

РОЗРАХУНОК БРУСІВ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»

РОЗРАХУНОК БРУСІВ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ

Методичні вказівки до виконання домашнього завдання

Харків «ХАІ» 2026

Затверджено науково-методичними комісіями університету
з відповідних галузей знань
12 грудня (протокол № 6), 19 грудня (протокол № 4)
і 22 грудня (протокол № 5) 2025 року

Укладачі: М. М. Гребенніков, А. О. Кирпикін

ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

Програмами вивчення курсів «Механіка матеріалів та конструкцій» та «Опір матеріалів» передбачено виконання домашнього завдання за темою «Розрахунок брусів на міцність та жорсткість», що допоможе здобувачам освіти засвоїти принципи розрахунків елементів конструкцій на міцність і жорсткість у разі простих деформацій.

Домашнє завдання містить п'ять задач.

Задача № 1

Ступінчастий стрижень в умовах розтягання (стискання) (табл. 1, 2 у дод. 1).

Задано зовнішні сили P_i , співвідношення довжин і площ перерізів, допустимі значення напружень при розтяганні $[\sigma]_p$ та стисканні $[\sigma]_c$.

Необхідно побудувати епюру поздовжніх сил N_x , підібрати площу поперечного перерізу F з умови міцності, побудувати епюру нормальних напружень σ по довжині стрижня.

Задача № 2

Вал за умов кручення (табл. 3, 4 у дод. 1).

Задано зовнішні крутні моменти M_i , довжини ділянок, допустимі дотичні напруження $[\tau]$, допустимий відносний кут закручування $[\psi]$ і співвідношення діаметрів $\alpha = d/D$ для порожнистого (трубчастого) перерізу (D – зовнішній діаметр, d – внутрішній діаметр).

Необхідно побудувати епюру крутних моментів M_x і підібрати з умови міцності та жорсткості розміри перерізів двох типів: суцільне кругле і кільцеве. У небезпечному перерізі побудувати епюри розподілу дотичних напружень $[\tau]$ для двох типів підібраних перерізів. Порівняти вали за вагою. Для вала суцільного круглого перерізу побудувати епюру кутів закручування φ .

Задача № 3

Консольна балка в умовах плоского поперечного згину (табл. 5, 6 у дод. 1).

Задано довжини ділянок, розмір перерізу (номер двотавра), співвідношення зовнішніх навантажень і допустиме значення нормальних напружень $[\sigma]$.

Необхідно побудувати епюри поперечних сил Q_z і згинальних моментів M_y , знайти небезпечний переріз, з умови міцності визначити значення допустимих навантажень.

Задача № 4

Балка на двох шарнірних опорах в умовах плоского поперечного згину (табл. 7, 8 у дод. 1).

Задано зовнішні сили і довжини ділянок, величина допустимого напруження для матеріалу балки $[\sigma]$ і співвідношення розмірів сторін $k = h/b$ для прямокутного перерізу.

Необхідно побудувати епюри поперечних сил Q_z і згинальних моментів M_y . З умови міцності визначити розміри перерізів трьох типів: суцільне кругле, прямокутне і двотаврове. Порівняти за вагою підібрані типи балок. У небезпечному перерізі побудувати епюри розподілу нормальних σ та дотичних τ напружень за висотою поперечного перерізу для підібраних типів балок.

Задача № 5

Плоска рама (табл. 9, 10 у дод. 1).

Задано розміри рами, зовнішні навантаження і величина допустимого напруження для матеріалу балки $[\sigma]$.

Необхідно побудувати епюри поздовжніх сил N_x , поперечних сил Q_z і згинальних моментів M_y . При заданому значенні допустимого напруження $[\sigma]$ підібрати розмір поперечного перерізу у вигляді двотавра або двох швелерів.

Номер варіанта завдання визначається двома числами: перше – номер рисунка, тобто розрахункової схеми завдання, друге – варіант величин геометричних розмірів та зовнішніх навантажень.

Нижче послідовно наведено приклади розв'язання задач із необхідними поясненнями; схеми завдань, таблиці вихідних даних та сортамент подано у дод. 1.

Приклад розв'язання задачі № 1

Для заданого ступінчастого стрижня (рис. 1, а) визначити площу поперечного перерізу F та побудувати епюри N_x та σ_x за таких значень параметрів: $P_1 = 10$ кН; $P_2 = 8$ кН; $P_3 = 24$ кН; $[\sigma]_p = 160$ МПа; $[\sigma]_c = 120$ МПа.

Розв'язання

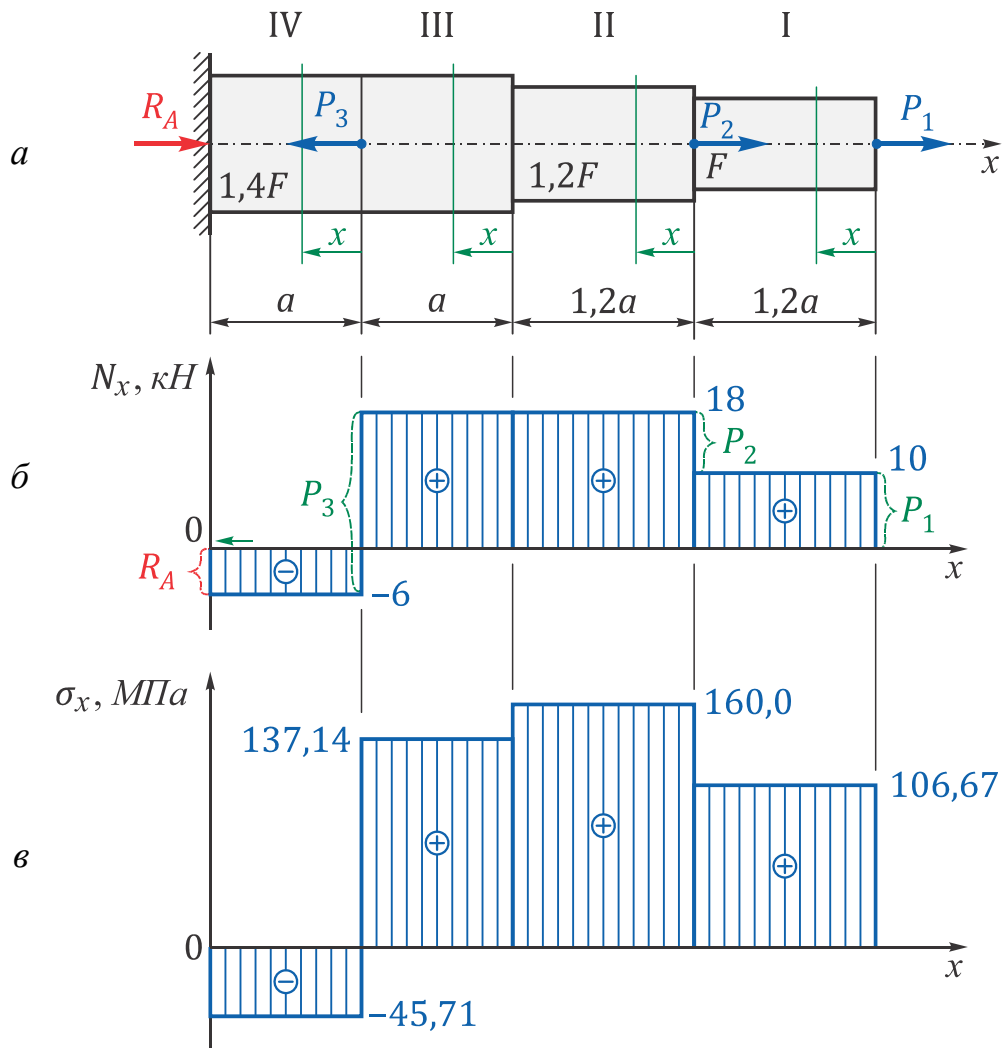


Рис. 1

1. Накреслимо стрижень у масштабі. Розіб'ємо його на ділянки, номери ділянок позначимо римськими цифрами.

Зауваження | Межами ділянок є перерізи, в яких прикладено зовнішні сили (у тому числі й опорні реакції), перерізи, в яких стрибкоподібно змінюється площа поперечного перерізу стрижня.

2. На відстані x від початку кожної ділянки виділимо перерізи, в яких необхідно визначити поздовжню силу.

Застосовуючи метод перерізів, запишемо вирази для поздовжніх сил N_x у поперечних перерізах кожної з ділянок та обчислимо їх значення:

$$N_x^I = P_1 = 10 \text{ кН};$$

$$N_x^{II} = P_1 + P_2 = 10 + 8 = 18 \text{ кН};$$

$$N_x^{III} = P_1 + P_2 = 10 + 8 = 18 \text{ кН};$$

$$N_x^{IV} = P_1 + P_2 - P_3 = 10 + 8 - 24 = -6 \text{ кН}.$$

Зауваження Величини N_x^i визначають шляхом підсумовування проєкцій на нормаль до перерізу всіх зовнішніх сил, прикладених по один бік від перерізу, що розглядається. Величина сили має знак «+», якщо вона спрямована від перерізу, що розглядається (спричиняє розтягнення), і навпаки.

Побудуємо епюру поздовжніх сил N_x (рис. 1, б).

Перевіримо правильність побудови епюри за стрибками.

Зауваження Наслідком використання методу перерізів є наявність стрибків на епюрі поздовжніх сил у перерізах, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили. **Модуль стрибка** завжди дорівнює **величині зосередженої зовнішньої сили**, прикладеної в цьому перерізі.

Визначимо напрямок і величину реактивної сили, що виникає у затисненні. $R_A = -6 \text{ кН}$ і направлена вправо, що відповідає стисканню на IV ділянці.

3. Визначимо площу поперечного перерізу стрижня.

Оскільки матеріал стрижня має різні значення допустимих напружень при розтяганні та стисканні, запишемо умови міцності для розтягнутих

$$\sigma_x = \frac{N_x^i}{F_i} \leq [\sigma]_p$$

та стиснених ділянок

$$|\sigma_x| = \left| \frac{N_x^i}{F_i} \right| \leq [\sigma]_c.$$

Отримаємо

$$\sigma_x^I = \frac{N_x^I}{F} \leq [\sigma]_p \Rightarrow F \geq \frac{N_x^I}{[\sigma]_p} = \frac{10 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 62,5 \times 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_x^{II} = \frac{N_x^{II}}{1,2F} \leq [\sigma]_p \Rightarrow F \geq \frac{N_x^{II}}{1,2[\sigma]_p} = \frac{18 \times 10^3}{1,2 \cdot 160 \times 10^6} = 93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_x^{III} = \frac{N_x^{III}}{1,4F} \leq [\sigma]_p \Rightarrow F \geq \frac{N_x^{III}}{1,4[\sigma]_p} = \frac{18 \times 10^3}{1,4 \cdot 160 \times 10^6} = 80,36 \times 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$|\sigma_x^{IV}| = \left| \frac{N_x^{IV}}{1,4F} \right| \leq [\sigma]_c \Rightarrow F \geq \frac{|N_x^{IV}|}{1,4[\sigma]_p} = \frac{6 \times 10^3}{1,4 \cdot 120 \times 10^6} = 35,71 \times 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Оскільки умова міцності має виконуватися для всіх ділянок, то виберемо більше з отриманих значень площі як розрахункове, тобто остаточно візьмемо $F = 93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2$.

Зауваження | Для скорочення розрахунків доцільно знайти найнебезпечніші розтягнуті та стиснені ділянки та визначити потрібну площу поперечного перерізу по них.
У цьому завданні найбільш навантаженими є II (розтягнення) і IV (стиснення) ділянки.

4. Обчислимо σ_x по ділянках і побудуємо епюру (рис. 1, в):

$$\sigma_x^I = \frac{N_x^I}{F} = \frac{10 \times 10^3}{93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2} = 106,67 \times 10^6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{II} = \frac{N_x^{II}}{1,2F} = \frac{18 \times 10^3}{1,2 \cdot 93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2} = 160,0 \times 10^6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{III} = \frac{N_x^{III}}{1,4F} = \frac{18 \times 10^3}{1,4 \cdot 93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2} = 137,14 \times 10^6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{IV} = \frac{N_x^{IV}}{1,4F} = \frac{-6 \times 10^3}{1,4 \cdot 93,75 \times 10^{-6} \text{ м}^2} = -45,71 \times 10^6 \text{ МПа},$$

тобто найнебезпечнішою є ділянка II, де напруження максимальні і дорівнюють допустимим напруженням на розтягнення $[\sigma]_p$.

Зауваження | Епюра нормальних напружень σ_x за знаком точно відповідає епюрі поздовжніх сил N_x .

Приклад розв'язання задачі № 2

Для заданого вала постійної жорсткості (рис. 2, а) побудувати епюру крутних моментів; підібрати перерізи двох типів: кругле суцільне та кільцеве; порівняти підібрані вали за вагою; побудувати епюри дотичних напружень τ для небезпечного перерізу кожного з валів; для суцільного вала побудувати епюру кутів закручування за таких значень параметрів: $M_1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_3 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; допустиме напруження $[\tau] = 90 \text{ МПа}$; допустиме значення відносного кута закручування $[\psi] = 1^\circ/\text{м}$; модуль зсувної пружності матеріалу $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$; коефіцієнт тонкостінності вала кільцевого поперечного перерізу $\alpha = d/D = 0,8$; $a = 0,2 \text{ м}$.

Розв'язання

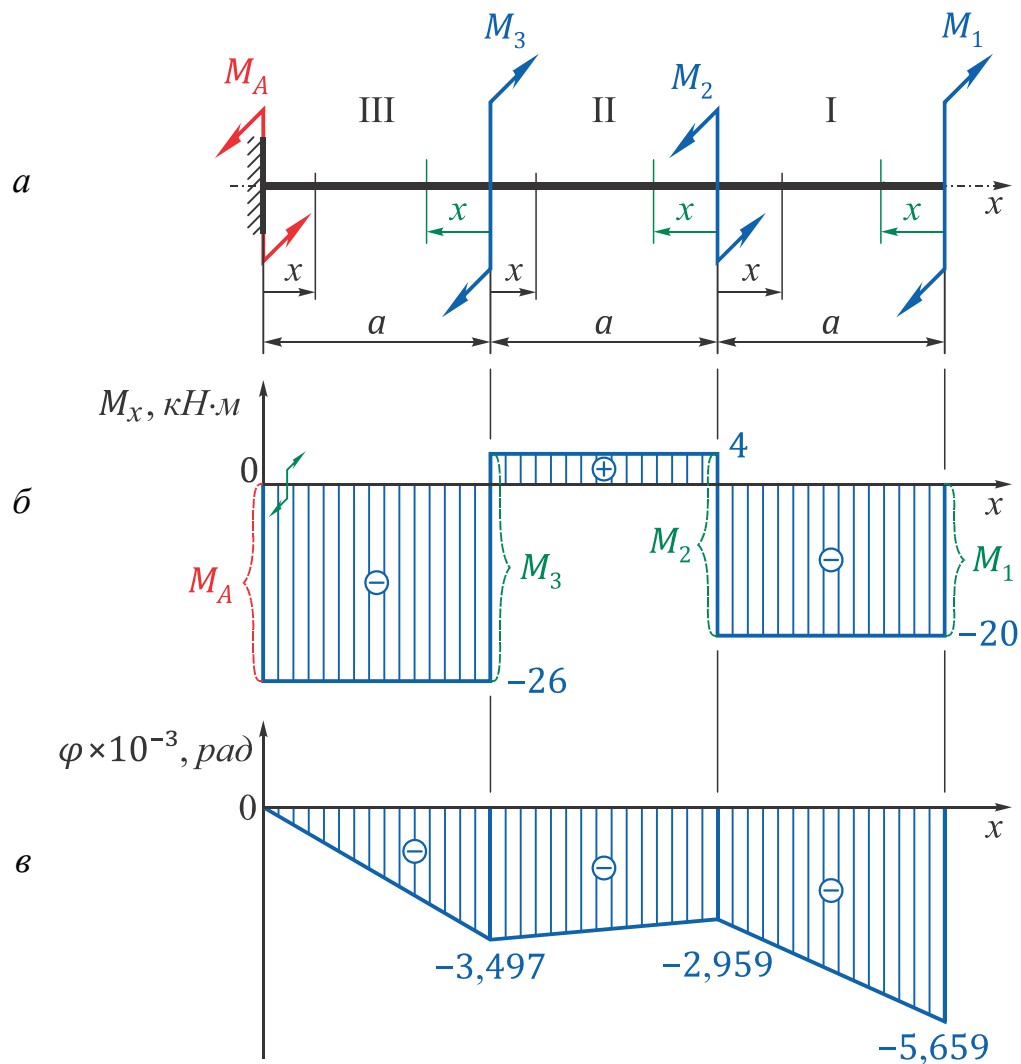


Рис. 2

1. Накреслимо вал у масштабі. Розіб'ємо його на ділянки за принципом незмінності системи зовнішніх моментів у межах ділянки, номери ділянок позначимо римськими цифрами.

Зауваження | Межами ділянок є перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені моменти (зокрема і опорний момент).

2. На відстані x від початку кожної ділянки виділимо довільні перерізи, в яких необхідно визначити крутний момент.

Застосовуючи метод перерізів, запишемо вирази для крутних моментів M_x у поперечних перерізах кожної з ділянок та обчислимо їх значення:

$$M_x^I = -M_1 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_x^{II} = -M_1 + M_2 = -20 + 24 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_x^{III} = -M_1 + M_2 - M_3 = -20 + 24 - 30 = -26 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Зауваження | Величини M_x^i визначають шляхом підсумовування всіх зовнішніх моментів, прикладених по один бік від перерізу. Зовнішні крутні моменти, які мають однаковий напрямок, беруться з однаковими знаками.

Побудуємо епюру крутних моментів M_x (рис. 2, б).

Перевіримо правильність побудови епюри M_x . Стрибки на епюрі присутні в тих перерізах, в яких прикладено зосереджені моменти та реактивний момент у затисненні, величини яких чисельно дорівнюють величинам прикладених зовнішніх зусиль.

Зауваження | Наслідком використання методу перерізів є наявність стрибків на епюрі крутних моментів, в перерізах, в яких прикладено зовнішні моменти і реактивний момент у затисненні. Модуль стрибка завжди дорівнює величині зосередженого зовнішнього моменту, прикладеного в цьому перерізі.

Визначимо напрямок і величину реактивного моменту, що спричиняється в затисненні. $M_A = 26 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і спрямований проти годинникової стрілки, якщо дивитися праворуч.

3. Визначимо розміри поперечних перерізів вала з умови міцності та жорсткості.

Оскільки вал по довжині має однаковий переріз, найбільш небезпечною є ділянка III, на якій

$$M_{x_{max}} = |M_x^{III}| = 26 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Суцільний круглий вал

Умова міцності при крученні

$$\tau_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_\rho} \leq [\tau],$$

де $M_{x_{max}}$ – максимальний крутний момент;

W_ρ – полярний момент опору суцільного круглого перерізу;

$[\tau]$ – допустиме напруження.

Для круглого суцільного перерізу полярний момент опору

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16},$$

де d – діаметр суцільного вала.

Тоді зовнішній діаметр круглого суцільного поперечного перерізу

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{x_{max}}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 26 \times 10^3}{\pi \cdot 90 \times 10^6}} = 0,1137 \text{ м}.$$

Умова жорсткості при крученні

$$\psi_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{GI_\rho} \leq [\psi] \frac{\pi}{180},$$

де $M_{x_{max}}$ – максимальний крутний момент;

I_ρ – полярний момент інерції суцільного круглого перерізу;

G – модуль зсувної пружності матеріалу;

$[\psi]$ – допустиме значення відносного кута закручування.

Зауваження | За умов жорсткості необхідно $[\psi]$ підставляти в рад/м або $1/\text{м}$:

$$[\psi] (\text{рад/м}) = [\psi] (^\circ/\text{м}) \frac{\pi}{180}.$$

Для круглого суцільного перерізу полярний момент опору

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32},$$

де d – діаметр суцільного вала.

Тоді зовнішній діаметр круглого суцільного поперечного перерізу

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{x_{max}} \cdot 180}{G\pi^2[\psi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 26 \times 10^3 \cdot 180}{8 \times 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 1}} = 0,1173 \text{ м.}$$

Оскільки мають задовольнятися як умова міцності, так і умова жорсткості, то остаточно візьмемо

$$d = 0,1173 \text{ м.}$$

Вал кільцевого поперечного перерізу

Умова міцності при крученні

$$\tau_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

де $M_{x_{max}}$ – максимальний крутний момент;

W_{ρ} – полярний момент опору кільцевого поперечного перерізу;

$[\tau]$ – допустиме напруження.

Для круглого кільцевого перерізу полярний момент опору

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

де D – зовнішній діаметр вала кільцевого поперечного перерізу;

$\alpha = d/D$ – коефіцієнт тонкостінності вала кільцевого поперечного перерізу.

Тоді зовнішній діаметр круглого кільцевого поперечного перерізу

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{x_{max}}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 26 \times 10^3}{\pi \cdot 90 \times 10^6(1 - 0,8^4)}} = 0,1356 \text{ м.}$$

Умова жорсткості при крученні

$$\psi_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{GI_{\rho}} \leq [\psi] \frac{\pi}{180},$$

де $M_{x_{max}}$ – максимальний крутний момент;

I_{ρ} – полярний момент інерції кільцевого поперечного перерізу;

G – модуль зсувної пружності матеріалу;

$[\psi]$ – допустиме значення відносного кута закручування.

Для круглого кільцевого перерізу полярний момент опору

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4),$$

де D – зовнішній діаметр вала кільцевого поперечного перерізу;

$\alpha = d/D$ – коефіцієнт тонкостінності вала кільцевого поперечного перерізу.

Тоді зовнішній діаметр круглого суцільного поперечного перерізу

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{x_{max}} \cdot 180}{G\pi^2[\psi](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 26 \times 10^3 \cdot 180}{8 \times 10^{10} \cdot \pi^2 \cdot 1 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,1339 \text{ м.}$$

Оскільки мають задовольнятися як умова міцності, так і умова жорсткості, то остаточно візьмемо

$$D = 0,1356 \text{ м};$$

$$d = \alpha D = 0,8 \cdot 0,1356 = 0,1085 \text{ м.}$$

4. Порівняємо вали за вагою:

$$\frac{G^{\bullet}}{G^{\circ}} = \frac{F^{\bullet} l \rho g}{F^{\circ} l \rho g} = \frac{F^{\bullet}}{F^{\circ}} = \frac{d^2}{D^2(1 - \alpha^2)} = \frac{0,1173^2}{0,1356^2(1 - 0,8^2)} = 2,08.$$

Таким чином, вал круглого суцільного поперечного перерізу майже вдвічі важчий за вал кільцевого перерізу.

5. Побудуємо епюри дотичних напружень для небезпечного перерізу кожного з валів.

У небезпечному перерізі діє

$$M_{x_{max}} = |M_x^I| = |-16| = 16 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Дотичні напруження при крученні змінюються в перерізі за лінійним законом:

$$\tau = \frac{M_x}{I_{\rho}} \rho,$$

де τ – дотичне напруження, що діє в довільній точці поперечного перерізу;

ρ – радіус-вектор, проведений із центра перерізу у довільну точку поперечного перерізу;

M_x – крутний момент, що діє у розглядуваному перерізі;

I_{ρ} – полярний момент інерції перерізу.

При $\rho = 0$ $\tau = 0$.

При $\rho = \rho_{max} = \frac{d}{2}$ $\tau = \tau_{max} = \frac{M_x}{I_\rho} \rho_{max} = \frac{M_x}{W_\rho}$.

У разі небезпечного перерізу отримаємо:

– для суцільного круглого вала

$$\tau_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_\rho} = \frac{16M_{x_{max}}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 26 \times 10^3}{\pi \cdot 0,1173^3} = 82,044 \text{ МПа};$$

– для вала кільцевого поперечного перерізу

$$\tau_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_\rho} = \frac{16M_{x_{max}}}{\pi D^3(1 - \alpha^4)} = \frac{16 \cdot 26 \times 10^3}{\pi \cdot 0,1356^3(1 - 0,8^4)} = 89,953 \text{ МПа};$$

$$\tau'_{max} = \alpha \tau_{max} = 0,8 \cdot 89,953 = 71,962 \text{ МПа}.$$

За отриманими значеннями побудуємо епюри дотичних напружень τ (рис. 3).

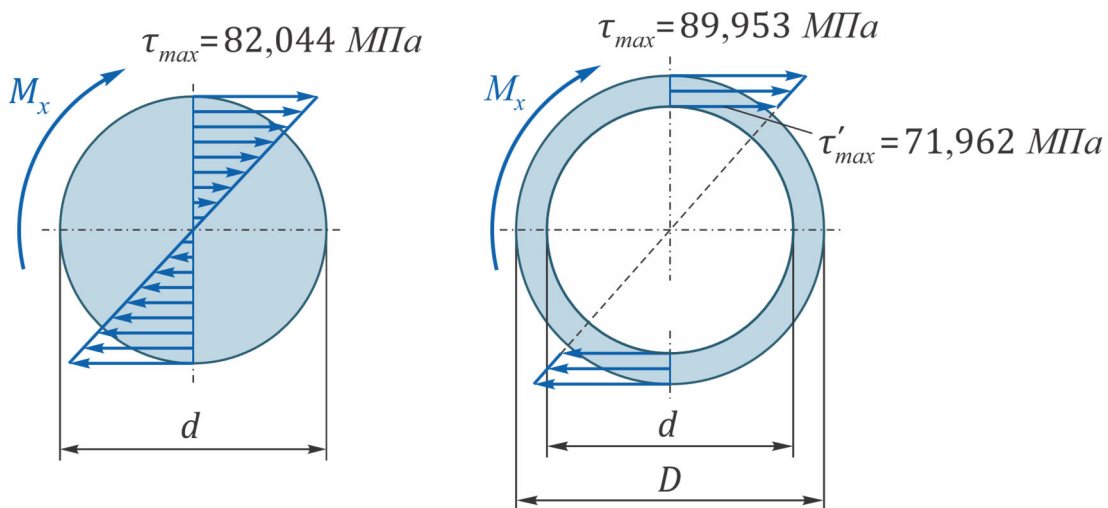


Рис. 3

6. Побудуємо епюру кутів закручування для суцільного вала.

Зауваження

Іноді важливо знати розподіл кутів закручування перерізів за довжиною вала. У цьому випадку будують епюру кутів закручування. Як базовий переріз, відносно якого закручуються інші перерізи, може бути вибраний будь-який.

У аналізованому прикладі логічно як базовий взяти лівий нерухомий переріз (переріз у затисненні), кут закручування якого дорівнює нулю.

Кут повороту довільного перерізу вала визначають за формулою

$$\varphi = \frac{M_x^i}{GI_\rho} x,$$

де M_x^i – крутний момент, що діє на i -й ділянці;

GI_ρ – жорсткість поперечного перерізу вала при крученні;

x – відстань до довільного перерізу на i -й ділянці.

Визначимо жорсткість при крученні вала суцільного поперечного перерізу, підібраного у цьому прикладі:

$$GI_\rho = G \frac{\pi d^4}{32} = 8 \times 10^{10} \cdot \frac{\pi \cdot 0,1173^4}{32} = 1,487 \times 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2.$$

Запишемо вирази для визначення кутів закручування при вибраному порядку відліку x (зліва направо, див. рис. 2, а):

$$\varphi^{\text{III}} = \frac{M_x^{\text{III}} x}{GI_\rho} = \frac{-26 \times 10^3}{1,487 \times 10^6} x \quad \Big|_{x=0} = 0$$

$$\Big|_{x=a=0,2 \text{ м}} = -3,497 \times 10^{-3} \text{ рад} = -0,199^\circ;$$

$$\varphi^{\text{II}} = \varphi^{\text{III}} \Big|_{x=a=0,2 \text{ м}} + \frac{M_x^{\text{II}} x}{GI_\rho} = -3,497 \times 10^{-3} + \frac{4 \times 10^3}{1,487 \times 10^6} x =$$

$$\Big|_{x=0} = -3,497 \times 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\Big|_{x=a=0,2 \text{ м}} = -3,497 \times 10^{-3} + 0,538 \times 10^{-3} = -2,959 \times 10^{-3} \text{ рад} = -0,17^\circ;$$

$$\varphi^{\text{I}} = \varphi^{\text{II}} \Big|_{x=b=0,4 \text{ м}} + \frac{M_x^{\text{I}} x}{GI_\rho} = -2,959 \times 10^{-3} + \frac{-20 \times 10^3}{1,487 \times 10^6} x =$$

$$\Big|_{x=0} = -2,959 \times 10^{-3} \text{ рад}$$

$$\Big|_{x=a=0,2 \text{ м}} = -2,969 \times 10^{-3} - 2,69 \cdot 10^{-3} = -5,659 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,324^\circ.$$

За результатами розрахунку побудуємо епюру кутів закручування вала круглого суцільного поперечного перерізу (див. рис. 2, в).

Зауваження

У варіантах завдань 13–24 не задано величину M_0 . Потрібно попередньо визначити M_0 за величиною та напрямом з умови рівноваги вала у вигляді $\sum M_i = 0$. У цих завданнях припущено, що тертя в опорних підшипниках відсутні, тому точне розташування опор не вказано.

Приклад розв'язання задачі № 3

Для заданої консольної балки (рис. 4, а) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів; визначити допустиме значення зовнішніх навантажень за таких значень параметрів: поперечний переріз балки – двотавр № 20; $l = 1,2 \text{ м}$; допустиме напруження при згинанні $[\sigma] = 170 \text{ МПа}$.

Розв'язання

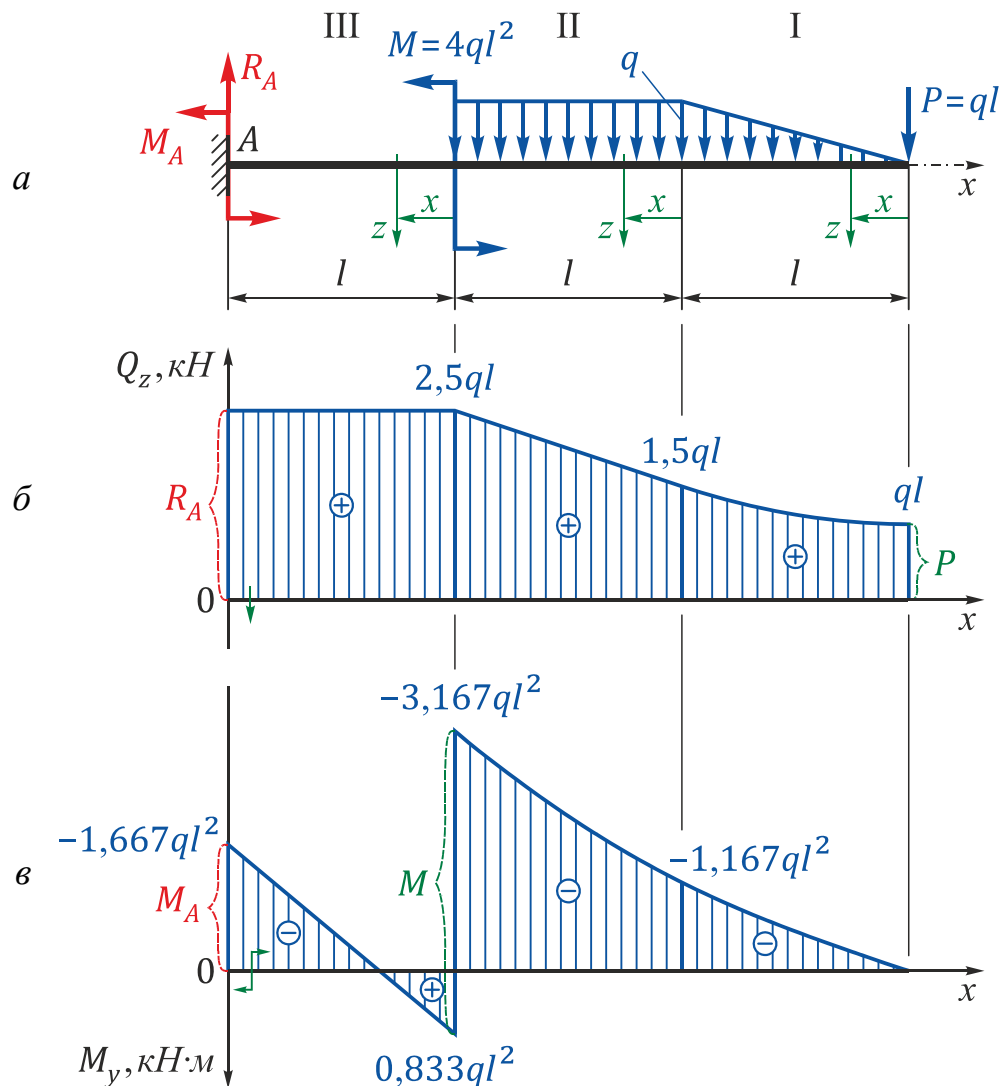


Рис. 4

1. Накреслимо балку в масштабі. Розіб'ємо її на ділянки, номери ділянок позначимо римськими цифрами.

Зауваження | Межами ділянок є перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили та моменти (у тому числі реакції опорних зв'язків), початок і кінець розподілених навантажень.

2. Виберемо напрямок обходу кожної з ділянок (справа наліво). На відстані x від початку кожної ділянки виділимо довільні перерізи, в яких необхідно визначити поперечну силу Q_z та згинальний момент M_y .

Застосовуючи метод перерізів, запишемо вирази для Q_z та M_y у поперечних перерізах кожної з ділянок та обчислимо їх значення:

$$Q_z^I = P + \frac{qx^2}{2l} = ql + \frac{qx^2}{2l} \quad \Big|_{x=0} = ql \quad \Big|_{x=l} = ql + \frac{ql^2}{2l} = 1,5ql;$$

$$Q_z^{II} = P + \frac{ql}{2} + qx = ql + \frac{ql}{2} + qx \quad \Big|_{x=0} = 1,5ql \quad \Big|_{x=l} = 1,5ql + ql = 2,5ql;$$

$$Q_z^{III} = P + \frac{ql}{2} + ql = ql + \frac{ql}{2} + ql = 2,5ql;$$

$$M_y^I = -Px - \frac{qx^3}{6l} = -qlx - \frac{qx^3}{6l} = \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l} = -ql^2 - \frac{ql^3}{6l} = -1,167ql^2;$$

$$M_y^{II} = -P(l+x) - \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3}l + x \right) - \frac{qx^2}{2} = -ql(l+x) - \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3}l + x \right) - \frac{qx^2}{2} =$$

$$\Big|_{x=0} = -ql^2 - \frac{ql^2}{6} = -1,167ql^2 \quad \Big|_{x=l} = -2ql^2 - \frac{2}{3}ql^2 - \frac{ql^2}{2} = -3,167ql^2;$$

$$M_y^{III} = -P(2l+x) - \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3}l + l + x \right) - ql \left(\frac{l}{2} + x \right) + M =$$

$$= -ql(2l+x) - \frac{ql}{2} \left(\frac{1}{3}l + l + x \right) - ql \left(\frac{l}{2} + x \right) + 4ql^2 =$$

$$\Big|_{x=0} = -2ql^2 - \frac{2}{3}ql^2 - \frac{ql^2}{2} + 4ql^2 = 0,833ql^2$$

$$\Big|_{x=l} = -3ql^2 - \frac{7}{6}ql^2 - \frac{3}{2}ql^2 + 4ql^2 = -1,667ql^2.$$

Зауваження

Поперечна сила Q_z в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь z перерізу всіх зовнішніх сил, прикладених по один бік від розглядуваного перерізу. Сила вважається **позитивною**, якщо вона повертає відсічену частину балки **за годинниковою стрілкою**, і навпаки.

Згинальний момент M_y у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі y у перерізу всіх зовнішніх сил, прикладених по один бік від розглядуваного перерізу. Момент вважається **позитивним**, якщо він згинає відсічену частину балки **опуклістю вниз** (у бік позитивного напрямку осі z), і навпаки.

Вісь y у перпендикулярна до площини кресленника.

За отриманими даними побудуємо епюри Q_z та M_y (рис. 4, б, в). При цьому додатні значення Q_z відкладаємо вверх, а від'ємні значення M_y – вниз від осі епюри, тобто у бік позитивного кінця осі z . При цьому епюра M_y буде побудована з боку розтягнутих волокон балки.

Перевіримо правильність побудови епюр за стрибками у характерних перерізах та за диференціальними співвідношеннями.

- Зауваження**
1. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні сили (і реактивна сила), мають місце **стрибки** на епюрі Q_z , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих сил.
 2. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні моменти (і реактивний момент), мають місце **стрибки** на епюрі M_y , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих моментів.

Визначимо за епюрами напрямок і величину реактивної сили R_A і реактивного моменту M_A в затисненні і покажемо їх на розрахунковій схемі. Реактивна сила $R_A = 2,5ql$ спрямована вверх. Реактивний момент $M_A = 1,667ql^2$ спрямований проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі y .

3. Визначимо допустиме значення зовнішніх навантажень.

Для цього за епюрою M_y визначимо небезпечний переріз (переріз, в якому діє максимальний за модулем згинальний момент). У цьому випадку

$$|M_y|_{max} = 3,167ql^2.$$

Значення зовнішніх допустимих навантажень визначимо з умови міцності при згині

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \frac{3,167ql^2}{W_y} \leq [\sigma],$$

де W_y – момент опору при згинанні.

Тоді

$$q \leq \frac{W_y[\sigma]}{3,167l^2} = \frac{184 \times 10^{-6} \cdot 170 \times 10^6}{3,167 \cdot 1,2^2} = 6,859 \text{ кН/м}.$$

- Зауваження** | Величина $W_y = 184 \text{ см}^3$ взята із сортаменту (див. дод. 2) для заданого двотавра № 20.

Знаючи величину q , знайдемо допустимі значення інших зовнішніх навантажень:

$$P \leq ql = 6,859 \cdot 1,2 = 8,231 \text{ кН};$$

$$M \leq 4ql^2 = 4 \cdot 6,859 \cdot 1,2^2 = 39,508 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Приклад розв'язання задачі № 4

Для заданої двохопорної балки (рис. 5, а) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів; підібрати перерізи трьох типів: кругле, прямокутне та двотаврове. Порівняти підібрані балки за вагою. Для небезпечного перерізу побудувати епюри нормальних і дотичних напружень за таких значень параметрів: $P = 10 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; співвідношення сторін прямокутного поперечного перерізу $k = h/b = 2$; допустиме напруження при згинанні $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язання

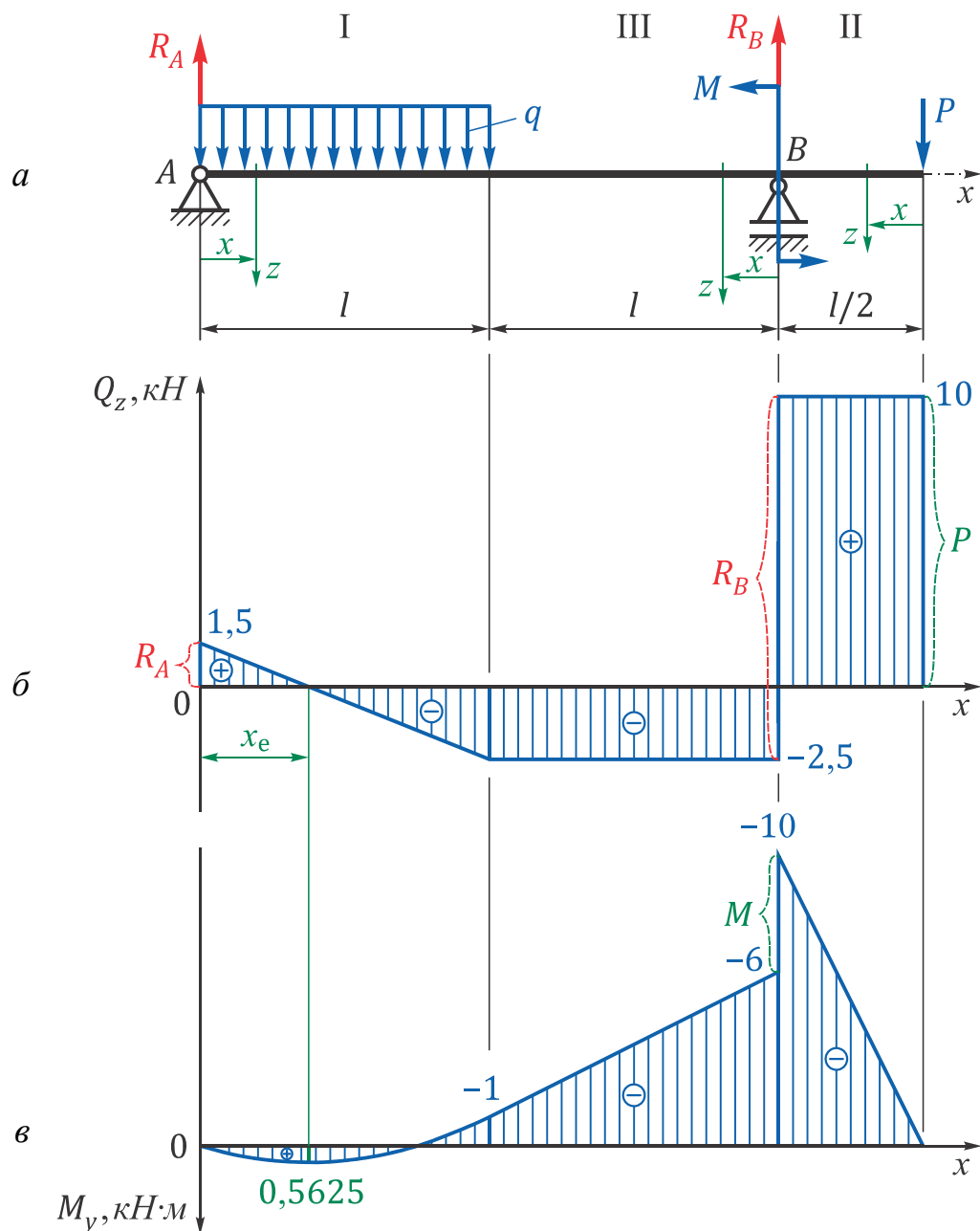


Рис. 5

1. Накреслимо балку в масштабі. Позначимо опори A та B ; покажемо можливі напрями (вгору) реакцій у цих опорах R_A та R_B ; обчислимо їх, використовуючи рівняння рівноваги статички:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \left(l + l + \frac{l}{2} \right) + R_B(l + l) + M - ql \frac{l}{2} = 0,$$

звідки

$$R_B = \frac{P \left(l + l + \frac{l}{2} \right) - M + ql \frac{l}{2}}{2l} = \frac{10 \cdot \left(2 + 2 + \frac{2}{2} \right) - 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2}}{2 \cdot 2} = 12,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -R_A(l + l) + ql \left(\frac{l}{2} + l \right) + M - P \frac{l}{2} = 0,$$

звідки

$$R_A = \frac{ql \left(\frac{l}{2} + l \right) + M - P \frac{l}{2}}{2l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2 \right) + 4 - 10 \cdot \frac{2}{2}}{2 \cdot 2} = 1,5 \text{ кН}.$$

Зауваження | Якщо якась із реакцій вийшла зі знаком *мінус*, то її необхідно **направити в інший бік**. У подальших розрахунках використовувати її **справжній напрямок** та **модуль значення**.

Для перевірки правильності визначення реакцій R_A і R_B складемо рівняння рівноваги у вигляді проєкцій усіх сил на вертикальну вісь z і переконаємося, що їхня сума дорівнює нулю:

$$\sum P_z = 0; \quad ql - R_A - R_B + P = 2 \cdot 2 - 12,5 - 1,5 + 10 = 0.$$

Отже, реакції визначено правильно.

2. Розіб'ємо балку на ділянки, виберемо оптимальний напрямок їхнього обходу. Номери ділянок позначимо римськими цифрами.

Зауваження | Оптимальним напрямом обходу вважатимемо такий напрям, який дає змогу спростити запис рівнянь внутрішніх силових факторів по ділянках.
У цьому завданні доцільно ділянку I обходити зліва направо, а ділянки II і III – справа наліво.

На відстані x від початку кожної ділянки виділимо довільні перерізи, в яких необхідно визначити поперечну силу Q_z та згинальний момент M_y . Застосовуючи метод перерізів, запишемо вирази для Q_z та M_y у поперечних перерізах кожної з ділянок та обчислимо їх значення:

$$Q_z^I = R_A - qx \quad \Big|_{x=0} = 1,5 \text{ кН} \quad \Big|_{x=l=2 \text{ м}} = 1,5 - 2 \cdot 2 = -2,5 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах ділянки I епюра Q_z змінює свій знак, необхідно визначити положення перерізу, в якому $Q_z = 0$, а на епюрі M_y буде точка екстремуму:

$$Q_z^I = R_A - qx_e = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{R_A}{q} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ м};$$

$$Q_z^{II} = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{III} = P - R_B = 10 - 12,5 = -2,5 \text{ кН};$$

$$M_y^I = R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l=2 \text{ м}} = 1,5 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2} = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=x_e=0,75 \text{ м}} = 1,5 \cdot 0,75 - \frac{2 \cdot 0,75^2}{2} = 1,125 - 0,5625 = 0,5625 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = -Px \quad \Big|_{x=0} = 0 \quad \Big|_{x=l/2=1 \text{ м}} = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = -P\left(\frac{l}{2} + x\right) + R_B x + M \quad \Big|_{x=0} = -10 \cdot \frac{2}{2} + 4 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=l=2 \text{ м}} = -10 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2\right) + 12,5 \cdot 2 + 4 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими даними побудуємо епюри Q_z та M_y (рис. 5, б, в).

Зауваження | Додатні значення Q_z відкладають вгору, а від'ємні значення M_y – вниз від осі епюри, тобто у бік позитивного кінця осі z . При цьому епюра M_y буде побудована з боку розтягнутих волокон балки.

Перевіримо правильність побудови епюр за стрибками у характерних перерізах та за диференціальними співвідношеннями.

Зауваження | 1. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні сили (і реактивні сили), мають місце **стрибки** на епюрі Q_z , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих сил.
2. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні моменти, мають місце **стрибки** на епюрі M_y , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих моментів.

3. З умови міцності визначимо розміри перерізів трьох типів: кругле суцільне, прямокутне та двотаврове.

За епюрою M_y знайдемо небезпечний переріз, в якому $|M_y|$ є максимальним. У цій задачі небезпечним є переріз над опорою B , де діють

$$|M_y|_{max} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \text{та} \quad Q_z = 10 \text{ кН}.$$

Розміри перерізу знайдемо з умови міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} \leq [\sigma],$$

де σ_{max} – максимальне нормальне напруження, що діє в перерізі;

$|M_y|_{max}$ – згинальний момент, що діє у небезпечному перерізі;

W_y – момент опору при згинанні;

$[\sigma]$ – допустиме напруження при згинанні.

Переріз буде міцним, якщо незалежно від форми він матиме величину осьового моменту опору W_y , визначену з умови міцності:

$$W_y^T \geq \frac{|M_y|_{max}}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 62,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3,$$

де W_y^T – мінімальний (теоретичний) момент опору при згинанні, що забезпечує міцність балки.

Підберемо розміри поперечних перерізів.

Діаметр круглого поперечного перерізу (рис. 6, а)

Осьовий момент опору круглого перерізу визначають за формулою

$$W_y^\bullet = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Тоді діаметр круглого перерізу знайдемо з умови

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq W_y^T,$$

звідки отримаємо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_y^T}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 62,5 \times 10^{-6}}{\pi}} = 0,086 \text{ м} = 8,6 \text{ см}.$$

Площа поперечного перерізу у цьому випадку

$$F^\bullet = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,086^2}{4} = 58,1 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 58,1 \text{ см}^2.$$

Розміри прямокутного поперечного перерізу (рис. 6, б).

Осьовий момент опору прямокутного перерізу визначають за формулою

$$W_y^{\blacksquare} = \frac{bh^2}{6},$$

а з урахуванням того, що $h = kb$, отримаємо

$$W_y^{\blacksquare} = \frac{k^2 b^3}{6}.$$

Ширину прямокутного перерізу знайдемо з умови

$$\frac{k^2 b^3}{6} \geq W_y^{\Gamma},$$

звідки отримаємо

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6W_y^{\Gamma}}{k^2}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 62,5 \times 10^{-6}}{2^2}} = 0,0454 \text{ м} = 4,54 \text{ см}.$$

Тоді

$$h = kb = 2 \cdot 0,0454 = 0,0908 \text{ м} = 9,08 \text{ см};$$

$$F^{\blacksquare} = bh = 0,0454 \cdot 0,0908 = 41,22 \times 10^{-4} \text{ м}^2 = 41,22 \text{ см}^2.$$

Двотавровий поперечний переріз (рис. 6, в)

Підберемо двотавровий поперечний переріз із сортаменту (див. дод. 2) за необхідною величиною W_y^{Γ} згідно з умовою

$$W_{y_1}^{\text{I}} \leq W_y^{\Gamma} \leq W_{y_2}^{\text{I}}.$$

Значення $W_{y_1}^{\text{I}}$ та $W_{y_2}^{\text{I}}$ виберемо з сортаменту:

– двотавр № 12, $W_{y_1}^{\text{I}} = 58,4 \text{ см}^3 = 58,4 \times 10^{-6} \text{ м}^3$, момент опору якого менший W_y^{Γ} і найближчий до нього;

– двотавр № 14, $W_{y_2}^{\text{I}} = 81,7 \text{ см}^3 = 81,7 \times 10^{-6} \text{ м}^3$, момент опору якого більший W_y^{Γ} і найближчий до нього.

Визначимо *перевантаження* у небезпечній точці двотавра № 12:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{W_y^{\Gamma} - W_{y_1}^{\text{I}}}{W_{y_1}^{\text{I}}} \cdot 100\% = \frac{62,5 - 58,4}{58,4} \cdot 100\% = 7,02\% > 5\%.$$

Балка виявляється значно перевантаженою, а перевищення становить понад 7 %, що є неприпустимим.

Визначимо *недовантаження* у небезпечній точці двотавра № 14:

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \right| = \left| \frac{W_y^T - W_y^I}{W_y^I} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{62,5 - 81,7}{81,7} \right| \cdot 100 \% = 23,5 \%$$

Зауваження | При проведенні розрахунків на міцність методами механіки матеріалів і конструкцій вважається допустимим перенавантаження у небезпечній точці перерізу *не більше*, ніж 5 %.

Остаточно виберемо двотавр № 14.

Цей двотавр буде сильно недовантажений, але принаймні необхідна міцність балки буде забезпечена.

Випишемо з таблиць сортаменту геометричні характеристики вибраного двотавра, які знадобляться при визначенні σ та τ :

$$\begin{aligned} W_y^I &= 81,7 \times 10^{-6} \text{ м}^3; & I_y^I &= 572 \times 10^{-8} \text{ м}^4; & S_y^I &= 46,8 \times 10^{-6} \text{ м}^3; \\ F^I &= 17,4 \times 10^{-4} \text{ м}^2; & h^I &= 0,14 \text{ м}; & b^I &= 0,073 \text{ м}; \\ d^I &= 4,9 \times 10^{-3} \text{ м}; & t^I &= 7,5 \times 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

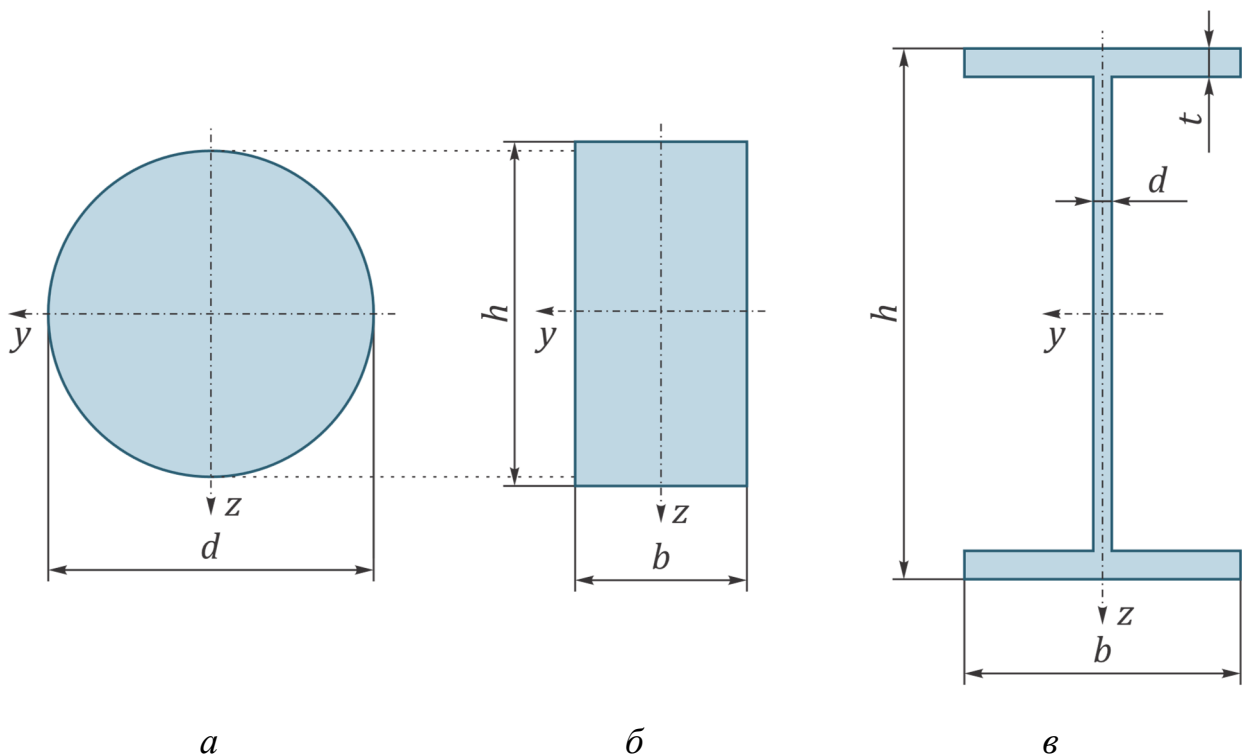


Рис. 6

На рис. 6 всі три типи поперечного перерізу показано в одному масштабі на одній осі y , щоб візуально оцінити габарити перерізів.

4. Порівняємо вагу балок круглого та прямокутного поперечних перерізів із вагою двотаврової балки. Очевидно, що відношення ваг балок дорівнює відношенню площ перерізів, тобто

$$\frac{G^{\bullet}}{G^{\text{I}}} = \frac{F^{\bullet}}{F^{\text{I}}} = \frac{58,1 \times 10^{-4}}{17,4 \times 10^{-4}} = 3,34;$$

$$\frac{G^{\blacksquare}}{G^{\text{I}}} = \frac{F^{\blacksquare}}{F^{\text{I}}} = \frac{41,22 \times 10^{-4}}{17,4 \times 10^{-4}} = 2,37.$$

Таким чином, з розглянутих балок найбільш легкою виявляється балка двотаврового перерізу, оскільки у двотавра основна частина перерізу (полиці) віддалена від нейтральної осі (осі y) більше, ніж у інших форм перерізів.

5. Побудуємо епюри розподілу нормальних (σ) та дотичних (τ) напружень у небезпечному перерізі для всіх типів перерізів балок.

Нормальні напруження σ розподіляються в перерізі за лінійним законом

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z,$$

де M_y – згинальний момент, що діє в перерізі;

I_y – осьовий момент інерції перерізу;

z – координата довільної точки перерізу, що відлічується від нейтральної осі перерізу y (вісь y – головна центральна вісь інерції перерізу, перпендикулярна до силової площини).

У небезпечному перерізі діє поперечна сила $Q_z = 10 \text{ кН}$, що спричиняє дотичні напруження τ , які знаходять за формулою Журавського

$$\tau = \frac{Q_z S_y^*}{b(z) I_y},$$

де Q_z – поперечна сила, що діє у розглядуваному перерізі;

S_y^* – статичний момент частини площі поперечного перерізу, відсіченої рівнем z , що відлічується від нейтральної осі (осі y);

$b(z)$ – ширина перерізу на рівні z ;

I_y – осьовий момент інерції перерізу.

Зауваження | Напруження, що визначаються формулою Журавського, змінюються за висотою перерізу за параболічним законом і мають максимум на нейтральній осі.

Круглий поперечний переріз

Максимальні за модулем нормальні напруження діятимуть у точках 1 і 3, оскільки вони знаходяться найдаліше від нейтральної осі (осі y):

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \left\{ W_y = \frac{\pi d^3}{32} \right\} = \frac{32|M_y|_{max}}{\pi d^3} =$$

$$= \frac{32 \cdot 10 \times 10^3}{\pi \cdot 0,086^3} = 160,142 \text{ МПа.}$$

У точці 1 нормальні напруження будуть додатні (розтягнуті верхні волокна), у точці 3 – від’ємні (стиснуті нижні волокна).

У точці 2, що лежить на нейтральній осі, нормальні напруження дорівнюють нулю ($\sigma = 0$) через симетрію поперечного перерізу відносно осі y .

Дотичні напруження в точках 1 і 3 дорівнюють нулю ($\tau = 0$), а в точці 2 – максимальні і їх можна визначити за залежністю, яка випливає з формули Журавського:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_z}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{10 \times 10^3}{58,1 \times 10^{-4}} = 2,295 \text{ МПа.}$$

Епюри розподілу нормальних (σ) і дотичних (τ) напружень для круглого перерізу зображено на рис. 7.

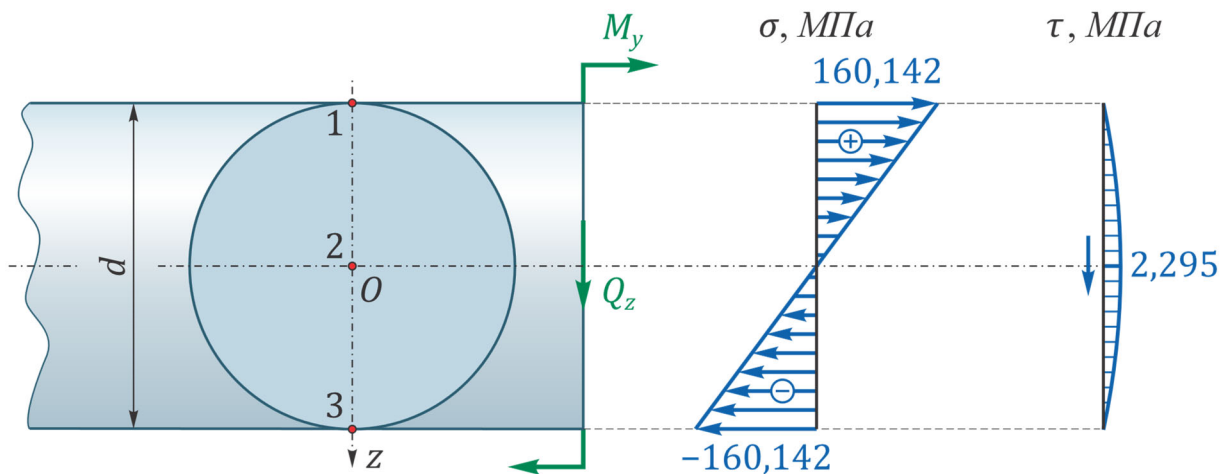


Рис. 7

Зауваження

1. Напрямок M_y визначають за епюрою згинальних моментів.
2. Напрямок потоку дотичних напружень відповідає напрямку поперечної сили Q_z .
3. При побудові епюр розподілу нормальних (σ) та дотичних (τ) напружень використовувався різний масштаб.

Прямокутний поперечний переріз

Максимальні за модулем нормальні напруження діятимуть у точках 1 і 3, оскільки вони знаходяться найдаліше від нейтральної осі (осі y):

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \left\{ W_y = \frac{bh^2}{6} \right\} = \frac{6|M_y|_{max}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 10 \times 10^3}{0,0454 \cdot 0,0908^2} = 160,296 \text{ МПа.}$$

У точці 1 напруження будуть додатні, у точці 3 – від’ємні.

У точці 2, що лежить на нейтральній осі, нормальні напруження дорівнюють нулю ($\sigma = 0$) через симетрію поперечного перерізу відносно осі y .

Дотичні напруження в точках 1 і 3 дорівнюють нулю ($\tau = 0$), а в точці 2 – максимальні і їх можна визначити за залежністю, яка впливає з формули Журавського:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{41,22 \times 10^{-4}} = 3,639 \text{ МПа.}$$

Епюри розподілу нормальних (σ) і дотичних (τ) напружень для круглого перерізу зображено на рис. 8.

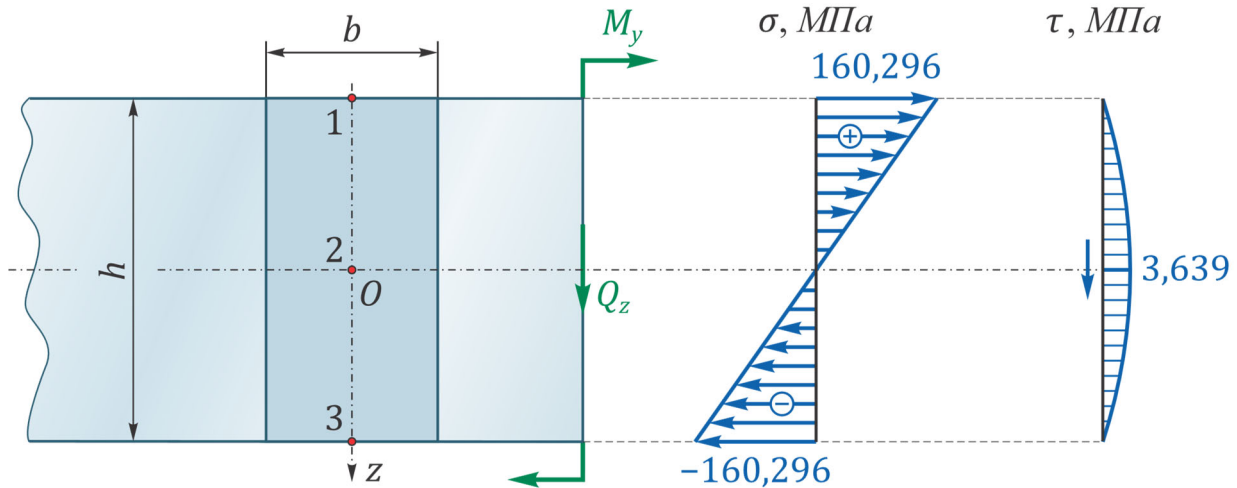


Рис. 8

Зауваження | При побудові епюр розподілу нормальних (σ) і дотичних (τ) напружень використовувався різний масштаб.

Невелика відмінність $|\sigma_{max}|$ від $[\sigma]$ на епюрах нормальних напружень для круглого та прямокутного поперечних перерізів пов'язана із округленням розмірів поперечних перерізів у менший бік.

Двотавровий поперечний переріз

При побудові епюр нормальних і дотичних напружень форма поперечного перерізу двотавра спрощується (схематизується як комбінації прямокутників).

Зауваження

1. Для побудови епюри σ_x достатньо визначити $|\sigma_{max}|$.
2. Для побудови епюри τ розподілу дотичних напружень необхідно визначити за формулою Журавського значення у семи характерних точках двотаврового перерізу (1...7) (рис. 9). Точки 2 і 3, 5 і 6 розташовані нескінченно близько одна до одної, але точки 2 і 6 належать полицям, а 3 і 5 – стінці.

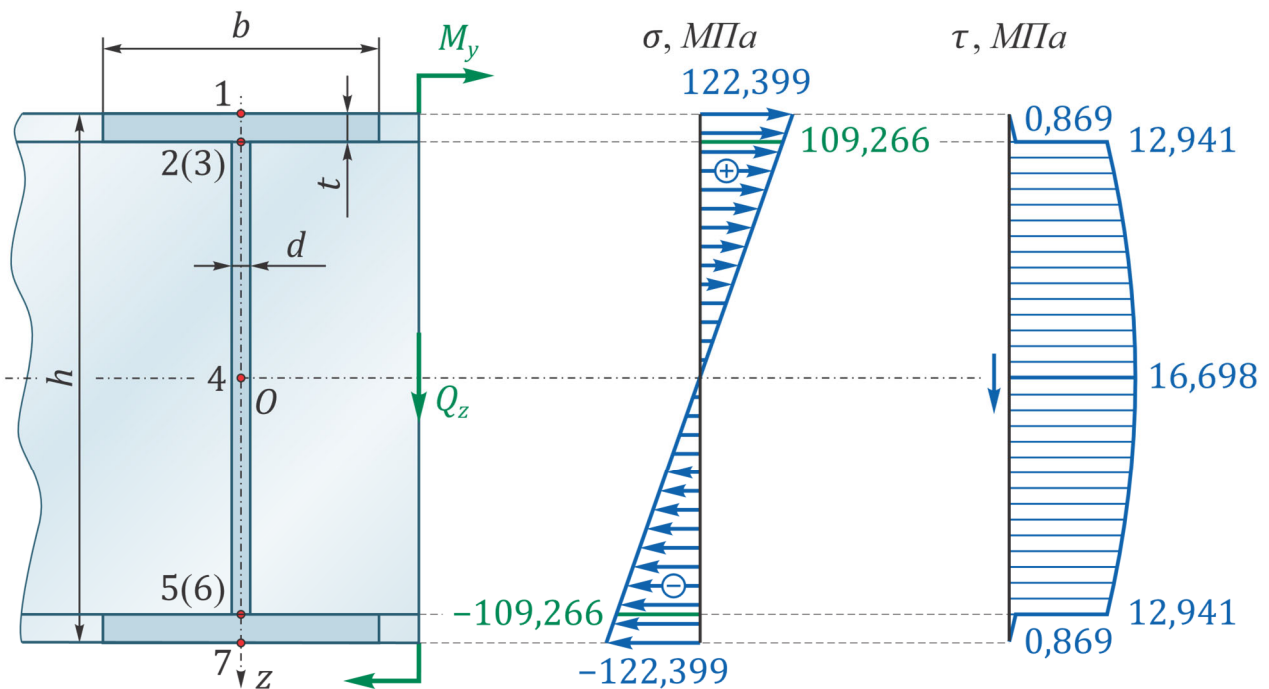


Рис. 9

Точки 1 та 7 належать полиці.

Нормальні напруження будуть максимальними, причому у точці 1 – додатними, у точці 7 – від’ємними:

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_y|_{max}}{W_y^I} = \frac{10 \cdot 10^3}{81,7 \times 10^{-6}} = 122,399 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруження

$$\tau = \frac{Q_z S_y^*}{b(z) I_y^I} = \frac{Q_z S_y^*}{b^I I_y^I} = \frac{10 \times 10^3 \cdot 0}{0,073 \cdot 572 \times 10^{-8}} = 0.$$

Точки 2 та 6 належать полиці ($b(z) = b^I$):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_{y_{max}}}{I_y^I} z = \frac{M_{y_{max}}}{I_y^I} \left(\mp \left(\frac{h^I}{2} - t^I \right) \right) = \\ &= \frac{-10 \times 10^3}{572 \times 10^{-8}} \left(\mp \left(\frac{0,14}{2} - 7,5 \times 10^{-3} \right) \right) = \pm 109,266 \text{ МПа}; \\ \tau &= \frac{Q_z S_y^*}{b(z) I_y^I} = \frac{Q_z b^I t^I \left(\frac{h^I}{2} - \frac{t^I}{2} \right)}{b^I I_y^I} = \\ &= \frac{10 \times 10^3 \cdot 0,073 \cdot 7,5 \times 10^{-3} \left(\frac{0,14}{2} - \frac{7,5 \times 10^{-3}}{2} \right)}{0,073 \cdot 572 \times 10^{-8}} = 0,869 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Точки 3 та 5 належать стінці ($b(z) = d^I$):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_{y_{max}}}{I_y^I} z = \frac{M_{y_{max}}}{I_y^I} \left(\mp \left(\frac{h^I}{2} - t^I \right) \right) = \pm 109,266 \text{ МПа}; \\ \tau &= \frac{Q_z S_y^*}{b(z) I_y^I} = \frac{Q_z b^I t^I \left(\frac{h^I}{2} - \frac{t^I}{2} \right)}{d^I I_y^I} = \\ &= \frac{10 \times 10^3 \cdot 0,073 \cdot 7,5 \times 10^{-3} \left(\frac{0,14}{2} - \frac{7,5 \times 10^{-3}}{2} \right)}{4,9 \times 10^{-3} \cdot 572 \times 10^{-8}} = 12,941 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Точка 4 належить стінці ($b(z) = d^I$):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_{y_{max}}}{I_y} z = \frac{M_{y_{max}}}{I_y} \cdot 0 = 0 \text{ МПа}; \\ \tau &= \frac{Q_z S_y^*}{b(z) I_y} = \frac{Q_z S_y}{d I_y} = \frac{10 \times 10^3 \cdot 46,8 \times 10^{-6}}{4,9 \times 10^{-3} \cdot 572 \times 10^{-8}} = 16,698 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Зауваження | У точках 2 та 3 нормальні напруження додатні, у точках 5 та 6 – від’ємні.

За результатами обчислень побудовано епюри σ та τ (див. рис. 9). Кожна з епюр побудована у власному масштабі.

Приклад розв'язання задачі № 5

Для заданої плоскої рами (рис. 10, а) побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, згинальних моментів; підібрати переріз у вигляді двох швелерів II за таких значень параметрів: $P = 10 \text{ кН}$; $q = 4 \text{ кН/м}$; $h = 4 \text{ м}$; $a = b = 2 \text{ м}$; допустиме напруження при згинанні $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

Розв'язання

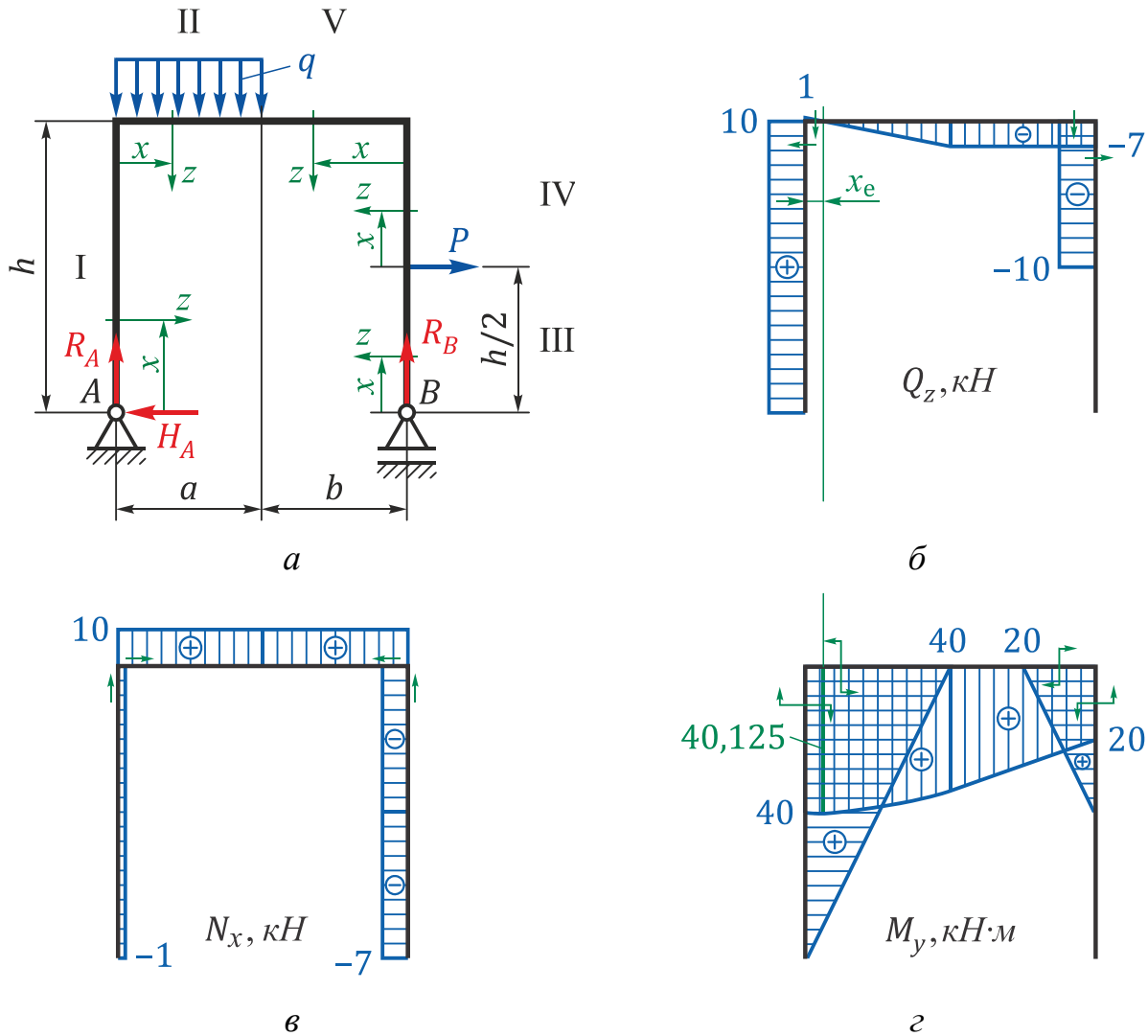


Рис. 10

1. Накреслимо раму в масштабі. Позначимо опори A та B ; покажемо можливі напрями реакцій у цих опорах R_A , H_A та R_B ; обчислимо їх, використовуючи рівняння рівноваги статки.

Сума проєкцій усіх сил на допоміжну горизонтальну вісь x

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow P - H_A = 0,$$

звідки отримаємо

$$H_A = P = 10 \text{ кН};$$

Сума моментів усіх зовнішніх зусиль відносно точки A

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \frac{h}{2} - qa \frac{a}{2} + R_B(a + b) = 0,$$

звідки отримаємо

$$R_B = \frac{P \frac{h}{2} + qa \frac{a}{2}}{a + b} = \frac{10 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2}}{2 + 2} = \frac{28}{4} = 7 \text{ кН}.$$

Сума моментів усіх зовнішніх зусиль відносно точки B

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -R_A(a + b) + qa \left(\frac{a}{2} + b \right) - P \frac{h}{2} = 0,$$

звідки отримаємо

$$R_A = \frac{qa \left(\frac{a}{2} + b \right) - P \frac{h}{2}}{a + b} = \frac{4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2 \right) - 10 \cdot \frac{4}{2}}{2 + 2} = 1 \text{ кН}.$$

Зауваження | Якщо якась із реакцій вийшла зі знаком *мінус*, то її необхідно *направити в інший бік*. У подальших розрахунках використовувати її *справжній напрямок* та *модуль значення*.

Для перевірки правильності визначення реакцій R_A і R_B складемо рівняння рівноваги у вигляді проєкцій усіх сил на вертикальну допоміжну вісь z і переконаємось, що їхня сума дорівнює нулю:

$$\sum P_z = 0; \quad qa - R_A - R_B = 4 \cdot 2 - 1 - 7 = 0.$$

Отже, реакції визначено правильно.

2. Розіб'ємо раму на ділянки, виберемо оптимальний напрямок їхнього обходу. Нумери ділянок позначимо римськими цифрами.

Зауваження | 1. Межами ділянок є перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили та моменти (у тому числі реакції опорних зв'язків), початок і кінець розподілених навантажень, вузлові перерізи рами (місця зчленування елементів рами).
2. Оптимальним напрямком обходу вважатимемо такий напрямок, який дає змогу спростити запис рівнянь внутрішніх силових факторів по ділянках.

На відстані x від початку кожної ділянки виділимо довільні перерізи, в яких необхідно визначити поздовжню N_x та поперечну Q_z сили та згинальний момент M_y . Застосовуючи метод перерізів, запишемо вирази для внутрішніх силових факторів у поперечних перерізах кожної з ділянок та обчислимо їх значення:

$$N_x^I = -R_A = -1 \text{ кН};$$

$$N_x^{II} = H_A = 10 \text{ кН};$$

$$N_x^{III} = -R_B = 7 \text{ кН};$$

$$N_x^{VI} = -R_B = 7 \text{ кН};$$

$$N_x^V = P = 10 \text{ кН};$$

$$Q_z^I = H_A = 10 \text{ кН};$$

$$Q_z^{II} = R_A - qx \quad \Big|_{x=0} = 1 \text{ кН} \quad \Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 1 - 4 \cdot 2 = -7 \text{ кН}.$$

Оскільки в межах ділянки II епюра Q_z змінює свій знак, необхідно визначити положення перерізу, в якому $Q_z = 0$, а на епюрі M_y буде точка екстремуму:

$$Q_z^{II} = R_A - qx_e = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{R_A}{q} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м};$$

$$Q_z^{III} = 0 \text{ кН};$$

$$Q_z^{IV} = -P = -10 \text{ кН};$$

$$Q_z^V = R_B = -7 \text{ кН};$$

$$M_y^I = H_A x \quad \Big|_{x=0} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=h=4 \text{ м}} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{II} = H_A h + R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad \Big|_{x=0} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=a=2 \text{ м}} = 10 \cdot 4 + 1 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 34 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=x_e=0,25 \text{ м}} = 10 \cdot 4 + 1 \cdot 0,25 - \frac{4 \cdot 0,25^2}{2} = 40,125 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{III} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^{IV} = Px \quad \Big|_{x=0} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \Big|_{x=h/2=2 \text{ м}} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^V = P \frac{h}{2} + R_B x \quad \Big|_{x=0} = 10 \cdot \frac{4}{2} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\Big|_{x=b=2 \text{ м}} = 10 \cdot \frac{4}{2} + 7 \cdot 2 = 34 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Зауваження | При записі рівнянь внутрішніх силових факторів були використані правила знаків для N_x (див. задачу № 1) і для Q_z і M_y (див. задачу № 3).

За отриманими даними побудуємо епюри Q_z і M_y (рис. 10, б, в, г).

Зауваження | Додатні значення N_x і Q_z відкладають із зовнішнього боку рами (див. рис. 10, б, в), а додатні значення M_y – з внутрішньої (див. рис. 10, г), тобто у бік позитивного кінця осі z . При цьому епюра M_y буде побудована з боку розтягнутих волокон рами.

Перевіримо правильність побудови епюр за стрибками у характерних перерізах, диференціальними співвідношеннями та рівновагою у вузлових точках.

Зауваження | 1. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні сили (і реактивні сили), мають місце **стрибки** на епюрі Q_z , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих сил.

2. У перерізах, де прикладено зосереджені зовнішні моменти, мають місце **стрибки** на епюрі M_y , які за модулем чисельно **дорівнюють** величинам цих моментів.

3. У вузлових точках має дотримуватися рівновага, тобто мають виконуватися умови

$$\sum P_x = 0; \quad \sum P_z = 0; \quad \sum M = 0.$$

3. Визначимо розміри поперечного перерізу.

За епюрою M_y знайдемо небезпечний переріз, тобто переріз, в якому $|M_y|$ є максимальним. У цій задачі небезпечним є переріз, де

$$|M_y|_{\max} = 40,125 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

З умови міцності при згинанні

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

знайдемо необхідну величину осьового моменту інерції для забезпечення міцності

$$W_y \geq \frac{|M_y|_{max}}{[\sigma]} = \frac{40,125 \times 10^3}{180 \times 10^6} = 222,9 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 222,9 \text{ см}^3.$$

Оскільки поперечний переріз складається з двох швелерів, визначимо мінімальний момент опору одного швелера

$$W_y^I = \frac{1}{2} W_y = \frac{222,9}{2} = 111,45 \text{ см}^3.$$

З сортаменту (див. дод. 3) виберемо швелер № 18, у якого

$$W_y^I = 121 \text{ см}^3.$$

При цьому $W_y = 2W_y^I = 242 \text{ см}^3$ і

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \frac{40,125 \times 10^3}{242 \times 10^{-6}} = 165,81 \text{ МПа},$$

а

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{165,81 - 180}{180} \cdot 100 \% = -7,88 \%,$$

тобто переріз недовантажено.

Якщо вибрати швелер № 16а, у якого $W_y^I = 103 \text{ см}^3$, отримаємо $\sigma_{max} = 194,78 \text{ МПа}$ і

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{194,81 - 180}{180} \cdot 100 \% = 8,23 \%.$$

Таке навантаження небезпечне, тому виберемо швелер № 18.

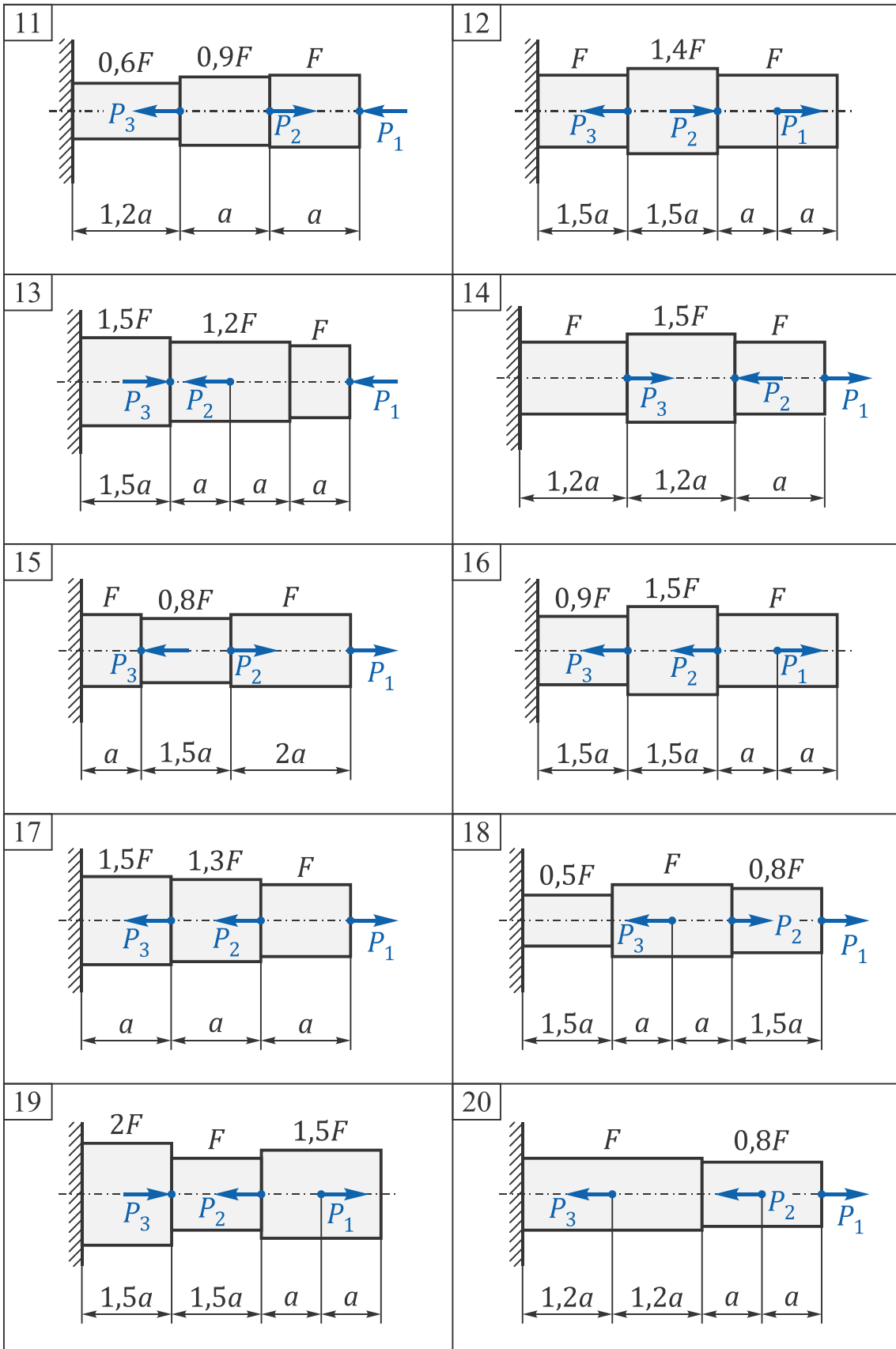
ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

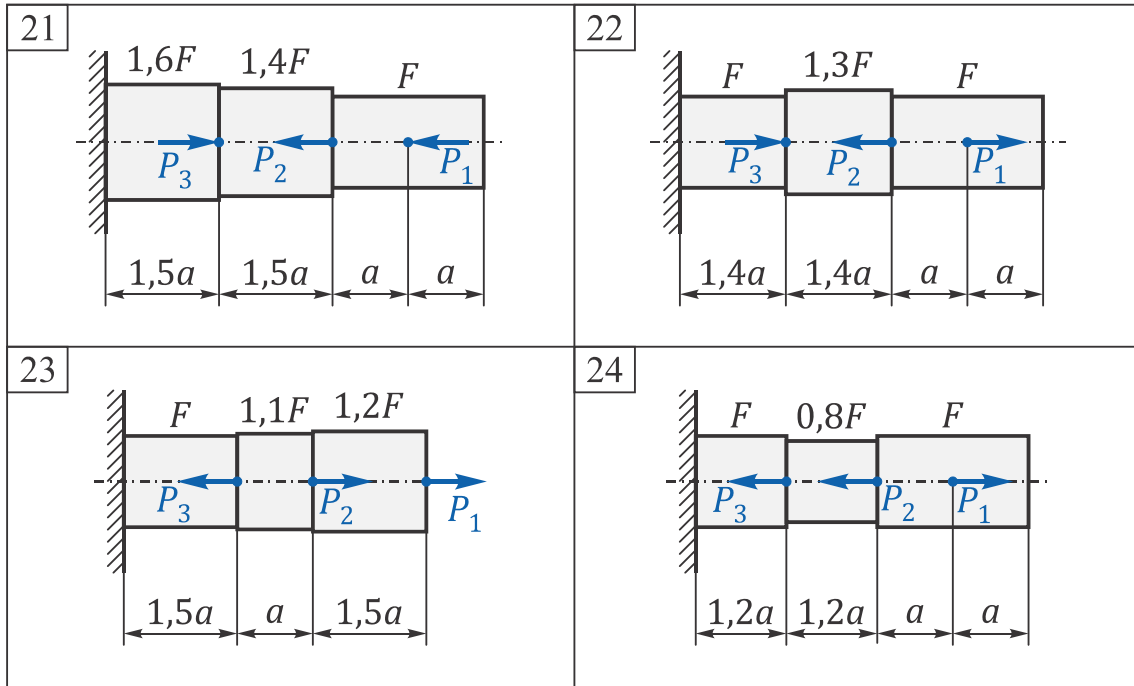
Задача № 1

Таблиця Д.1.1

Розрахункові схеми

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>





Таблиця Д.1.2

Варіанти вихідних даних

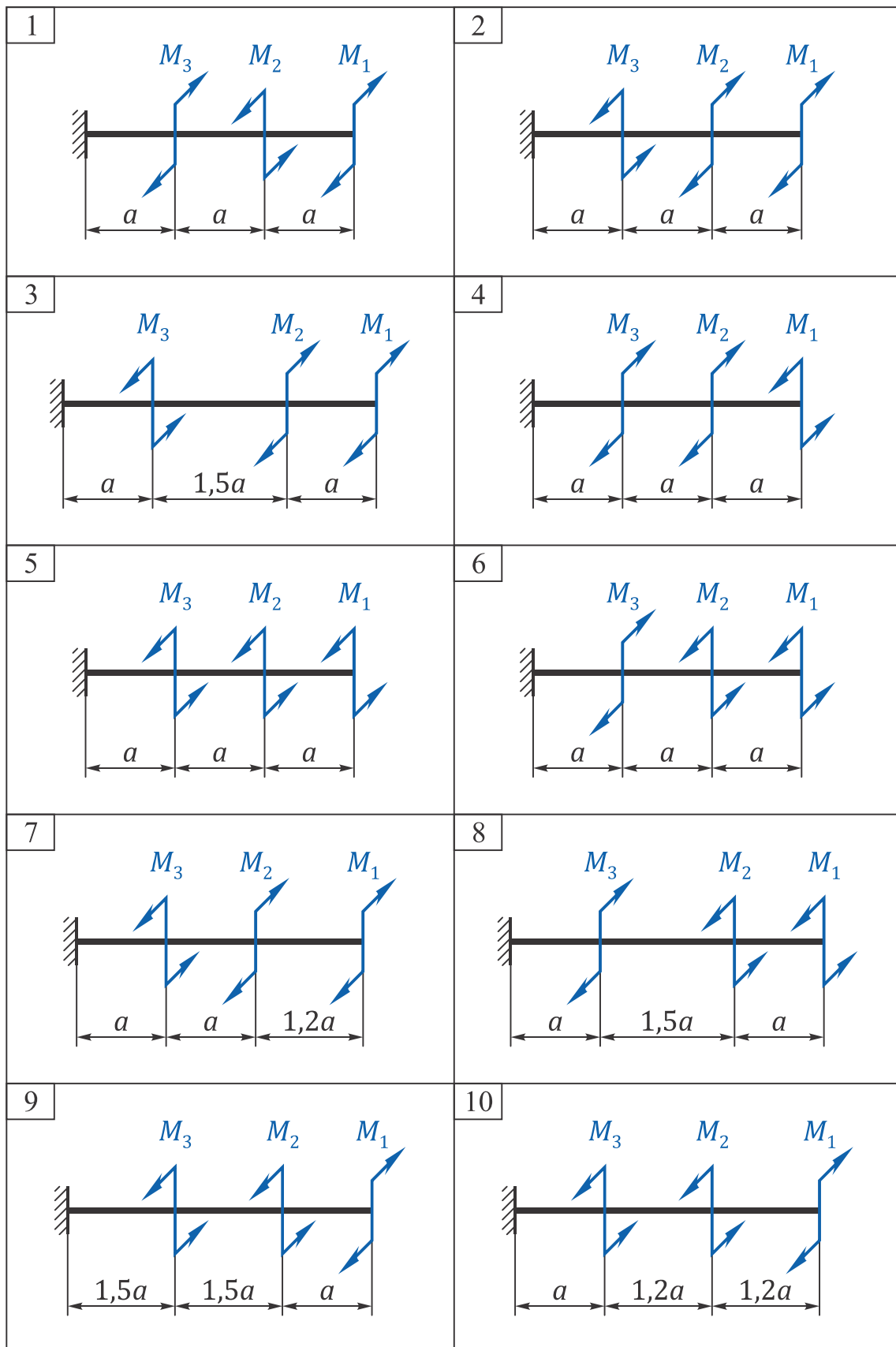
Параметр	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_1, \text{кН}$	6	8	10	12	14	16	18	20	19	17	15	13
$P_2, \text{кН}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P_3, \text{кН}$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$a, \text{м}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	0,2	0,2	0,5	0,4	0,3	0,2
$[\sigma]_p, \text{МПа}$	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195
$[\sigma]_c, \text{МПа}$	120	125	130	135	140	145	150	145	140	150	160	150

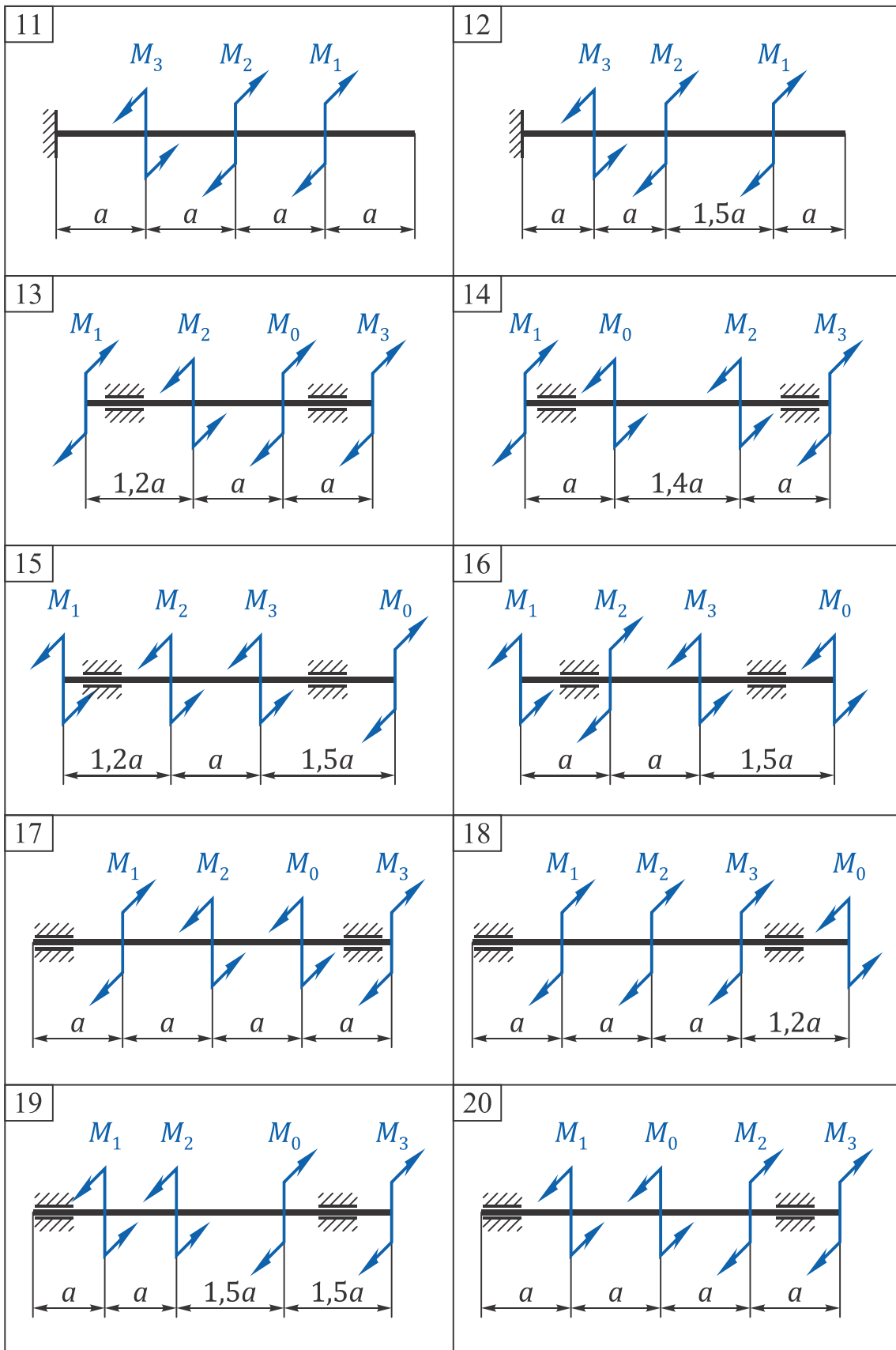
Параметр	Номер варіанта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$P_1, \text{кН}$	11	9	7	8	9	10	11	10	13	14	15	16
$P_2, \text{кН}$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	21	20	18
$P_3, \text{кН}$	20	21	22	20	16	16	14	12	10	8	6	4
$a, \text{м}$	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,4	0,2	0,4	0,3
$[\sigma]_p, \text{МПа}$	200	210	220	200	180	160	150	140	130	120	110	100
$[\sigma]_c, \text{МПа}$	155	160	140	150	160	170	180	190	200	190	180	170

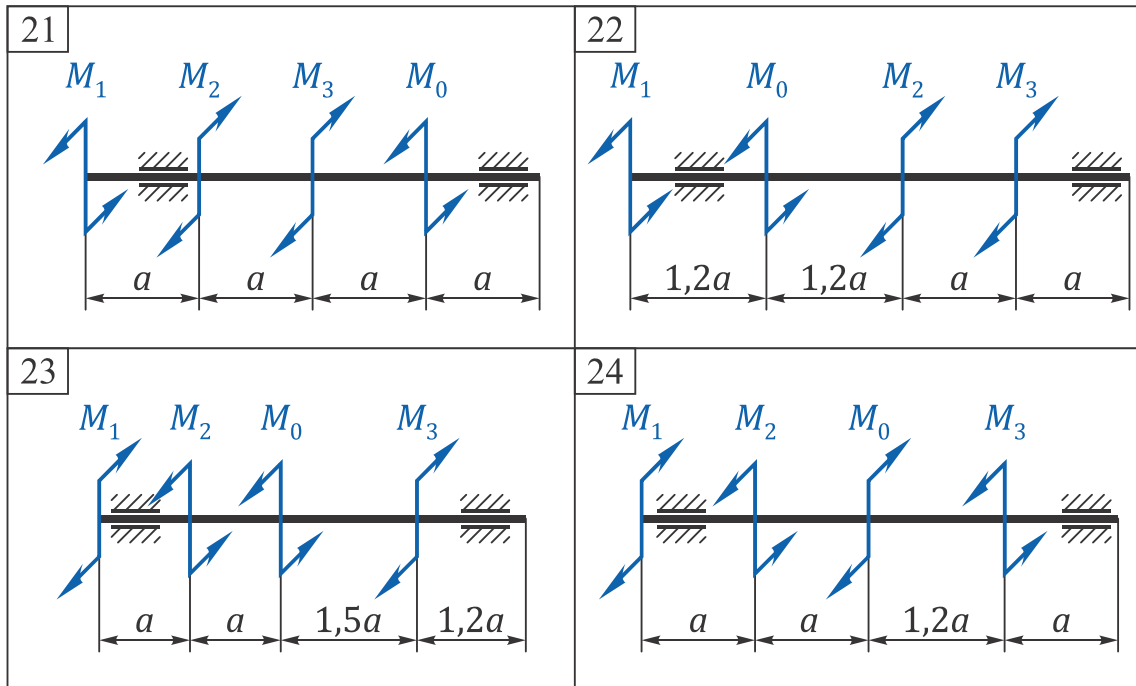
Задача № 2

Таблиця Д.1.3

Розрахункові схеми







Таблиця Д.1.4

Варіанти вихідних даних

Параметр	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M_1, \text{кН}\cdot\text{м}$	14	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$M_2, \text{кН}\cdot\text{м}$	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8
$M_3, \text{кН}\cdot\text{м}$	20	19	18	17	16	15	14	13	12	14	16	18
$\alpha = d/D$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,8	0,7	0,6	0,5	0,6	0,7	0,8
$[\tau], \text{МПа}$	80	85	90	95	100	95	90	85	80	85	90	95
$[\psi], \text{град}/\text{м}$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,5	0,55	0,6	0,7	0,8
$a, \text{м}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4

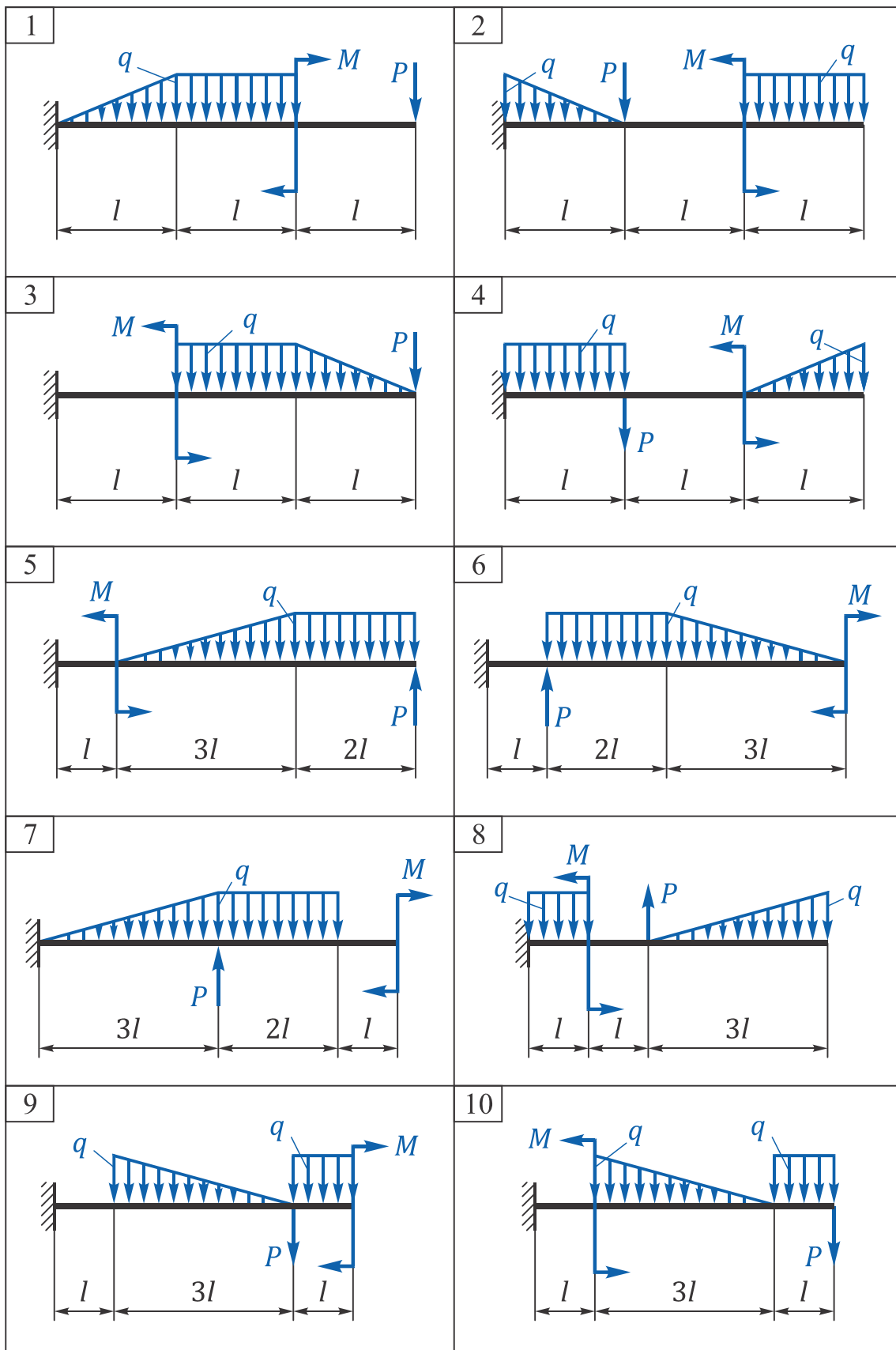
Параметр	Номер варіанта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$M_1, \text{кН}\cdot\text{м}$	34	36	38	30	26	22	18	14	10	8	6	12
$M_2, \text{кН}\cdot\text{м}$	6	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$M_3, \text{кН}\cdot\text{м}$	20	22	24	26	25	24	21	19	17	16	14	17
$\alpha = d/D$	0,6	0,5	0,4	0,8	0,7	0,6	0,5	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
$[\tau], \text{МПа}$	100	95	90	85	80	85	90	95	100	95	90	85
$[\psi], \text{град}/\text{м}$	1	1,2	0,75	0,65	0,85	0,55	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$a, \text{м}$	0,3	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,4

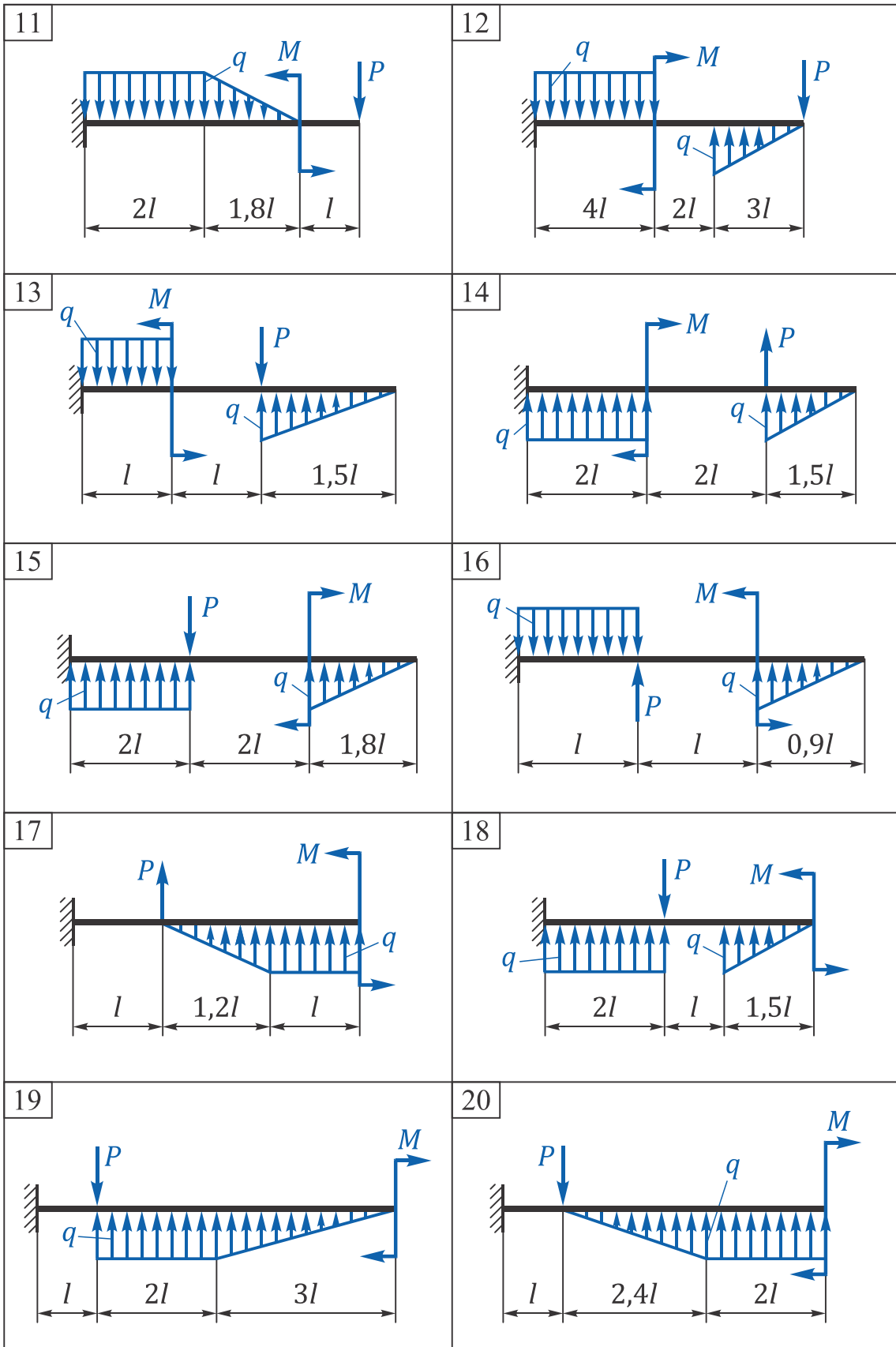
Модуль пружності при зсуві $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$ для всіх варіантів.

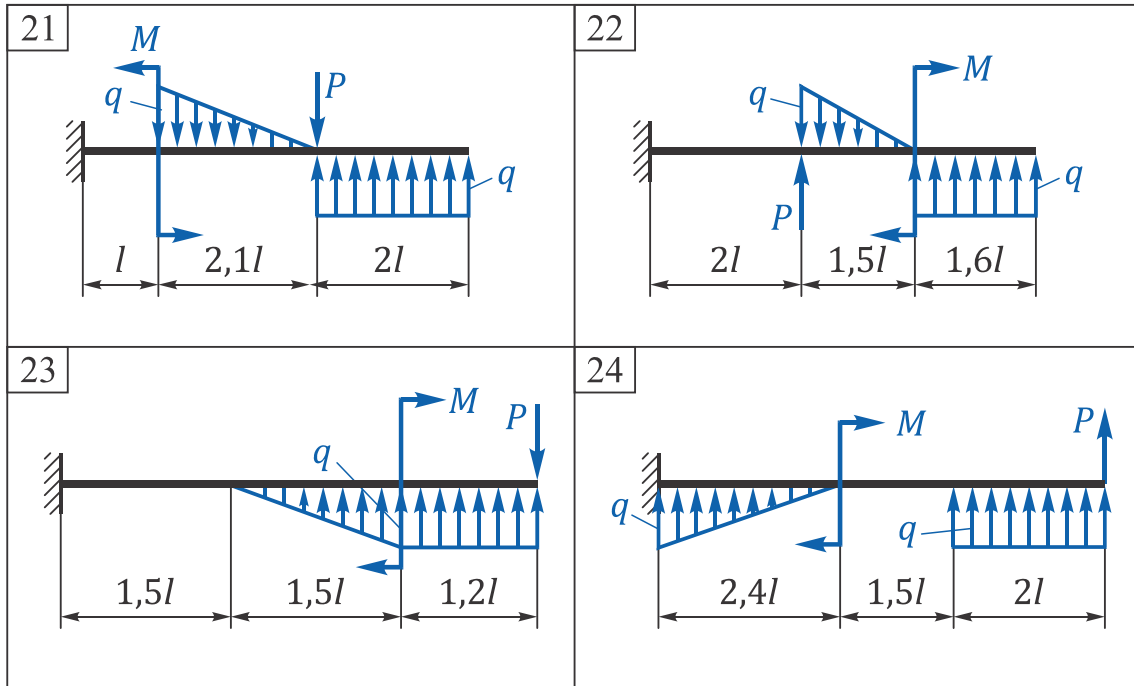
Задача № 3

Таблиця Д.1.5

Розрахункові схеми







Таблиця Д.1.6

Варіанти вихідних даних

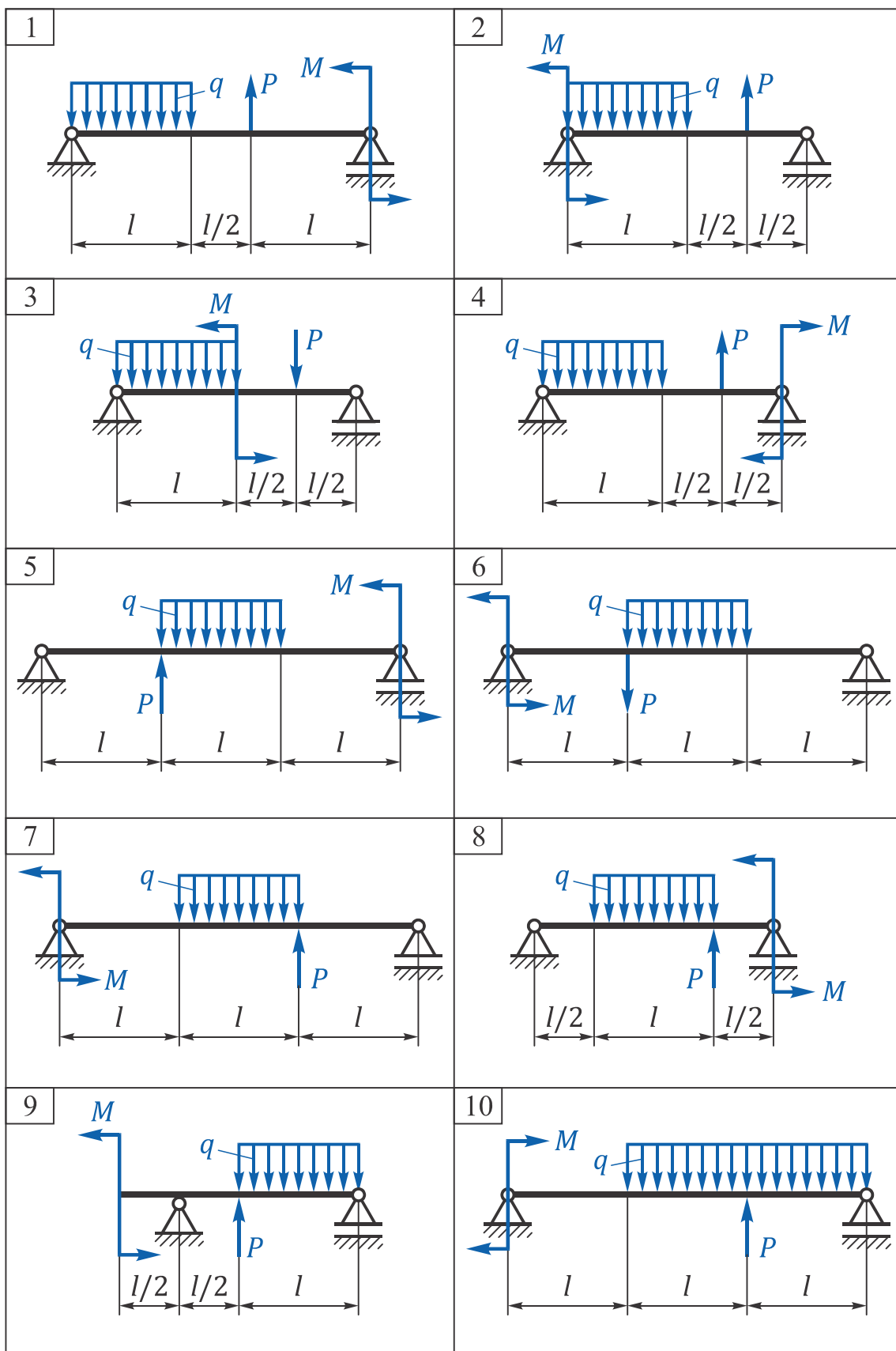
Параметр	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Номер двотавра	10	12	14	16	18	20	22	24	27	30	33	36
$l, м$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,2	1,0	0,8	0,6	0,4
P	$0,2ql$	$0,4ql$	$0,6ql$	$0,8ql$	ql	$1,2ql$	$1,4ql$	$1,6ql$	$1,8ql$	$2ql$	$2,2ql$	$2,4ql$
M	$6ql^2$	$5ql^2$	$4ql^2$	$3ql^2$	$2ql^2$	ql^2	$1,2ql^2$	$1,4ql^2$	$1,6ql^2$	$1,8ql^2$	$2ql^2$	$3ql^2$

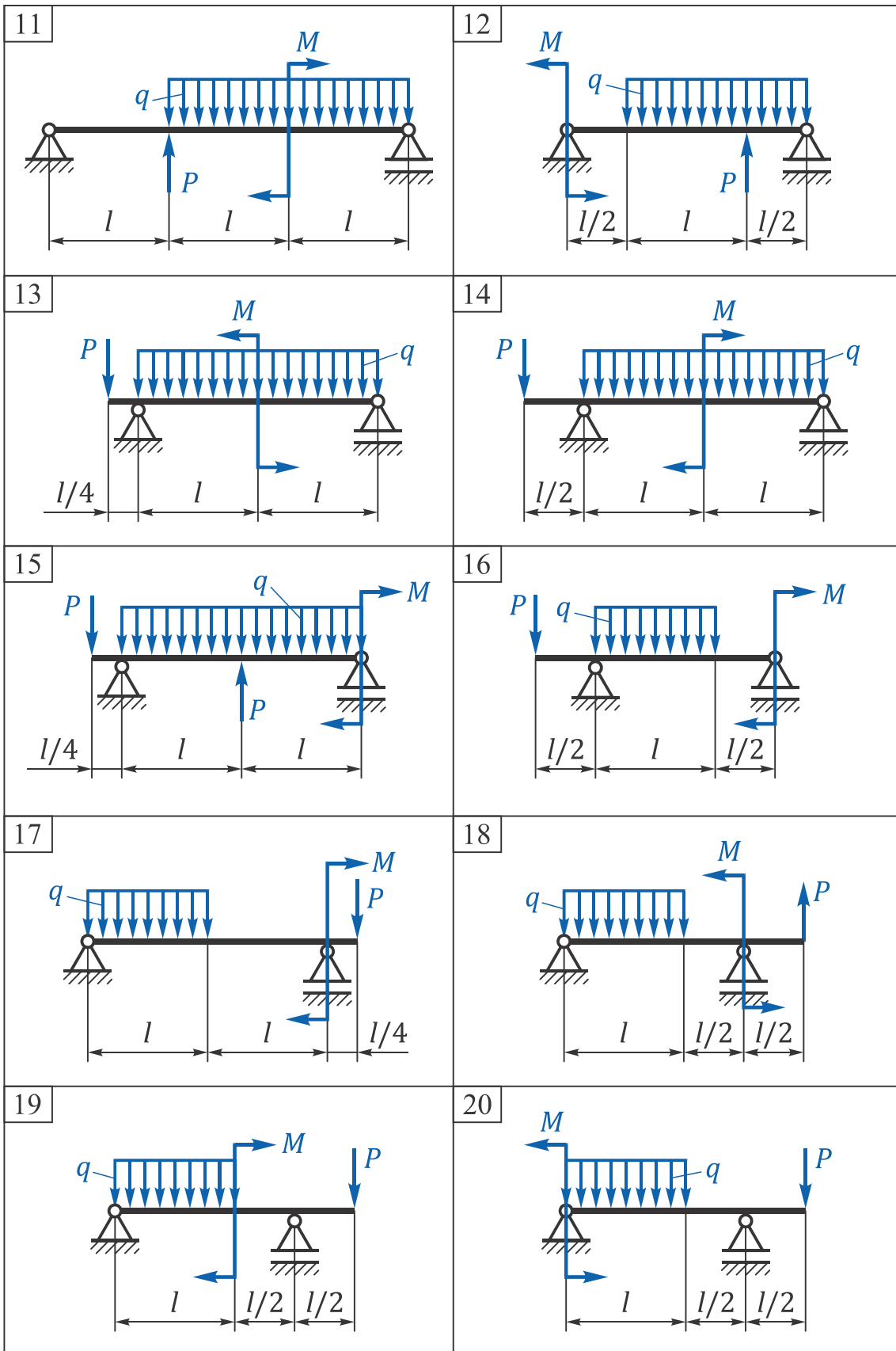
Параметр	Номер варіанта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Номер двотавра	40	45	50	18a	20a	24a	27a	30a	24	22	20	18
$l, м$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,2	1,0	0,8	0,6	0,4
P	$2,6ql$	$2,8ql$	$3ql$	$3,2ql$	$3,4ql$	$3,6ql$	$3,8ql$	$4ql$	$4,2ql$	$4,4ql$	$4,6ql$	$4,8ql$
M	$4ql^2$	$2,5ql^2$	$2,1ql^2$	$2ql^2$	$3ql^2$	$4ql^2$	$5ql^2$	$6ql^2$	ql^2	$1,5ql^2$	$3,5ql^2$	$4ql^2$

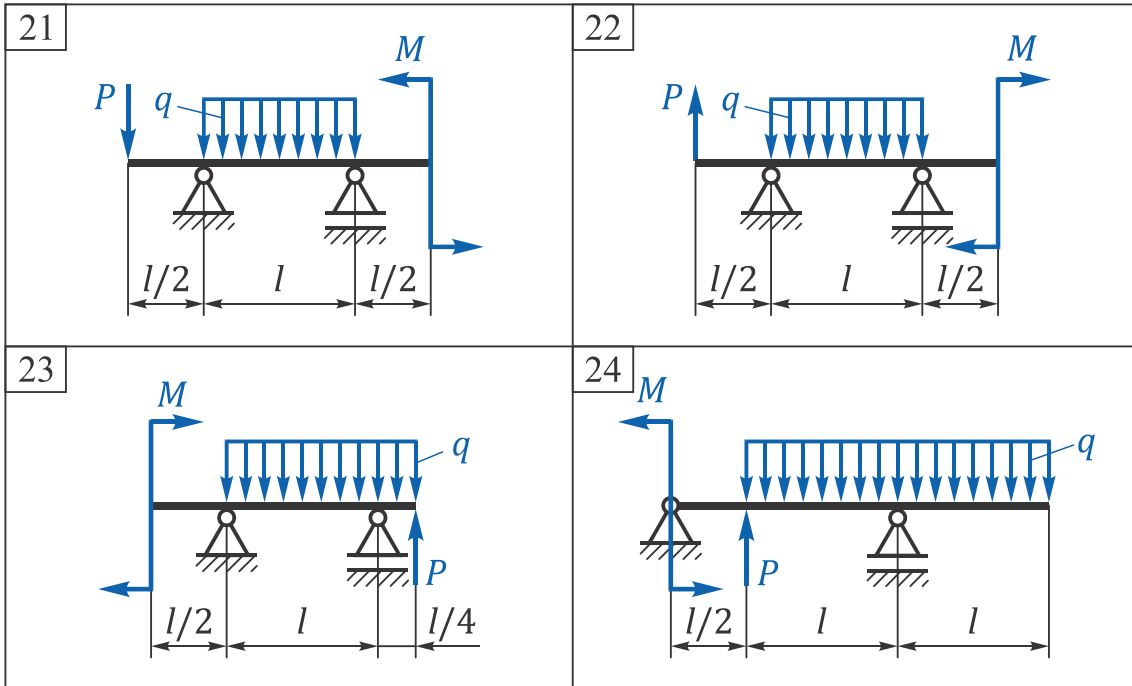
Задача № 4

Таблиця Д.1.7

Розрахункові схеми







Таблиця Д.1.8

Варіанти вихідних даних

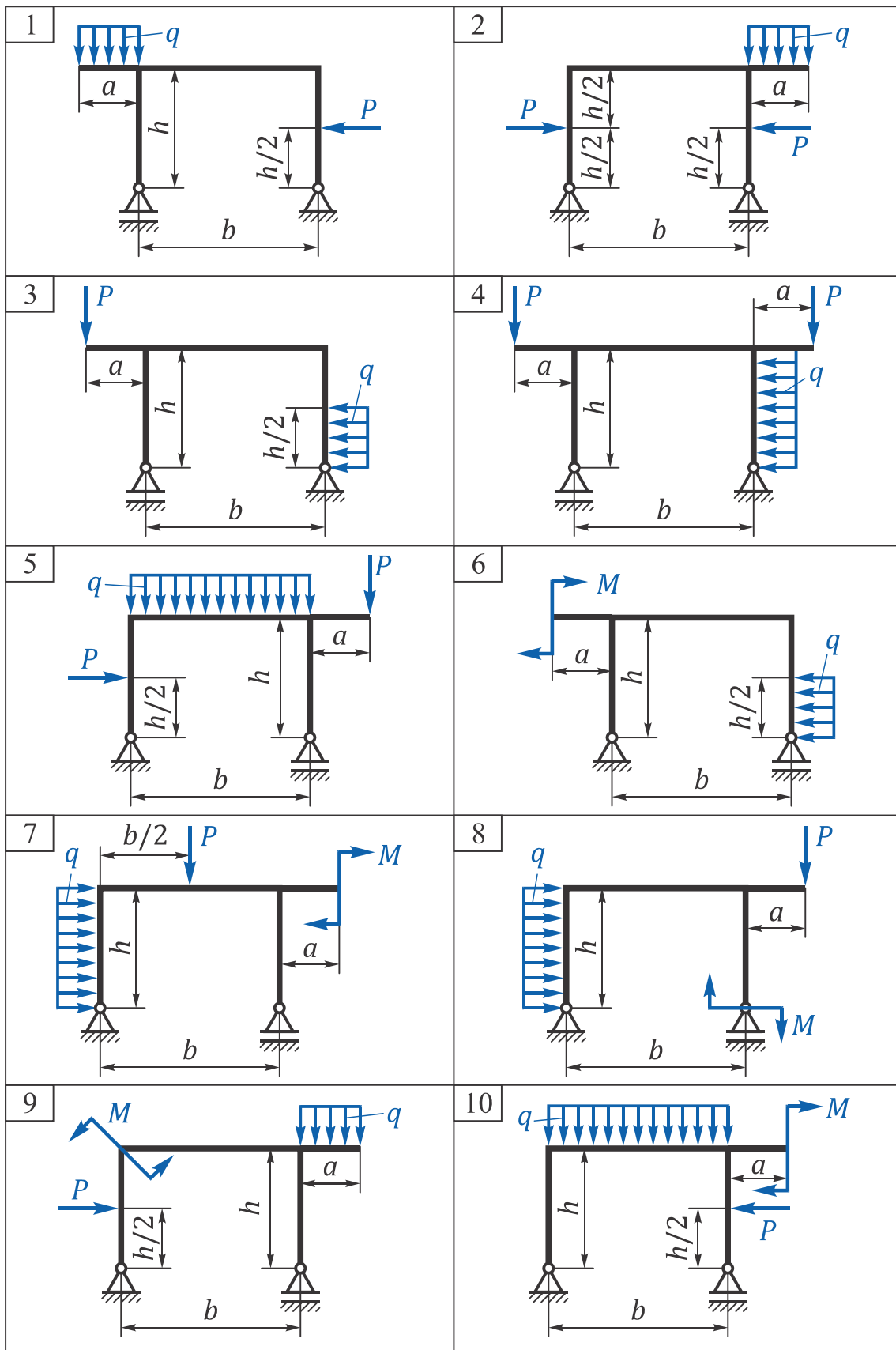
Параметр	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P, \text{кН}$	16	18	20	22	24	26	28	30	28	26	24	22
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	4	5	6	7	8	9	10	12	10	8	6	4
$q, \text{кН}/\text{м}$	2	4	6	8	10	8	6	4	2	4	8	6
$l, \text{м}$	2	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4
$[\sigma], \text{МПа}$	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195
$k = h/b$	2	3	4	5	6	4	3	2	4	5	6	4

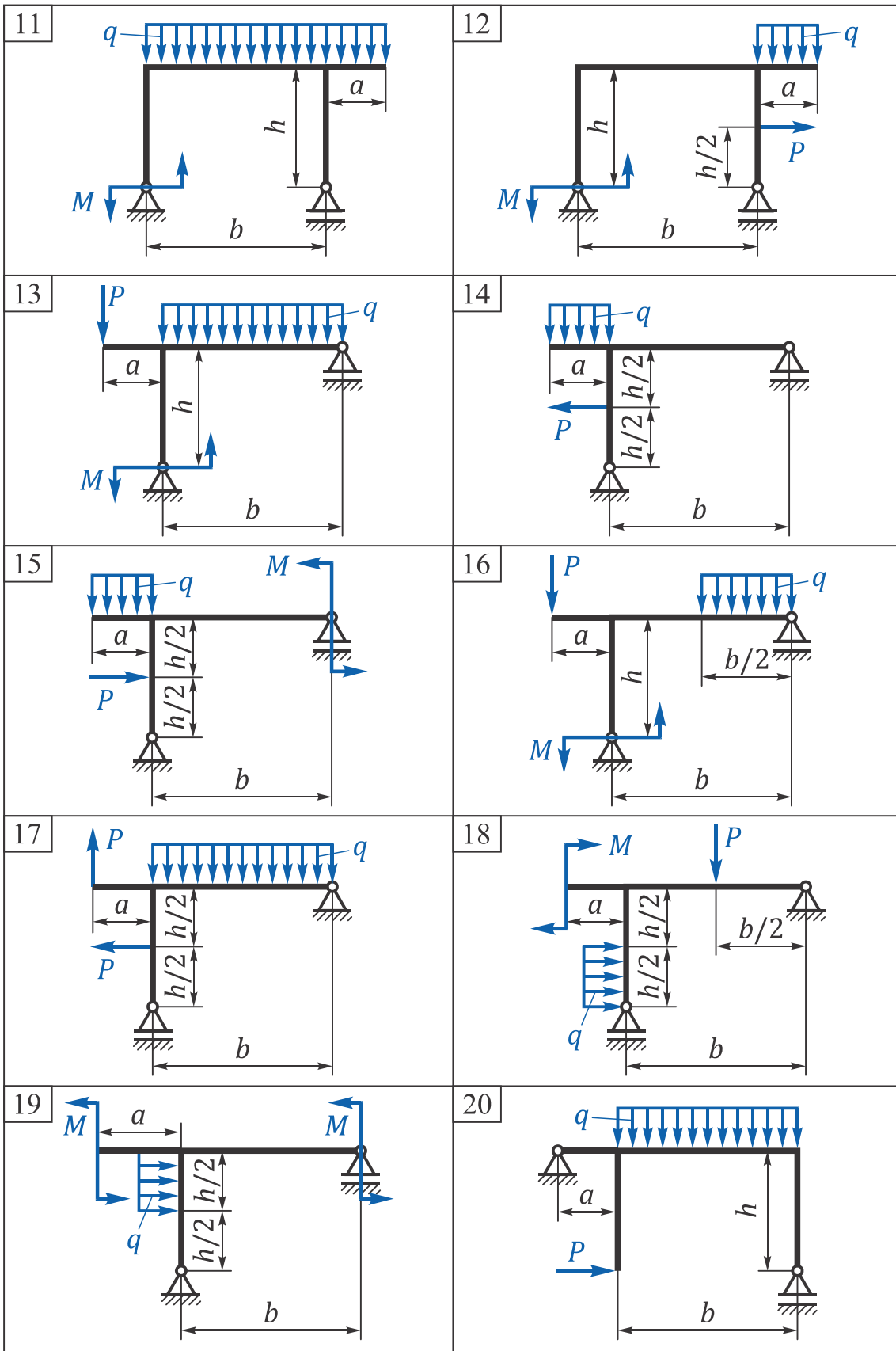
Параметр	Номер варіанта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$P, \text{кН}$	20	18	16	14	12	10	12	14	16	18	20	22
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	2	6	8	10	12	14	16	18	20	18	16	14
$q, \text{кН}/\text{м}$	10	12	10	14	16	18	20	10	12	14	18	12
$l, \text{м}$	2	6	4	1	2	1	4	1	2	1	2	1
$[\sigma], \text{МПа}$	200	205	210	200	180	160	140	220	200	180	160	140
$k = h/b$	2	6	4	2,5	1,5	2	3	1,5	2	4	3	2

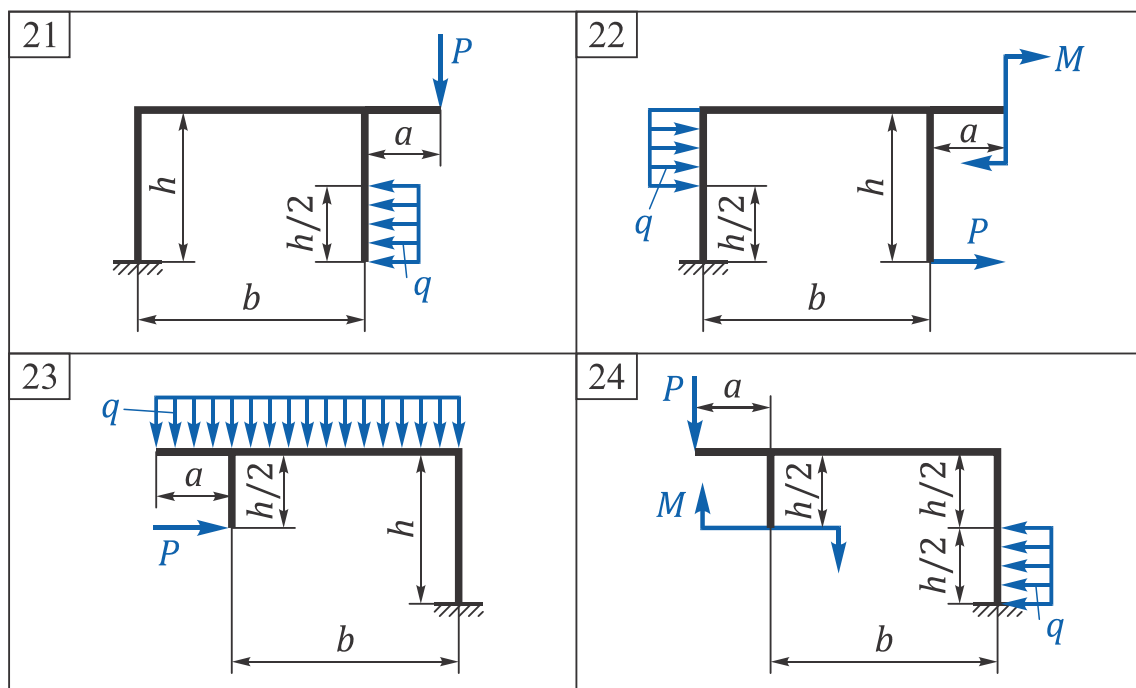
Задача № 5

Таблиця Д.1.9

Розрахункові схеми







Таблиця Д.1.10

Варіанти вихідних даних

Параметр	Номер варіанта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P, кН$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
$M, кН·м$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	2
$q, кН/м$	2	4	6	8	10	8	6	4	2	4	6	8
$a, м$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	1,2
$b, м$	2	2,4	2,6	2,8	3,0	4,0	3,2	3,4	3,6	3,0	2,8	2,6
$h, м$	4	4	4	4	4	4	6	6	4	6	4	6
$[\sigma], МПа$	150	160	170	180	190	200	190	180	170	160	150	160

Параметр	Номер варіанта											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$P, кН$	18	20	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4
$M, кН·м$	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18
$q, кН/м$	10	8	6	4	2	4	6	8	10	12	14	16
$a, м$	1,4	1,6	1,8	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	1,2	1,4	1,6
$b, м$	2,4	2,2	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
$h, м$	4	6	4	2	4	2	6	2	2	2	4	2
$[\sigma], МПа$	170	180	190	200	190	180	170	160	150	160	170	180

СОРТАМЕНТ ГАРЯЧЕКАТАНОЇ СТАЛІ. БАЛКИ ДВОТАВРОВІ. ГОСТ 8239-89

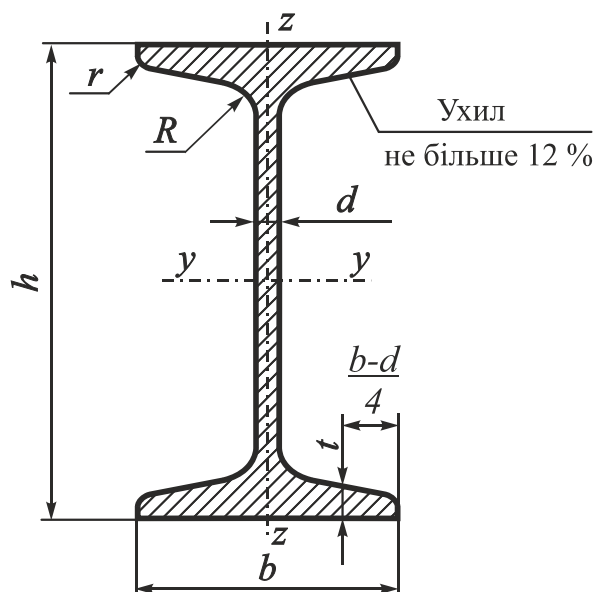
Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 м двотавра обчислено за номінальними розмірами; густина сталі вибрана такою, що дорівнює $7,85 \text{ г/см}^3$.
2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на поданому рисунку і в табл. Д.2.1, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблиці використано позначення:

h – висота балки;
 b – ширина полиці;
 d – товщина стінки;
 t – середня товщина полиці;
 R – радіус внутрішнього заокруглення;
 F – площа поперечного перерізу;
 r – радіус заокруглення полиці;
 I – момент інерції;
 W – момент опору;
 S – статичний момент півперерізу;
 i – радіус інерції.

4. Двотаври від № 24 до № 60 не рекомендується застосовувати в нових розробках.



Таблиця Д.2.1

Номер двотавра	Розміри, мм						F , см ²	Маса 1 м, кг	Довідкові дані для осей						
									y – y			z – z			
	h	b	d	t	R	r			I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	S_y , см ³	I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,9	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54

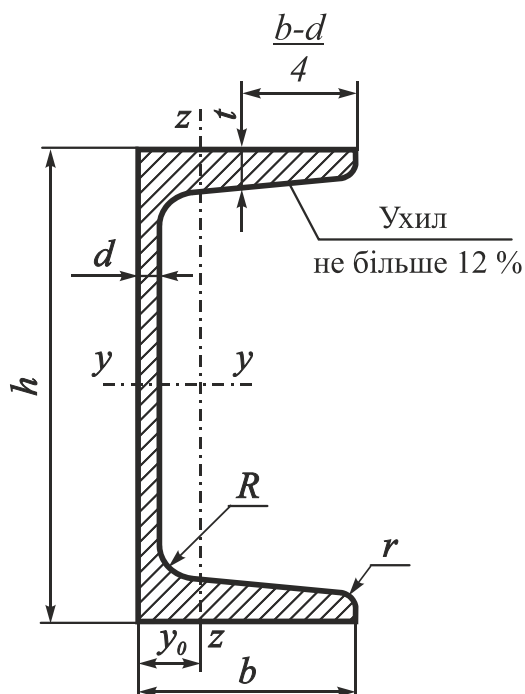
СОРТАМЕНТ ГАРЯЧЕКАТАНОЇ СТАЛІ. ШВЕЛЕРИ З УХИЛОМ ВНУТРІШНІХ ГРАНЕЙ ПОЛИЦЬ. ГОСТ 8240-89

Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 м швелера обчислено за номінальними розмірами; густина сталі вибрана такою, що дорівнює $7,85 \text{ г/см}^3$.
2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на поданому рисунку і в табл. Д.3.1, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблиці використано позначення:

- h – висота балки;
- b – ширина полиці;
- d – товщина стінки;
- t – середня товщина полиці;
- R – радіус внутрішнього заокруглення;
- r – радіус заокруглення полиці;
- F – площа поперечного перерізу;
- I – момент інерції;
- W – момент опору;
- i – радіус інерції;
- S – статичний момент півперерізу;
- y_0 – відстань від осі $z - z$ до зовнішньої межі стінки.



Таблиця Д.3.1

Номер швелле- ра	Розміри, мм						F , см ²	Маса 1 м, кг	Довідкові дані для осей							U_0 , см
									y – y				z – z			
	h	b	d	t	R	r			I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	S_y , см ³	I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491,0	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	13,3	545,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	19,8	1670,0	167,0	8,15	95,9	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	22,6	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	25,8	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160,0	308,0	10,9	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810,0	387,0	12,0	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7980,0	484,0	13,1	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10820,0	601,0	14,2	350,0	513,0	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15220,0	761,0	15,7	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Писаренко, Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, А. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища шк., 2004. – 655 с.

Belyaev, N. M. Strength of Materials / N. M. Belyaev. – Mir Publishers, 1979. – 648 p.

Goodno, B. J. Mechanics of Materials / B. J. Goodno, J. M. Gere. – Cengage Learning, 2018. – 1188 p.

Hibbeler, R. C. Mechanics of Materials / R. C. Hibbeler. – Pearson, 2017. – 896 p.

Timoshenko, S. P. Strength of Materials. Parts I. Elementary Theory and Problems / S. P. Timoshenko. – D. Van Nostrand Company, Inc, 1955. – 459 p.

Timoshenko, S. P. Strength of Materials. Parts II. Advanced Theory and Problems / S. P. Timoshenko. – D. Van Nostrand Company, Inc, 1956. – 572 p.

ЗМІСТ

Задачі для розрахунково-графічних робіт	3
Приклад розв'язання задачі № 1	5
Приклад розв'язання задачі № 2	8
Приклад розв'язання задачі № 3	15
Приклад розв'язання задачі № 4	18
Приклад розв'язання задачі № 5	29
Додаток 1. Варіанти завдань	34
Додаток 2. Сортамент гарячекатаної сталі. Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89	49
Додаток 3. Сортамент гарячекатаної сталі. Швелери з ухилом внутрішніх граней полиць. ГОСТ 8240-89	51
Бібліографічний список	53

Методичне видання

Гребенніков Михайло Миколайович
Кирпикін Анатолій Олексійович

РОЗРАХУНОК БРУСІВ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ

Редактор Н. М. Сікульська

Зв. план, 2026

Підписано до видання 09.02.2026

Ум. друк. арк. 3,1. Обл.-вид. арк. 3,44. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17
<http://www.khai.edu>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

