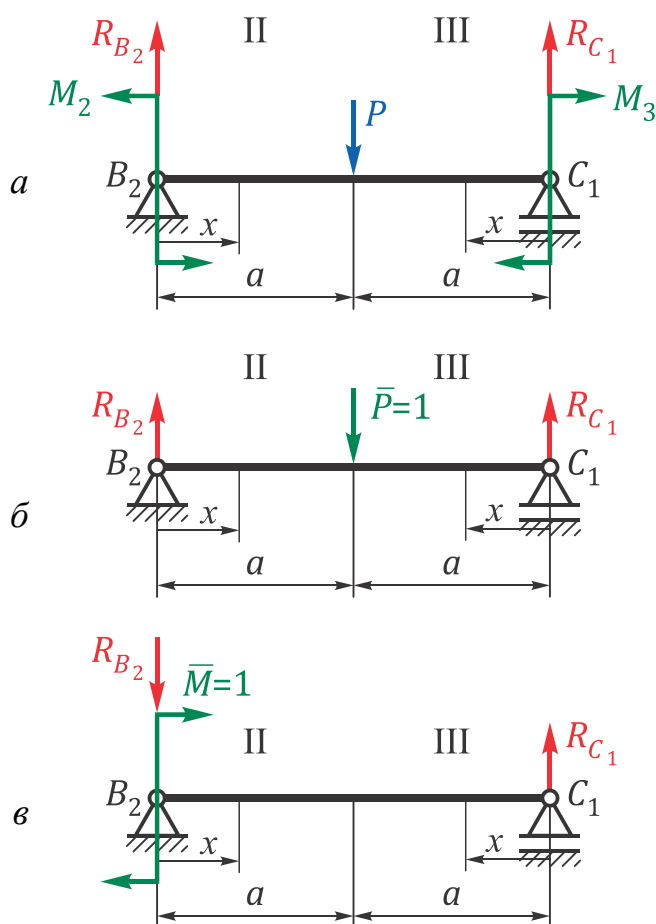


Рис. 49

Побудуємо для третього прогону допоміжні одиничні системи:

– для визначення переміщення до одиничної системи прикладемо одиничну силу в перерізі, в якому прикладена сила P (рис. 49, б);

– для визначення кута повороту на опорі B_2 прикладемо одиничний згинальний момент (рис. 49, в).

Визначимо опорні реакції у першій одиничній системі:

$$\begin{aligned}\sum M_{B_2} &= 0; \\ -\bar{P}a + \bar{R}_{C_1} \cdot 2a &= 0; \\ \bar{R}_{C_1} &= \frac{\bar{P}a}{2a} = \frac{1}{2};\end{aligned}$$

$$\sum M_{C_1} = 0; \quad -\bar{R}_{B_2} \cdot 2a + \bar{P}a = 0; \quad \bar{R}_{B_2} = \frac{\bar{P}a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{P} + \bar{R}_{B_2} - \bar{R}_{C_1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Розіб'ємо одиничну систему на ділянки і виберемо напрямки обходу ідентично другій та третій ділянкам еквівалентної системи, запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^{\text{II}} = \bar{R}_{B_2}x = \frac{1}{2}x; \quad \bar{M}_y^{\text{III}} = \bar{R}_{C_1}x = \frac{1}{2}x.$$

Підставимо ці рівняння та рівняння згинальних моментів еквівалентної системи в інтеграл Мора

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a M_y^{\text{II}} \bar{M}_y^{\text{II}} dx + \int_0^a M_y^{\text{III}} \bar{M}_y^{\text{III}} dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a (-4 + 5x) \frac{1}{2} x dx + \int_0^a (-4 + 5x) \frac{1}{2} x dx \right] = \frac{1}{EI_y} 2 \int_0^a (-4 + 5x) \frac{1}{2} x dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI_y} \left[2 \int_0^a \left(-2x + \frac{5}{2} x^2 \right) dx \right] = \frac{1}{EI_y} \left[2 \left(-2 \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a \right] = \\
&= \frac{1}{EI_y} \left[2 \left(-4 + \frac{20}{3} \right) \right] = 5,33 \times 10^3 \frac{1}{EI_y}.
\end{aligned}$$

З урахуванням того, що для кільцевого поперечного перерізу

$$I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot 0,0795^4}{64} (1 - 0,7^4) = 1,49 \times 10^{-6} \text{ м}^4,$$

остаточно отримаємо

$$\delta = 1,33 \frac{1}{EI_y} = \frac{5,33 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \cdot 1,49 \times 10^{-6}} = 1,789 \times 10^{-2} \text{ м} = 17,89 \text{ мм}.$$

Визначимо опорні реакції у другій одиничній системі:

$$\begin{aligned}
\sum M_{B_2} &= 0; & -\bar{M} + \bar{R}_{C_1} \cdot 2a &= 0; & \bar{R}_{C_1} &= \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{4}; \\
\sum M_{C_1} &= 0; & -\bar{M} + \bar{R}_{B_2} \cdot 2a &= 0; & \bar{R}_{B_2} &= \frac{\bar{M}}{2a} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій:

$$\sum P_z = \bar{R}_{B_2} - \bar{R}_{C_1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Запишемо рівняння згинальних моментів по ділянках:

$$\bar{M}_y^{\text{II}} = \bar{M} - \bar{R}_{B_2} x = 1 - \frac{1}{4} x; \quad \bar{M}_y^{\text{III}} = \bar{R}_{C_1} x = \frac{1}{4} x;$$

Обчислимо інтеграл Мора

$$\begin{aligned}
\theta_{B_2} &= \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a M_y^{\text{II}} \bar{M}_y^{\text{II}} dx + \int_0^a M_y^{\text{III}} \bar{M}_y^{\text{III}} dx \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a (-4 + 5x) \left(1 - \frac{1}{4} x \right) dx + \right. \\
&+ \left. \int_0^a (-4 + 5x) \frac{1}{4} x dx \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\int_0^a \left(-4 + 5x + x - \frac{5}{4} x^2 \right) dx + \int_0^a \left(-x + \frac{5}{4} x^2 \right) dx \right] = \\
&= \frac{1}{EI_y} \left[\left(-4x + 6 \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a \right] = \\
&= \frac{1}{EI_y} \left[-8 + 12 - \frac{10}{3} - 2 + \frac{10}{3} \right] = 2 \times 10^3 \frac{1}{EI_y} = \\
&= \frac{2 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \cdot 1,49 \times 10^{-6}} = 6,71 \times 10^{-2} \text{ рад} = 0,384^\circ.
\end{aligned}$$

Приклад 7

Балка лежить на п'яти опорах і навантажена зосередженої силою P на консолі (рис. 50). Побудувати епюру згинальних моментів при відомих значеннях a , b і P .

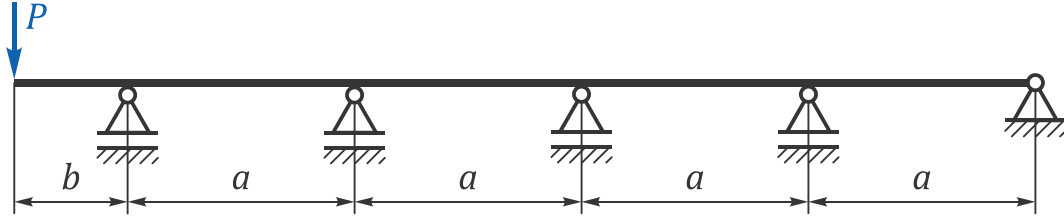


Рис. 50

Розв'язання

1. Визначимо ступінь статичної невизначеності конструкції

$$k = m - 1 = 4 - 1 = 3,$$

тобто балка тричі статично невизначена.

2. Виберемо основну систему, ввівши над середніми опорами в тіло балки шарніри.

На основі вибраної основної системи побудуємо еквівалентну (рис. 51), приклавши до основної системи всі задані зовнішні навантаження та реакції відкритих зв'язків у вигляді згинальних моментів M_1 , M_2 і M_3 . Пронумеруємо опори зліва направо, позначимо прогони номером опори праворуч від прогону.

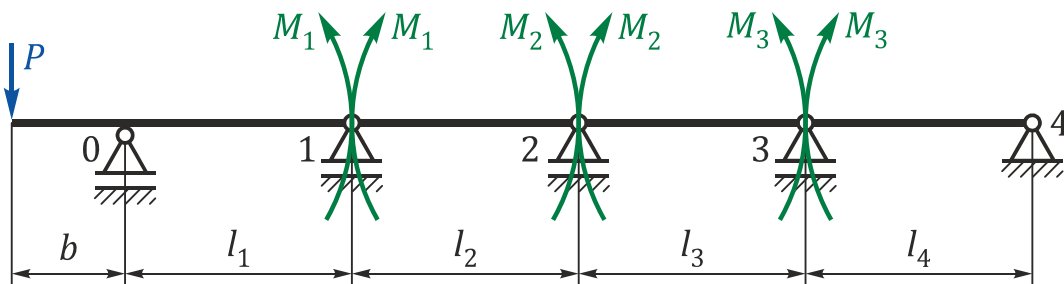


Рис. 51

3. Запишемо систему рівнянь трьох моментів та проаналізуємо її:

$$\begin{cases} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EI_y(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}); \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI_y(\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3}); \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6EI_y(\alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}), \end{cases}$$

де $M_0 = -Pb$ – момент на лівій опорі (опора 0);

M_1, M_2, M_3 – невідомі величини (підлягають визначенню);

$M_4 = 0$ – момент на правій опорі (опора 4);

$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = a$ – довжини прогонів 1, 2, 3 і 4;

$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$, – кути поворотів на опорах 1, 2, 3 в однопрогонових балках від своїх прогонових навантажень.

4. Кути повороту від заданих навантажень дорівнюють нулю, оскільки відсутні внутрішньопрогони навантаження (рис. 52):

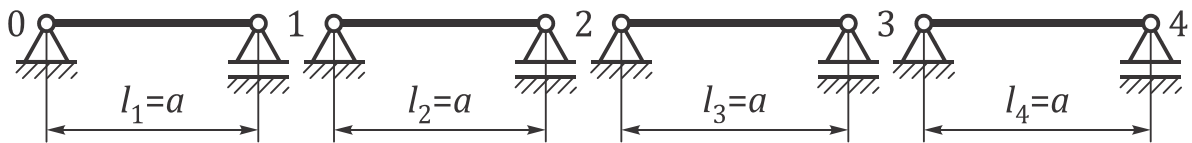


Рис. 52

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = \alpha_{3,4} = 0.$$

5. Підставимо знайдені величини у систему рівнянь трьох моментів

$$\begin{cases} -Pb \cdot a + 2M_1(a + a) + M_2a = -6EI_y(0 + 0); \\ M_1a + 2M_2(a + a) + M_3a = -6EI_y(0 + 0); \\ M_2a + 2M_3(a + a) + 0 \cdot a = -6EI_y(0 + 0) \end{cases}$$

і після перетворень отримаємо

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = Pb; \\ M_1 + 4M_2 + M_3 = 0; \\ M_2 + 4M_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь зручним способом, знайдемо невідомі опорні моменти

$$M_1 = \frac{15}{56}Pb; \quad M_2 = -\frac{4}{56}Pb; \quad M_3 = \frac{1}{56}Pb.$$

Оскільки момент M_2 вийшов негативним, його напрям змінимо на протилежне.

6. Повернімося до еквівалентної системи. Побудуємо епюру M_y (рис. 53).

Оскільки внутрішньопрогоне навантаження відсутнє, можна побудувати епюру згинальних моментів без визначення опорних реакцій у кожній із чотирьох елементарних балок і без запису рівнянь M_y . Для цього необхідно відкласти в характерних перерізах (над опорами) значення одержаних опорних моментів з урахуванням справжнього напрямку та з'єднати їх прямими лініями.

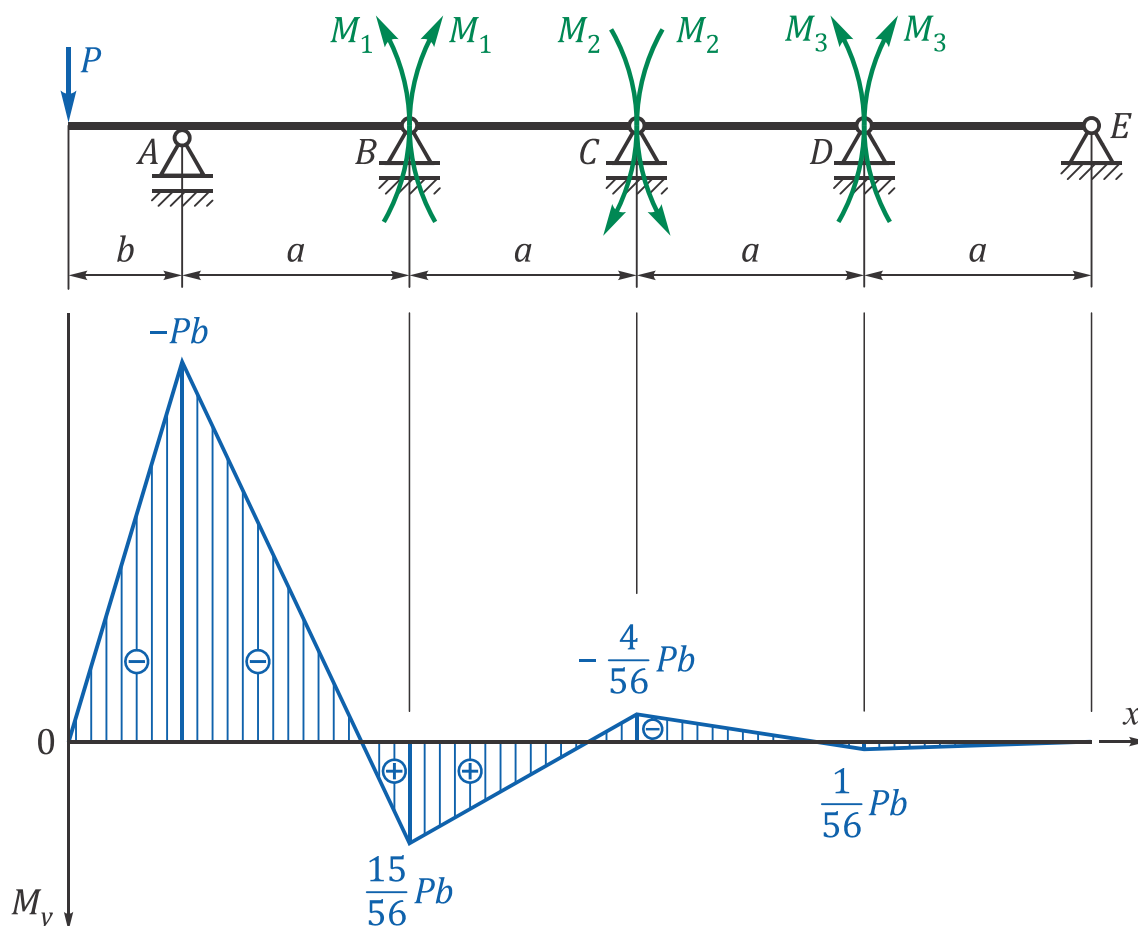


Рис. 53

7. Виконаємо перевірку правильності розкриття статичної невизначеності багатопрогонової нерозрізної балки (деформаційна перевірка).

Знайдемо вертикальне переміщення перерізу A, яке за умовою задачі має дорівнювати нулю. Для цього виберемо нову основну систему шляхом відкидання трьох надлишкових зв'язків (рис. 54, а).

Зауваження | Нову основну систему виберемо таким чином, щоб можна було побудувати епюру згинальних моментів допоміжної одиничної системи, не визначаючи опорних реакцій.

Побудуємо допоміжну одиничну систему та відповідну епюру згинальних моментів $\bar{M}_y$ (рис. 54, б).

Використовуючи спосіб Верещагіна, обчислимо інтеграл Мора, перемноживши з урахуванням знаків площі фігур на епюрі M_y (рис. 54, в) з ординатами під цими центрами на епюрі $\bar{M}_y$.

$$\begin{aligned}
\delta_A &= \frac{1}{EI_y} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EI_y} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 + \omega_6 y_6 + \omega_7 y_7) = \\
&= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{-Pba}{2} \left(-\frac{1}{3}a \right) + \frac{15Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{2}{3}a \right) + \frac{15Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{4}{3}a \right) + \frac{-4Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{5}{3}a \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-4Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{5}{3}a \right) + \frac{Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{4}{3}a \right) + \frac{Pba}{56 \cdot 2} \left(-\frac{2}{3}a \right) \right] = \\
&= \frac{Pba^2}{EI_y} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{56} - \frac{10}{56} + \frac{10}{168} + \frac{10}{168} - \frac{2}{168} - \frac{1}{168} \right) = \frac{Pba^2}{EI_y} \left(\frac{48}{168} - \frac{48}{168} \right) = 0,
\end{aligned}$$

тобто розкриття статичної невизначеності нерозрізної багатопрогової балки зроблено правильно.

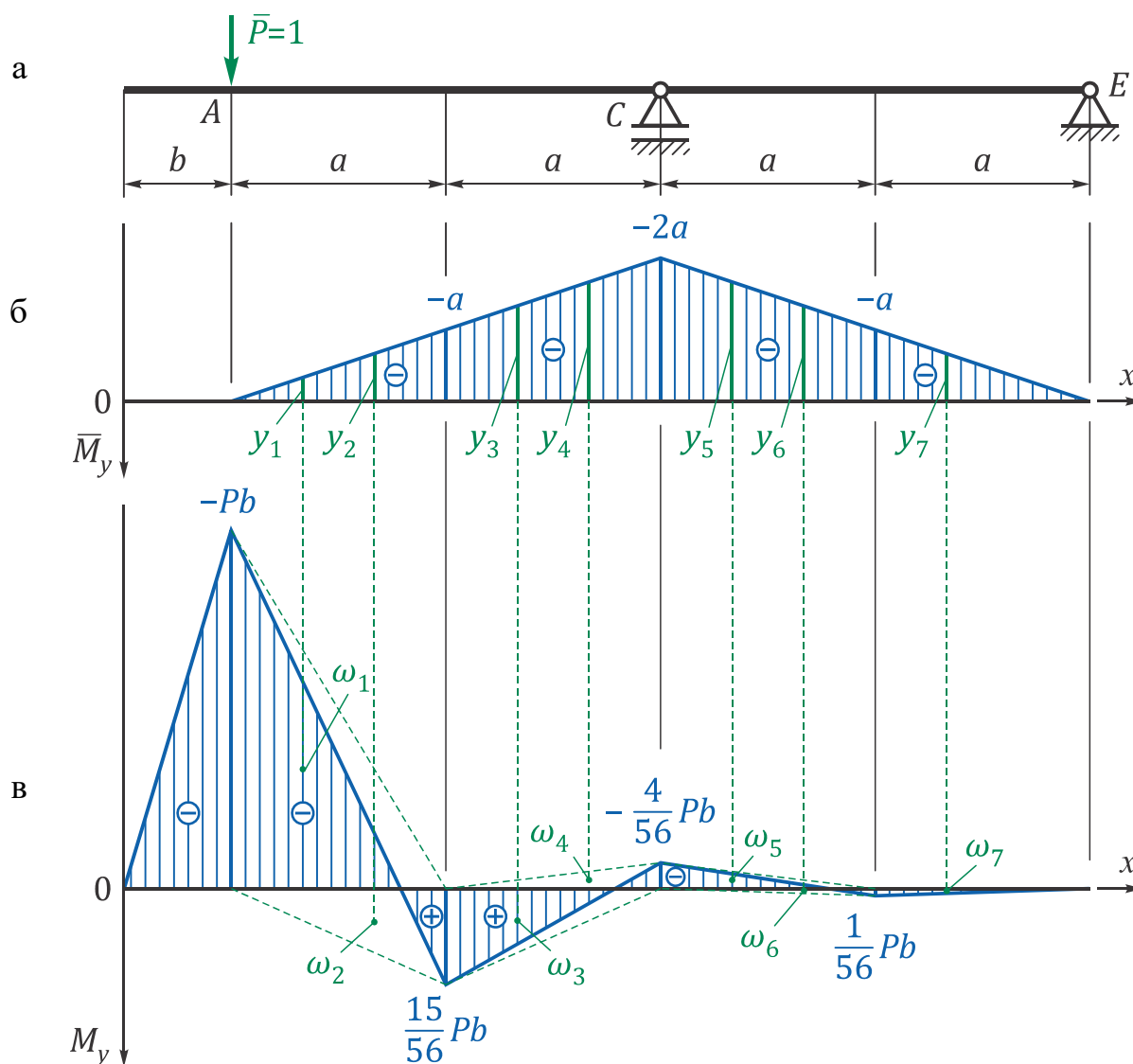


Рис. 54

Запитання для самоперевірки

1. Яка балка називається багатопроговою нерозрізною балкою?
2. Як прийнято нумерувати опори та прогони у багатопрогових балках?
3. Що таке ступінь статичної невизначеності?
4. Чим принципово відрізняється статично невизначена балка від статично визначеної?
5. Як визначити ступінь статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки?
6. Як впливає жорстке затиснення одного з кінців багатопрогової балки на ступінь статичної невизначеності?
7. Що таке основна система? Чому основна система є статично визначеною?
8. Як отримати зі статично невизначеної системи основну?
9. Що таке зовнішня та внутрішня статична невизначеність?
10. Що таке еквівалентна система? У чому її важлива відмінність від вихідної?
11. За якої умови еквівалентна система деформуватиметься так само, як і вихідна?
12. Яка основна система є раціональною при розкритті статичної невизначеності багатопрогової нерозрізної балки? Чому?
13. Як записується рівняння трьох моментів?
14. Яким є фізичний зміст кожного з рівнянь трьох моментів?
15. Чому дорівнює кількість рівнянь трьох моментів?
16. Які особливі випадки необхідно враховувати під час розв'язання задач за допомогою рівнянь трьох моментів?
17. У якому порядку провадиться розрахунок статично невизначених балок?
18. Навіщо і як проводиться деформаційна перевірка розрахунку статично невизначених балок?
19. Чому для перевірки розв'язання зазвичай вибирається нова основна система?

Порядок виконання завдання і варіанти

1. Визначити ступінь статичної невизначеності балки.
2. Скласти еквівалентну систему.
3. Записати систему рівнянь трьох моментів.
4. Визначити кути $\alpha_{n,n}$ та $\alpha_{n,n+1}$.
5. Розв'язати систему рівнянь та визначити невідомі моменти.
6. Побудувати епюри поперечних сил Q_z та згинальних моментів M_y для еквівалентної системи.
7. Підібрати двотавровий або прямокутний поперечний переріз балки. Взяти для матеріалу $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $K_T = 1,2 \dots 1,8$.

Допустиме напруження обчислити за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}.$$

Вихідні дані та розрахункові схеми подано у табл.1–3.

Таблица 1

Варіанти вихідних даних

Параметри	Номер варіанта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P, \text{кН}$	10	12	14	8	6	4	2	4	2	6	4	2	8	10	4
$q, \text{кН/м}$	4	6	8	10	8	6	4	2	4	6	8	10	8	6	4
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	2	4	6	4	6	8	10	8	6	4	2	4	2	4	2
$a, \text{м}$	2	1	1	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2
Параметри	Номер варіанта														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P, \text{кН}$	6	12	14	18	20	4	12	14	12	16	8	2	18	6	4
$q, \text{кН/м}$	2	4	6	8	10	8	6	4	2	4	6	8	10	8	6
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	2	6	6	4	6	8	10	8	6	4	2	4	2	4	8
$a, \text{м}$	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1

Варіанти навантаження балки

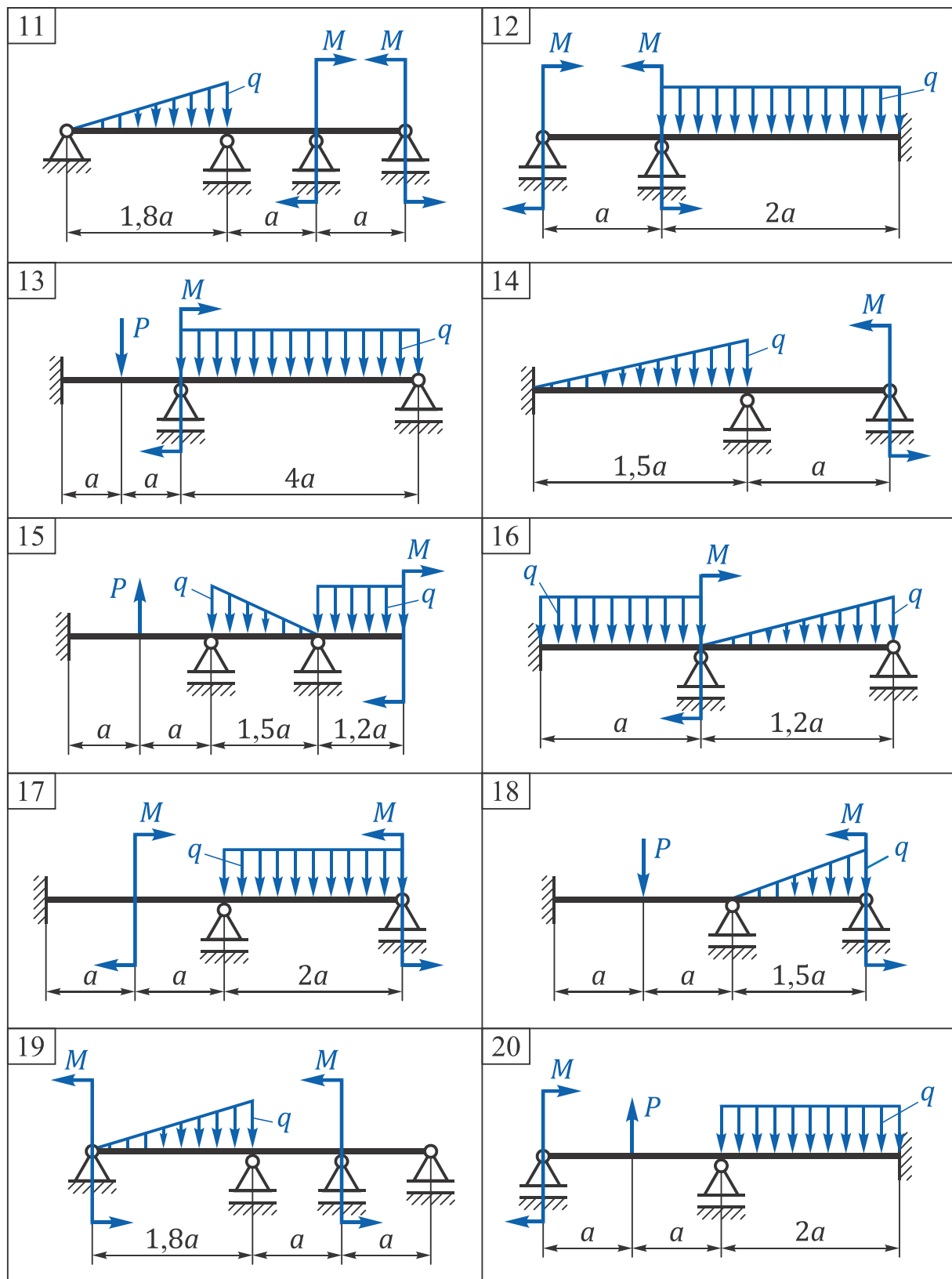
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

11	12
13	14
15	16
17	18
19	20

21	22
23	24
25	26
27	28
29	30

Варіанти навантаження балки

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10



21	22
23	24
25	26
27	28
29	30

КУТИ ПОВОРОТІВ ОПОРНИХ ПЕРЕРІЗІВ ЗА РІЗНИХ СХЕМ НАВАНТАЖЕННЯ БАЛКИ

Схема навантаження	Кути повороту
	$\alpha_A = \frac{Pl^2}{16EI}$ $\beta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
	$\alpha_A = \frac{Pab(l+b)}{6lEI}$ $\beta_B = \frac{Pab(l+a)}{6lEI}$
	$\alpha_A = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$ $\beta_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$
	$\alpha_A = \frac{5Pl^2}{32EI}$ $\beta_B = \frac{5Pl^2}{32EI}$
	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}$ $\beta_B = \frac{Ml}{6EI}$
	$\alpha_A = -\frac{Ml}{24EI}$ $\beta_B = \frac{Ml}{24EI}$

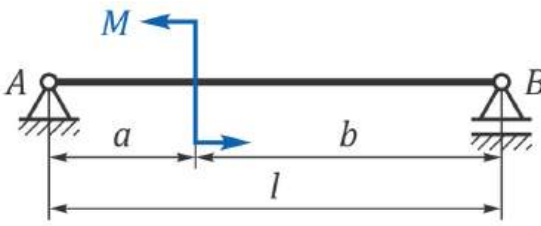
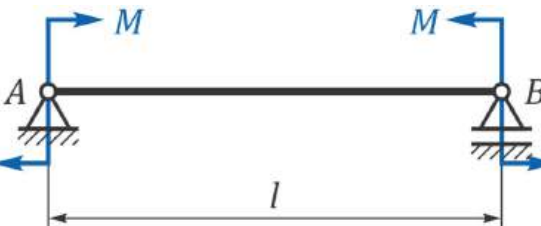
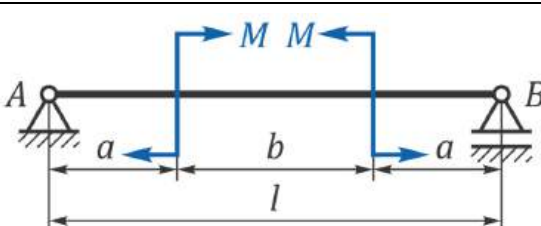
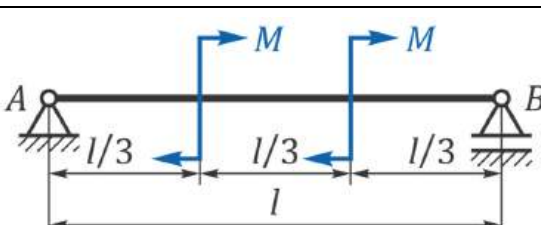
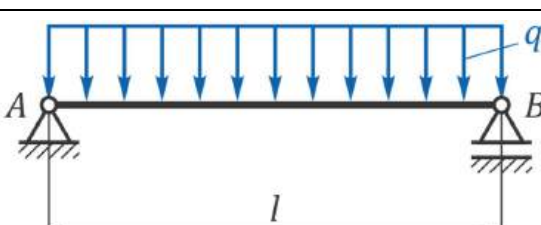
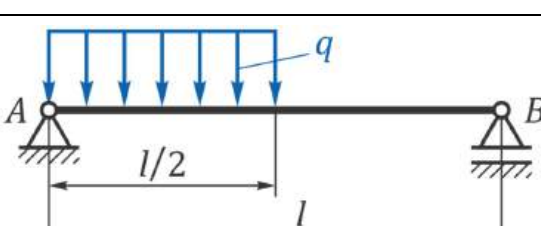
Схема навантаження	Кути повороту
	$\alpha_A = \frac{M(l^2 - 3b^2)}{6lEI}$ $\beta_B = \frac{M(3a^2 - l^2)}{6lEI}$
	$\alpha_A = \frac{Ml}{2EI}$ $\beta_B = \frac{Ml}{2EI}$
	$\alpha_A = \frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI}$ $\beta_B = \frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}$
	$\alpha_A = \frac{Mb}{2EI}$ $\beta_B = \frac{Mb}{2EI}$
	$\alpha_A = -\frac{Ml}{18EI}$ $\beta_B = \frac{Ml}{18EI}$
	$\alpha_A = \frac{ql^3}{24EI}$ $\beta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
	$\alpha_A = \frac{3ql^3}{128EI}$ $\beta_B = \frac{7ql^3}{384EI}$

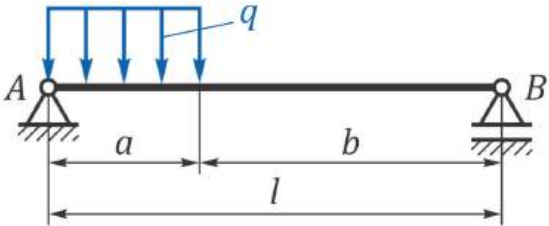
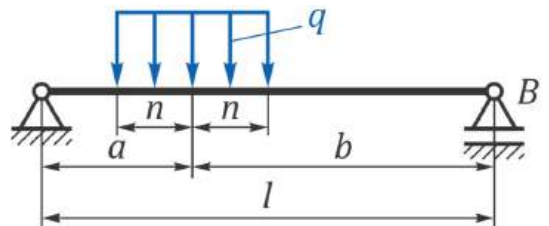
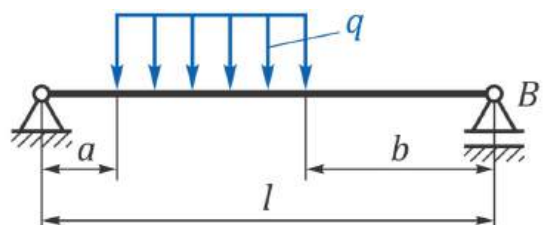
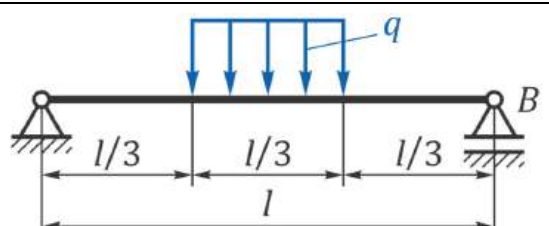
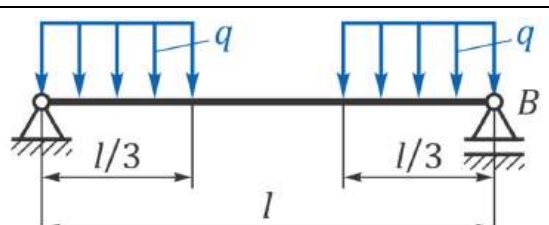
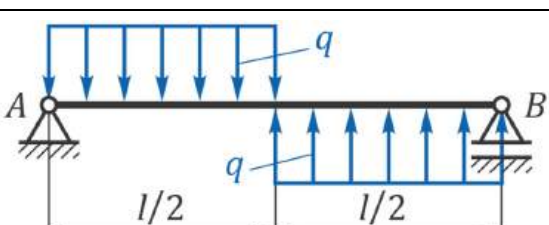
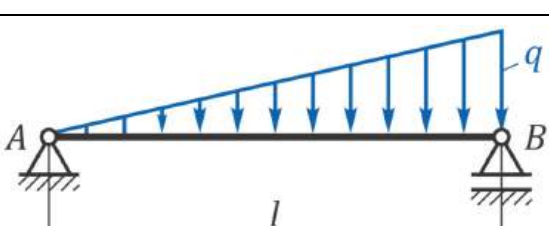
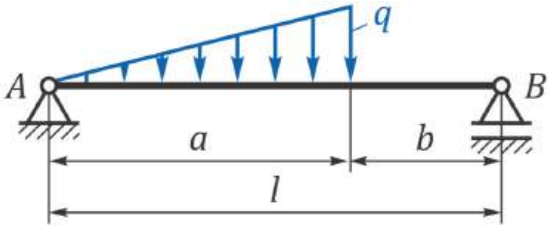
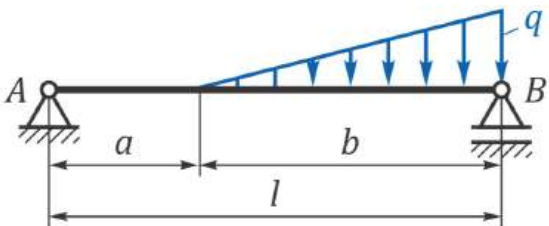
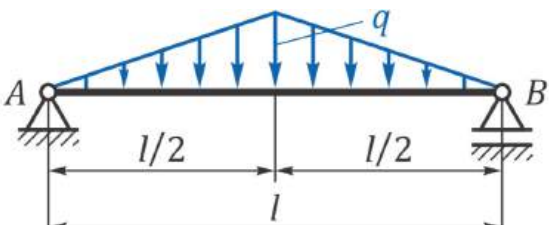
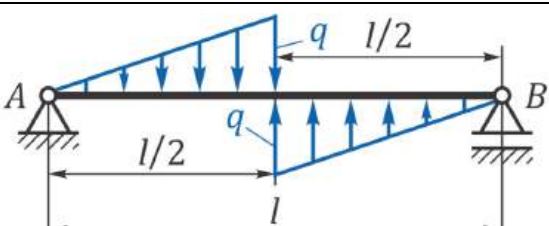
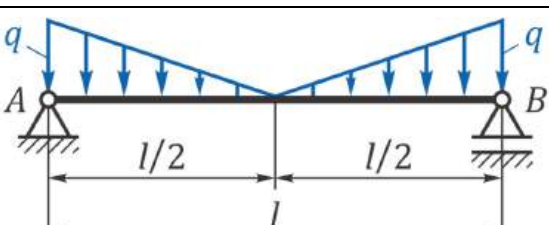
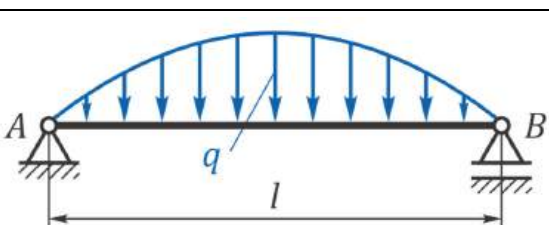
Схема навантаження	Кути повороту
	$\alpha_A = \frac{qa^2(2l - a)^2}{24lEI}$ $\beta_B = \frac{qa^2(2l^2 - a^2)}{24lEI}$
	$\alpha_A = \frac{qnb(l^2 - b^2 - n^2)}{3lEI}$ $\beta_B = \frac{qna(l^2 - b^2 - n^2)}{3lEI}$
	$\alpha_A = \frac{q}{24lEI} [(l^2 - b^2) - a^2(2l - a)]$ $\beta_B = \frac{q}{24lEI} [(l^2 - a^2) - b^2(2l - b)]$
	$\alpha_A = \frac{13ql^3}{648EI}$ $\beta_B = \frac{13ql^3}{648EI}$
	$\alpha_A = \frac{7ql^3}{324EI}$ $\beta_B = \frac{7ql^3}{324EI}$
	$\alpha_A = \frac{ql^3}{192EI}$ $\beta_B = -\frac{ql^3}{192EI}$
	$\alpha_A = \frac{7ql^3}{360EI}$ $\beta_B = \frac{8ql^3}{360EI} = \frac{ql^3}{45EI}$

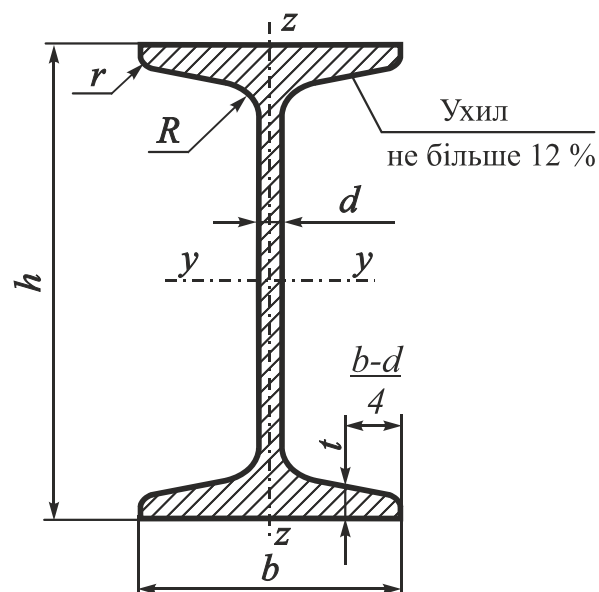
Схема навантаження	Кути повороту
	$\alpha_A = \frac{qa^2l}{360EI} \left(12 \frac{a^2}{l^2} - 45 \frac{a}{l} + 40 \right)$ $\beta_B = \frac{qa^2l}{90EI} \left(5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$
	$\alpha_A = \frac{qb^2l}{360EI} \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right)$ $\beta_B = \frac{qb^2l}{360EI} \left(3 \frac{b^2}{l^2} - 15 \frac{b}{l} + 20 \right)$
	$\alpha_A = \frac{5ql^3}{192EI}$ $\beta_B = \frac{5ql^3}{192EI}$
	$\alpha_A = \frac{7ql^3}{2880EI}$ $\beta_B = -\frac{7ql^3}{2880EI}$
	$\alpha_A = \frac{ql^3}{64EI}$ $\beta_B = \frac{ql^3}{64EI}$
 квадратна парабола	$\alpha_A = \frac{ql^3}{20EI}$ $\beta_B = \frac{ql^3}{20EI}$

Зауваження

Кути повороту вважаються позитивними, якщо частина балки біля опори, що розглядається, прогинається вниз.

СОРТАМЕНТ ГАРЯЧЕКАТАНОЇ СТАЛІ. БАЛКИ ДВОТАВРОВІ. ГОСТ 8239-89

06



Примітки:

1. Площа поперечного перерізу і маса 1 м двотавра обчислені за номінальними розмірами; густина сталі вважається $7,85 \text{ г/см}^3$.
2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.
3. У таблиці використано позначення:

h – висота балки;
 b – ширина полиці;
 d – товщина стінки;
 t – середня товщина полиці;
 R – радіус внутрішнього заокруглення;
 F – площа поперечного перерізу;
 r – радіус заокруглення полиці;
 I – момент інерції;
 W – момент опору;
 S – статичний момент півперерізу;
 i – радіус інерції.

Номер двотавра	Розміри, мм						F, см ²	Маса 1 м, кг	Довідкові дані для осей						
	h	b	d	t	R	r			y – y				z – z		
									I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	S _y , см ³	I _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,9	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Писаренко, Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, А. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища шк., 2004. – 655 с.

Belyaev, N. M. Strength of Materials / N. M. Belyaev. – Mir Publishers, 1979. – 648 p.

Goodno, B. J. Mechanics of Materials / B. J. Goodno, J. M. Gere. – Cengage Learning, 2018. – 1188 p.

Hibbeler, R. C. Mechanics of Materials / R. C. Hibbeler. – Pearson, 2017. – 896 p.

Timoshenko, S. P. Strength of Materials. Parts I. Elementary Theory and Problems / S. P. Timoshenko. – D. Van Nostrand Company, Inc, 1955. – 459 p.

Timoshenko, S. P. Strength of Materials. Parts II. Advanced Theory and Problems / S. P. Timoshenko. – D. Van Nostrand Company, Inc, 1956. – 572 p.

ЗМІСТ

Перелік позначень	3
1. Багатопрогонова нерозрізна балка	4
2. Вибір раціональної основної системи	6
3. Вивід рівняння трьох моментів	10
4. Особливі випадки при розв'язанні задач за допомогою рівняння трьох моментів	16
5. Порядок розрахунку багатопрогової нерозрізної балки	18
6. Приклади розв'язання задач	20
Приклад 1	20
Приклад 2	32
Приклад 3	38
Приклад 4	46
Приклад 5 (розрахунок за допустимими навантаженням)	54
Приклад 6	64
Приклад 7	74
Запитання для самоперевірки	78
Порядок виконання завдання і варіанти	79
Додаток 1. Кути поворотів опорних перерізів за різних схем навантаження балки	86
Додаток 2. Сортамент гарячекатаної сталі. Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89	90
Бібліографічний список	92

Навчальне видання

**Гребенніков Михайло Миколайович
Мірошніков Віталій Юрійович
Ткаченко Денис Анатолійович**

**РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОГОНОВИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК.
РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ**

Редактор Н. М. Сікульська

Зв. план, 2026

Підписано до видання 23.01.2026

Ум. друк. арк. 5,2. Обл.-вид. арк. 5,88. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17

<http://www.khai.edu>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

