

Міністерство освіти і науки України  
Національний аерокосмічний університет  
«Харківський авіаційний інститут»

Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису

**БОНДАРЕНКО ОЛЕКСІЙ ВАСИЛЬОВИЧ**

УДК621.452.3.02:629.7.05(043)

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ФОРМУВАННЯ БОРТОВИХ САМОНАЛАШТОВУВАЛЬНИХ  
ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОТУРБІННИХ ДВИГУНІВ ДЛЯ  
ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ**

Спеціальність 142 Енергетичне машинобудування

Галузь знань 14 Електрична інженерія

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ О. В. Бондаренко

Науковий керівник: Спіфанов Сергій Валерійович, д.т.н., професор,  
Заслужений діяч науки і техніки України

Харків–2025

## АНОТАЦІЯ

*Бондаренко О. В.* Формування бортових самоналаштувальних динамічних моделей газотурбінних двигунів для визначення невимірюваних параметрів робочого процесу. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 142 «Енергетичне машинобудування» (14 «Електрична інженерія»). – Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», Харків, 2025.

Дисертаційна робота присвячена *актуальній задачі* формування бортових самоналаштувальних динамічних моделей газотурбінних двигунів для визначення невимірюваних параметрів робочого процесу, призначених для використання в системах автоматичного керування. *Об'єктом* дослідження є робочі процеси газотурбінних двигунів, що відбуваються на усталених і перехідних режимах їх роботи. *Предметом* дослідження є зв'язки між вимірюваними та невимірюваними параметрами робочого процесу двигуна; математичні моделі, придатні для бортової реалізації, та методи їх налаштування за результатами реєстрації параметрів під час роботи двигуна.

Авіаційний газотурбінний двигун є складним технічним об'єктом, до якості характеристик та надійності якого висуваються високі вимоги. Для успішного вирішення завдань керування та контролю технічного стану двигуна він оснащений вимірювальною системою. Однак склад вимірюваних параметрів суттєво обмежений складністю організації вимірювання деяких найважливіших параметрів, малим ресурсом відповідних датчиків, високою вартістю відповідних компонентів вимірювальної системи, захараченням проточної частини двигуна та відповідним негативним впливом на витрату робочого тіла, тягу та питому витрату палива. Тому визначення невимірюваних параметрів двигунів на усталених та перехідних режимах роботи є актуальною задачею створення систем автоматичного керування та діагностування двигунів.

У роботі представлено аналіз існуючих підходів до визначення невимірюваних параметрів авіаційних двигунів і формування необхідних для цього

математичних моделей і методів їх узгодження з індивідуальними характеристиками двигунів. У результаті визначено задачі дисертаційної роботи.

Проаналізовано задачу формування математичних моделей із урахуванням їх використання в алгоритмах бортових систем керування й діагностування. Сформовано вимоги до цих моделей і зроблено висновок про доцільність використання динамічних швидкорозрахункових квазілінійних моделей, структурними частинами яких є статична модель у вигляді апроксимації дросельних характеристик, і динамічна модель у формі простору станів, коефіцієнти якої залежать від умов роботи двигуна. Реалізовано такі моделі для турбореактивного двоконтурного двигуна зі змішуванням потоків типу AI-322 і турбовального двигуна типу ТВ3-117ВМА-СБМ1В. Верифікацію виконано з використанням результатів стендових випробувань двигуна. Установлено, що наявні статичні похибки пов'язані з індивідуальними відмінностями двигунів та можуть бути усунені шляхом налагодження статичної підмоделі.

Розглянуто проблему оцінювання параметрів лінійної динамічної моделі двигуна за результатами вимірювання його параметрів під час перехідних процесів із використанням методу найменших квадратів. Доведено, що похибки параметричного оцінювання суттєво залежать від багатьох факторів, таких як істинні значення параметрів, що оцінюються, похибки вимірювань та апріорна інформація про модель. Розроблено узагальнений підхід до аналізу похибок адаптації моделі ГТД, головні концепції якого полягають у використанні лінійної динамічної моделі в околиці істинних значень шуканих параметрів, розгляді похибок, що впливають, як незалежних нормально розподілених випадкових величин, використанні питомих параметрів і відповідного перетворення рівнянь, які відбивають зв'язок між похибками оцінювання та впливовими факторами, що робить ці рівняння універсальними, придатними для аналізу будь-яких параметрів двигуна та будь-яких впливових дій.

У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при стрибкоподібній зміні витрати палива визначено мінімальну можливу похибку оцінювання. Зокрема, при номінальному значенні сталої часу 1 с і коефіцієнті підсилення подачі

палива 10, похибки вимірювання частоти обертання ротора 0,2 %, витрати палива 0,5 %, стрибкоподібної зміни подачі палива на 10 кг/с і частоті реєстрації 5 Гц, мінімальне середньоквадратичне відхилення похибки оцінки сталої часу становитиме 0,2 с, тобто 20 %. Цей значний рівень похибки вимагає ретельного планування випробувань і постійної перевірки під час застосування запропонованого методу.

У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при зміні витрати палива з постійною швидкістю та наступною стабілізацією визначено мінімальну можливу похибку оцінювання, яка залежить від зазначеної швидкості та амплітуди вхідного впливу. На прикладі газогенератора реального вертолітного турбовального двигуна отримано конкретні значення складових похибки оцінювання сталої часу. Показано, що головний внесок роблять похибки вимірювання частоти обертання ротора та витрати палива. Сумарна похибка внаслідок суперечливого впливу різних факторів слабо залежить від режиму роботи двигуна. Для розглянутого прикладу вона складає біля 0,05 с, що є суттєвим для багатьох задач, для рішення яких використовуються динамічні моделі двигунів.

Запропонований підхід до аналізу точності оцінювання коефіцієнтів динамічних моделей розповсюджено на двовальний двигун, кількість динамічних характеристик якого більша та параметричні похибки моделі також впливають на оцінки динамічних характеристик. Отримано універсальне рівняння, яке визначає похибку оцінки коефіцієнтів лінійної динамічної моделі як функцію всіх основних впливових факторів: похибок вимірювання та частоти реєстрації, інтенсивності тестового впливу та номінальних значень коефіцієнтів моделі. Інструментальні похибки оцінок сталих часу двигуна мають нижню межу; це зумовлено скінченною тривалістю перехідних процесів, наприкінці яких вихідні параметри стабілізуються та стають нечутливими до динамічних параметрів двигуна.

Розглянуто підхід до визначення невимірюваних параметрів двигунів, який не вимагає оцінювання повного вектору внутрішніх параметрів технічного стану, а фокусується на прямому визначенні невимірюваних параметрів, що дозволяє знизити обчислювальну складність та уникнути накопичування похибок

обчислень. Цей підхід який забезпечує мінімізацію похибки оцінки невимірюваного параметра за умови обмеженої кількості вимірювань, наявності мультиколінеарності математичної моделі та різної точності вимірювання параметрів робочого процесу. Використано методи матричної алгебри: псевдообернення матриць, сингулярне розкладання (SVD), зважений метод найменших квадратів (МНК). Отримано матричні співвідношення для інструментальної та методичної складових похибок оцінювання. Як приклад розглянуто задачу визначення тяги двигуна типу AI-322. Отримано залежність СКВ похибок від режимного параметра. В усьому діапазоні робочих режимів значну частину загальної похибки складає методична, основним чинником якої є можлива зміна технічного стану, яка спричиняє зміну витрати повітря у вентиляторі. Проаналізовано також інструментальну складову похибки, в формуванні якої домінує похибка вимірювання витрати палива. Запропонований метод оцінювання тяги мінімізує загальну похибку оцінювання, визначаючи компроміс з урахуванням співвідношення між інформативністю та різних похибок вимірюваних параметрів.

*Наукова новизна отриманих результатів:*

- Уперше для стрибкоподібного та лінійного з обмеженням керуючих впливів сформовано співвідношення для похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів, які відрізняються використанням інтегральних характеристик чутливості і дозволяють незалежно аналізувати вплив на похибки оцінювання усіх головних чинників: точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів.
- Уперше отримано залежності для похибок визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів, які відрізняються використанням інформації про структуру бортових моделей і дозволяють урахувати вплив похибок вимірювання всіх використовуваних параметрів на статичну, динамічну й коригувальну складові моделі, а також похибки оцінювання коефіцієнтів моделі.

- Набула подальшого розвитку концепція бортової самоналаштувальної математичної моделі авіаційного газотурбінного двигуна: до складу відомої структури моделі включено підсистему контролю якості та керування самоналаштуванням, в основі якої – перелічені вище співвідношення.

*Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами:*

Представлені в роботі дослідження виконано на кафедрі конструкції авіаційних двигунів Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут» у рамках виконання держбюджетної теми «Формування технологій створення адаптивних систем керування ГТД пасажирських і транспортних літаків» (ДР № 0119U100942), а також у рамках госпдоговірних робіт: №203-25/2021 «Розробка комплексу динамічних моделей двигуна ТВ3-117ВМА-СБМ1В 1 серії», замовник АТ «МОТОР СІЧ», а також №203-10/2020 «Розробка комплексу динамічних математичних моделей двигуна АІ-322» та №203-18/2020 «Модернізація та підтримка комплексу динамічних математичних моделей двигуна АІ-322», замовник АТ «ФЕД».

*Практичне значення отриманих результатів:*

- отримані в роботі співвідношення, що визначають залежність похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів від точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів, можуть бути використані для планування експериментів з дослідження динамічних характеристик газотурбінних двигунів на стадії випробувань, а також для алгоритмічного визначення достатності зібраної інформації при автоматичній корекції динамічних моделей у складі систем автоматичного керування газотурбінних двигунів;
- розроблений удосконалений метод визначення невимірюваних параметрів може бути використаний при обробці експериментальної інформації, а також у бортових алгоритмах для моніторингу тяги, питомої витрати палива, потужності, температури газу перед турбіною, витрати повітря та інших параметрів, які характеризують робочий процес двигуна;

- наявність методу визначення точності оцінювання параметрів математичних моделей, а також удосконалених алгоритмів визначення невимірюваних параметрів, уможлиблює створення електронних систем керування авіаційними газотурбінними двигунами на основі концепції самоналаштувальних моделей;
- зазначені методи, моделі й співвідношення в рамках прийнятих при їх отриманні припущень є універсальними й можуть бути використані для будь-якої лінійної динамічної системи.

Наведено акти впровадження результатів дисертації в АТ «МОТОР СІЧ», АТ «ФЕД» і в навчальному процесі (додатки А, Б, В).

Наукові положення й результати, викладені в дисертаційній роботі та винесені на захист, отримано особисто здобувачем. Серед них: аналіз існуючих методів визначення невимірюваних параметрів і формування математичних моделей газотурбінних двигунів; комплексний аналіз похибок оцінювання динамічних параметрів одновального турбореактивного двигуна при стрибкоподібній та лінійній зміні керуючого впливу; отримання й аналіз співвідношень, що характеризують похибки оцінювання динамічних параметрів двовального турбореактивного двигуна; удосконалення методу визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів, а також відповідних похибок; результати випробування зазначених підходів, методів і моделей на прикладах двигунів AI-322 і ТВ3-117ВМА-СБМ1В.

Основні наукові та практичні результати роботи оприлюднено й обговорено на конференціях: XXV, XXVII, XXVIII і XXIX Міжнародних конгресах двигунобудівників (2020, 2022, 2023, 2024 рр., м. Харків), Seminarium IV. New Trends in the Construction, Research and Operation of Flying Objects (2022 р., Institut Lotniztwa, Warsaw), V міжнародній науково-практичній морської конференції кафедри СЕУ і TE Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024 (2024 р., м. Одеса).

Основні результати дисертації опубліковано в 14 працях, у тому числі в 8 статтях, 7 з яких – у журналах, що входять до фахових видань зі спеціальності, а одна – у закордонному фаховому виданні.

Ключові слова: газотурбінний двигун, силова установка, динамічна математична модель, лінійна математична модель, адаптивна модель, автоматичне керування, параметри робочого процесу двигуна, тяга, стала часу, діагностування, технічний стан двигуна, обробка даних, датчики, пошкодження, експлуатація.

Перелік наукових праць здобувача за темою дисертації:

— в яких опубліковано основні результати:

1. Єпіфанов, С. В. Дослідження проблеми формування залежності параметрів динамічної моделі двовального ТРДД від режиму роботи / С. В. Єпіфанов, Р. Л. Зеленський, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2020. – № 7(167). – С. 89-97. doi: 10.32620/aktt.2020.7.13.
2. Єпіфанов, С. В. Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю [Текст] / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. – № 4 (188). – С. 44-55. doi: 10.32620/aktt.2023.4.05.
3. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. - № 4 sup1 (189). – С. 85-94. doi: 10.32620/aktt.2023.4sup1.12.
4. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності самоналаштування динамічної моделі газотурбінного двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2024. - № 2 (194). – С. 38-48. doi: 10.32620/aktt.2024.2.04.
5. Бондаренко, О. В. Ідентифікація динамічних характеристик двовального турбореактивного двигуна / О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2024. - № 4 sup1 (197). – С. 125-136. doi: 10.32620/aktt.2024.4sup1.17.
6. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності оцінювання сталої часу одновального газотурбінного двигуна в реальних умовах / С. В. Єпіфанов,

О. В. Бондаренко // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2024. - №4sup2(198). – С. 69-79. doi: 10.32620/aktt.2024.sup2.09.

7. Єпіфанов, С. В. Метод визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів з урахуванням технічного стану / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2025. - № 2 (202). – С. 25-37. doi: 10.32620/aktt.2025.2.03.

— які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

8. Бондаренко, О. В. Особливості керування параметрами повітряної системи літака / О. В. Бондаренко, С. В. Єпіфанов // XXVII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2022. - С. 55-56.
9. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна на режимі запуску / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко, Р. Р. Джаббаров // XXVII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2022. - С. 56-57.
10. Єпіфанов, С. В. Моделювання динаміки турбореактивного двоконтурного двигуна при аналізі й синтезі систем автоматичного керування / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // XXVIII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2023. - С. 52-54.
11. Єпіфанов, С. В. Особливості формування динамічної моделі турбовального двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // XXVIII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2023. - С. 54-55.
12. Бондаренко О. В. Ідентифікація динамічних характеристик двовального турбореактивного двоконтурного двигуна / О. В. Бондаренко // XXIX міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2024. - С. 61.

13. Бондаренко О. В. Дослідження впливу зміни технічного стану газотурбінного двигуна на його динамічні характеристики / О. В. Бондаренко, С. В. Єпіфанов // Матеріали V міжнародної науково-практичної морської конференції кафедри СЕУ і ТЕ Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024. 2024. – С. 126-127.

— які додатково відображають наукові результати дисертації:

14. Yepifanov, S. Development of turboshaft engine adaptive dynamic model: analysis of estimation errors / S. Yepifanov, O. Bondarenko // Transactions on Aerospace Research. – 2022. - Vol. 269, No. 4. – P. 31-43. doi: 10.2478/tar-2022-0024.

Наведені публікації містять результати безпосередньої роботи здобувача на окремих етапах дослідження, повною мірою відображають основні положення та висновки роботи. Авторська участь здобувача в опублікованих наукових працях погоджена зі співавторами.

## ABSTRACT

*Bondarenko O. V.* Formation of on-board self-tuning dynamic models of gas turbine engines for determining unmeasured parameters of the working process. – A qualifying scientific work as a manuscript.

The thesis for a degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 142 “Power Machinery” (14 “Electrical Engineering”). – National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, 2024.

The dissertation work is devoted to the urgent task of forming on-board self-tuning dynamic models of gas turbine engines for determining unmeasured parameters of the working process, intended for use in automatic control systems. The *object* of the research is the working processes of gas turbine engines, occurring in steady-state and transient modes of their operation. The *subject* of the research is the relationships between the measured and unmeasured parameters of the engine working process; mathematical models suitable for on-board implementation, and methods for their adjustment based on the results of parameter registration during engine operation.

An aircraft gas turbine engine is a complex technical object, the quality of which is subject to high requirements for its characteristics and reliability. To successfully solve the problems of controlling and monitoring the technical condition of the engine, it is equipped with a measuring system. However, the composition of the measured parameters is significantly limited by the complexity of organizing the measurement of some of the most important parameters, the short life of the corresponding sensors, the high cost of the corresponding components of the measuring system, the clogging of the flow part of the engine and the corresponding negative impact on the flow rate of the working fluid, thrust and specific fuel consumption. Therefore, the determination of unmeasured engine parameters in steady-state and transient operating modes is an urgent task for creating automatic control and engine diagnostics systems.

The paper presents an analysis of existing approaches to determining unmeasured parameters of aircraft engines and the formation of the necessary mathematical models and methods for their coordination with individual engine characteristics. As a result, the tasks of the dissertation work are defined.

The problem of forming mathematical models is analyzed, taking into account their use in the algorithms of on-board control and diagnostic systems. The requirements for these models are formed and a conclusion is made about the expediency of using dynamic fast-calculating quasi-linear models, the structural parts of which are a static model in the form of an approximation of throttle characteristics, and a dynamic model in the form of a state space, the coefficients of which depend on the engine operating conditions. Such models are implemented for a turbojet double-circuit engine with flow mixing of the AI-322 type and a turboshaft engine of the TV3-117VMA-SBM1V type. Verification is performed using the results of bench tests of the engine. It is established that the existing static errors are associated with individual differences of the engines and can be eliminated by fine-tuning the static submodel.

The problem of estimating the parameters of a linear dynamic model of an engine based on the results of measuring its parameters during transient processes using the least squares method is considered. It is proven that the parametric estimation errors significantly depend on many factors, such as the true values of the estimated parameters, measurement errors, and a priori information about the model. A generalized approach to the analysis of the errors of the adaptation of the GTE model is developed, the main concepts of which are the use of a linear dynamic model in the vicinity of the true values of the desired parameters, consideration of the influencing errors as independent normally distributed random variables, use of specific parameters and the corresponding transformation of equations that reflect the relationship between the estimation errors and the influencing factors, which makes these equations universal, suitable for the analysis of any engine parameters and any influencing actions.

As a result of the analysis of the transient characteristics of the engine with a sudden change in fuel consumption, the minimum possible error of estimation was determined. In particular, with a nominal value of the time constant of 1 s and a fuel feed gain of 10, a measurement error of the rotor speed of 0.2%, fuel consumption of 0.5%, a sudden change in fuel supply of 10 kg/s and a recording frequency of 5 Hz, the minimum root mean square deviation of the error of the time constant estimation will be 0.2 s, i.e. 20%.

This significant level of error requires careful planning of tests and constant verification when applying the proposed method.

As a result of the analysis of the transient characteristics of the engine when changing fuel consumption at a constant speed and subsequent stabilization, the minimum possible error of estimation was determined, which depends on the specified speed and the amplitude of the input influence. On the example of a gas generator of a real helicopter turboshaft engine, specific values of the components of the error of estimating the time constant were obtained. It was shown that the main contribution is made by the errors of measuring the rotor speed and fuel consumption. The total error due to the contradictory influence of various factors weakly depends on the engine operating mode. For the example considered, it is about 0.05 s, which is significant for many problems for the solution of which dynamic engine models are used.

The proposed approach to the analysis of the accuracy of estimating the coefficients of dynamic models is extended to a two-shaft engine, the number of dynamic characteristics of which is larger and the parametric errors of the model also affect the estimates of the dynamic characteristics. A universal equation is obtained that determines the error in estimating the coefficients of a linear dynamic model as a function of all the main influencing factors: measurement errors and registration frequency, test impact intensity and nominal values of the model coefficients. Instrumental errors in estimating the engine time constants have a lower limit; this is due to the finite duration of transients, at the end of which the output parameters stabilize and become insensitive to the dynamic parameters of the engine.

An approach to determining unmeasured engine parameters is considered, which does not require estimating the full vector of internal parameters of the technical condition, but focuses on the direct determination of unmeasured parameters, which allows reducing computational complexity and avoiding the accumulation of calculation errors. This approach ensures the minimization of the error in estimating an unmeasured parameter under the condition of a limited number of measurements, the presence of multicollinearity of the mathematical model and different accuracy of measurement of the parameters of the working process. Matrix algebra methods are used: matrix

pseudoinversion, singular decomposition (SVD), weighted least squares method (LSM). Matrix relations for the instrumental and methodological components of the estimation errors are obtained. As an example, the problem of determining the thrust of the AI-322 engine is considered. The dependence of the SCR of errors on the mode parameter is obtained. In the entire range of operating modes, a significant part of the total error is methodological, the main factor of which is a possible change in the technical condition, which causes a change in the air flow rate in the fan. The instrumental component of the error is also analyzed, in the formation of which the error in measuring fuel consumption dominates. The proposed method for estimating thrust minimizes the total error in the assessment, determining a compromise taking into account the ratio between informativeness and the level of errors of the measured parameters.

*Scientific novelty of the obtained results:*

- For the first time, a relationship has been formed for the errors in the estimation of parameters of linear dynamic models of gas turbine engines for stepwise and linear models with limited control influences, which differ in the use of integral sensitivity characteristics and allow independent analysis of the impact on the estimation errors of all the main factors: the accuracy of the measured parameters, the values of the estimated parameters, and the nature of the control influences.
- For the first time, dependencies were obtained for the errors in determining unmeasured parameters of gas turbine engines, which differ in the use of information about the structure of onboard models and allow taking into account the influence of measurement errors of all used parameters on the static, dynamic and corrective components of the model, as well as errors in estimating model coefficients.
- The concept of an on-board self-tuning mathematical model of an aircraft gas turbine engine has been further developed: the known model structure includes a subsystem of quality control and self-tuning management, based on the relationships listed above.

*Connection of work with scientific programs, plans, topics:*

The research presented in the work was carried out at the Department of Aircraft Engine Design of the National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute" within the framework of the state budget theme "Formation of technologies for creating adaptive control systems for gas turbine engines of passenger and transport aircraft" (DR No. 0119U100942), as well as within the framework of economic contract works: No. 203-25/2021 "Development of a complex of dynamic models of the TV3-117VMA-SBM1V engine of the 1st series", customer JSC "MOTOR SICH", as well as No. 203-10/2020 "Development of a complex of dynamic mathematical models of the AI-322 engine" and No. 203-18/2020 "Modernization and support of a complex of dynamic mathematical models of the AI-322 engine", customer JSC "FED".

*Practical significance of the results obtained:*

- the relations obtained in the work, which determine the dependence of the errors of the estimates of the parameters of linear dynamic models of gas turbine engines on the accuracy of the measured parameters, the values of the estimated parameters and the nature of the control influences, can be used for planning experiments to study the dynamic characteristics of gas turbine engines at the testing stage, as well as for algorithmic determination of the sufficiency of the collected information during automatic correction of dynamic models as part of automatic control systems of gas turbine engines;
- the developed improved method for determining unmeasured parameters can be used in the processing of experimental information, as well as in on-board algorithms for monitoring thrust, specific fuel consumption, power, gas temperature in front of the turbine, air flow and other parameters that characterize the engine operating process;
- the availability of a method for determining the accuracy of estimating the parameters of mathematical models, as well as improved algorithms for determining unmeasured parameters, makes it possible to create electronic control systems for aircraft gas turbine engines based on the concept of self-tuning models;

- the specified methods, models and relations within the framework of the assumptions made when obtaining them are universal and can be used for any linear dynamic system.

Acts of implementation of the results of the dissertation in JSC "MOTOR SICH", JSC "FED" and in the educational process are presented (Appendices A, B, C).

The scientific provisions and results set out in the dissertation and submitted for defense were obtained personally by the applicant. Among them: analysis of existing methods for determining unmeasured parameters and forming mathematical models of gas turbine engines; comprehensive analysis of errors in estimating the dynamic parameters of a single-shaft turbojet engine with a stepwise and linear change in the control influence; obtaining and analyzing the relationships characterizing the errors in estimating the dynamic parameters of a twin-shaft turbojet engine; improving the method for determining unmeasured parameters of gas turbine engines, as well as the corresponding errors; results of testing the above approaches, methods and models on the examples of AI-322 and TV3-117VMA-SBM1V engines.

The main scientific and practical results of the work were published and discussed at conferences: XXV, XXVII, XXVIII and XXIX International Congresses of Engine Engineers (2020, 2022, 2023, 2024, Kharkiv), Seminarium IV New Trends in the Construction, Research and Operation of Flying Objects (2022, Institut Lotniztwa, Warsaw), V International Scientific and Practical Maritime Conference of the Department of SEU and TE Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024 (2024, Odessa).

The main results of the dissertation were published in 14 works, including 8 articles, 7 of which are in journals included in professional publications in the specialty, and one in a foreign professional publication.

*Keywords:* gas turbine engine, power plant, dynamic mathematical model, linear mathematical model, adaptive model, automatic control, engine operating process parameters, thrust, time constant, diagnostics, engine technical condition, data processing, sensors, damage, operation.

## ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ABSTRACT.....	11
СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ .....	21
ВСТУП .....	23
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПОТОЧНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ БОРТОВИХ САМОНАЛАШТУВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ.....</b>	<b>30</b>
1.1 Обґрунтування необхідності визначення параметрів двигуна, що не вимірюються, в експлуатації.....	30
1.2 Аналіз робіт з визначення невимірюваних параметрів.....	32
1.3 Налаштування моделей робочого процесу ГТД із використанням вимірних параметрів .....	46
1.3.1 Ідентифікація статичних характеристик двигунів.....	46
1.3.2 Ідентифікація динамічних характеристик двигунів із використанням нелінійних повузлових моделей .....	47
1.3.3 Ідентифікація динамічних характеристик двигунів із використанням лінійних динамічних моделей.....	48
1.4 Висновки з розділу та завдання дисертаційної роботи .....	57
Список літератури до першого розділу .....	59
<b>РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ БАГАТОРЕЖИМНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОТУРБІННИХ ДВИГУНІВ.....</b>	<b>70</b>
2.1 Базова нелінійна повузлова модель.....	70
2.1.1 Нелінійна повузлова математична модель для визначення параметрів ГТД на усталених режимах роботи .....	70
2.1.2 Параметризація характеристик вузлів .....	74

2.1.3 Особливості моделювання конкретного двигуна на базі універсальної математичної моделі .....	77
2.1.4 Нелінійна повузлова динамічна модель ГТД.....	80
2.2 Багаторежимна швидкодійна квізілінійна модель.....	82
2.2.1 Вимоги до динамічних моделей двигунів .....	84
2.2.2 Загальна структура моделі .....	86
2.2 Модель двовального ТРДД .....	87
2.2.1 Статична підмодель .....	88
2.2.2 Динамічна підмодель .....	90
2.2.3 Організація взаємодії підмоделей і програмна реалізація .....	92
2.2.4 Верифікація моделі ТРДД.....	94
2.3 Висновки за другим розділом .....	99
Список літератури до другого розділу.....	100
<b>РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА МЕТОДУ АНАЛІЗУ ПОХИБОК ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНОВАЛЬНОГО ГАЗОГЕНЕРАТОРА .....</b>	<b>102</b>
3.1 Оцінювання параметрів динамічних моделей методом найменших квадратів і виникнення відповідних похибок.....	102
3.2 Розробка методу аналізу похибок оцінювання параметрів математичної моделі двигуна.....	106
3.3 Аналіз сумарної похибки оцінювання сталої часу двигуна .....	109
3.4 Аналіз точності оцінювання сталої часу одновального газотурбінного двигуна в реальних умовах.....	113
3.4.1 Аналіз задачі оцінювання сталої часу двигуна при лінійній зміні витрати палива з обмеженням .....	113

3.4.2 Аналітичне рішення задачі для складової, зумовленої похибкою вимірювання частоти обертання.....	116
3.4.3 Приклад аналізу похибок на ділянці лінійної зміни витрати палива ...	119
3.4.4 Приклад аналізу похибок на повному інтервалі спостереження .....	121
3.4.5 Аналіз складових, зумовлених похибками вимірювання витрати палива та задання параметрів системи .....	122
3.4.6 Приклад аналізу сумарної похибки оцінювання сталої часу газогенератора турбовального двигуна .....	123
3.5 Висновки за третім розділом.....	127
Список літератури до третього розділу .....	128
<b>РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ ПОХИБОК ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ДВОВАЛЬНОГО ТРДД.....</b>	<b>130</b>
4.1 Формування динамічних параметрів двигуна.....	130
4.2 Отримання розв'язку рівняння та скорочення кількості незалежних динамічних характеристик .....	132
4.3 Аналіз задачі оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна при ступінчастій зміні витрати палива .....	134
4.4 Задача спільного оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна при ступінчастій зміні витрати палива.....	149
4.5 Висновки за четвертим розділом.....	156
Список літератури до четвертого розділу .....	157
<b>РОЗДІЛ 5. ВИКОРИСТАННЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ ПІДХОДІВ У СИСТЕМАХ ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ І ВІДПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....</b>	<b>158</b>
5.1 Формування структури системи оцінювання невимірюваних параметрів двигуна .....	158

5.1.1 Загальна структура системи.....	158
5.1.2 Взаємодія складових бортової самоналаштувальної динамічної моделі ТРДД для визначення тяги.....	160
5.2 Розробка методу визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів з урахуванням зміни технічного стану.....	162
5.2.1 Формулювання задачі.....	162
5.2.2 Аналіз методів оцінювання невимірюваних параметрів.....	165
5.2.3 Формування методу оцінювання невимірюваних параметрів ГТД.....	167
5.2.4 Ключові особливості та переваги методу.....	170
5.3 Похибки оцінювання невимірюваних параметрів.....	172
5.4 Приклад – визначення тяги двигуна АІ-322.....	173
5.4.1 Формування алгоритму й аналіз похибок.....	173
5.4.2 Оцінювання за відхиленнями тиску за компресором.....	177
5.4.3 Оцінювання за відхиленнями частоти обертання ротора НТ.....	178
5.4.4 Імітаційне моделювання при різних видах дефекту.....	178
5.4.5 Аналіз результатів за прикладом.....	181
5.5 Висновки за п'ятим розділом.....	182
Список літератури до п'ятого розділу.....	183
ВИСНОВКИ.....	186
Додаток А.....	190
Додаток Б.....	192
Додаток В.....	193

## СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

$A$	–	площа, м <sup>2</sup>
$G$	–	масова витрата, кг/с;
$i$	–	сигнал
$J$	–	момент інерції, м <sup>4</sup>
$K$	–	коефіцієнт підсилення
$M_n$	–	число Маха польоту
$N$	–	потужність, Вт
$n$	–	частота обертання, об/хв
$P$	–	тяга, Н;
$p$	–	тиск, Па
$T$	–	температура, К; стала часу, с
$t$	–	час, с
$U$	–	вектор керування
$U_n$	–	параметри, що визначають польотні умови
$U_p$	–	параметри, що визначають режим роботи двигуна
$X$	–	вектор стану;
$Y$	–	вихідні параметри моделі;
$\Delta$	–	абсолютне відхилення
$\varphi$	–	кутове положення
$\eta$	–	ККД
$v$	–	параметри вузлів двигуна
$\pi$	–	ступінь підвищення (пониження) тиску
$\sigma$	–	середньоквадратичне відхилення
$\tau$	–	стала часу, с
$\theta$	–	параметри, що визначають характеристики вузлів двигуна
*	–	параметр загальмованого потоку
0	–	базове значення
eSTORM	–	Enhanced Self-Tuned On-board Real-time engine Model
FADEC	–	Full Authority Digital Engine Control

KF	–	Kalman Filter
LKF	–	Linear Kalman Filter
NASA	–	National Aeronautics and Space Administration
STORM	–	Self-Tuned On-board Real-time engine Model
SVD	–	Singular Value Decomposition
BT	–	параметр каскаду високого тиску
ВКД	–	важіль керування двигуном
вим	–	виміряне значення
вх	–	вхід
ГТД	–	газотурбінний двигун
зв	–	зведений параметр
К	–	компресор
ККД	–	коефіцієнт корисної дії
КЛДМ	–	квазілінійна динамічна модель
КПП	–	клапан перепускання повітря
ЛДМ	–	лінійна динамічна модель
ММ	–	математична модель
мех	–	механічний
мод	–	модельоване значення
НТ	–	параметр каскаду низького тиску
п	–	паливо
РНА	–	регульований напрямний апарат
САК	–	система автоматичного керування
СКВ	–	середньоквадратичне відхилення
Т	–	турбіна
ТВад	–	турбовальний двигун
ТРД	–	турбореактивний двигун
ТРДД	–	турбореактивний двоконтурний двигун
ТРДДФ	–	турбореактивний двоконтурний двигун з форсажною камерою згоряння

## ВСТУП

**Актуальність роботи.** Авіаційний газотурбінний двигун є складним технічним об'єктом, до якості характеристик та надійності якого висуваються високі вимоги. Для успішного вирішення завдань керування та контролю технічного стану двигуна він оснащений вимірювальною системою. Однак склад вимірюваних параметрів суттєво обмежений складністю організації вимірювання деяких найважливіших параметрів, малим ресурсом відповідних датчиків, високою вартістю відповідних компонентів вимірювальної системи, захаращенням проточної частини двигуна та відповідним негативним впливом на витрату робочого тіла, тягу та питому витрату палива.

До складу параметрів, які є найважливішими для визначення робочого режиму та поточного технічного стану двигуна належать тяга, температура газу перед турбіною, запаси стійкості каскадів компресора, коефіцієнти надлишку повітря в основній та форсажній камерах згоряння, а також параметри граничних умов теплообміну деталей, ресурс яких необхідно контролювати, та параметри технічного стану вузлів. Ці параметри не вимірюються. Щоб визначити їх, необхідно використовувати їх зв'язок із вимірюваними параметрами як на усталених, так і на неусталених режимах роботи. Цей зв'язок забезпечують моделі робочого процесу. Щоб урахувати значні відмінності між характеристиками окремих двигунів, спричинені похибками виготовлення, збирання та експлуатаційною деградацією вузлів, ці моделі необхідно узгоджувати з реальними даними. Впровадженню такого підходу перешкоджає відсутність придатних для використання в бортових умовах методів аналізу точності оцінювання параметрів моделей і, відповідно, точності оцінювання невимірюваних параметрів.

Тому визначення невимірюваних параметрів двигунів на усталених та перехідних режимах роботи із використанням бортових самоналаштовувальних моделей є актуальною задачею створення систем автоматичного керування та діагностування двигунів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Представлені в роботі дослідження виконано на кафедрі конструкції авіаційних двигунів

Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут» у рамках виконання держбюджетної теми «Формування технологій створення адаптивних систем керування ГТД пасажирських і транспортних літаків» (ДР № 0119U100942), а також у рамках госпдоговірних робіт: №203-25/2021 «Розробка комплексу динамічних моделей двигуна ТВ3-117ВМА-СБМ1В 1 серії», замовник АТ «МОТОР СІЧ», а також №203-10/2020 «Розробка комплексу динамічних математичних моделей двигуна АІ-322» та №203-18/2020 «Модернізація та підтримка комплексу динамічних математичних моделей двигуна АІ-322», замовник АТ «ФЕД».

**Мета та завдання дослідження.** Метою роботи є розвиток концепції бортових самоналаштувальних моделей для визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів шляхом розробки та впровадження методів аналізу похибок оцінювання параметрів моделей і значень невимірюваних параметрів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- сформувати математичні моделі двигунів, обраних як основні об'єкти дослідження; визначити значення параметрів динамічних моделей, характерні для різних умов роботи;
- розробити метод аналізу похибок ідентифікації динамічних характеристик двигунів із використанням лінійних динамічних моделей;
- застосувати цей метод до кількох типів двигунів: одновального ТРД, турбовального двигуна з одновальним газогенератором і двовального ТРДД і отримати залежності, що пов'язують похибки оцінювання динамічних параметрів ГТД з факторами, що впливають (похибками вимірювання параметрів, частотою і тривалістю реєстрації та ін.) для різних номінальних значень параметрів математичної моделі двигуна;
- відпрацювати метод аналізу похибок ідентифікації на реальних даних та сформувати рекомендації щодо його практичного застосування, у тому числі у складі самоналаштовуваної бортової динамічної моделі.

**Об'єкт дослідження** – робочі процеси газотурбінних двигунів, що відбуваються на усталених і перехідних режимах їх роботи.

**Предмет дослідження** - зв'язки між вимірюваними та невимірюваними параметрами робочого процесу двигуна; математичні моделі, придатні для бортової реалізації, та методи їх налаштування за результатами реєстрації параметрів під час роботи двигуна.

**Методи дослідження.** Достовірність і обґрунтованість результатів і висновків роботи забезпечено використанням таких методів дослідження:

- методи термодинаміки та механіки використано для формування вихідних повузлових математичних моделей двигунів;
- методи теорії лінійних динамічних систем використано для формування та аналізу швидкорозрахункових (бортових) моделей двигунів;
- методи теорії статистичного оцінювання використано для визначення параметрів динамічних і статичних моделей, а також невимірюваних параметрів за експериментальною інформацією а також для аналізу похибок оцінювання;
- системний підхід, як метод, полягав у комплексному дослідженні похибок оцінювання параметрів динамічних моделей і невимірюваних параметрів;
- методи аналізу чутливостей використано під час аналізу похибок оцінювання параметрів динамічних моделей.
- метод порівняння використано під час верифікації розрахункових та експериментальних досліджень.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

- Уперше для стрибкоподібного та лінійного з обмеженням керуючих впливів сформовано співвідношення для похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів, які відрізняються використанням інтегральних характеристик чутливості і дозволяють незалежно аналізувати вплив на похибки оцінювання усіх головних

чинників: точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів.

- Уперше отримано залежності для похибок визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів, які відрізняються використанням інформації про структуру бортових моделей і дозволяють урахувати вплив похибок вимірювання всіх використовуваних параметрів на статичну, динамічну й коригувальну складові моделі, а також похибки оцінювання коефіцієнтів моделі.
- Набула подальшого розвитку концепція бортової самоналаштувальної математичної моделі авіаційного газотурбінного двигуна: до складу відомої структури моделі включено підсистему контролю якості та керування самоналаштуванням, в основі якої – перелічені вище співвідношення.

### **Практичне значення отриманих результатів**

- отримані в роботі співвідношення, що визначають залежність похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів від точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів, можуть бути використані для планування експериментів з дослідження динамічних характеристик газотурбінних двигунів на стадії випробувань, а також для алгоритмічного визначення достатності зібраної інформації при автоматичній корекції динамічних моделей у складі систем автоматичного керування газотурбінних двигунів;
- розроблений удосконалений метод визначення невимірюваних параметрів може бути використаний при обробці експериментальної інформації, а також у бортових алгоритмах для моніторингу тяги, питомої витрати палива, потужності, температури газу перед турбіною, витрати повітря та інших параметрів, які характеризують робочий процес двигуна;
- наявність методу визначення точності оцінювання параметрів математичних моделей, а також удосконалених алгоритмів визначення невимірюваних параметрів, уможливорює створення електронних систем

керування авіаційними газотурбінними двигунами на основі концепції самоналаштувальних моделей;

- зазначені методи, моделі й співвідношення в рамках прийнятих при їх отриманні припущень є універсальними й можуть бути використані для будь-якої лінійної динамічної системи.

**Особистий внесок здобувача.** Наукові положення, результати теоретичних і експериментальних досліджень, висновки та рекомендації, викладені в дисертації, що виносяться на захист, отримані автором особисто. На захист не виносяться результати, які належать співавторам, разом з якими опубліковано наукові статті.

Постановка деяких задач і аналіз результатів в опублікованих наукових працях проводилися разом з науковим керівником або співавторами. У наукових працях, виконаних у співавторстві, здобувачеві належать такі результати: у статті [1] проаналізовано залежність коефіцієнтів динамічної моделі ТРДД від режиму роботи; у роботі [3] опрацьовано загальний підхід до формування швидкорозрахункових математичних моделей ГТД та застосовано цей підхід до ТРДД зі змішуванням потоків; у роботі [4] розроблено математичну модель турбовального двигуна; у роботах [2, 5, 7] розроблено метод аналізу похибок оцінювання параметрів динамічної моделі та отримано відповідні співвідношення для одновального ТРДД; у роботі [8] розроблено метод визначення невимірюваних параметрів та отримано співвідношення для аналізу відповідних похибок.

**Апробація матеріалів дисертації.** Основні наукові та практичні результати дисертації викладено, обговорено та отримали схвальну оцінку на XXV, XXVII, XXVIII і XXIX Міжнародних конгресах двигунобудівників (2020, 2022, 2023, 2024 рр., м. Харків), Seminarium IV. New Trends in the Construction, Research and Operation of Flying Objects (2022 р., Institut Lotniztwa, Warsaw), V міжнародній науково-практичній морської конференції кафедри СЕУ і TE Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024 (2024 р., м. Одеса).

**Публікації.** Основний зміст дисертації відображено в 8 статтях, сім з яких входять до переліку фахових видань України [1, 3-7], а одну опубліковано у

закордонному фаховому виданні [2], та шести тезах доповідей на міжнародних науково-технічних конференціях [9-14].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації двома мовами, змісту, переліку умовних позначень і скорочень, вступу, п'яти розділів, висновків, списків використаних джерел до кожного розділу на 15 сторінках і 3 додатків на 5 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 197 сторінки, з них 155 сторінки основного тексту, 4 таблиці та 67 рисунків.

### Література до вступу

1. Єпіфанов С. В. Дослідження проблеми формування залежності параметрів динамічної моделі двовального ТРДД від режиму роботи / С. В. Єпіфанов, Р. Л. Зеленський, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2020. – № 7 (167). – С. 89-97. doi: 10.32620/aktt.2020.7.13.
2. Yerifanov, S. Development of turboshaft engine adaptive dynamic model: analysis of estimation errors / S. Yerifanov, O. Bondarenko // *Transactions on Aerospace Research*. – 2022. - Vol. 269, No. 4. – P. 31-43. doi: 10.2478/tar-2022-0024.
3. Єпіфанов, С. В. Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю [Текст] / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. – № 4 (188). – С. 44-55. doi: 10.32620/aktt.2023.4.05.
4. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. - № 4 sup1 (189). – С. 85-94. doi: 10.32620/aktt.2023.4sup1.12.
5. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності самоналаштування динамічної моделі газотурбінного двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2024. - № 2 (194). – С. 38-48. doi: 10.32620/aktt.2024.2.04.
6. Бондаренко, О. В. Ідентифікація динамічних характеристик двовального турбореактивного двигуна / О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2024. - № 4 sup1 (197). – С. 125-136. doi: 10.32620/aktt.2024.4sup1.17.
7. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності оцінювання сталої часу оновального газотурбінного двигуна в реальних умовах / С. В. Єпіфанов,

- О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія.* – 2024. - № 4 sup2 (198). – С. 69-79. doi: 10.32620/aktt.2024.sup2.09.
8. Єпіфанов, С. В. Метод визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів з урахуванням технічного стану / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія.* – 2025. - № 2 (202). – С. 25-37. doi: 10.32620/aktt.2025.2.03.
9. Бондаренко, О. В. Особливості керування параметрами повітряної системи літака / О. В. Бондаренко, С. В. Єпіфанов // XXVII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2022. - С. 55-56.
10. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна на режимі запуску / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко, Р. Р. Джаббаров // XXVII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2022. - С. 56-57.
11. Єпіфанов, С. В. Моделювання динаміки турбореактивного двоконтурного двигуна при аналізі й синтезі систем автоматичного керування / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // XXVIII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2023. - С. 52-54.
12. Єпіфанов, С. В. Особливості формування динамічної моделі турбовального двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // XXVIII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2023. - С. 54-55.
13. Бондаренко О. В. Ідентифікація динамічних характеристик двовального турбореактивного двоконтурного двигуна / О. В. Бондаренко // XXIX міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2024. - С. 61.
14. Бондаренко О. В. Дослідження впливу зміни технічного стану газотурбінного двигуна на його динамічні характеристики / О. В. Бондаренко, С. В. Єпіфанов // *Матеріали V міжнародної науково-практичної морської конференції кафедри СЕУ і TE Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024.* 2024. – С. 126-127.

## РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПОТОЧНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ БОРТОВИХ САМОНАЛАШТУВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

### 1.1 Обґрунтування необхідності визначення параметрів двигуна, що не вимірюються, в експлуатації

Відомо, що авіаційний газотурбінний двигун є складним технічним об'єктом, до якості характеристик та надійності якого висуваються високі вимоги. Для успішного вирішення завдань керування та контролю технічного стану двигуна він оснащений вимірювальною системою. До складу вимірюваних параметрів зазвичай входять частоти обертання роторів, температура газу в перерізах проточної частини турбіни, тиск на виході з високого тиску компресора, а в ТРДД - тиск на виході з вентилятора в зовнішньому контурі. Однак склад вимірюваних параметрів суттєво обмежений такими обставинами:

- складністю організації вимірювання деяких найважливіших параметрів;
- малим ресурсом відповідних датчиків;
- високою вартістю відповідних компонентів вимірювальної системи;
- захаращенням проточної частини двигуна та відповідним негативним впливом на витрату робочого тіла, тягу та питому витрату палива.

Розглянемо основні параметри робочого процесу двигуна, які необхідно вимірювати для вирішення задач керування та діагностування.

**Основний параметр турбореактивного двигуна – тяга** – безпосередньо не вимірюється. Значення тяги необхідне для вирішення основного завдання керування турбореактивним двигуном – підтримки значення тяги, заданого положенням ВКД коригованого за значеннями параметрів експлуатаційних умов, згідно з програмою керування.

Для керування та моніторингу технічного стану двигуна необхідно насамперед визначати значення тяги на усталених режимах (включаючи режим максимальної тяги).

**Параметри, які необхідно обмежувати** на всіх режимах роботи двигуна: температура газу перед турбіною, тиск на виході з компресора, температура на виході із форсажної камери ТРДФ та ТРДДФ, запаси стійкості каскадів компресора, коефіцієнт надлишку повітря у камері згоряння.

Ці параметри потрібно точно визначати та обмежувати не тільки на усталених, а й на перехідних режимах. Загалом, саме в перехідних режимах можливе максимальне перерегулювання (перевищення) цих параметрів. Тому точність їх визначення на перехідних режимах забезпечує успішне рішення задачі захисту двигуна, а точність їх визначення на усталених режимах створює умови для успішного вирішення задачі забезпечення ресурсу деталей гарячої частини.

Зазначимо, що проблема визначення запасів стійкості каскадів компресора і двох частин. Перша полягає у визначенні параметрів, які характеризують положення робочої точки на характеристиці компресора, а друга – у визначенні положення межі стійкості. У роботі розглядається лише перша з перелічених частин.

**Параметри, які визначають механічні навантаження на деталі**, ресурс яких необхідно контролювати в експлуатації. Навантаження від дії відцентрових сил визначаються частотами обертання роторів, які зазвичай точно вимірюються. Навантаження від дії газових сил визначаються значеннями тиску та швидкості руху повітря та газу в проточній частині. Швидкості не вимірюються, а значення тиску вимірюються в одному або кількох перерізах проточної частини усього двигуна. При визначенні значущості інформації про навантаження на перехідних і режимах для визначення напруженого стану і ресурсу деталей необхідно враховувати дві обставини:

1) напруження (якщо не враховувати вібраційну складову) визначаються відцентровими та газовими силами, а також розподілом температури в деталях;

2) перехідні процеси температурного стану таких деталей, як диски та вали, проходять значно повільніше, ніж перехідні процеси у проточній частині двигуна.

У зв'язку з цим параметри механічних навантажень необхідно знати перш за все на режимах, що встановилися.

**Параметри, які визначають граничні умови теплообміну деталей,** ресурс яких необхідно контролювати в експлуатації. У відомих методиках експлуатаційного моніторингу ресурсу використовуються граничні умови третього роду: значення температури середовища, що контактує з деталлю, та коефіцієнтів тепловіддачі. Ці параметри не вимірюються, а для їх розрахункового визначення необхідно вирішувати спряжену задачу аналізу робочого процесу двигуна та стану внутрішньої повітряної системи. У свою чергу, розрахунок повітряної системи також є спряженою задачею гідравлічного та теплового розрахунку. Ці параметри необхідно визначати як на усталених, так і на перехідних режимах. Однак у даному випадку мають на увазі передусім перехідні режими для температурного стану деталей.

**Параметри, які визначають технічний стан характеристик вузлів,** необхідні для діагностування проточної частини двигуна. Це відхилення від нормальних значень ККД каскадів компресора та турбіни, коефіцієнтів, які характеризують гідравлічні втрати, площ проходних перерізів, повноти згоряння палива та ін. Ці параметри зазвичай змінюються поступово за часом напрацювання двигуна, протягом кожного польоту їх можна вважати сталими. Тому актуальне їх визначення на усталених режимах. Виняток становлять раптові несправності (спричинені, наприклад, потраплянням сторонніх предметів у проточну частину). Прагнення до їхнього раннього виявлення викликає необхідність аналізу не лише усталених, а й перехідних режимів.

Таким чином, визначення невимірюваних параметрів двигунів на усталених та перехідних режимах роботи є актуальною задачею створення систем автоматичного управління і діагностування двигунів.

## **1.2 Аналіз робіт з визначення невимірюваних параметрів**

Опубліковано значну кількість робіт, присвячених визначенню невимірюваних параметрів.

В області діагностування двигунів ці методи об'єднані під назвою Gas Path Analysis і присвячені визначенню відхилень характеристик вузлів на усталених

режимах. Одна з перших робіт у цьому напрямку опублікована L. Urban [1], а огляди поточного стану представлені у роботах [2, 3]. Відомі також роботи, у яких розглянуто визначення цих відхилень на перехідних режимах для виявлення раптових несправностей [4, 5].

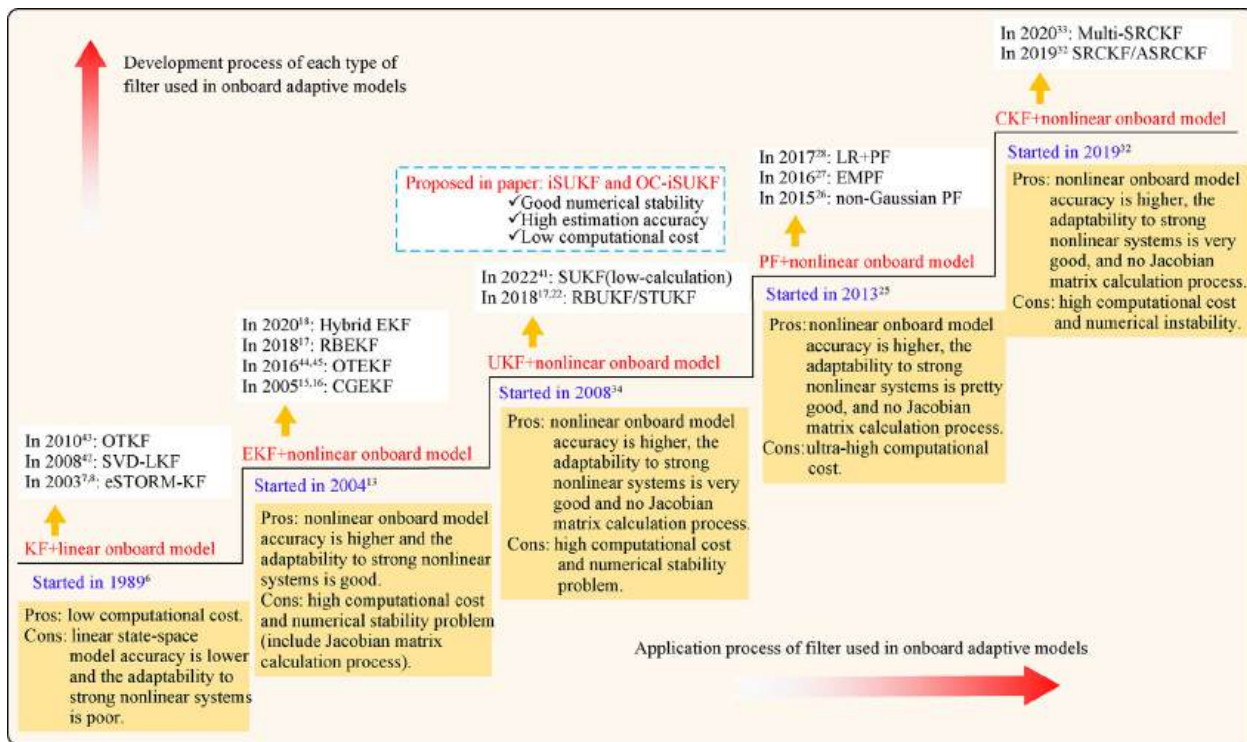
В області алгоритмів управління опубліковано багато робіт, заснованих на застосуванні фільтра Калмана до розширеної системи, до складу параметрів стану якої включені шукані невимірювані параметри. На наш погляд, найбільш представницький аналіз цих робіт наведено у статті Q. Chen та ін. [6].

В основі визначення невимірюваних параметрів лежать математичні моделі двигуна. [7, 8]. Для аналізу перехідних режимів використовуються динамічні моделі [9, 10].

Відомі в даний час алгоритми оцінювання, що використовуються в бортових моделях авіаційних ГТД, використовують лінійний фільтр Калмана (LKF), розширений фільтр Калмана (EKF), Unscented фільтр Калмана (UKF), фільтр частинок (PF), кубатурний фільтр Калмана (CKF) та їх комбінації. З них нелінійні Гауссівські фільтри EKF, UKF, PF та CKF [11] є найбільш дослідженими. На рис. 1.1 представлено розвиток застосування фільтрів Калмана до адаптивної бортової моделі.

У 1989 р. Luppold та ін. [12] запропонували концепцію STORM (Self-Tuned On-board Real-time engine Model). Вони використовували LKF для оцінювання параметрів, що характеризують деградацію двигуна, та корекції бортової моделі. З цього часу бортова модель отримала широке застосування.

Типова структура цієї моделі представлена на рис. 1.2. До складу вимірюваних параметрів зазвичай входять частоти обертання роторів, температури та тиску робочого тіла в проточній частині. Вхідні параметри включають незалежні параметри двигуна та зовнішні умови. Це зазвичай витрата палива, положення КПП та РНА, висота польоту, число Маха та ін.



Note: The Kalman filters listed in Fig. 1 are representative algorithms currently applied for onboard adaptive model.

Рис. 1.1 - Розвиток бортових моделей із фільтром Калмана [6]

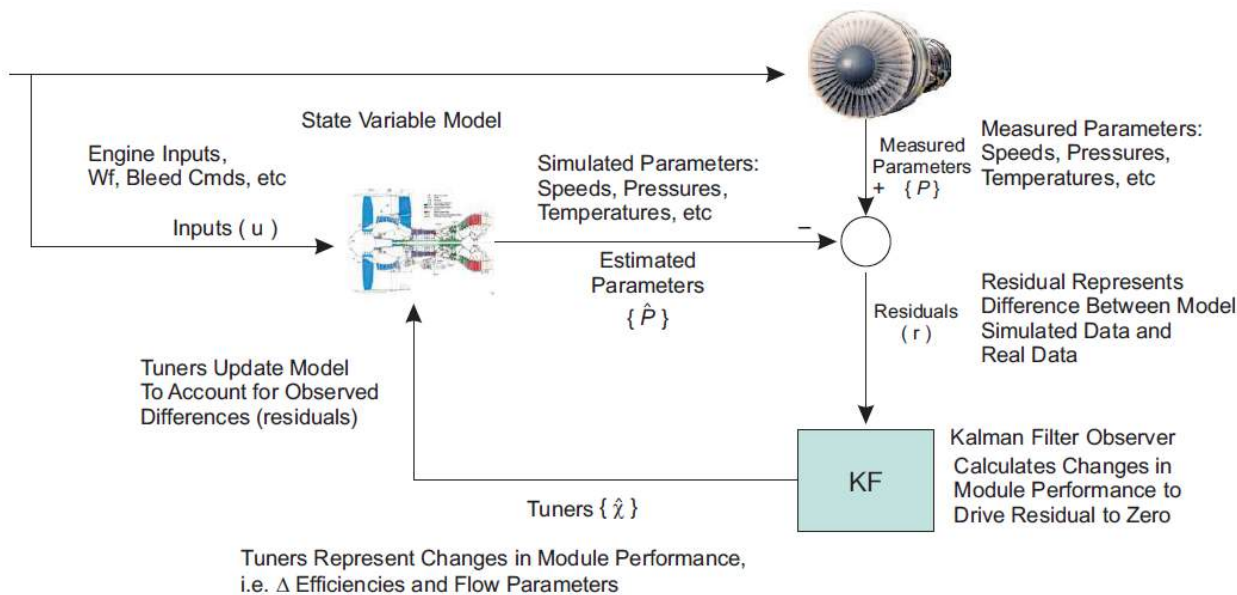


Рис. 1.2 - Структура моделі STORM

Модель двигуна виконує розрахунок параметрів без шуму, позначених як  $P$ , які є базовою характеристикою і порівнюються з вимірними значеннями для отримання вектора відхилень  $r$ :

$$r = P - \hat{P}$$

Вектор відхилень містить інформацію про вплив погіршення стану (складові, позначені як  $\hat{x}$ ), шум вимірювань, зміщення показників датчиків (якщо вони присутні) і похибки моделювання. Вектор  $\hat{x}$  складається з набору відхилень параметрів технічного стану, таких як адіабатний ККД ( $\Delta\eta$ ), витрата повітря ( $\Delta\Gamma$ ) та площі сопел ( $\Delta A$ ) компресора та турбіни. Цей вектор  $\hat{x}$  іноді розглядається як набір параметрів налаштування, який використовується для налаштування моделі, щоб наблизити значення параметрів моделі до вимірюваних. При роботі системи в замкнутому контурі ці параметри забезпечують середні значення похибок рівними нулю. В результаті виходить набір віртуальних датчиків, позначених як  $(\hat{P})$ , які можуть бути використані для виявлення та пошуку несправностей, який зазвичай реалізується у системі FADEC.

Основною задачею системи, показаної на рис. 1.2, є підвищення точності вимірювання параметрів двигуна й відстеження стану вузлів. Зміни характеристик вузлів, обчислені за допомогою фільтра Калмана, використовуються для адаптації моделі та її узгодження з вимірювальною інформацією з урахуванням зміни режимів роботи та деградації.

У цій роботі прийняті найпростіші припущення про те, що вихідна модель повністю адекватна конкретному двигуну, що розглядається. На жаль, це припущення рідко виконується внаслідок індивідуальних особливостей двигунів, а також через те, що сама модель не враховує модифікацій в процесі життєвого циклу двигуна. Ці невідповідності між моделлю та двигуном викликають відхилення параметрів стану, які необхідно коригувати, щоб звести незв'язки до нуля.

Потім Volponi та ін. [13, 14] удосконалили STORM шляхом додавання коригувального модуля, заснованого на нейронній мережі. Концепція отримала назву eSTORM (enhanced STORM), для її верифікації використано двигун P&W F117 військово-транспортного літака C-17.

Типова структура цієї моделі представлена на рис. 1.3.

Для більш точного відстеження змін характеристик вузлів двигуна, що діагностується, необхідна модифікація вихідної системи STORM. Щоб запобігти

накопиченню похибок моделі у відхиленнях характеристик вузлів, необхідно наблизити модель до конкретного двигуна. Відмінності між двигунами спільно з обмеженнями на параметри ускладнюють застосування моделей, заснованих на фізичних співвідношеннях. Використання гібридної моделі дозволяє забезпечити необхідну швидкодію.

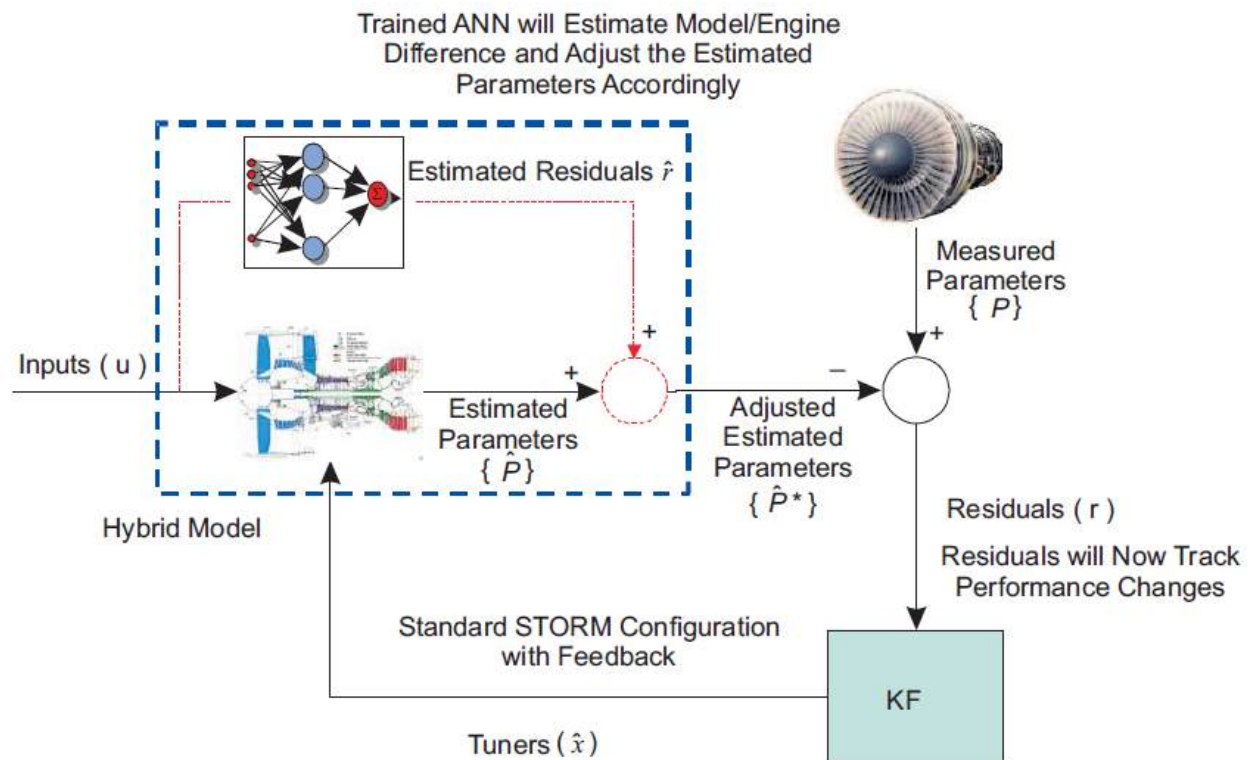


Рис. 1.3 - Структура моделі eSTORM

Гібридна модель двигуна складається з фізично обумовленої та емпірично налаштовуваної складових. Фізично обумовлена частина складається з лінійних або нелінійних термогазодинамічних моделей різної складності, серед яких модель у просторі станів є найпростішою. На противагу, емпіричні моделі визначаються індивідуально на основі накопиченої інформації. Поєднання емпіричної частини та фізично обумовленої моделі дозволяє краще моделювати конкретний двигун. Це забезпечує точніші значення відхилень, які можуть бути використані для визначення стану, оскільки неточності фізично обумовленої моделі можуть бути зменшені при налаштуванні.

Yuan та ін. [15] використовували параметр деградації характеристик як змінну стану для формування адаптивної бортової моделі з LKF. Lu та ін. [16]

запропонували гібридну модель, засновану на використанні фільтра Калмана, яка може узгоджувати модель двигуна з реальними даними в усьому експлуатаційному діапазоні умов при суттєвій деградації характеристик. Однак для налаштування LKF необхідно забезпечити узгодження з реальними даними лінійної динамічної моделі в усьому експлуатаційному діапазоні. Для цього, враховуючи, що лінійна модель двигуна не може забезпечити необхідну точність у всьому діапазоні, Gu та ін. [17] запропонували адаптивний метод оцінювання параметра стану двигуна. Результати моделювання та верифікації показали, що порівняно з вихідним методом фільтр Калмана, заснований на запропонованому методі моделювання, може суттєво покращити точність оцінювання параметрів стану двигуна. Pang та ін. [18] запропонували метод розв'язку в реальному часі для лінійної моделі у просторі станів та розробили засновану на LKF гібридну бортову адаптивну модель для оцінювання параметрів двигуна. Однак модель простору станів, яку отримують за допомогою обчислення матриці Якобі, неточна.

Оскільки двигун є складною та суттєво нелінійною системою, опис його характеристик у всьому експлуатаційному діапазоні за допомогою лінійної динамічної моделі у просторі станів є важко здійсненним. Тому Brunell, Leonard та ін. [19] застосували розширений фільтр Калмана EKF для визначення характеристик двигуна та оцінки його технічного стану. [21] запропонували бортову модель з фільтром Калмана з постійною поправкою CGEKF (Constant Gain Extended Kalman Filter) для оцінювання параметрів двигуна в нерозрахункових умовах.

Palmer та ін. [22] використовували розроблену NASA систему моделювання силових установок NPSS (Numerical Propulsor System Simulator) для дослідження бортової моделі двовального ТРДД з моделювання тяги.

Lu та ін. [23, 24] розробили рекурсивний буферний розширений фільтр Калмана (RBEKF), рекурсивний буферний UKF (RBUKF) та гібридний розширений фільтр Калмана для обробки пакетних даних з результатами реєстрації параметрів двигунів. Моделювання показало, що вони дозволяють ефективно оцінювати параметри деградації та несправності вузлів двигуна. Однак недоліком

розширеного фільтра Калмана є необхідність обчислення матриці Якобі, що може призвести до чисельних збурень.

UKF, який є оригінальним підходом до оцінювання суттєво нелінійних систем [25-27], може вирішити цю проблему. Yang та Ai [28] запропонували вдосконалений сильний фільтр стеження Калмана (STUKF) для використання в адаптивній бортовій моделі. Результати моделювання показали, що цей метод може покращити точність оцінювання і при цьому задовольняє умови реального часу.

Zhou та ін. [29, 30] розробили бортову адаптивну модель на основі UKF для точного оцінювання параметрів двигуна для вирішення задач керування.

Враховуючи, що авіаційний двигун працює в умовах сильного шуму, Lu та ін. [31] запропонували метод діагностування проточної частини, заснований на PF та розширеному фільтрі Калмана з обмеженнями (сЕКФ) та порівняли їх з ЕКФ. Результати моделювання показали, що сЕКФ має деякі переваги в порівнянні з ЕКФ, PF та ЕКPF.

Yang та ін. [32] використовували нелінійний негаусовий фільтр частинок при формуванні адаптивної бортової моделі, щоб подолати обмеження, що накладаються припущенням про лінійний вплив Гаусового шуму у фільтрі Калмана. Результати моделювання показали, що кількість параметрів, що оцінюються, може бути дещо більшою, ніж кількість вимірюваних параметрів.

Враховуючи недоліки традиційного фільтра частинок, Wang та ін. [33] запропонували "електромагнетикоподібний фільтр частинок" (EMPF) для виявлення раптових несправностей двигуна. На сформованому авторами прикладі вони показали, що цей фільтр зменшив час виявлення несправностей та СКВ параметрів оцінювання.

Yu [34] розробив метод визначення стану двигуна, заснований на комбінованому використанні моделі та реальних даних для логістичної регресії та фільтру частинок (LR+PF). Тестування було виконано на платформі для моделювання комерційного авіаційного двигуна, розробленого NASA. Показано потенційні можливості методу.

Останнім часом стосовно нелінійних систем отримав розвиток кубатурний фільтр Калмана СКФ [35-37]. Zhu та ін. [38] запропонували адаптивний кубатурний квадратного кореня фільтр Калмана (ASRCKF) для оцінювання параметрів стану проточної частини, що забезпечує точність фільтрації та адаптивність до шуму. Виявлено, що цей фільтр краще розширеного фільтра Калмана (ЕКФ) і SRCKF. Zhu та ін. [39] об'єднали SRCKF та алгоритм просторової кластеризації додатків із шумом на основі щільності (DBSCAN – Density Based Spatial Clustering of Application with Noise) для діагностування несправностей датчиків.

В даний час доведено, що UKF, PF і СКФ краще пристосовані до нелінійних властивостей двигуна і суттєво покращують точність оцінювання та робастність порівняно з ЕКФ та не вимагають обчислення матриці Якобі [40-42]. Однак, незважаючи на різні покращення [43-46], вони вимагають значного обсягу обчислень, що є незадовільним для бортового застосування. Тому Chen та ін. [47] запропонували метод оцінювання на основі SUKF, який більш простий у обчислювальному відношенні, ніж UKF, при тій же точності. Тим не менш, розкид результатів оцінювання все ще спостерігається у разі поєднання похибок вимірювання, шуму та збурень.

Загальним недоліком всіх перерахованих вище моделей є обмежена кількість штатних датчиків, унаслідок чого кількість вимірюваних параметрів менше ніж кількість параметрів стану двигуна. Тому ці алгоритми можуть оцінювати обмежений набір параметрів стану, та їх кількість дорівнює кількості датчиків або менше її. Для вирішення цієї проблеми Litt [48] запропонував фільтр Калмана із сингулярним розкладанням (SVD-LKF), який дозволяє оцінювати всі параметри, але відомо, що при цьому виникає зсув оцінок.

Пізніше Later, Simon та Garg [49] запропонували заснований на фільтрі Калмана алгоритм оптимального налаштування (ОТКФ – Optimal Tuner Kalman Filter), що забезпечує оцінювання будь-якої кількості параметрів. У порівнянні з SVD-LKF, він покращує точність оцінювання, проте задача визначення матриці налаштування у всьому діапазоні режимів є складною.

Грунтуючись на ОТКФ, Csank [50] та Liu та ін. [51] запропонували заснований на розширеному фільтрі Калмана алгоритм оптимального

налаштування (ОТЕКФ), який покращує точність оцінювання параметрів стану на перехідних режимах. Однак на режимах, що встановилися, точність гірша в порівнянні з ОТКФ. Тому інженерне застосування цих методів пов'язане зі значними труднощами, і вони не усувають недоліків, які мають LKF і ЕКФ.

Узагальнюючи отримані раніше результати, Chen та інші співробітники Нанкінського університету Астронавтики та Аеронавтики [52] запропонували вдосконалений алгоритм Сферичного Unscented Фільтру Калмана іSUFK, який заснований на тому, що перетворення Холецького замінено на SVD-розклад, який не потребує жорстких обмежень на коваріаційну матрицю стану для забезпечення стійкості. На додаток, запропонований коригувальний коефіцієнт, який враховує відмінність нелінійної бортової моделі від реальних даних і коригує матрицю коваріаційного стану і таким чином покращує обчислювальну стійкість фільтра. Запропоновано також методику офлайн-корекції моделі для усунення впливу деградації двигуна на точність оцінювання. Результати моделювання показали, що іSUFK забезпечує стійке оцінювання параметрів. Оффлайн-корекція підвищує точність оцінювання параметрів двигуна, що не вимірюються, більш ніж на 50%. Запропонований метод забезпечує розвиток модель-орієнтованого керування двигунами.

Структура цієї нелінійної бортової моделі представлена рис. 1.4.

У польоті в реальному часі розраховується різниця  $\Delta u$  між вимірними значеннями параметрів  $u$  та оцінками цих параметрів  $\hat{u}$ , отриманими за допомогою нелінійної бортової моделі, та визначається нормалізоване відхилення  $\Delta u_{\text{nor}}$ . Ці нормалізовані відхилення надходять в алгоритм іSUKF, який обчислює оцінки параметрів стану двигуна  $\hat{h}$ . Потім значення параметрів стану коригуються за допомогою поправок  $\hat{h}_{oc}$ , які обчислюються у блоці офлайн-корекції. Скориговані значення параметрів стану надходять у бортову модель, яка обчислює в реальному часі невимірювані параметри, а також оцінки вимірюваних параметрів (тяги, запасу стійкості КВТ та ін).

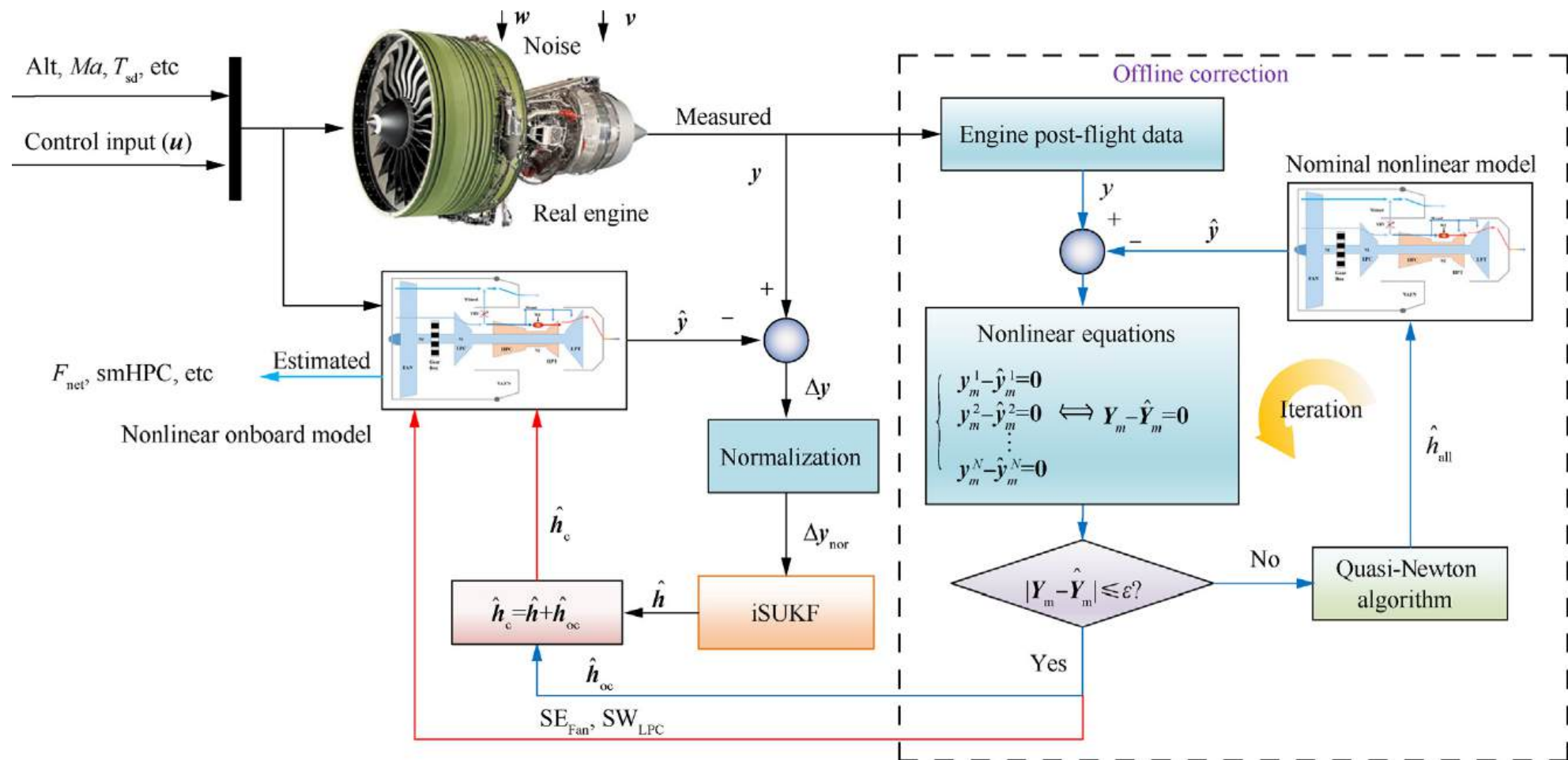


Рис. 1.4 - Структура адаптивної нелінійної бортової моделі двигуна на основі iSUKF з офлайн-корекцією

В роботі прийнято, що стан двигуна змінюється поступово. Тому значення параметрів стану протягом польоту практично не змінюються. Це означає, що коригування моделі можна виконувати офф-лайн за допомогою блоку корекції, виділеного на рис. 1.2. Для цього використовуються значення вхідних та вихідних параметрів, зареєстровані на перехідних режимах. Автори розглядають випадок, коли кількість шуканих параметрів технічного стану точно дорівнює кількості вимірюваних параметрів. Тому завдання обчислення поправок  $\hat{h}_{oc}$  вони розглядають як завдання розв'язання системи нелінійних рівнянь, навіщо запропоновано використовувати метод Ньютона.

Практично одночасно з роботою [52] була опублікована робота [53] Ху та інших співробітників університету Сіань Джаотонг, в якій запропоновано аналогічну структуру бортової моделі, представлену на рис. 1.5. Авторами цієї роботи використано дещо інші позначення. Модель називається AORM (Adaptive Real Time Model). Її складовою є нейромережева модель реального часу ROLM (Residual Online Learning Model), для корекції якої використовується класична модель CLM (Component Level Model). ROLM сформовано на основі алгоритму машинного навчання. В результаті досліджень показано, що в порівнянні з традиційною CLM середні абсолютні похибки моделювання частот обертання роторів, тиску на виході з компресора і температури на виході з турбіни по відношенню до реальних експериментальних даних знижуються з 1,48%, 1,1%, 2,68%, 3,14% і 0,55%, 0,55% 1,5% відповідно, що свідчить про ефективність алгоритму.

Однак, як уже зазначено вище, для нейромережевих та інших моделей типу «чорної скриньки» ця ефективність стрімко знижується за межами області експлуатаційних режимів, в якій отримано вихідні дані для налаштування моделі.

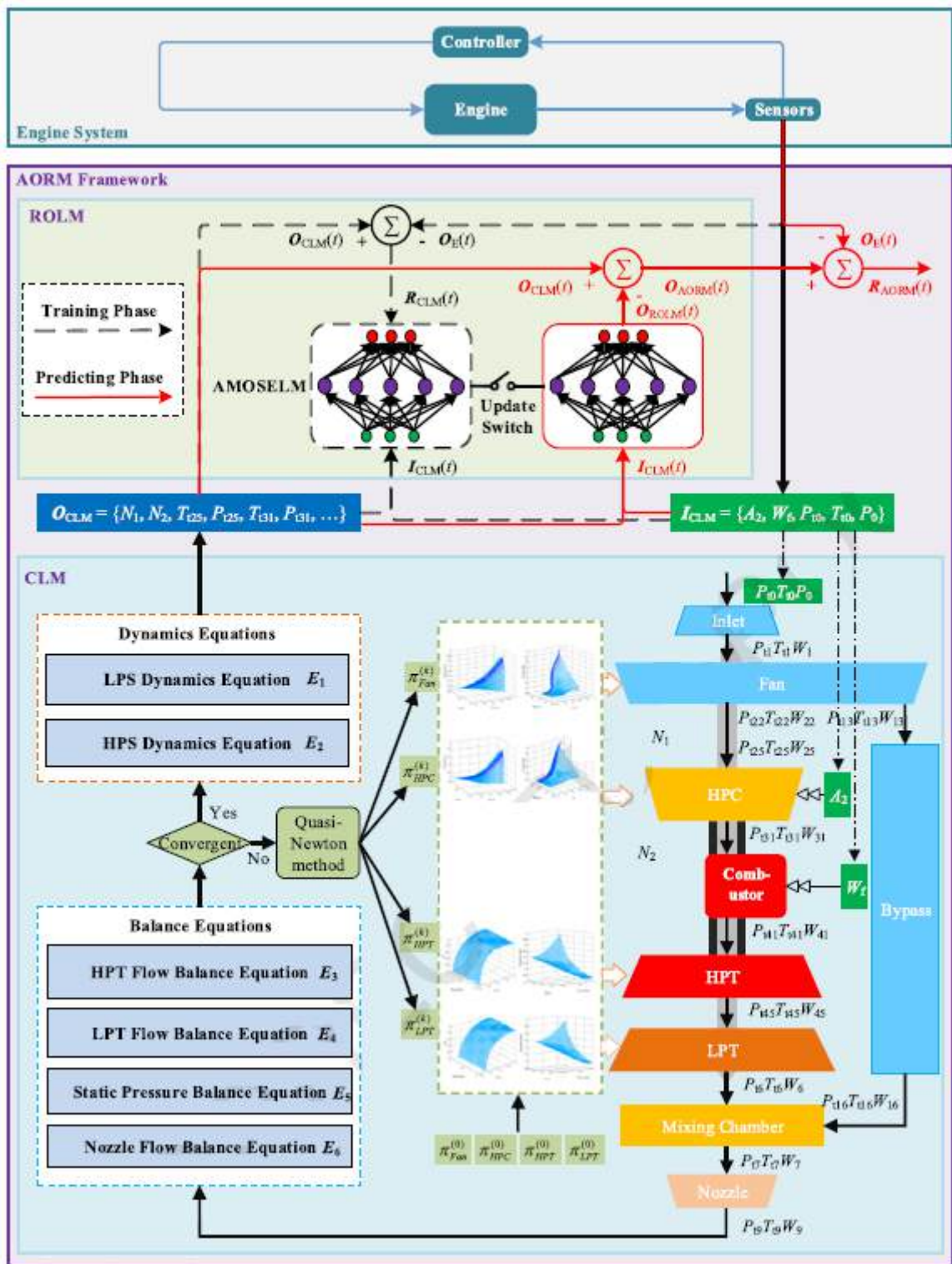


Рис. 1.5 - Структура моделі AORM

У роботі [54] Liu та інші автори з Сіанського політехнічного університету розглянули модель такої ж структури, що відрізняється адаптивною лінійною динамічною моделлю зі змінними параметрами (ALPV – Adaptive Linear Parameter-Varying) та особливостями версії розширеного фільтра Калмана – МАЕКФ (Mixed Adaptive Extended Kalman Filter) (рис. 1.6).

Таким чином, за ініціативою співробітників NASA сформована і успішно розвивається багатьма науковими школами концепція бортової самоналаштовуваної моделі. Вона забезпечує визначення в реальному часі невимірюваних параметрів двигуна, необхідних для вирішення задач керування і діагностування технічного стану. На точність результатів, одержуваних з використанням цієї моделі, основний вплив мають інструментальні похибки, зумовлені похибками вимірювань, і похибки, обумовлені індивідуальними особливостями двигуна, пов'язані з розкидом параметрів робочого процесу в результаті похибок виготовлення та збирання, а також зміною параметрів характеристик вузлів унаслідок деградації проточної частини.

Похибки, пов'язані з індивідуальними особливостями, можна суттєво зменшити, якщо використовувати підмодель, яка адаптується до індивідуальних особливостей, пов'язаних із виробництвом, на початку експлуатації двигуна після виготовлення або ремонту, та періодично адаптується до деградації вузлів. Адаптація виконується методами ідентифікації за результатами вимірювання параметрів в експлуатації.

Проте аналіз відомих робіт виявив низку недоліків:

1) У переважній більшості робіт розглядається визначення відхилень невимірюваних параметрів від деяких базових значень. Що таке базові значення – часто навіть не вказується.

2) У переважній більшості робіт не розглядаються проблеми формування динамічної моделі. За замовчуванням вважається, що вона є лінійною.

3) Невелика кількість робіт розглядає завдання у нелінійній постановці, хоча відомо, що динамічна модель ГТД є суттєво нелінійною, а її коефіцієнти залежать від режиму та умов польоту.

4) Недостатньо досліджено проблему забезпечення робастності алгоритмів визначення невимірюваних параметрів до індивідуальних особливостей двигунів.

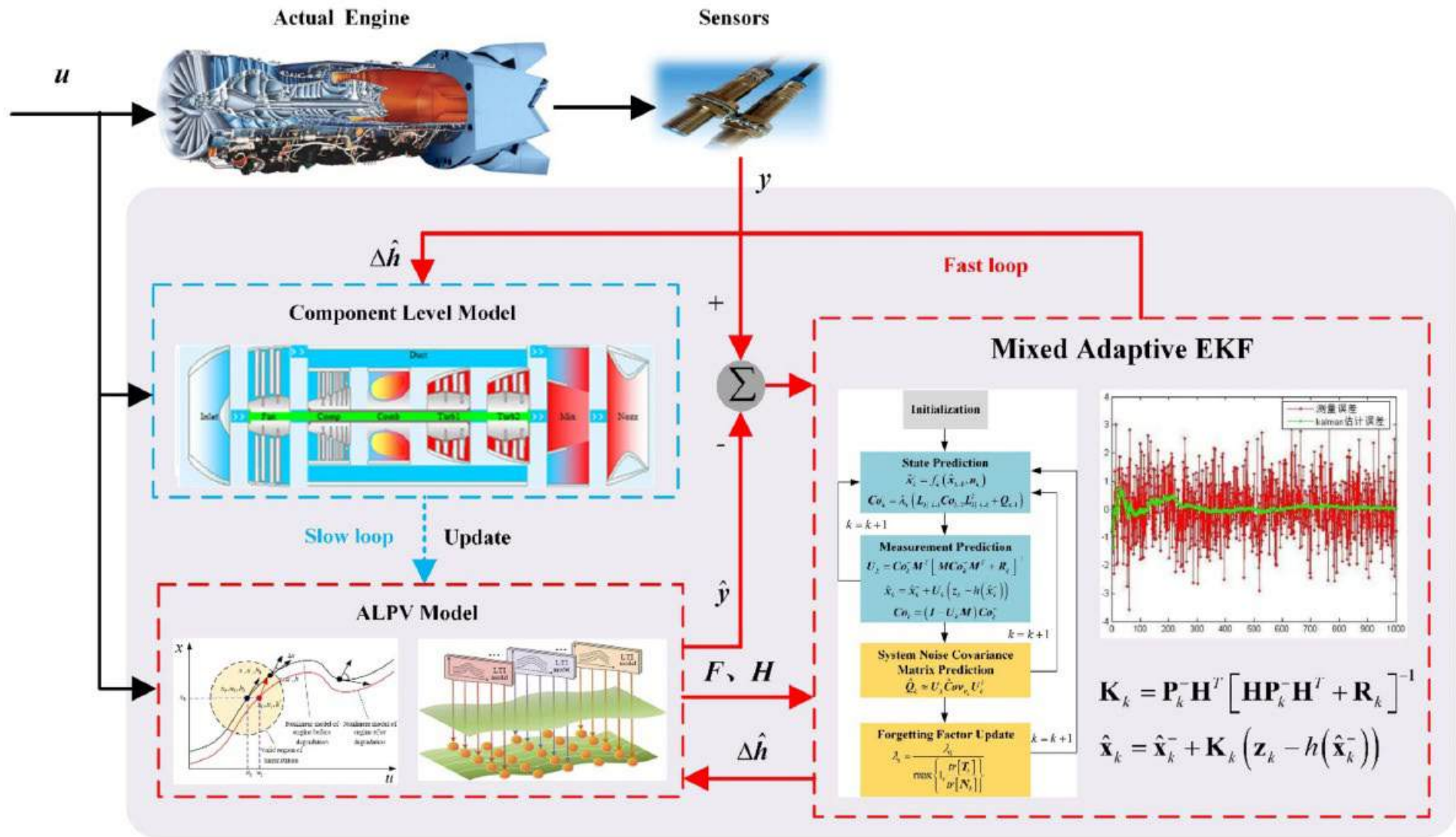


Рис. 1.6 - Структура моделі, що ґрунтується на МАЕКФ

### 1.3 Налаштування моделей робочого процесу ГТД із використанням вимірних параметрів

Як показав виконаний вище огляд робіт, внаслідок значного розкиду індивідуальних значень параметрів робочого процесу саме функція самоналаштування моделі забезпечує її ефективне застосування. Розглянемо роботи, у яких досліджено завдання ідентифікації статичних та динамічних характеристик ГТД.

#### 1.3.1 Ідентифікація статичних характеристик двигунів

Статичні моделі ГТД лежать в основі їх розробки та використовуються на всіх стадіях їх життєвого циклу, починаючи від передескізного проектування та закінчуючи експлуатацією та ремонтом.

Поузлова статична модель двигуна має вигляд

$$\vec{Y} = F(\vec{U}_p, \vec{U}_n, \vec{\theta}), \quad (1.1)$$

де  $\vec{Y}$  - модельовані параметри робочого процесу;

$\vec{U}_p$  - параметри, що визначають режим роботи двигуна;

$\vec{U}_n$  - параметри, що визначають польотні умови;

$\vec{\theta}$  - параметри характеристик вузлів

Ці моделі супроводжують розвиток проекту двигуна, тому їх узгодження з експериментальними даними є актуальним завданням, розв'язання якого розглянуто в багатьох роботах. Можна сказати, що методи узгодження статичних моделей ГТД, які забезпечують корекцію параметрів характеристик вузлів  $\vec{\theta}$ , розвивалися нерозривно з методами розрахунку статичних характеристик.

Серед відомих робіт у цій галузі можна назвати монографію С. Єпіфанова та ін. [55] та статтю Stamatis та ін. [56]. Останні досягнення в цій галузі опубліковані у роботах Y. Li [57], Tsoutsanis та ін. [58], S. Li та ін. [59], Kim та ін. [60].

Використовувані підходи ґрунтуються на методі найменших квадратів. Для забезпечення стійкості рішення застосовується регулювання алгоритму оцінювання. Приміром, у роботах С. Єпіфанова, С. Каплуна, М. Шевченка та ін. розглянуто стосовно оцінювання параметрів нелінійної статичної моделі ГТД метод Маркуардта [55], метод сингулярного розкладання [61], метод  $\epsilon$ -структуризації [62], метод рідж-оцінювання [63], метод головних компонент [64] та метод опису апріорної інформації за допомогою нечітких функцій [65].

Тому вважатимемо задачу ідентифікації статичних характеристик ГТД досить дослідженою і надалі зосередимося на динамічних моделях.

### ***1.3.2 Ідентифікація динамічних характеристик двигунів із використанням нелінійних повузлових моделей***

Найбільш загальний підхід до ідентифікації динамічних характеристик двигунів пов'язаний з оцінюванням параметрів нелінійних повузлових моделей.

Повузлова динамічна модель двигуна має вигляд

$$\vec{Y} = F(\vec{U}_p(t), \vec{U}_n(t), \vec{\theta}(t)) \quad (1.2)$$

та забезпечує розрахунок зміни параметрів робочого процесу  $\vec{Y}$  за часом, обумовленого зміною режиму, польотних умов та/або характеристик вузлів.

Такі публікації з'явилися порівняно нещодавно.

У 2015 р. [66] Tsoutsanis та ін. представили метод ідентифікації характеристик для використання результатів вимірювання параметрів на перехідних режимах для діагностування двигуна. Вони також враховували, що динамічні характеристики термопари зумовлюють затримку значення вимірної температури по відношенню до реального значення.

В 2016 г. Asgari та ін. [67] використовували методи машинного навчання та покращено моделювання температури на перехідних режимах.

В 2018 г. Mehrganahi та ін. [68] запропонували процедуру корекції динамічної моделі промислової ГТУ із використанням експлуатаційної інформації. Вони також показали, що цей метод має недолік, тому що не забезпечує моделювання з

прийнятною точністю за межами області експлуатаційних режимів, у якій були отримані дані, використані для ідентифікації.

В 2019 г. Pang та ін. [69] показали, що точність моделі покращується, якщо для адаптації характеристик компресора і турбіни використовувати дані, отримані на перехідних режимах. Однак зазначено, що при цьому точність моделювання температури газу практично не покращується. Для цього необхідно уточнити теплову модель датчика температури.

В 2020 г. S. Kim та ін. [70] запропонували метод адаптації динамічної моделі ТРДД типу F100-PW-229 з урахуванням динамічних характеристик вимірювача температури.

У роботі [71] ними, на відміну від попередніх робіт, в яких використовувався стендовий набір вимірюваних параметрів, запропоновано метод, що забезпечує адаптацію моделі за штатно вимірюваними параметрами. Коригуються не лише характеристики вузлів, а й характеристики датчиків.

Проте, з одного боку, проблема оцінювання параметрів повузлових динамічних моделей нині досліджена явно недостатньо, з іншого боку – застосування цих моделей як бортових моделей реального часу в складі алгоритмів керування та діагностування вимагає відповідного розвитку апаратної частини та алгоритмічних засобів забезпечення надійності програмного забезпечення, що може стати предметом спеціального дослідження, але виходить за межі даної роботи. Тому надалі розглянемо використання динамічних моделей, які мають лінійну структуру.

### ***1.3.3 Ідентифікація динамічних характеристик двигунів із використанням лінійних динамічних моделей***

Лінійна динамічна модель двигуна має вигляд [55]

$$\dot{\vec{X}} = A\Delta\vec{X} + B\Delta\vec{U}; \quad (1.3)$$

$$\vec{Y} = C\Delta\vec{X} + D\Delta\vec{U}, \quad (1.4)$$

де  $\vec{X}$  - вектор стану;

$\vec{U}$  - вектор керування;

$A, B, C, D$  - матриці;

$\Delta$  – відхилення параметрів, що розглядаються, від значень, відповідних встановленому режиму роботи двигуна.

В околі режиму роботи двигуна коефіцієнти матриць є постійними. Така модель називається однорежимною. Відомо, що динамічні властивості двигуна суттєво залежать від його режиму та польотних умов роботи [72]. Це можна врахувати, якщо ввести до розгляду залежність коефіцієнтів матриць від параметрів  $\vec{U}_p$  та  $\vec{U}_n$ . Така модель називається квазілінійною. Вона враховує нелінійні зв'язки, але є лінійною за структурою.

Задача ідентифікації даної моделі полягає у визначенні коефіцієнтів зазначених матриць на підставі значень параметрів, виміряних у перехідних процесах, зумовлених зміною елементів вектора управління (тобто режиму або зовнішніх умов).

Найбільш відома монографія щодо проблеми формування лінійних динамічних моделей ГТД опублікована Kulikov и Thompson [73] у 2004 р. У ній розглянуто завдання ідентифікації динамічних характеристик ГТД за експериментальною інформацією. Основну увагу приділено ідентифікації в частотній області. На жаль, практичне значення такого методу невелике, тому що для його реалізації необхідно забезпечити гармонійну або випадкову зміну впливу (витрати палива).

У розділі «Керування та ідентифікація в замкнутому контурі» розглянуто важливу проблему ідентифікованості замкнутої системи зі зворотним зв'язком. Показано, що формально визначені за класичними залежностями (в яких аналізується лише чутливість вихідних параметрів до вхідних) властивості спостережуваності та ідентифікації є необхідною умовою можливості ідентифікації системи, а фактична ідентифікованість залежить також від властивостей вхідних сигналів. Потрібно виконати умову достатності обурення. Математичним виразом цієї умови є вимога додатної визначеності інформаційної

матриці Фішера. Однак матрицю Фішера неможливо визначити, використовуючи зашумлені спостереження. Можна лише знайти відповідні оцінки.

При ідентифікації замкнутої системи, крім властивостей збурень, необхідно враховувати вплив зворотного зв'язку. Що стосується системи автоматичного керування двигуна, необхідно також враховувати динамічні характеристики елементів: виконавчих пристроїв, датчиків, цифро-аналогових і аналого-цифрових перетворювачів та ін.

Розглядаються властивості **параметричної ідентифікованості та непараметричної ідентифікованості**.

Умови параметричної ідентифікованості:

- порядки моделей об'єкта та шуму відомі;
- порядки поліномів передавальних функцій об'єкта, зворотного зв'язку та шуму повинні задовольняти систему нерівностей; це забезпечує можливість визначення всіх невідомих параметрів із рівнянь, що використовуються для параметричного оцінювання;
- є можливість активно впливати на систему;
- потужність та діапазон частот збурень досить великі.

Як кількісні умови ідентифікованості розглянуті обмеження на асиметрію ( $A$ ) та ексцес ( $E$ ) вхідних ( $x$ ) та вихідних ( $y$ ) параметрів системи:

$$|A_x| > |A_y|; |E_x| > |E_y|.$$

На експериментальних даних, отриманих при випробуваннях турбогвинтовентиляторного двигуна, показано, що ці умови виконуються для всіх зв'язків витрати палива з параметрами робочого процесу двигуна і положенням дозуючого елемента, але не виконуються для зв'язків між керуючим струмом і положенням дозуючого елемента, між заданим і фактичним значеннями положень регульованих напрямних апаратів каскадів компресора, а також між сигналами на керування кроком лопатей дворядного гвинтовентилятора та фактичним положенням лопатей.

З аналізу проблеми стає ясно, що практична ідентифікованість полягає у можливості формування моделі об'єкта за експериментальними даними з необхідною точністю. І тому необхідний метод аналізу точності ідентифікації. Однак, на жаль, кількісні оцінки точності ідентифікації у цій монографії не розглянуті.

В роботі Castiglione и др. [74] розглянуто завдання керування двигуном з використанням лінійних математичних моделей. Зазначено, що для забезпечення необхідної точності керування використовується модель повинна враховувати деградацію двигуна. На відміну від багатьох робіт, де розглядається уточнення нелінійної моделі шляхом введення в неї оцінених відхилень характеристик вузлів двигуна, автори пропонують безпосередньо корегувати коефіцієнти лінійної динамічної моделі. Для цієї корекції розглянуто два методи: метод малих збурень та метод ідентифікації лінійної моделі у просторі станів. Однак у цій роботі ця пропозиція досліджена явно недостатньо: розглянуто лише деградацію характеристик компресора, не аналізувався вплив похибок вимірювань, а алгоритм ідентифікації взагалі не наведено – зроблено лише посилання на те, що використані стандартні засоби MATLAB.

В роботі Tavakolpour-Saleh та ін. [75] розглянуто два підходи до ідентифікації динамічних властивостей турбореактивного двигуна: параметричний та непараметричний. Основну увагу приділено визначенню раціональної структури параметричної моделі. Для непараметричної ідентифікації використані нейронні мережі.

Ідентифікація лінійних та нелінійних моделей стосовно ГТД та інших технічних систем розглядалася в роботах багатьох дослідників. Sio та Lee [4] застосували рекурентну нейронну мережу для нелінійної рухової системи й на модельних прикладах оцінили її ефективність.

Chiras і Evan [5, 6] запропонували NARMAX Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogeneous input) модель ГТД.

Lazzaretto та Toffolo [79] застосували нейромережну модель до ГТД в умовах недостатньої інформації про його характеристики. Показано можливість задовільного опису динамічних властивостей двигуна.

Magiore та ін. представили параметричні та непараметричні моделі двигуна ХТЕ46 [80] для прогнозування тяги, запасу стійкості та невимірюваних параметрів технічного стану.

Wei та його співавтори з Пекінського університету Бейханг та Кренфілдського університету представили змістовний огляд розвитку бортових моделей ГТД [81].

Застосування бортових моделей розвивалося у двох напрямках: автоматичне керування та діагностування технічного стану.

Що стосується керування, використання моделей дає можливість оцінювати параметри, що не вимірюються (тягу, температуру газу та ін) з урахуванням індивідуальних особливостей двигунів. На противагу моделі для діагностування розраховують параметри технічного стану, які не використовуються безпосередньо у зворотних зв'язках контурів керування. Виняток становить випадок, коли за допомогою моделі виконується контроль стану датчиків, і у разі виявлення несправності замість сигналу датчика у контурі керування використовується значення, розраховане за допомогою моделі. Область застосування бортових моделей представлена на рис. 1.7.



Рис. 1.7 - Область застосування бортових моделей ГТД

Для вирішення задач керування справним двигуном застосовуються кусково-лінійні моделі, нелінійні моделі, що ідентифікуються, моделі з блоковою структурою та нові узагальнені описуючі функції. Для керування з урахуванням деградації використовуються моделі у поєднанні з різними варіантами фільтру Калмана.

### ***Бортові моделі справного стану двигуна***

Початок застосування кусково-лінійних динамічних моделей ГТД було покладено в роботі Teren, опублікованій у звіті NASA [82] та присвяченій керуванню двигуном F100. Параметри такої моделі задані на скінченній множині точок дросельної характеристики двигуна. Тому при моделюванні перехідних характеристик параметри моделі інтерполюються за значеннями параметра, який задає режим роботи – частота обертання ротора. Відповідний алгоритм моделювання представлений у монографії Kulikov, Thompson [73]. Як статична модель може бути використана нелінійна повузлова модель двигуна або експериментальна дросельна характеристика.

Для визначення коефіцієнтів лінійних моделей використовуються методи часткових похідних, припасування та ідентифікації [83, 84].

Reberga та Breikin [85] порівняли різні методи інтерполяції кусково-лінійної моделі (лінійну та квадратичну) для забезпечення безперервності коефіцієнтів моделі. Вони наголосили на слабкому впливі вибору методу інтерполяції.

Наступним кроком було дослідження Tian [86] на вибір параметра, що представляє режим роботи двигуна. Порівнювали різні параметри двовального ТРДД: частота обертання ротора ВТ, частота обертання ротора НТ, а також евклідова норма цих двох частот обертання. Показано, що доцільним є використання евклідової норми. Встановлено, що ця модель забезпечує моделювання з прийнятною точністю лише «м'яких» (тобто відносно повільних) перехідних процесів внаслідок її кусково-лінійної природи.

Пізніше, 2017 р., Liantsev та ін. [87] узагальнили цей підхід і ввели аргумент, від якого залежать коефіцієнти ЛДМ – динамічний параметр  $\alpha$ , значення якого визначається в координатах (частота обертання ротора ВТ – частота обертання

ротора НТ) з умови найменшої відстані між точками, що відповідають перехідному режиму.

Частотні методи ідентифікації кусково-лінійних моделей двигунів розглянуті в 1998 р. у роботах Borell та ін. [88], а також Arkov та ін. [89].

Chiras, Evans та Rees в 2001-2002 рр. досліджували ідентифікацію нелінійних нейромережових моделей з використанням експериментальних даних, отриманих при випробуваннях двигуна Rolls Royce Spay MK202 [77, 78, 90]. Вони вперше застосували метод NARMAX (Non-linear AutoRegressive Moving Average with eXogeneous inputs) для ідентифікації зв'язків між витратою палива та частотою обертання ротора двигуна. Вони показали, що нейронна мережа з прямим зв'язком (тобто найпростіша нейронна мережа) дозволяє зменшити статичну похибку, яка характерна для моделі, представленої у вигляді лінійної передавальної функції.

2003 р. Ruano та ін. [91] застосували мультиоб'єктний генетичний алгоритм (MOGA) визначення структури моделі NARX при ідентифікації ТРДД Spay. Показано, що квадратична модель NARX задовільно описує зв'язок між витратою палива і частотою обертання ротора. Однак у цій роботі досліджено лише цей зв'язок. У цей час Maggiore та інших. [80] сформували нейромережову модель двигуна із змінним циклом STE46. На усталених режимах вони забезпечили визначення тяги, запасу стійкості і температури на вході в турбіну. У наступній роботі Tavakolpour-Saleh та ін. [75] порівняли методи параметричної й непараметричної ідентифікації та показали, що середньоквадратична похибка в умовах непараметричної ідентифікації може бути зменшена до 50% від похибки в умовах параметричної ідентифікації. Проте фізична інтерпретація непараметричної моделі викликає труднощі. У подальшому Jafari та ін. [92] скомбінували різні методи ідентифікації та застосували їх для різних параметрів двигуна CFM56. Вони отримали нейромережові моделі оптимальної структури для вирішення задач керування.

Інший метод моделювання характеристик справного двигуна заснований на використанні нових узагальнених функцій (NGDF), запропонованих Lichester та

Levy у 2006 р. [93]. Ця модель налаштовується на перехідних характеристиках, отриманих при різкій зміні витрати палива.

У 2019 р. Jafari та Nikolaidis [94] розглянули три види моделей двигуна: 1) модель Хаммерштейна; 2) модель Вінера; 3) змішані моделі Вінера-Хаммерштерна та Хаммерштерна-Вінера. В результаті аналізу вони рекомендували до практичного застосування модель Вінера та порівняли її з кусково-лінійною моделлю та моделлю NGDF. Всі моделі налаштовувалися на тому самому наборі даних. Показано, що модель NGDF непридатна, тому що накопичує статичну похибку.

### ***Бортові моделі несправного стану двигуна***

Ці моделі мають бути придатними як для раптових, так і для поступових відмов. Раптові відмови пов'язані з потраплянням сторонніх предметів, криги та птахів. Тому деградація відбувається у одному чи невеликій кількості вузлів. Поступова деградація відбувається внаслідок ерозії, корозії, зносу, забруднення та зміни зазорів. Це повільні процеси, за яких практично всі вузли змінюють свої характеристики. Деградацію зазвичай моделюють шляхом введення в модель параметрів технічного стану, які представляють відхилення характеристик вузлів від значень, що відповідають справному стану.

NASA на підставі дослідження результатів експлуатації, виробництва та випробувань двигуна JT9D виконало кількісну оцінку деградації, представлену в табл. 1.1 [95, 96].

Таблиця 1.1 - Зміна параметрів стану вузлів двигуна JT9D при деградації

Flight cycle	$\Delta\eta_F$ (%)	$\Delta\Gamma_F$ (%)	$\Delta\eta_B$ (%)	$\Delta\Gamma_B$ (%)	$\Delta\eta_{HPC}$ (%)	$\Delta\Gamma_{HPC}$ (%)	$\Delta\eta_{HPT}$ (%)	$\Delta\Gamma_{HPT}$ (%)	$\Delta\eta_{LPT}$ (%)	$\Delta\Gamma_{LPT}$ (%)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3000	-1.50	-2.04	-1.46	-2.08	-2.94	-3.91	-2.63	+1.76	-0.54	+0.25
6000	-2.85	-3.65	-2.61	-4.00	-9.40	-14.06	-3.81	+2.57	-1.08	+0.42

Моделювання раптових несправностей було виконано Lurpold та ін. [31], коли вони запропонували модель STORM, яка включала кусково-лінійну модель динамічного двигуна. Використовуючи цю модель, автори успішно оцінили масову витрату повітря. Однак, у випадку раптових несправностей, похибки в оцінках тяги були значними.



Для вирішення проблеми використовується логічний блок RTA (Run-Time Assurance), який безперервно аналізує різницю між командами управління, що генерується основним і додатковим регуляторами, і перемикає систему на керування з резервним регулятором, якщо ця різниця перевищує допустиму межу.

Таким чином, налаштування динамічних моделей за вимірювальною інформацією є важливим завданням, яке вирішується на різних етапах використання моделей.

Серед усіх робіт з ідентифікації характеристик двигунів роботи, пов'язані з динамічними характеристиками, становлять незначну кількість. У них переважно розглянуто визначення коефіцієнтів однорежимної динамічної моделі методом найменших квадратів. Однак проблема аналізу точності оцінювання параметрів динамічних моделей за реальними даними досліджена явно недостатньо, а задача планування експериментів не розглядалася.

#### **1.4 Висновки з розділу та завдання дисертаційної роботи**

У результаті виконаного аналізу предметної галузі, проблем та існуючих методів визначення невимірюваних параметрів та узгодження динамічних моделей ГТД з експериментальною інформацією можна зробити наступні висновки:

- 1) Визначення невимірюваних параметрів двигунів на усталених і перехідних режимах роботи є актуальним завданням створення систем автоматичного керування та діагностування двигунів.
- 2) Нині сформована й успішно розвивається багатьма науковими школами концепція бортової самоналаштовувальної моделі, яка забезпечує визначення в реальному часі невимірюваних параметрів двигуна.
- 3) Найбільше охоплення умов роботи двигуна та структурної адекватності забезпечується повузловою динамічною моделлю двигуна, яка ґрунтується на розв'язанні рівнянь спільної роботи вузлів. Однак на шляху до її бортового використання залишається багато задач, які необхідно вирішити. Тому найбільш доцільним є використання математичної моделі двигуна, яка є комбінацією статичної та динамічної

підмоделей. При цьому динамічна підмодель складається з відхилень, має лінійну структуру, а її коефіцієнти залежать від режиму та умов польоту.

- 4) На точність результатів, одержуваних із використанням цієї моделі, значний вплив мають похибки, зумовлені індивідуальними особливостями двигуна, які пов'язані з розкидом параметрів робочого процесу в результаті похибок виготовлення та збирання, а також зі зміною параметрів характеристик вузлів внаслідок деградації проточної частини.
- 5) Ці похибки можна значно зменшити, якщо забезпечити можливість адаптації моделі методами ідентифікації за результатами вимірювання параметрів у експлуатації.
- 6) У переважній більшості робіт розглядається визначення відхилень невимірюваних параметрів від деяких базових значень. Часто визначення «базове значення» авторами не надається.
- 7) У переважній більшості робіт не розглядаються проблеми формування структури динамічної моделі. Вважається, що вона є лінійною.
- 8) Невелика кількість робіт розглядає завдання в лінійній постановці, хоча відомо, що динамічна модель ГТД є суттєво нелінійною, а її коефіцієнти залежать від режиму та польотних умов.
- 9) Недостатньо досліджено проблему забезпечення робастності алгоритмів визначення невимірюваних параметрів до індивідуальних особливостей двигунів.
- 10) З усіх робіт з ідентифікації характеристик двигунів роботи, пов'язані з динамічними характеристиками, становлять незначну кількість. У них переважно розглянуто визначення коефіцієнтів однорежимної динамічної моделі методом найменших квадратів. Однак проблема аналізу точності оцінювання параметрів динамічних моделей за реальними даними досліджена явно недостатньо, внаслідок чого відсутні рекомендації щодо формування керуючих впливів на двигун, періодичності та тривалості реєстрації параметрів, а також визначення достатності зібраної інформації для отримання динамічної моделі із заданою точністю.

Відповідно, для усунення перерахованих недоліків необхідно вирішити такі задачі:

- сформулювати математичні моделі двигунів, обраних як основні об'єкти дослідження; визначити значення параметрів динамічних моделей, характерні для різних умов роботи;
- розробити метод аналізу похибок ідентифікації динамічних характеристик двигунів із використанням лінійних динамічних моделей;
- застосувати цей метод до кількох типів двигунів: одновального ТРД, турбовального двигуна з одновальним газогенератором і двовального ТРДД і отримати залежності, що пов'язують похибки оцінювання динамічних параметрів ГТД з факторами, що впливають (похибками вимірювання параметрів, частотою і тривалістю реєстрації та ін.);
- відпрацювати метод аналізу похибок ідентифікації на реальних даних та сформулювати рекомендації щодо його практичного застосування, в тому числі в складі самоналаштовувальної бортової динамічної моделі.

### Список літератури до першого розділу

1. Urban, L. Gas path analysis applied to turbine engine condition monitoring / L. Urban // J. Aircraft. – 1973 - Vol. 10, No. 7. - P. 400-406. doi: <https://doi.org/10.2514/3.60240>.
2. Xie, J, Feature selection and feature learning in machine learning applications for gas turbines: A review / J. Xie, M. Sage, Y. F. Zhao // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2023. - Vol. 117, Part A. - 22 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105591>.
3. Fentaye, A. A review on gas turbine gas-path diagnostics: state-of-the-art methods, challenges and opportunities / A. Fentaye , A. Baheta, S. Gilani, K. Kypryanidis // Aerospace. – 2019. – Vol. 6(7), no. 83. – 54 p. doi: <https://doi.org/10.3390/aerospace6070083>.
4. Rigatos, G. Fault diagnosis of gas-turbine power units with the derivative-free nonlinear Kalman Filter / G. Rigatos, N. Zervos, D. Serpanos, V. Siadimas,

- P. Siano, M. Abbaszadeh // *Electric Power Systems Research*. – 2019. - Vol. 174. - 18 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2019.03.017>.
5. Detang, Z. Research on model-based fault diagnosis for a gas turbine based on transient performance / Z. Detang, Z. Dengji, T. Chunqing, J. Baoyang // *Applied Sciences*. – 2018. - Vol. 8, no. 148. – 14 p. doi: <https://doi.org/10.3390/app8010148>.
  6. Chen, Q. An improved nonlinear onboard adaptive model for aero-engine performance control // Q. Chen, H. Sheng, T. Zhang // *Chinese Journal of Aeronautics*. – 2023. - Vol. 36, Iss. 9. - P. 317-334. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.12.005>.
  7. Lietzau, K. Model based control concepts for jet engines / K. Lietzau, A. Kreiner // *Proceedings of ASME Turbo Expo 2001: Power for land, sea, and air; 2001 Jun 4-7; New Orleans, Louisiana, USA*. New York: ASME. - 2001.
  8. A model-based controller for commercial aero gas turbines / A. Turevskiy, R. Meisner, R. H. Luppold et al. // *Proceedings of ASME Turbo Expo 2002: Power for land, sea, and air; Amsterdam, The Netherlands*. New York: ASME. - P. 189–195.
  9. Connolly, J. W. Advanced control considerations for turbofan engine design / J. W. Connolly, J. Csank, A. Chicatelli // *52nd AIAA/SAE/ASEE joint propulsion conference*. Salt Lake City, UT. Reston: AIAA. - 2016.
  10. Gas turbine aero-engines real time on-board modelling: A review, research challenges, and exploring the future / Z. Y. Wei, S. G. Zhang, S. Jafari et al. // *Prog Aerosp Sci* 2020. - Vol. 121. - P. 100693.
  11. Random weighting-based nonlinear Gaussian filtering / Z. H. Gao, C. F. Gu, J. H. Yang et al. // *IEEE Access* 2020. - Vol. 8. - P. 19590–19605.
  12. Estimating in-flight engine performance variations using Kalman filter concepts / R. Luppold, J. Roman, G. Gallops et al. // *25th joint propulsion conference; 1989 Jul 12-16; Monterey, CA*. Reston: AIAA. - 1989.
  13. eSTORM: Enhanced self tuning on-board real-time engine model / T. Brotherton, A. Volponi, R. Luppold et al. // *2003 IEEE aerospace conference proceedings; Big Sky, MT, USA*. Piscataway: IEEE. - 2003, P. 3075–3086.

14. Volponi, A. Enhanced self tuning on-board real-time model (eSTORM) for aircraft engine performance health tracking / A. Volponi, D. L. Simon // Washington, D.C.: NASA. - 2008. Report No. NASA/CR-2008-215272.
15. Yuan, C. F. On-board real-time adaptive model of aero-engine / C. F. Yuan, H. Yao, G. Yang // Journal of Aeronautics 2006. - Vol. 27(4). - P. 561–564 [Chinese].
16. Lu, J. Aeroengine on-board adaptive model based on improved hybrid Kalman filter / J. Lu, Y. Q. Guo, S. G. Zhang // Journal of Aerospace Power 2011. - Vol. 26 (11). - P. 2593–2600 [Chinese].
17. Aircraft engine health parameters estimation based on adaptive fitting modeling / J. H. Gu, F. Lu, J. Q. Huang et al. // Transducer and Microsystem Technologies 2019. - Vol. 38 (3). P. 28–32 [Chinese].
18. Pang, S. W. A hybrid onboard adaptive model for aero-engine parameter prediction / S. W. Pang, Q. Li, H. Feng // Aerosp Sci Technol 2020. - Vol. 105. - P. 105951.
19. Brunell, B. J. Model adaptation and nonlinear model predictive control of an aircraft engine / B. J. Brunell, D. E. Viassolo, R. Prasanth // Proceedings of ASME Turbo Expo 2004: Power for land, sea, and air; 2004 Jun 14-17; Vienna, Austria. NewYork: ASME. – 2008. - P. 673–682.
20. Leonard, O. Adaptive estimation algorithm for aircraft engine performance monitoring / O. Leonard, S. Borguet, P. Dewallef // J Propuls Power 2008. - Vol. 24 (4). - P. 763–769.
21. Kobayashi, T. Application of a constant gain extended Kalman filter for in-flight estimation of aircraft engine performance parameters / T. Kobayashi, D. L. Simon, J. S. Litt // Proceedings of ASME Turbo Expo 2005: Power for land, sea, and air. Reno, Nevada, USA. NewYork: ASME. - 2008. - P. 617–628.
22. Palmer, C. Thrust measurement model-based correction system for turbine engine test cell dynamic data / C. Palmer, E. Hettler // Proceedings of ASME Turbo Expo 2015: Turbine technical conference and exposition; 2015 Jun 15-19; Montreal, Quebec, Canada. NewYork: ASME. - 2015.

23. Nonlinear Kalman filters for aircraft engine gas path health estimation with measurement uncertainty / F. Lu, T. Y. Y. Gao, J. Q. Huang et al. // *Aerosp Sci Technol*, 2018. – Vol. 76. – P. 126–140.
24. Hybrid state estimation for aircraft engine anomaly detection and fault accommodation / F. Lu, Z. H. Li, J. Q. Huang et al. // *AIAA J* 2020. - Vol. 58 (4). – P. 1748–1762.
25. Interacting multiple model estimation-based adaptive robust unscented Kalman filter / B. B. Gao, S. S. Gao, Y. M. Zhong et al. // *Int J Control Autom Syst* 2017. – Vol. 15 (5). – P. 2013-2025.
26. Adaptive unscented Kalman filter based on maximum posterior and random weighting / Z. H. Gao, D. J. Mu, S. S. Gao et al. // *Aerosp Sci Technol* 2017. – Vol. 71. – P. 12–24.
27. A new direct filtering approach to INS/GNSS integration / G. G. Hu, W. Wang, Y. M. Zhong et al. // *Aerosp Sci Technol*, 2018. - Vol. 77. – P. 755-64.
28. Yang, X. Design of aircraft engine adaptive model based on improved strong tracking filter / X. Yang, J. Ai // *J Syst Simulat*, 2018. - Vol. 30 (8). – P. 2918 [Chinese].
29. An improved multivariable generalized predictive control algorithm for direct performance control of gas turbine engine / X. Zhou, F. Lu, W. X. Zhou et al. // *Aerosp Sci Technol* 2020. - Vol. 99. – P. 105576.
30. Zhou, X. Fault diagnosis based on measurement reconstruction of HPT exit pressure for turbofan engine / X. Zhou, F. Lu, J. Q. Huang // *Chin J Aeronaut* 2019. – Vol. 32 (5). – P. 1156-1170.
31. Gas path health monitoring for a turbofan engine based on a nonlinear filtering approach / F. Lu, J. Q. Huang, Y. Q. Lv // *Energies*, 2013. – Vol. 6 (1). – P. 492–513.
32. Yang, B. Turbine engine performance estimation using particle filters / B. Yang, P. Sengupta, P. K. Menon // 53rd AIAA aerospace sciences meeting; Kissimmee, Florida. Reston: AIAA. - 2015.
33. Wang, Q. H. An improved particle filtering algorithm for aircraft engine gas-path fault diagnosis / Q. H. Wang, J. Q. Huang, F. Lu // *Adv Mech Eng.* – 2016. - Vol. 7. – P. 168781401665960.

34. Yu, J. B. Aircraft engine health prognostics based on logistic regression with penalization regularization and state-space-based degradation framework / J. B. Yu // *Aerosp Sci Technol* 2017. – Vol. 68. - 345–361.
35. A robust cubature Kalman filter with abnormal observations identification using the mahalanobis distance criterion for vehicular INS/GNSS integration / B. B. Gao, G. G. Hu, X. H. Zhu et al. // *Sensors (Basel)*, 2019. – Vol. 19 (23). – P. 5149.
36. Cubature Kalman filter with both adaptability and robustness for tightly-coupled GNSS/INS integration / B. B. Gao, G. G. Hu, Y. M. Zhong et al. // *IEEE Sens J*, 2021. – Vol. 21 (13). – P. 14997–15011.
37. Cubature rule-based distributed optimal fusion with identification and prediction of kinematic model error for integrated UAV navigation / B. B. Gao, G. G. Hu, Y. M. Zhong et al. // *Aerosp Sci Technol*, 2021. – Vol. 109. – P. 106447.
38. Application of adaptive square root cubature Kalman filter in turbofan engine gas path performance monitoring / J. T. Zhu, Y. Hu, Y. Li et al. // *IOP Conf Ser: Earth Environ Sci*, 2019. – Vol. 267 (4). – P. 042073.
39. A coupling diagnosis method for sensor faults detection, isolation and estimation of gas turbine engines / L. H. Zhu, J. F. Liu, Y. J. Ma et al. // *Energies*, 2020. – Vol. 13 (18). – P. 4976.
40. Simon, D. A. comparison of filtering approaches for aircraft engine health estimation / D. A. Simon // *Aerosp Sci Technol*, 2008. – Vol. 12 (4). – P. 276–84.
41. Tian, K. Q. Comparing EKF, UKF, and PF performance for autonomous vehicle multi-sensor fusion and tracking in highway scenario / K. Q. Tian, M. Radovnikovich, K. Cheok // 2022 IEEE international systems conference (SysCon); Montreal, QC, Canada. Piscataway: IEEE. - 2022. - P. 1–6.
42. A comparison of sigma-point Kalman filters on an aerospace actuator / M. A. AlShabi, S. A. Gadsden, M. E. H. Assad et al. // *Sensors and Systems for Space Applications XIV* 2021. – Vol. 11755. – P. 150–159.
43. Robust unscented Kalman filtering with measurement error detection for tightly coupled INS/GNSS integration in hypersonic vehicle navigation / G. G. Hu, B. B. Gao, Y. M. Zhong et al. // *IEEE Access* 2019. – Vol. 7. – P. 151409–151421.

44. Constrained unscented particle filter for SINS/GNSS/ADS integrated airship navigation in the presence of wind field disturbance / Z. H. Gao, D. J. Mu, Y. M. Zhong et al. // *Sensors (Basel)*, 2019. - Vol. 19 (3). – P. 471.
45. Distributed state fusion using sparse-grid quadrature filter with application to INS/CNS/GNSS integration / B. B. Gao, G. G. Hu, Y. M. Zhong et al. // *IEEE Sens J*, 2022. – Vol. 22(4). – P. 3430–3441.
46. Mahalanobis distance-based fading cubature Kalman filter with augmented mechanism for hypersonic vehicle INS/CNS autonomous integration / B. B. Gao, W. M. Li, G. G. Hu et al. // *Chin J Aeronaut*, 2022. – Vol. 35(5). – P. 114–128.
47. Chen, Q. A novel direct performance adaptive control of aero-engine using subspace-based improved model predictive control / Q. Chen, H. L. Sheng, T. H. Zhang // *Aerosp Sci Technol*, 2022. – Vol. 128. – P. 107760.
48. Litt JS. An optimal orthogonal decomposition method for Kalman filter-based turbofan engine thrust estimation / J. S. Litt // *J Eng Gas Turbines Power*, 2008. – Vol. 130 (1). – P. 011601.
49. Simon, D. L. Optimal tuner selection for Kalman filterbased aircraft engine performance estimation / D. L. Simon, S. Garg // *J Eng Gas Turbines Power* 2010. – Vol. 132 (3). – P. 031601.
50. Csank, J. Model-based engine control architecture with an extended Kalman filter / J. Csank, J. W. Connolly // *AIAA guidance, navigation, and control conference*; 2016 Jan 4-8; San Diego, California, USA. Reston: AIAA. - 2016.
51. Aero-engine health degradation estimation based on an underdetermined extended Kalman filter and convergence proof / X. F. Liu, J. Q. Zhu, C. S. Luo et al. // *ISA Trans*, 2022. – Vol. 125. – P. 528–538.
52. Chen, Q. An improved nonlinear onboard adaptive model for aero-engine performance control / Q. Chen, H. Sheng, T. Zhang, // *Chinese Journal of Aeronautics*. October 2023. – Vol. 36, Iss. 10. - P. 317-334. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.12.005>.
53. An adaptive on-board real-time model with residual online learning for gas turbine engines using adaptive memory online sequential extreme learning

- machine / M. Xu, K. Wang, M. Li et al. // *Aerospace Science and Technology*. October 2023. – Vol. 141. - 17 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108513>.
54. A robust adaptive linear parameter-varying gain-scheduling controller for aeroengines / Z. Liu, Y. Huang, L. Gou, D. Fan // *Aerospace Science and Technology*, 2023. - Vol. 138. - 18 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108319>.
55. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов и др. – К.: Техника, 1998. – 312 с.
56. Stamatis, A. Adaptive simulation of gas turbine performance / A. Stamatis, K. Mathioudakis, K. D. Papailiou // *J. Eng. Gas Turbines Power*. – 1990. - Vol. 112, Iss. 2. - P. 168-176. doi: <https://doi.org/10.1115/1.2906157>.
57. Li, Y. G. Aero gas turbine flight performance estimation using engine gas path measurements / Y. G. Li // *J. Propulsion and Power*. – 2015. - Vol. 31, Iss. 3. - P. 851-860.
58. Tsoutsanis, E. Nonlinear model-based adaptation for off-design performance prediction of gas turbines / E. Tsoutsanis, Y. Li, P. Pilidis // *ISABE Paper ISABE-2017-21436*. - 17 p.
59. Li, S. Improved method for gas-turbine off-design performance adaptation based on field data / S. Li, Z. Li, S. Li // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. – 2020. - Vol. 142, Iss. 4. - 12 p. doi: <https://doi.org/10.1115/1.4044470>.
60. Kim, S. Adaptation method for overall and local performances of gas turbine engine model / S. Kim, K. Kim, C. Son // *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. - 2019. - No. 19. - P. 250-261.
61. Регуляризованные алгоритмы параметрической идентификации математических моделей ГТД, основанные на использовании априорной информации / С. В. Епифанов // *Авіаційно-космічна техніка і технологія – Харків*, 2001. – Вип. 26. – С. 205–209.
62. Регуляризирующая процедура идентификации нелинейной термогазодинамической модели ГТД / И. И. Лобода, С. В. Епифанов, Р. Л. Зеленский // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2005. – № 9 (25). – С. 185–194.
63. Шевченко, М. В. Визначення не вимірюваних в експлуатації інтегральних параметрів авіаційних газотурбінних двигунів : дис. ... канд. техн. наук :

- 05.05.03 / М. В. Шевченко ; Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т» ; наук. рук. С. В. Єпіфанов. – Харків, 2015. – 146 с.
64. Шевченко, М. В. Метод главных компонент в решении задачи косвенных измерений параметров ГТД / М. В. Шевченко, С. В. Епифанов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 9 (86). – С. 219–228.
65. Estimation of Performance Parameters of Turbine Engine Components Using Experimental Data in Parametric Uncertainty Conditions // О. Khustochka, S. Yepifanov, R. Zelenskyi, R. Przysowa // *Aerospace*. – 2020. – Vol. 7, Iss. 1. – 17 p.
66. Tsoutsanis E, Meskin N, Benammar M, Khorasani K. Transient gas turbine performance diagnostics through nonlinear adaptation of compressor and turbine maps. *J Eng Gas Turbines Power* 2015. - 137(9). - 12 p. doi: <https://doi.org/10.1115/1.4029710>.
67. NARX models for simulation of the start-up operation of a single-shaft gas turbine / H. Asgari, X. Chen, M. Morini et al. // *Applied Thermal Engineering*. – 2016. Vol. 93. - P. 368-376. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.09.074>.
68. Mehrpanahi, A. A novel dynamic modeling of an industrial gas turbine using condition monitoring data / A. Mehrpanahi, A. Hamidavi, A. Ghorbanifar // *Applied Thermal Engineering*. – 2018. – Vol. 143. - P. 507-520. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.07.081>.
69. Joint steady state and transient performance adaptation for aero engine mathematical model / S. Pang, Q. Li, H. Feng, H. Zhang // *IEEE Access*, 2019. - Vol. XX. - 10 p. doi: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2905865>.
70. Kim, S. A new transient performance adaptation method for an aero gas turbine engine / S. Kim, K. Kim, C. Son // *Energy*, Elsevier. – 2020. - Vol. 193. - 10 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116752>.
71. Suitability of performance adaptation methods for updating the thermodynamic cycle model of a turboprop engine / S. Kim, C-R. Lee, W. Yang, Y. Kim // *Applied Thermal Engineering*. – 2024. - 32 p. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2024.122408>.

72. Jaw, L. Aircraft engine controls: Design, system analysis, and health monitoring / L. Jaw, J. Mattingly // American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.: Reston, USA. - 2009. - 378 p.
73. Kulikov, G. Dynamic modelling of gas turbines. Identification, simulation, condition monitoring and optimal control / G. Kulikov, H. Thompson // Springer-Verlag. London. - 2004. – 309 p.
74. Linear model of a turboshaft aero-engine including components degradation for control-oriented applications / T. Castiglione, D. Perrone, L. Strafella et al. // Energies. – 2023. – Vol. 16. – 18 p. doi: <https://doi.org/10.3390/en16062634>.
75. Parametric and Nonparametric System Identification of an Experimental Turbojet Engine / A. Tavakolpour-Saleh, S. Nasib, A. Sepasyan, S. Hashemi // Aerosp. Sci. Technol. – 2015. – Vol. 43. - P. 21–29. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.02.013>.
76. Sio, K. C. Identification of a non-linear motor system with neural net-works / K. C. Sio, C. K. Lee, // Published in Proceedings of 4th IEEE... 18 March 1996 Engineering, Computer Science Proceedings of 4th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control - AMC '96. - P. 287–292.
77. Chiras, N. Research of nonlinear modeling and validation of an aircraft gas turbine engine / N. Chiras, C. Evan, D. Rees // IFAC Proceedings. – 2001. – Vol. 34(6) doi: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)35289-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35289-8).
78. Chiras, N. Nonlinear gas turbine modeling using NARMAX structure / N. Chiras, C. Evans, D. Rees // IEEE Trans. Instrum. Meas. – 2001. - Vol. 50(4). P. 893–898. doi: <https://doi.org/10.1109/19.948295>.
79. Lazzaretto, A. Analytical and neural network models for gas tur-bine design and off-design simulation / A. Lazzaretto, A. Toffolo // Int. J. Appl. Thermodyn. 2001. – Vol. 4(4). – P. 173–182. doi: <https://doi.org/10.5541/ijot.78>.
80. Estimator design in jet engine applications / M. Maggiore, R. Ordonez, K. M. Passino, S. Adibhatla // Eng. Appl. Artif. Intell. – 2003. – Vol. 16. – P. 579–593. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2003.10.003>.
81. Gas turbine aero-engines real time on-board modelling: A review, research challenges, and exploring the future / Z. Wei, S. Zhang, S. Jafari, T. Nikolaidis

- // Progress in Aerospace Sciences. – 2020. - Vol. 121. - 16 p.  
doi: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100693>.
82. Teren, F. Minimum Time Acceleration of Aircraft Turbofan Engine / F. Teren // Report No.: NASA-TM-X-73624, Lewis Research Center, National Aeronautics and Space Administration, Cleveland, Ohio. - 1977. – 13 p.
83. Comparison of linear models for gas turbine performance / H. Yu, Y. Yuecheng, Z. Shiyang, S. Zhensheng // Proc. Inst. Mech. Eng. Part G-J. Aerosp. Eng. – 2013. – Vol. 228. – P. 1291–1301. doi: <https://doi.org/10.1177/0954410013490090>
84. Linearization and identification of aircraft turbofan engine models / D. Henrion, L. Reberga, J. Bernussou, F. Vary // IFAC Proceedings 37. – 2004. - P. 1055–1060. doi: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)32319-4](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)32319-4)
85. Breikin, T. V. Regularisation approach for real-time modelling of aero gas turbines / T. V. Breikin, V. Y. Arkov, G. G. Kulikov // Contr. Eng. Pract. – 2004. - Vol. 12. – P. 401–407. doi: [https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(03\)00107-2](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(03)00107-2)
86. Tian, Z. A Comparative Study of LPV Modeling for Turbofan Engines / Z. Tian, D. Tan, X. Wang // 53rd AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. - 2017. doi: <https://doi.org/10.2514/6.2017-4822>.
87. Liantsev, O. Identification method for nonlinear dynamic models of gas turbine engines on acceleration mode / O. Liantsev, A. Kazantsev, A. Abdunagimov // Procedia Engineering. – 2017. - Vol. 176. – P. 409-415.
88. Borrell, A. Identification of Aircraft Gas Turbine Dynamics Using Frequency-Domain Techniques / A. Borrell, C. Evans, D. Rees // Control '98, UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455). – 1998. - P. 1372–1378 doi: [https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(99\)00161-6](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(99)00161-6)
89. Dynamic Model Identification of Gas Turbines / V. Y. Arkov, G. G. Kulikov, T. V. Breikin, P. J. Fleming // Control '98, UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455). – 1998. - P. 1367–1371 doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.339>.
90. Chiras, N. Nonlinear Gas Turbine Modeling Using Feedforward Neural Networks / N. Chiras, C. Evans, D. Rees // ASME Turbo Expo 2002: Power for Land, Sea, and Air. - 2002. - P. 145–152. doi: <https://doi.org/10.1115/GT2002-30035>

91. Nonlinear identification of aircraft gas-turbine dynamics / A. E. Ruano, P. J. Fleming, C. Teixeira et al. // *Neurocomputing*. – 2003. – Vol. 55. – P. 551–579. doi: [https://doi.org/0.1016/S0925-2312\(03\)00393-X](https://doi.org/0.1016/S0925-2312(03)00393-X)
92. Advanced control system design for emission reduction in the next generation of turbofan engines using artificial neural networks / S. Jafari, M. Aghasharifian Esfahani, T. Nikolaidis, M. Montazeri-Gh // *Proceeding of 9th EVI-GTI Conference November 19-21, Graz, Austria*. - 2019.
93. Lichtsinder, M. Jet engine model for control and real-time simulations / M. Lichtsinder, Y. Levy // *J. Eng. Gas Turbines Power*. – 2006. – Vol. 128. – P. 745–753. doi: <https://doi.org/10.1115/1.1915391>
94. Jafari, S. Meta-heuristic global optimization algorithms for aircraft engines modelling and controller design; A review, research challenges, and exploring the future / S. Jafari, T. Nikolaidis // *Prog. Aero. Sci.* – 2019. – Vol. 104. - P. 40–53. doi: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2018.11.003>
95. Sallee, G. Performance deterioration based on existing (historical) data; JT9D jet engine diagnostics program / G. Sallee // *Report No. : NASA-CR-135448*, Pratt and Whitney, East Hartford, CT. - 1978. - 217 p.
96. Sallee, G. Performance deterioration based on in-service engine data: JT9D jet engine diagnostics program / G. Sallee // *Report No.: NASA-CR-159525*, Pratt and Whitney, East Hartford, CT. - 1979. - 171 p.
97. FAA, Airworthiness standards part-33 : aircraft engines. U.S. Federal Aviation Authority. - 2012.
98. EASA, Certification specifications for engines CS-E amendment-4. European Aviation Safety Agency. - 2015.
99. Runtime Assurance Protection for Advanced Turbofan Engine Control / J. D. Schierman, D. Neal, E. Wong, A. K. Chicatelli // *2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics. - 2018. - 22 p. doi: <https://doi.org/10.2514/6.2018-1112>

## РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ БАГАТОРЕЖИМНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОТУРБІННИХ ДВИГУНІВ

### 2.1 Базова нелінійна повузлова модель

У якості базової моделі використовується повузлова термогазодинамічна модель робочого процесу ГТД, яка, як правило, розробляється та підтримується на розробником. Переваги такого підходу полягають у високій точності, універсальності та функціональній гнучкості моделі, що забезпечуються завдяки її деталізованій структурі та наявності фізично обґрунтованої основи.

Базова повузлова модель формується на основі характеристик основних вузлів двигуна – компресорів, турбін, вхідних пристроїв, камер згоряння, сопел тощо. Ці характеристики, отримані розрахунковим шляхом або в результаті стендових випробувань, зазвичай подаються у табличній формі з використанням кусково-лінійної інтерполяції. Таким чином, модель є детермінованою і відображає взаємодії вузлів.

#### *2.1.1 Нелінійна повузлова математична модель для визначення параметрів ГТД на ustalених режимах роботи*

Розглянемо повузлову нелінійну математичну модель ГТД, з використанням якої розраховують параметри робочого тіла в проточній частині та інші основні параметри двигуна (тяга, питома витрата палива та ін.)  $\vec{Y}$  за заданими умовами на вході у двигун  $\vec{U}_n$ , параметрів режиму  $\vec{U}_p$  та параметрами вузлів  $\vec{v}$ :

$$\vec{Y} = F(\vec{U}_n, \vec{U}_p, \vec{v}). \quad (2.1)$$

Інформація про вузли задається в формі характеристик – моделей типу «чорна скринька», які не враховують внутрішню структуру вузлів, а відображають лише зв'язки вихідних параметрів  $\vec{v}$  із вхідними. Значення параметрів вузлів (ККД, коефіцієнти втрат та інші) залежать від положення робочої точки на відповідній характеристиці вузла, а це положення визначається умовою спільної роботи всіх вузлів проточної частини.

Узагальнена схема проточної частини ГТД [1] (рис. 2.1) містить вентилятор з підпірними ступенями, двокаскадний газогенератор зі змішуванням потоків внутрішнього та зовнішнього контурів; форсажні камери у зовнішньому контурі та за камерою змішування, а також опис відбирання повітря від компресора та підведення охолодного повітря до турбіни. За потреби, схема може бути доповнена моделями споживачів енергії вільної турбіни (таких як повітряний гвинт, газонагнітач або електрогенератор), що дозволяє моделювати практично всі типи сучасних та перспективних ГТД.

Перерізи проточної частини фіксовані й зберігаються при декомпозиції моделі (при цьому зайві перерізи виключаються з розгляду). За необхідності, кількість перерізів може змінюватися для адаптації моделі до специфіки конкретного двигуна. Кожен переріз характеризується відповідними параметрами робочого тіла: повним тиском і температурою потоку, масовою витратою, вмістом вологи, а також відносною концентрацією продуктів згоряння паливно-повітряної суміші.

Щоб розрахувати їх, а також визначити значення інших параметрів робочого процесу двигуна, необхідно забезпечити виконання умов спільної роботи його вузлів на усталених режимах. До них відносяться умови збереження маси, енергії та імпульсу. Внаслідок використання характеристик вузлів, заданих у табличній формі, а також урахування зміни теплофізичних властивостей робочого тіла залежно від його температури та складу у різних перерізах проточної частини зазначені умови спільної роботи вузлів не можуть бути представлені в аналітичному вигляді. Тому модель має форму алгоритму.

Через те, що характеристики вузлів задані в табличній формі, а також з огляду на залежність теплофізичних властивостей робочого тіла від температури в різних перерізах, зазначені умови спільної роботи не піддаються представленню в аналітичній формі. Тому модель реалізується у вигляді обчислювального алгоритму, який поетапно забезпечує узгодженість параметрів на основі ітераційної процедури.

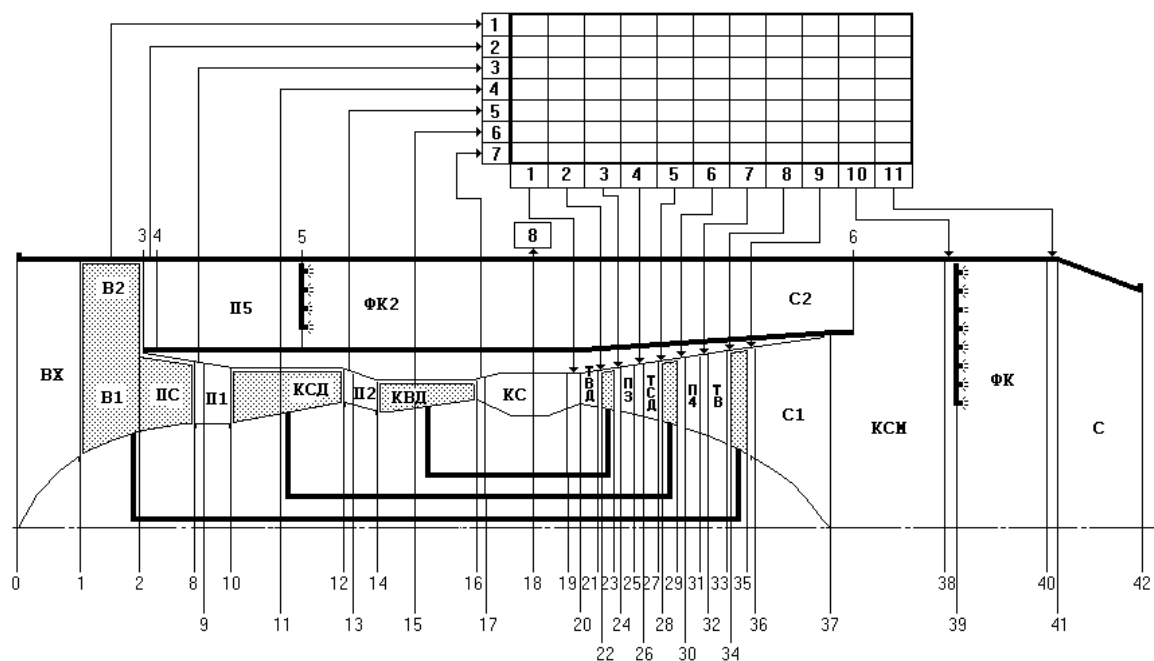


Рис. 2.1 - Узагальнена схема ГТД

Оснoву зазначеного алгоритму складає процедура розрахунку параметрів проточної частини за заданих умов входу до двигуна. Розрахунок виконується послідовно для кожного вузла відповідно до напрямку руху робочого тіла. Для того, щоб забезпечити можливість обчислення параметрів робочого тіла на виході з кожного вузла, необхідно визначити параметри  $\bar{v}$  цього вузла за його характеристикою. Значення необхідних аргументів характеристик вузлів на початку розрахунку може бути невідомі, оскільки вони входять до числа шуканих параметрів двигуна. Щоб вирішити цю суперечність, необхідні для послідовного розрахунку всіх вузлів параметри об'єднують у вектор незалежних змінних  $\bar{Q}$  і перед розрахунком задають їх початкові значення  $\bar{Q}_0$ . Оскільки початкові значення задаються досить довільно, умови спільної роботи вузлів після першого розрахунку проточної частини не виконуються; необхідно скоригувати значення незалежних змінних та повторити розрахунок проточної частини; ця корекція незалежних змінних призводить до повного узгодження вузлів. Таким чином, процедура розрахунку параметрів проточної частини має ітеративний характер і може бути представлена як алгоритм отримання наступного наближення незалежних змінних за попереднім наближенням:

$$\vec{Q}_i = f(\vec{Q}_{i-1}), \quad (2.2)$$

де  $\vec{Q}_i$  – значення вектора незалежних змінних на  $i$ -му кроці;

$\vec{Q}_{i-1}$  – значення вектора незалежних змінних на  $(i-1)$ -му кроці.

Цілеспрямована корекція незалежних змінних можлива лише на підставі використання інформації про їх вплив на умови спільної роботи вузлів. Мірою виконання цих умов є нев'язки  $\vec{H}$ . Так, наприклад, умова нерозривності течії повітря через каскади компресора записується у вигляді нев'язки між витратами повітря через каскади з урахуванням його відборів. Ці нев'язки  $\vec{H}$  залежать від значень незалежних змінних  $\vec{Q}$ , зовнішніх умов  $\vec{U}_n$ , параметрів режиму  $\vec{U}_p$  та параметрів вузлів  $\vec{v}$ . Прирівнюючи нев'язки нулю, отримуємо систему рівнянь

$$\vec{H}(\vec{Q}, \vec{U}_n, \vec{U}_p, \vec{v}) = 0. \quad (2.3)$$

Як буде більш докладно показано нижче, при розрахунку нев'язок за значеннями незалежних змінних доводиться обчислювати значення практично всіх параметрів двигуна, об'єднаних нами у вектор  $\vec{v}$ .

Таким чином, модель (2.1) реалізована у формі системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2.3). Очевидно, для виконання умови визначеності цієї системи необхідно, щоб кількість нев'язок дорівнювала кількості невідомих.

Для розв'язання системи рівнянь (2.3) використовується метод Ньютона – Рафсона. Ітераційна процедура організована так [1], що на кожній ітерації визначається адитивна поправка  $\Delta\vec{Q}_i$  до вектору незалежних змінних:

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_{i-1} + \Delta\vec{Q}_i, \quad (2.4)$$

Поправка  $\Delta\vec{Q}_i$  є розв'язком лінійного алгебраїчного рівняння

$$\vec{H}_i = B_i \cdot \Delta\vec{Q}_i, \quad (2.5)$$

де  $B_i = \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{Q}} \right)_i$  – матриця Якобі.

Як зазначено вище, ця модель не може бути записана в аналітичній формі. Тому визначення елементів матриці Якобі виконується чисельно шляхом послідовного варіювання кожної з незалежних змінних.  $Q_i$  та визначення відповідних нев'язок  $H_q$ . З метою скорочення обсягу обчислень застосовується одностороннє варіювання:

$$\left( \frac{\partial H_q}{\partial Q_j} \right)_i = \frac{H_q(Q_{1i}, \dots, Q_{ji} \cdot (1+h), \dots, Q_{ni}) - H_q(\bar{Q}_i)}{hQ_{ji}}, \quad (2.6)$$

де  $h$  – крок варіювання.

Розв'язок вважається отриманим, якщо

$$\sqrt{\frac{H_1^2 + \dots + H_n^2}{n}} < \varepsilon_R, \quad (2.7)$$

де  $\varepsilon_R$  – задана точність розрахунків;

$n$  – кількість нев'язок (рівнянь системи).

Розрахунок параметрів робочого процесу в основних елементах ГТД базується на використанні  $i$ - $s$  діаграм робочого тіла, склад якого визначається відносним вмістом вологи  $d$  та відносною масовою кількістю  $q$  продуктів повного згоряння стандартного вуглеводневого палива.

Алгоритми визначення властивостей робочого тіла в залежності від температури та складу, а також термодинамічних розрахунків робочого процесу в основних вузлах з урахуванням їх характеристик представлені в монографії [1]. Зазначимо, що значена частина цих розрахунків має ітеративний характер, та їх точність визначається параметром точності термодинамічних розрахунків  $\varepsilon_T$ .

### **2.1.2 Параметризація характеристик вузлів**

Під час розробки термогазодинамічної моделі ГТД потрібно передбачити відхилення характеристик двигуна. Причинами відхилень параметрів конкретного двигуна від середнього можуть бути деградація характеристик двигуна під час

експлуатації або індивідуальні відмінності характеристик нового двигуна. Хоча природа цих відхилень різна (в одному випадку вони спричинені накопиченим зносом та пошкодженнями, в іншому – сукупністю відхилень численних технологічних та збиральних операцій елементів двигуна), але зрештою в обох випадках причиною є відхилення геометричних розмірів (площ прохідних перерізів, кутів установки лопаток, характерних розмірів мікрорельєфу поверхонь та ін.).

Однак зазвичай розглядають модель, до складу параметрів якої входять не геометричні параметри, а параметри вузлів, що визначають їх характеристики. Це зумовлено рівнем моделі проточної частини, в якій не враховується детальна внутрішня структура вузлів.

Характеристики вузлів зазвичай мають вигляд функцій двох або однієї змінної. Розглянемо вихідну характеристику виду  $v_0 = f(y_1, y_2)$ . Тому поставлене завдання в рамках даної моделі можна вирішити, імітуючи зміни геометричних параметрів відповідним деформуванням характеристик вузлів: вертикальним, горизонтальним зсувом та кутовим зсувом.

Для забезпечення можливості зміни величин та напрямків цих деформацій необхідно ввести параметри, які надалі називатимемо параметрами характеристик вузлів. Отримаємо параметризовані характеристики вузлів. Так, наприклад, параметризована форма зазначеної двовимірної характеристики має такий вигляд:

$$v = v_0 \left( 1 + a \frac{y_1 - y_{1_0}}{\Delta y_1} + b \frac{y_2 - y_{2_0}}{\Delta y_2} + c \right), \quad (2.8)$$

де  $v_0$  – значення параметра вузла, обчислене за вихідною характеристикою;

$y_1, y_2$  – поточні значення параметрів-аргументів характеристики;

$y_{1_0}, y_{2_0}$  – базові значення параметрів, що відповідають обраній базовій точці характеристики, навколо якої здійснюється її поворот;

$\Delta y_1$  и  $\Delta y_2$  – діапазони змін параметрів у полі характеристики (використовуються для нормування відхилень параметрів у поточній точці від базової);

$a, b, c$  – параметри аналізованої характеристики вузла

При зміні параметра  $a$  відбувається поворот вихідної характеристики вузла у площині  $y_1 0v$  (де  $0$  – початок координат) відносно базової точки з координатами  $(y_{1_0}, y_{2_0}, v(y_{1_0}, y_{2_0}))$ ; при зміні параметра  $b$  відбувається аналогічний поворот вихідної характеристики у площині  $y_2 0v$ ; при зміні параметра  $c$  відбувається зсув вихідної характеристики вздовж осі  $0v$  на величину, пропорційну вихідному значенню  $V_0$ .

На рис. 2.2 показано базову характеристику  $\eta_{Т.б}^* = f(\pi_{Т}^*, n_{пр.Т})$ , від якої внаслідок відмінностей у геометричних розмірах проточної частини відрізнятиметься реальна характеристика  $\eta_{Т}^*$ . У результаті проведених досліджень запропоновано такий опис  $\eta_{Т}^*$  на основі  $\eta_{Т.б}^*$  введенням параметрів  $a, b, c$ :

$$\eta_{Т}^* = \eta_{Т.б}^* \left( 1 + c + a \frac{\pi_{Т}^* - \pi_{Т0}^*}{\Delta \pi_{Т}^*} + b \frac{n_{зв.Т} - n_{зв.Т0}}{\Delta n_{зв.Т}} \right), \quad (2.9)$$

де  $\pi_{Т0}^*, n_{зв.Т0}$  – довільно вибрані опорні значення аргументів;

$\Delta \pi_{Т}^*, \Delta n_{зв.Т}$  – діапазони зміни аргументів.

Параметр  $c$  характеризує постійну відносну зміну  $\eta_{Т}^*$  у всій області визначення,  $a$  – поворот вихідної характеристики навколо лінії  $\eta_{Т}^* = f(\pi_{Т0}^*, n_{зв.Т})$ , а  $b$  – поворот навколо лінії  $\eta_{Т}^* = f(\pi_{Т}^*, n_{зв.Т0})$ . Базову 1 і скориговану 3 характеристики при  $n_{зв.Т} = const$  показано на рис. 2.3. Відмінності між ними описуються параметрами (постійне відносне зміщення лінії 1 положення 2) і  $a$  (поворот лінії 2 у положення 3) при  $b = 0$ .

Введемо для параметрів характеристик вузлів позначення  $\vec{\theta}$ , тоді можна уявити моделі (2.1), (2.3) у такому вигляді:

$$\vec{H}(\vec{Q}, \vec{U}_n, \vec{U}_p, \vec{\theta}) = 0; \quad (2.10)$$

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{U}_n, \vec{U}_p, \vec{\theta}). \quad (2.11)$$

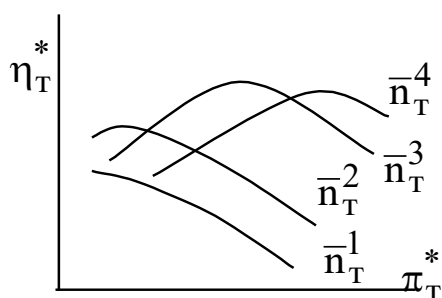


Рис. 2.2 – Базова характеристика турбіни

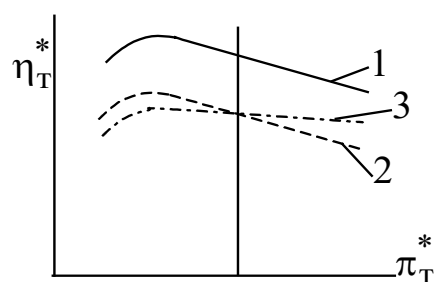


Рис. 2.3 – Базова й змінена характеристики турбіни

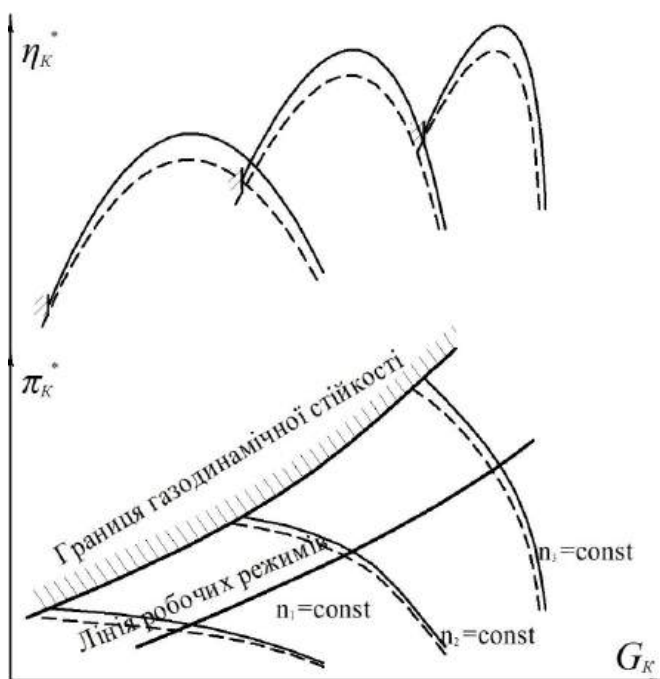


Рис. 2.4 – Базова и змінена характеристики компресора

### 2.1.3 Особливості моделювання конкретного двигуна на базі універсальної математичної моделі

*Склад незалежних змінних*

Склад незалежних змінних  $\vec{Q}$  моделі вибирається так, щоб забезпечити розрахунок всіх параметрів проточної частини у напрямку руху потоку. Для

моделювання об'єкта дослідження (2-вальний ТРДД) необхідні такі незалежні змінні: ступінь двоконтурності для поділу потоків у вентиляторі; два параметри, що визначають положення поточної точки на характеристиці кожного каскаду компресора (наприклад,  $n_{зв.к}$  і  $Z_k$ ); один параметр робочого процесу у камері згоряння (наприклад, температура газу перед турбіною); один параметр, що дозволяє визначити положення робочої точки на характеристиці турбіни, оскільки другий параметр відомий з розрахунку компресора (наприклад,  $\pi_T^*$ ); один параметр камери змішування (наприклад, статичний тиск камери змішування).

#### *Склад нев'язок*

Нев'язками, що відображають умови спільної роботи вузлів проточної частини, є:

- нев'язки між витратами повітря у внутрішньому контурі, визначеними за характеристиками різних каскадів компресора):

$$H_{G_i}(\vec{Q}) = \frac{G_{\text{вих.}i}(\vec{Q})}{G_{\text{вх.}i+1}(\vec{Q})} - 1, \quad (2.12)$$

- нев'язки між потужністю турбіни та компресора кожного каскаду:

$$H_N(\vec{Q}) = \frac{N_K(\vec{Q})}{N_T(\vec{Q}) \cdot \eta_{\text{мех}} - \Delta N} - 1, \quad (2.13)$$

де  $\Delta N$  – відбір потужності від цього ротора;

- нев'язки між значеннями наведеної витрати через сопловий апарат каскаду турбіни розрахованого за параметрами робочого тіла на вході в турбіну та визначеного за витратною характеристикою турбіни:

$$H_A(\vec{Q}) = \frac{A_{\text{Г.позр}}(\vec{Q})}{A_T(\vec{Q})} - 1, \quad (2.14)$$

- нев'язки між значеннями площі прохідного перерізу реактивного сопла, сопла зовнішнього та внутрішнього контурів на вході в камеру змішування – заданої та розрахованої за параметрами робочого тіла на вході в сопло:

$$H_{F_c}(\vec{Q}) = \frac{F_{C\text{розр}}(\vec{Q})}{F_c} - 1. \quad (2.15)$$

Якщо позначити  $n$  – число незалежних змінних, а  $L$  – число ступенів свободи двигуна (воно дорівнює числу керуючих впливів), то кількість перерахованих вище нев'язок для конкретного двигуна має дорівнювати  $(n-L)$ . Інші  $L$  нев'язок формуються за значеннями параметрів  $\vec{U}_p$ , які визначають режим роботи двигуна, заданих та розрахованих за поточними значеннями незалежних змінних  $\vec{Q}$ :

$$H_{p_i}(\vec{Q}) = \frac{U_{p_i\text{розр}}(\vec{Q})}{U_{p_i}} - 1, \quad i = 1, \dots, L. \quad (2.16)$$

Так, наприклад, для ТРДД типу АІ-222-25 з двовальним газогенератором та зі змішуванням потоків отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} H_{A_{\text{ТНТ}}}(\vec{Q}) &= \frac{A_{A_{\text{ТНТ}}\text{розр}}(\vec{Q})}{A_{A_{\text{ТНТ}}}(\vec{Q})} - 1 = 0; & H_{A_{\text{ТВТ}}}(\vec{Q}) &= \frac{A_{A_{\text{ТВТ}}\text{розр}}(\vec{Q})}{A_{A_{\text{ТВТ}}}(\vec{Q})} - 1 = 0; \\ H_{N_{\text{ВТ}}}(\vec{Q}) &= \frac{N_{\text{КВТ}}(\vec{Q})}{N_{\text{ТВТ}}(\vec{Q}) \cdot \eta_{\text{мех.ВТ}} - \Delta N_{\text{ВТ}}} - 1 = 0; & H_{F_{\text{СП}}}(\vec{Q}) &= \frac{F_{\text{СПрозр}}(\vec{Q})}{F_{\text{СП}}(\vec{Q})} - 1 = 0; \\ H_{F_c}(\vec{Q}) &= \frac{F_{C\text{розр}}(\vec{Q})}{F_c} - 1 = 0; & H_G(\vec{Q}) &= \frac{G_{\text{вих.В1}}(\vec{Q})}{G_{\text{вих.КВТ}}(\vec{Q})} - 1, & H_p(\vec{Q}) &= \frac{U_p(\vec{Q})}{U_{p.\text{зад}}} - 1 = 0, \end{aligned}$$

де  $\vec{Q} = [n_{\text{ВЗВ}} \ Z_{\text{В}} \ n_{\text{КВТЗВ}} \ Z_{\text{КВТ}} \ T_{\Gamma}^* \ \pi_{\text{ТВТ}}^* \ \pi_{\text{ТВ}}^* \ m \ p_{\text{ст.см}}]^T$  – вектор незалежних змінних.

*Склад змінних, що розраховуються*

Як випливає з аналізу наведених вище нев'язок, для їх визначення за заданим  $\vec{Q}$  потрібно розрахувати значення всіх основних параметрів робочого процесу. Тому практично всі необхідні вихідні параметри робочого процесу  $\vec{Y}$  визначаються автоматично під час розв'язання системи рівнянь (2.10). Виняток становить невелика кількість параметрів, що є похідними від параметрів робочого процесу (наприклад, сумарний ступінь підвищення тиску в компресорі, тяга, різні

комплекси параметрів, що використовуються при керуванні перехідними режимами та діагностуванні та ін.); називатимемо їх додатковими параметрами.

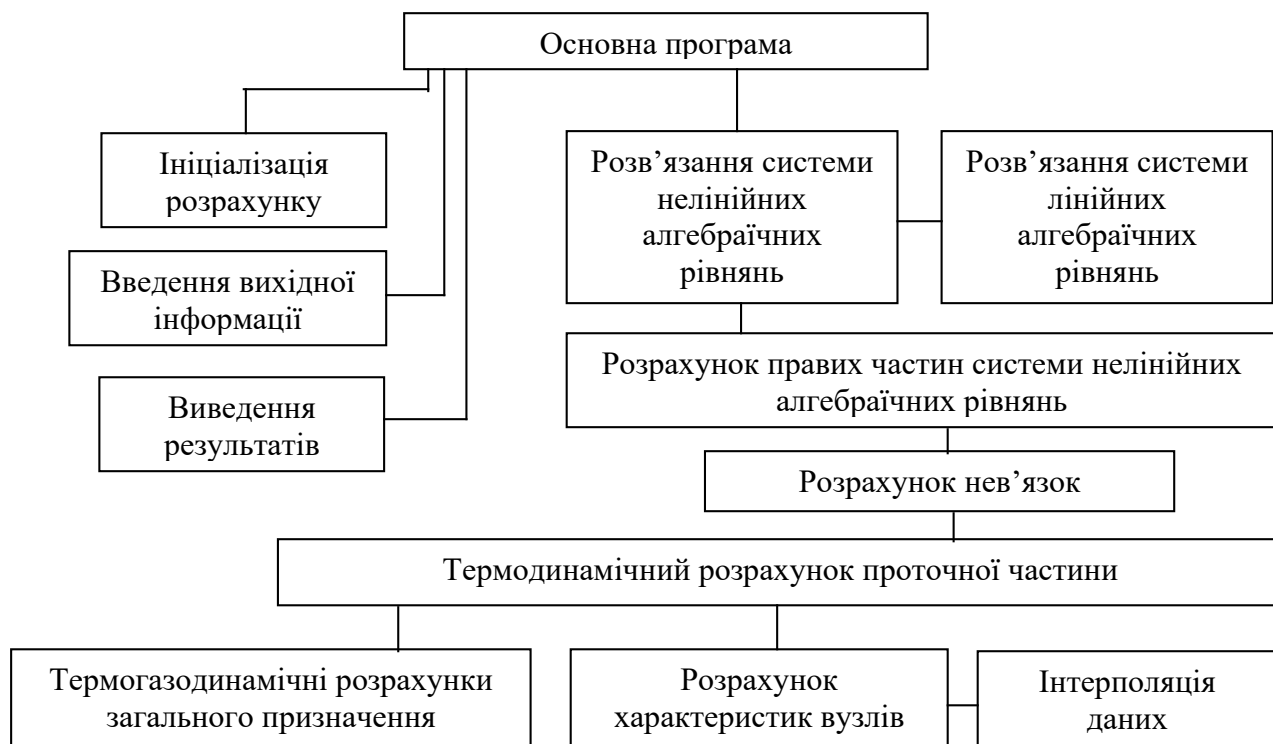


Рис. 2.5 - Структура програмного комплексу, що реалізує поелементну математичну модель усталених режимів ГТД

#### 2.1.4 Нелінійна повузлова динамічна модель ГТД

При зміні керуючих чи зовнішніх впливів порушуються умови спільної роботи вузлів, унаслідок чого двигуні виникають перехідні процеси. Причини, які призводять до того, що ці процеси мають кінцеву тривалість у часі, називатимемо динамічними факторами.

Форма нелінійної повузлової динамічної моделі як алгоритму визначення значень параметрів ГТД на перехідних режимах має такий вигляд:

$$\vec{Y} = F(\vec{Y}_0, \vec{U}_p, \vec{U}_n, \vec{v}, t), \quad (2.17)$$

де  $\vec{Y}_0$  – значення параметрів на початковому усталеному режимі.

При формуванні цього алгоритму доцільно в якості основи використовувати представлений вище алгоритм розрахунку параметрів ГТД на усталених режимах і

відповідне програмне забезпечення (див. рис. 2.4) з урахуванням тих змін, які вносять динамічні фактори в рівняння робочого процесу і характеристики вузлів.

Динамічна модель турбореактивного двигуна (ТРД) забезпечує визначення зміни основних параметрів у часі при заданій зміні режиму роботи, польотних умов або інших діючих факторів.

Зміна режиму роботи може бути задана як зміна за часом параметра, що визначають режим роботи двигуна:  $P_p = P_p(t)$ .

Зміна польотних умов може бути задана як зміна за часом тиску та температури атмосферного повітря, а також швидкості польоту. Зміна діючих факторів може бути задана як зміна за часом відборів повітря й потужності від двигуна.

Ключовим у формуванні динамічної моделі є відокремлення факторів, що визначають динаміку двигуна, тобто запізнення зміни вихідних параметрів відносно зміни вхідних.

У ТРД до таких факторів належать [1]:

- Інерція роторів, яка уповільнює зміну частот обертання по відношенню до зміни прикладених до роторів крутних моментів;
- Газодинамічна інерція: цей ефект пов'язаний з акумуляцією маси та енергії робочого тіла у внутрішніх об'ємах проточної частини двигуна. Газодинамічна інерція відображає кінцеву швидкість масообмінних процесів у порожнинах двигуна;
- Затримка тепловиділення: після подачі палива до камери згоряння має пройти певний час, перш ніж теплова енергія почне підводитися до робочого тіла. Це зумовлено скінченною тривалістю послідовних фізичних процесів: диспергування крапель палива, їх випаровування, змішування з повітрям та ініціації горіння. У фазі займання процес іде з низьким тепловиділенням, і лише після повного розвитку факела виникає стійке горіння. Тому існує часовий проміжок між зміною подачі палива та відповідною реакцією температури в камері згоряння і далі - у всій проточній частині;

- Теплова інерція конструкції: цей фактор стосується зміни температури масивних конструктивних елементів (дисків, корпусів, валів) внаслідок теплообміну з робочим тілом. Такі елементи мають значну теплову ємність, і тому швидка зміна температури робочого тіла не викликає миттєвої зміни температури конструктивних елементів.

Аналіз протікання зазначених процесів дозволяє зробити висновок, що газодинамічна інерція та затримка тепловиділення мають дуже коротку тривалість — зазвичай не перевищують кількох десятків мілісекунд. Теплова інерція, хоч і призводить до тривалих процесів, але змінює параметри робочого процесу незначно. Тому при побудові динамічної моделі доцільно враховувати передусім інерційність ротора, яка істотно впливає на зміну частоти обертання ротора.

При цьому вважається, що характеристики вузлів двигуна (залежності ступеня підвищення тиску, витрати повітря, ККД тощо) можуть використовуватися не лише в умовах усталеного режиму, а й у перехідних.

На основі цього положення рівняння балансу потужності, яке в статичній моделі виконується як тотожність, у динамічному моделі порушується через інерційність ротора. Воно має бути замінене на диференціальне рівняння руху, яке описує зміну кутової швидкості як функції від надлишкового крутного моменту:

$$\frac{\pi}{30} J_{\text{HT}} \dot{n}_{\text{HT}} = \frac{N_{\text{ТHT}} \eta_{\text{мехHT}} - N_{\text{КHT}}}{n_{\text{HT}}}; \quad \frac{\pi}{30} J_{\text{BT}} \dot{n}_{\text{BT}} = \frac{N_{\text{ТBT}} \eta_{\text{мехBT}} - N_{\text{КBT}}}{n_{\text{BT}}}. \quad (2.18)$$

## 2.2 Багаторежимна швидкодійна квізілінійна модель

Як показано в розд. 1, використовувані ММ можна поділити на два класи: статичні й динамічні. Статичні моделі забезпечують визначення параметрів робочого процесу на усталених режимах роботи двигуна. Основною статичною моделлю є розглянута вище нелінійна повузлова ММ, що базується на розв'язанні рівнянь робочого процесу. Вони використовуються для вирішення наступних основних завдань:

- термогазодинамічні розрахунки під час проектування двигуна;

- визначення дросельних, висотних, швидкісних та кліматичних характеристик двигуна;
- розрахунок значень параметрів у справному (нормальному) стані при діагностуванні двигуна;
- визначення впливу різних факторів (змін характеристик вузлів, геометричних параметрів, відборів повітря та потужності, витоків та інших несправностей проточної частини) на параметри робочого процесу двигуна;
- розпізнавання стану проточної частини при діагностуванні.

Динамічні моделі забезпечують визначення параметрів робочого процесу в перехідних режимах, обумовлених зміною зовнішніх та керуючих впливів, а також інших факторів. Областями застосування динамічних моделей є:

- визначення характеристик прискорення та вповільнення при проектуванні двигуна [1];
- імітація динамічних властивостей двигуна при аналізі систем автоматичного керування [2];
- алгоритми керування двигуном [3, 4];
- алгоритми визначення невимірюваних параметрів двигунів для керування та контролю технічного стану, а також моніторингу ресурсу [5, 6];
- моделювання параметрів двигуна у складі напівнатурних стендів та тренажерних комплексів [7].

У цьому підрозділі сформульовано вимоги до відповідних динамічних моделей ГТД, і запропоновано структуру ММ, яка задовольняє ці вимоги, а в наступних підрозділах розглянуто практичну реалізацію моделей двоконтурного турбореактивного двигуна зі змішуванням потоків і турбовального двигуна.

### **2.2.1 Вимоги до динамічних моделей двигунів**

Багато з перелічених областей вимагають застосування динамічних моделей у реальному часі. Аналіз літературних джерел, результати якого наведено в розділі 1, дозволив сформулювати такі вимоги до відповідних динамічних моделей:

1. Вхідними параметрами повинні бути керуючі впливи на двигун (витрата основного та форсажного палива, площа критичного перерізу реактивного сопла, положення регульованих направляючих апаратів та клапанів перепускання повітря та ін.), відбори повітря та потужності, параметри атмосферного повітря, швидкість польоту та інші параметри, що впливають.
2. Вихідними параметрами мають бути:
  - регульовані та вимірювані параметри двигуна, що обмежуються (частоти обертання роторів, температура газу на виході з турбіни або між її каскадами, тиск на виході з компресора і вентилятора, температура на вході до компресора високого тиску, тиск на виході з турбіни, крутильний момент у випадку турбовального або турбогвинтового двигуна);
  - тяга (для турбореактивних двигунів), потужність (для турбовальних двигунів) або еквівалентна потужність (для турбогвинтових двигунів);
  - обмежувані параметри, що не вимірюються (температура газу перед турбіною, коефіцієнти надлишку повітря в основній і форсажній камерах згоряння, запаси стійкості каскадів компресора).
3. ММ повинна забезпечувати статичну точність, рівень якої визначається сферою застосування ММ. Так, наприклад, при використанні ММ в алгоритмах керування похибка моделювання повинна бути істотно меншою за необхідну похибку керування на сталих режимах. При використанні ММ для розрахунку невимірюваних параметрів складова похибки визначення невимірюваного параметра на сталих режимах, обумовлена похибкою моделі, повинна бути істотно меншою за допустиму похибку визначення цього параметра.

4. ММ повинна забезпечувати динамічну точність, рівень якої визначається сферою застосування ММ. Так, наприклад, при використанні ММ в алгоритмах керування динамічна похибка моделювання повинна бути суттєво меншою за необхідну похибку керування на перехідних режимах. При використанні ММ для розрахунку параметрів, що не вимірюються, складова похибки визначення невимірюваного параметра на перехідних режимах, обумовлена похибкою моделі, повинна бути істотно меншою за допустиму динамічну похибку визначення цього параметра.
5. ММ повинна мати просту структуру, що забезпечує можливість її використання в системах реального часу, в тому числі й у бортових системах.
6. ММ повинна мати супроводжуючі програмно-методичні засоби, що забезпечують її зв'язок і вихідною нелінійною повузловою моделлю й дозволяють коригувати параметри динамічної ММ при зміні вихідної ММ. Це особливо важливо тому, що при супроводі розробки, випробувань та експлуатації двигуна його розробник використовує саме нелінійну повузлову ММ і змінює її відповідно до змін, що вносяться в двигун.
7. ММ повинна мати здатність до адаптації, тобто зміни (налаштування) її параметрів за зміни режиму роботи двигуна, зовнішніх умов, технічного стану й інших факторів.
8. Програмна реалізація ММ для імітації двигуна має виконуватися за допомогою універсальних програмних засобів, що використовуються в галузі.
9. Програмна реалізація ММ для бортового застосування у складі алгоритмів керування та діагностування повинна мати захист від некоректного функціонування, яке може бути обумовлене введенням некоректних вхідних параметрів.

### 2.2.2 Загальна структура моделі

Розвиток обчислювальних засобів формує можливості для використання нелінійних динамічних повузлових ММ, заснованих на вирішенні рівнянь спільної роботи вузлів, які можуть забезпечити найкращу точність в широкому діапазоні умов застосування двигуна. Однак перераховані вище вимоги 5 і 9 простіше задовольнити, використовуючи ММ у формі комбінації нелінійної статичної моделі, що апроксимує статичні характеристики двигуна, та динамічної моделі, яка описує відхилення параметрів від статичних значень. Динамічна модель є лінійною за структурою й представлена як система рівнянь у просторі станів. Але коефіцієнти цієї моделі залежать від параметрів, що визначають умови роботи двигуна, саме це й обумовлює нелінійність цієї моделі. Такі моделі широко застосовують у практиці моделювання двигунів [1, 2, 8].

Таким чином, параметри двигуна  $\vec{Z}$  представляються у вигляді суми статичної  $\vec{Z}_{\text{ст}}$  і динамічної  $\Delta\vec{Z}$  складових:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{\text{ст}} + \Delta\vec{Z} \quad (2.19)$$

Статична складова моделюється як

$$\vec{Z}_{\text{ст}} = F(\vec{U}), \quad (2.20)$$

де  $\vec{U}$  – вектор вхідних параметрів, до яких відносяться керуючі та збурюючі дії, а також умови польоту.

Динамічна складова подається у вигляді комбінації параметрів стану  $\Delta\vec{X}$  та додаткових параметрів  $\Delta\vec{Y}$ :  $\Delta\vec{Z} = \begin{bmatrix} \Delta\vec{X} \\ \Delta\vec{Y} \end{bmatrix}$  і є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\vec{X}} &= A\Delta\vec{X} + B\Delta\vec{U}; \\ \Delta\vec{Y} &= C\Delta\vec{X} + D\Delta\vec{U}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де  $A, B, C, D$  – матриці, залежні від режиму роботи двигуна й зовнішніх умов.

Загальна структура ММ, що відповідає виразам (2.19)-(2.21), представлена на рис. 2.6, де  $\vec{X}_0$  – вектор початкових умов для розв’язку диференціальних рівнянь моделі (2.21).

При деталізації цієї моделі виникає безліч варіантів, тому вибір раціонального варіанта є складним завданням, розв’язання якого представлено нижче для найпоширенішого типу газотурбінних двигунів – турбореактивного двоконтурного (ТРДД).

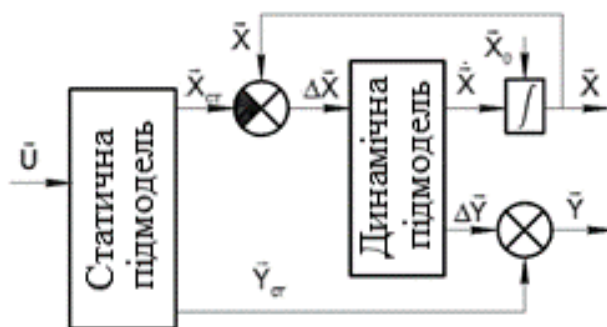


Рис. 2.6 - Загальна структура ММ двигуна

## 2.2 Модель двовального ТРДД

Розглянемо двигун типу АІ-322, схема та параметри якого представлені на рис. 2.7.

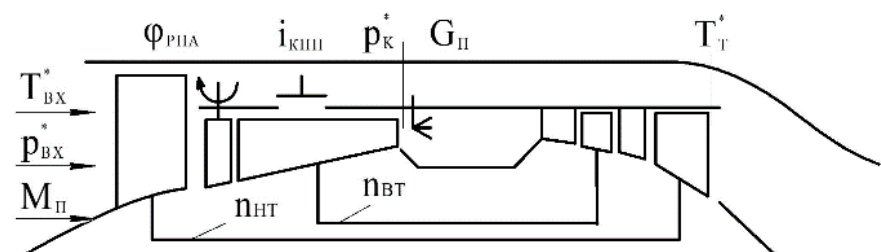


Рис. 2.7 - Схема двовального ТРДД зі змішуванням потоків

Вектори вхідних та вихідних параметрів мають вигляд

$$\vec{U} = [G_{\Pi} \quad j_{\text{PNA}} \quad i_{\text{KPP}} \quad p_{\text{VX}}^* \quad T_{\text{VX}}^* \quad M_{\Pi}]^T; \quad \vec{Z} = [n_{\text{HD}} \quad n_{\text{VD}} \quad p_{\text{K}}^* \quad T_{\text{T}}^* \quad P]^T,$$

де  $G_{\Pi}$  – витрата палива;

$\varphi_{\text{PNA}}$  – кутове положення регульованого напрямного апарата компресора високого тиску (КВТ);

$i_{\text{КПП}}$  – положення клапана перепуску повітря КВТ;

$p_{\text{вх}}^*$ ,  $T_{\text{вх}}^*$  – тиск та температура гальмування на вході у двигун;

$M_{\text{п}}$  – число Маха польоту;

$n_{\text{НТ}}$ ,  $n_{\text{ВТ}}$  – частоти обертання роторів низького та високого тиску;

$p_{\text{к}}^*$  – тиск на виході з компресора;

$T_{\text{т}}^*$  – температура на виході з турбіни;

$P$  – тяга.

### **2.2.1 Статична підмодель**

При реалізації статичної моделі необхідно розглянути можливість зменшення складності ММ, а також забезпечення точності та інших перерахованих вище вимог. Для цього необхідно проаналізувати склад аргументів та раціонально врахувати їх вплив на характеристики двигуна, а також вибрати структуру та параметри залежностей, на яких заснована ММ.

Перш за все, необхідно врахувати, що в двигуні, який розглядається, клапани перепуску повітря КВТ можуть займати тільки два положення – відкрите і закрите. Тому, якщо немає необхідності в детальному й точному моделюванні зміни параметрів двигуна при відкритті та закритті клапанів, можна вважати, що час зміни положення клапанів дуже малий порівняно з часом перехідних процесів, обумовлених інерцією роторів. Тоді статична й динамічна моделі двигуна представляються як дві підмоделі – одна для відкритого стану КПП, інша – для закритого.

Аналогічне рішення можна ухвалити, розглянувши вплив положення РНА. Зазвичай програма регулювання РНА формується з використанням зведеної частоти обертання ротора як аргументу. При низьких значеннях зведеної частоти РНА не змінюється й має максимальне значення; при високих значеннях зведеної частоти РНА також не змінюється й має мінімальне значення, а в області помірних частот обертання РНА плавно змінюється в залежності від зведеної частоти обертання. Проблема формування ММ із урахуванням положення РНА як

незалежного параметра, що безперервно змінюється, ускладнюється тим, що характеристика КВТ зазвичай відома тільки при номінальній програмі регулювання РНА, а також, у кращому випадку, при невеликих відхиленнях від цієї програми. Для вирішення цієї проблеми запропоновано сформуванню статичну ММ при номінальній програмі регулювання РНА, а як аргумент динамічної моделі використовувати відхилення від номінальної програми РНА. Тоді статична й динамічна підмоделі подаються у вигляді трьох локальних моделей, що відповідають максимальному фіксованому положенню РНА (низькі режими), регульованому положенню РНА (робочі режими) та мінімальному фіксованому положенню РНА (високі режими).

Отже, положення РНА й КПП не є аргументами залежностей, на яких ґрунтуються статична й динамічна підмоделі – вони лише використовуються для визначення області режимів роботи двигуна, для котрих слід обрати локальну модель. Загалом, необхідно шість таких локальних моделей, проте для конкретних програм регулювання КПП та РНА кількість реальних областей може бути меншою. Так, наприклад, для двигуна, що розглядається, було можливим виключити з розгляду області з відкритими КПП і мінімальним фіксованим положенням РНА.

Наступним завданням формування статичної моделі є вибір параметрів, що визначають режим роботи двигуна. У прикладі такий параметр один, і у вихідному варіанті моделі це параметр керування – витрата палива. Однак відомо, що характеристики двигуна є оборотними – в даному випадку будь-який параметр робочого процесу може бути використаний як аргумент, і тоді решта параметрів (у тому числі витрата палива) є вихідними. При цьому може виникнути проблема, обумовлена тим, що розрахована витрата палива може виявитися відмінною від витрати, заданої системою керування. Проте аналіз рис. 2.5 показує, що цю проблему можна вирішити, розраховуючи відхилення витрати палива так, як на рис. 2.5 показано для параметрів стану  $\vec{X}$ , і задавати це відхилення витрати палива як вхідний параметр динамічної моделі. Отримавши свободу вибору параметра-аргументу статичної моделі, що визначає режим роботи двигуна, ми обрали як

аргумент параметр, що забезпечує найкращу точність ММ у разі її визначення чи уточнення експериментальної інформації –  $n_{\text{ВТ}}$ .

Ще одне завдання, яке необхідно вирішити – це врахування впливу показаних на рис. 2.6 параметрів зовнішніх умов  $p_{\text{ВХ}}^*$ ,  $T_{\text{ВХ}}^*$ ,  $M_{\text{П}}$ . З теорії двигунів відомо, що число Маха може самостійно впливати на параметри двигуна, тому його необхідно враховувати як аргумент статичної характеристики. Однак для двигуна, який використовується в дозвукових умовах польоту, а також при малих надзвукових швидкостях, для вирішення багатьох завдань достатньо враховувати лише тиск і температуру гальмування. У цьому випадку швидкість польоту враховується опосередковано – у вигляді динамічних складових тиску та температури на вході.

Вплив температури та тиску на вході в двигун на статичні характеристики можна врахувати, використовуючи формули зведення. Для аналізованих параметрів ТРДД вони мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} K_{\text{T}} &= \frac{T_0}{T_{\text{ВХ}}^*}; K_{\text{P}} = \frac{p_0}{p_{\text{ВХ}}^*}; n_{\text{ЗВ}} = n \cdot \sqrt{K_{\text{T}}}; p_{\text{КЗВ}}^* = p_{\text{К}}^* \cdot K_{\text{P}}; \\ T_{\text{TЗВ}}^* &= T_{\text{T}}^* \cdot K_{\text{T}}; P_{\text{ЗВ}} = P \cdot K_{\text{P}}; G_{\text{ПЗВ}} = G_{\text{П}} \cdot K_{\text{P}} \cdot \sqrt{K_{\text{T}}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де  $p_0 = 101322$  Па,  $T_0 = 288,16$  К – параметри стандартних атмосферних умов.

Формули зведення використовуються в такий спосіб. Вхідний параметр, що визначає режим роботи двигуна (витрата палива), зводиться до стандартних умов і надходить на вхід до моделі. Алгоритм, що реалізує статичну ММ, оперує лише зі зведеними параметрами. Тому, щоб отримати на виході з моделі фізичні значення параметрів, виконується зворотне перетворення (розведення).

Структуру статичної підмоделі представлено на рис. 2.7.

### 2.2.2 Динамічна підмодель

Особливістю формування динамічної моделі у складі структури, показаної на рис. 2.7 із урахуванням вибору частоти обертання ротора ВТ як аргументу статичної ММ є те, що відхилення цього параметра від статичного значення дорівнює нулю на всіх режимах роботи двигуна. Це спрощує динамічну ММ.

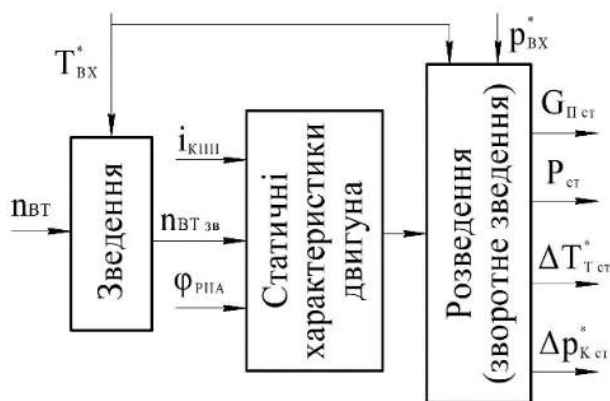


Рис. 2.7 - Структура статичної підмоделі

Розглянемо врахування впливу зовнішніх умов у динамічній ММ. Характерний темп зміни висоти та швидкості польоту не перевищує темпу зміни частот обертання роторів та інших параметрів робочого процесу. Тому немає потреби враховувати зовнішні умови у вигляді окремих входних параметрів динамічної моделі. Проте необхідно врахувати їх вплив на коефіцієнти лінійної динамічної моделі – елементи матриць  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Як і у разі статичної моделі, це можна зробити з використанням формул зведення. Запишемо систему рівнянь (3) поелементно:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_{HT} &= a_{11}\Delta n_{HT} + a_{12}\Delta n_{BT} + b_{11}\Delta G_{п} + b_{12}\Delta\varphi_{РПА}; \\
 \dot{n}_{BT} &= a_{21}\Delta n_{HT} + a_{22}\Delta n_{BT} + b_{21}\Delta G_{п} + b_{22}\Delta\varphi_{РПА}; \\
 \Delta p_{К}^* &= c_{11}\Delta n_{HT} + c_{12}\Delta n_{BT} + d_{11}\Delta G_{п} + d_{12}\Delta\varphi_{РПА}; \\
 \Delta T_{Т}^* &= c_{21}\Delta n_{HT} + c_{22}\Delta n_{BT} + d_{21}\Delta G_{п} + d_{22}\Delta\varphi_{РПА}; \\
 \Delta P &= c_{31}\Delta n_{HT} + c_{32}\Delta n_{BT} + d_{31}\Delta G_{п} + d_{32}\Delta\varphi_{РПА},
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

і, доповнивши вирази (2.22) формулою зведення прискорення ротора  $\dot{n}_{зв} = \dot{n} \cdot K_p$ , перетворюємо кожне рівняння так, щоб замість фізичних значень параметрів робочого процесу отримати зведені значення (2.22):

$$\begin{aligned}
\dot{n}_{\text{HT } 3\text{B}} &= a_{11} \Delta n_{\text{HT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + a_{12} \Delta n_{\text{BT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + b_{11} \Delta G_{\text{II } 3\text{B}} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + b_{12} \Delta \varphi_{\text{PHA}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*}; \\
\dot{n}_{\text{BT } 3\text{B}} &= a_{21} \Delta n_{\text{HT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + a_{22} \Delta n_{\text{BT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + b_{21} \Delta G_{\text{II } 3\text{B}} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + b_{22} \Delta \varphi_{\text{PHA}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*}; \\
\Delta p_{\text{K } 3\text{B}}^* &= c_{11} \Delta n_{\text{HT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + c_{12} \Delta n_{\text{BT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + d_{11} \Delta G_{\text{II } 3\text{B}} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + d_{12} \Delta \varphi_{\text{PHA}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*}; \\
\Delta T_{\text{T } 3\text{B}}^* &= c_{21} \Delta n_{\text{HT } 3\text{B}} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + c_{22} \Delta n_{\text{BT } 3\text{B}} \sqrt{\frac{T_0}{T_{\text{BX}}^*}} + d_{21} \Delta G_{\text{II } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + d_{22} \Delta \varphi_{\text{PHA}} \frac{T_0}{T_{\text{BX}}^*}; \\
\Delta P_{3\text{B}} &= c_{31} \Delta n_{\text{HT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + c_{32} \Delta n_{\text{BT } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + d_{31} \Delta G_{\text{II } 3\text{B}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*} \sqrt{\frac{T_{\text{BX}}^*}{T_0}} + d_{32} \Delta \varphi_{\text{PHA}} \frac{p_0}{p_{\text{BX}}^*},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

звідки впливають вирази для зведення коефіцієнтів лінійної динамічної моделі до стандартних атмосферних умов:

$$\begin{aligned}
a_{ij \text{ 3B}} &= a_{ij} \frac{K_p}{K_T}; \quad b_{11 \text{ 3B}} = \frac{b_{11}}{K_T}; \quad b_{12 \text{ 3B}} = b_{12} \cdot K_p; \quad b_{21 \text{ 3B}} = \frac{b_{21}}{K_T}; \quad b_{22 \text{ 3B}} = b_{22} \cdot K_p; \\
c_{11 \text{ 3B}} &= c_{11} \frac{K_p}{K_T}; \quad c_{12 \text{ 3B}} = c_{12} \frac{K_p}{K_T}; \quad d_{11 \text{ 3B}} = \frac{d_{11}}{K_T}; \quad d_{12 \text{ 3B}} = d_{12} \cdot K_p; \quad c_{21 \text{ 3B}} = c_{21} \cdot K_T; \\
c_{22 \text{ 3B}} &= c_{22} \cdot K_T; \quad d_{21 \text{ 3B}} = d_{21} \frac{K_T}{K_p}; \quad d_{22 \text{ 3B}} = d_{22} \cdot K_T; \quad c_{31 \text{ 3B}} = c_{31} \frac{K_p}{K_T}; \quad c_{32 \text{ 3B}} = c_{32} \frac{K_p}{K_T}; \quad d_{31 \text{ 3B}} = d_{31} \frac{K_p}{K_T}; \\
d_{32 \text{ 3B}} &= d_{32} \cdot K_p.
\end{aligned}$$

Структуру динамічної підмоделі представлено рис. 2.8.

### 2.2.3 Організація взаємодії підмоделей і програмна реалізація

Детальну структуру ММ двигуна, складеної з урахуванням наведених вище особливостей, показано на рис. 2.9.

Блок початкових умов забезпечує початок процесу моделювання з будь-якого режиму, заданого початковими значеннями витрати палива, а також положення РНА і КПП. Надалі поточні значення визначаються алгоритмами, які перебувають поза ММ двигуна, і надходять на вхід у статичну й динамічну підмоделі, де вони

використовуються лише для вибору поточного діапазону режимів, в якому необхідно визначати коефіцієнти моделі.

Відповідно до перелічених вимог до програмної реалізації, платформою для програмної реалізації моделі було обрано середовище Matlab Simulink, яке широко використовується в галузі дослідження ГТД та їх систем автоматичного керування [2, 3]. Загальний вигляд інтерфейсу моделі показано на рис. 2.10.

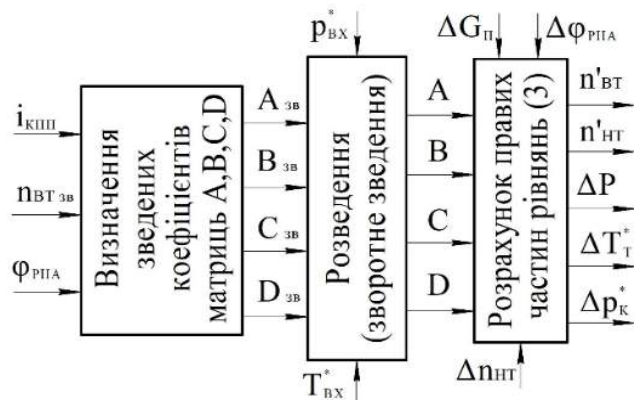


Рис. 2.8 - Структура динамічної підмоделі

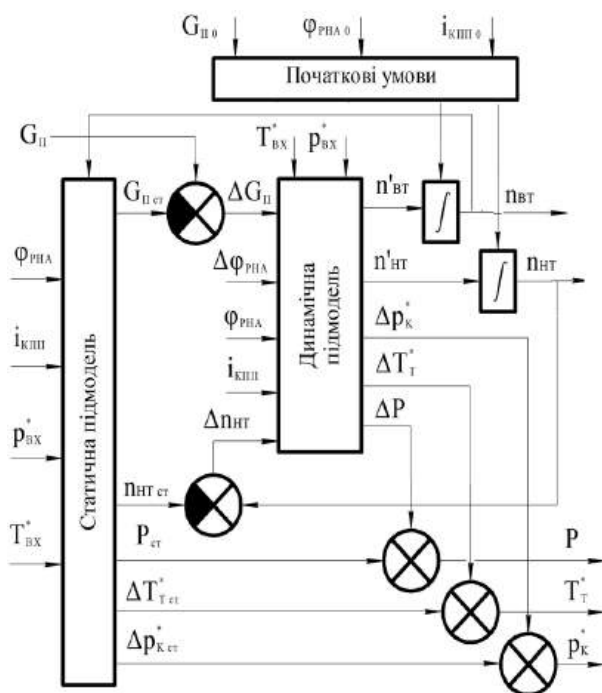


Рис. 2.9 - Деталізована структура ММ двигуна

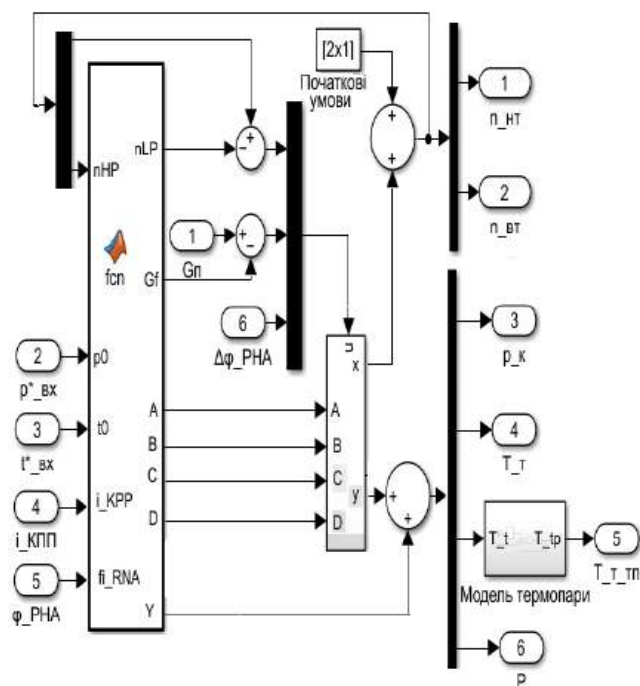


Рис. 2.10 - Вигляд інтерфейсу моделі, реалізованої в Matlab Simulink

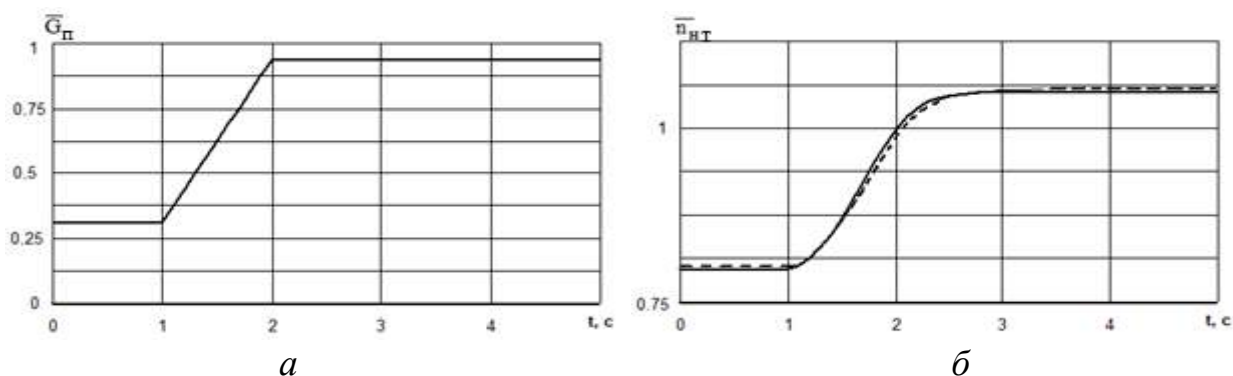
### 2.2.4 Верифікація моделі ТРДД

Перевірку працездатності моделі та оцінку її точності виконано в два етапи. На першому етапі виконано порівняння результатів моделювання перехідного процесу по витраті палива, отриманого за допомогою представленої моделі, з результатами моделювання з використанням вихідної нелінійної повузлової моделі. На другому етапі виконано порівняння з результатами стендових випробувань двигуна в повному діапазоні режимів роботи.

На рис. 2.11 представлено дані, отримані на першому етапі. Використано нормовані значення параметрів:  $\bar{Y} = Y/Y_0$ , де  $Y$  – фізичне значення,  $Y_0$  – значення параметра, прийняте як базове. Пунктирна лінія відповідає нелінійній ММ, суцільна лінія – швидкодійній ММ.

Показані на рис. 2.11,  $e$  значення запасу стійкості вентилятора моделювалися відповідно до представленої вище методики як одна з компонент вектору  $\bar{Y}$ . Представлені результати показують, що результати моделювання практично співпадають, що свідчить про високий ступінь відповідності запропонованої швидкодійної моделі й базової нелінійної повузлової моделі двигуна.

Для перевірки розробленої ММ на реальній інформації використано результати стендових випробувань двигуна. При цьому на вхід до моделі подавались значення витрати палива, а також положення РНА й КПВ, зареєстровані під час випробувань. На рис. 2.12 показано зміну витрати палива й частоти обертання ротора високого тиску). Суцільна лінія відповідає результатам випробувань, а пунктирна – результатам моделювання.



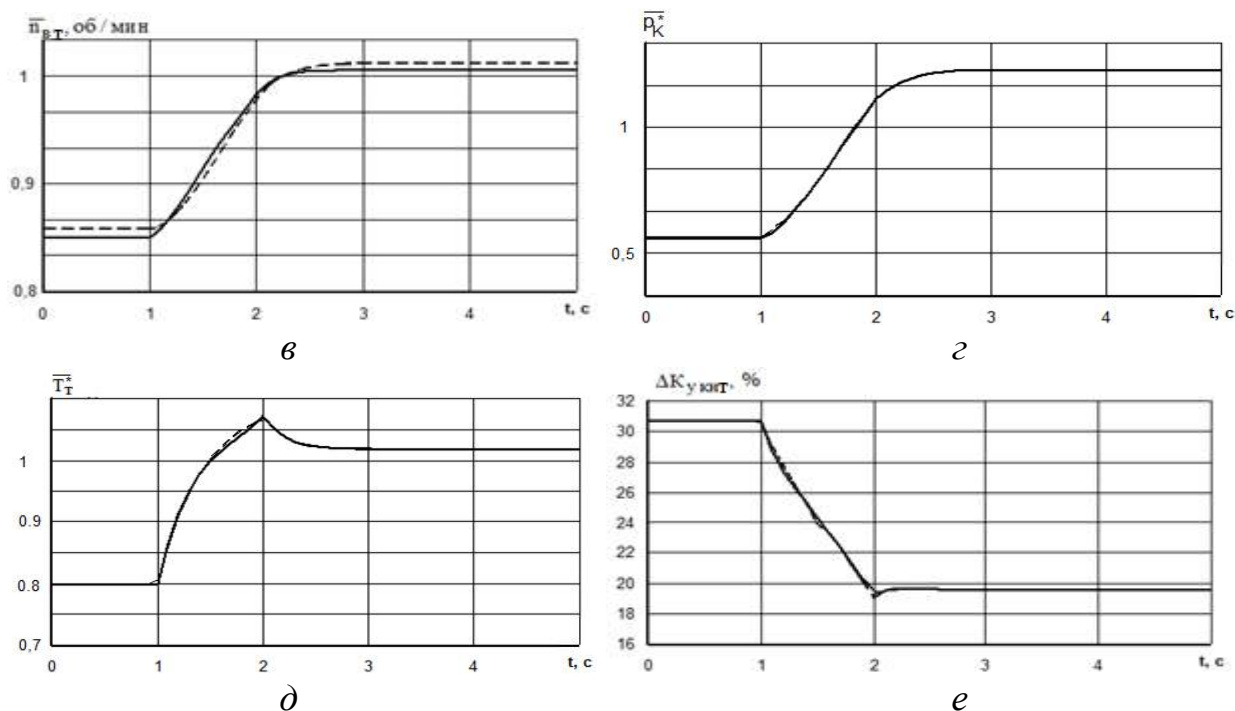


Рис. 2.11 - Результати моделювання перехідного процесу з використанням розробленої ММ і вихідної нелінійної повузлової динамічної ММ:

*a* – витрата палива; *б* – частота обертання ротора низького тиску;  
*в* - частота обертання ротора високого тиску; *г* – тиск на виході з компресора;  
*д* – запас стійкості вентилятора

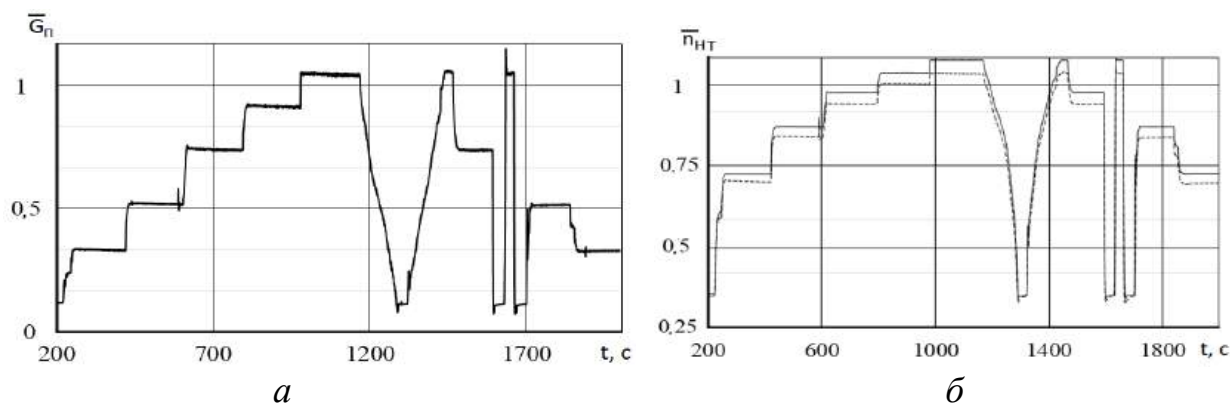


Рис. 2.12. Зміна параметрів під час випробувань:

*a* – витрата палива; *б* – частота обертання вентилятора

Рис. 2.12 дає лише загальне уявлення про зміну параметрів. Для більш детального розгляду на рис. 2.13 представлено значення відносних нормованих похибок  $\delta\bar{Y}$ , які визначено наступним чином:

$$\delta\bar{Y} = \frac{Y_{\text{мод}} - Y_{\text{вим}}}{Y_0},$$

де  $Y_{\text{мод}}$  – значення, отримане в результаті моделювання;

$Y_{\text{вим}}$  – значення, отримане під час випробувань;

$Y_0$  – значення, прийняте як базове.

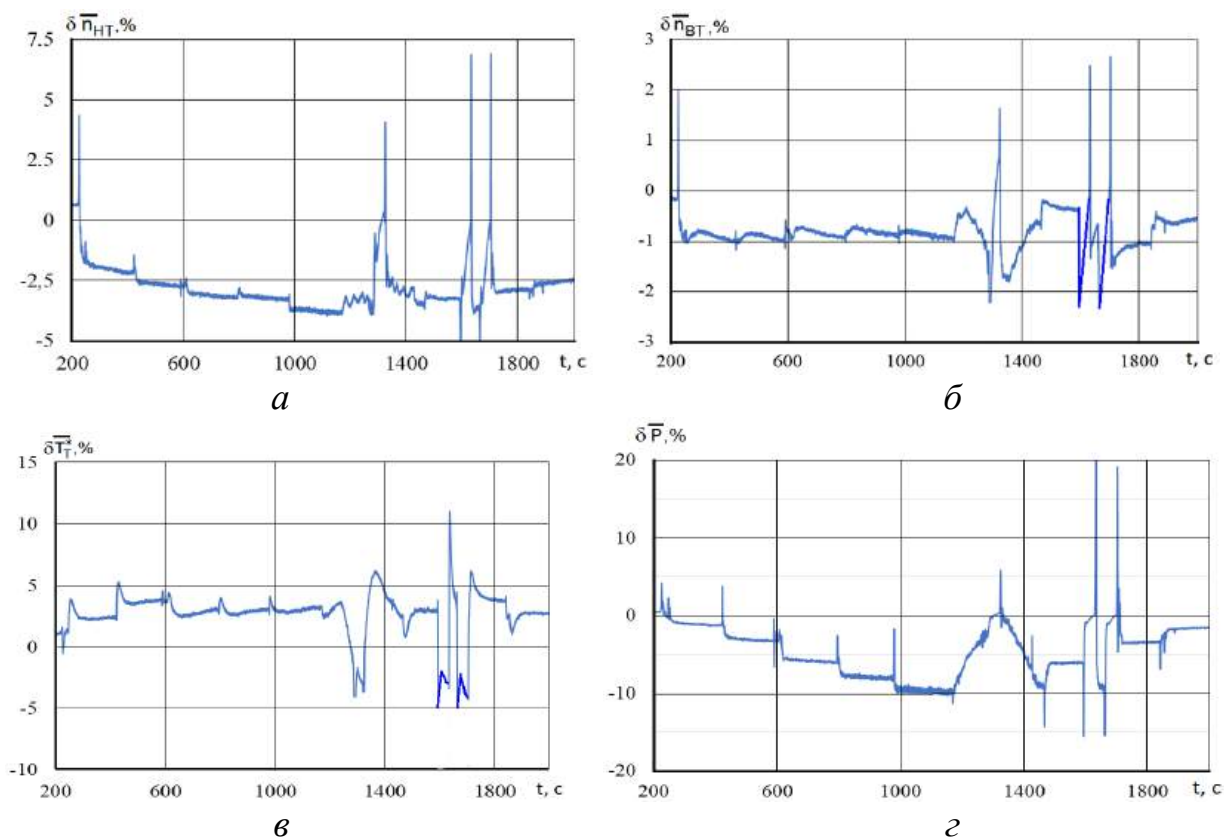


Рис. 2.13 - Значення відносних нормованих похибок моделювання на

випробувальному циклі:  $a$  –  $n_{нт}$ ;  $б$  –  $п_{вт}$ ;  $в$  –  $T_{т}^*$ ;  $г$  –  $P$

Аналіз зміни похибок моделювання у випробувальному циклі показує, що значний рівень відмінностей між модельною й реальною інформацією зумовлено похибками моделювання на усталених режимах. Це пояснюється тим, що статична підмодель, що входить до складу швидкодійної ММ двигуна, налагоджена за результатами моделювання, отриманими з використанням нелінійної повузлової ММ, а характеристики реального двигуна мають суттєві індивідуальні відмінності. Ці похибки легко виключаються шляхом налаштування статичної підмоделі за експериментальними даними, отриманими під час випробувань на усталених режимах.

Друга складова похибок, представлених на рис. 2.13 – це динамічні похибки, що виникають на перехідних режимах (головним чином – на їх початку). Короткочасний характер цих похибок можна пояснити впливом факторів, які не

ураховано під час формування швидкодійної ММ, наприклад, динамікою газодинамічних об'ємів проточної частини, затримкою тепловиділення в камері згоряння або впливом теплообміну між робочим тілом і конструктивними елементами.

Для більш детального аналізу на рис. 2.14 наведено значення параметрів, отримані під час прийомистості.

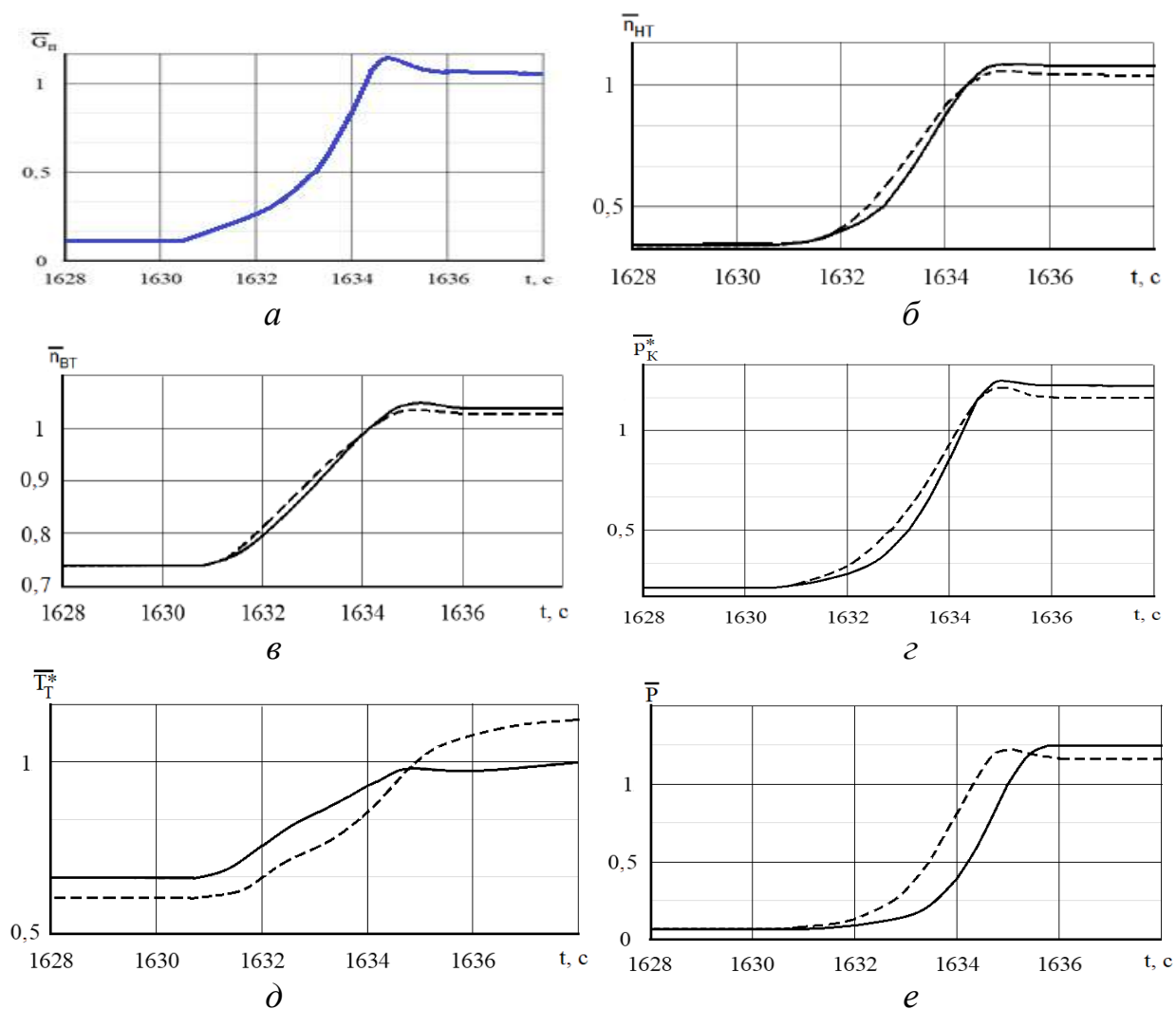


Рис. 2.14. Значення параметрів, отримані під час прийомистості:

$a$  – витрата палива;  $b$  -  $\eta_{NT}$ ;  $v$  –  $\eta_{BT}$ ;  $z$  –  $p_K^*$ ;  $d$  –  $T_T^*$ ;  $e$  –  $P$

Відповідні значення похибок наведено на рис. 2.15.

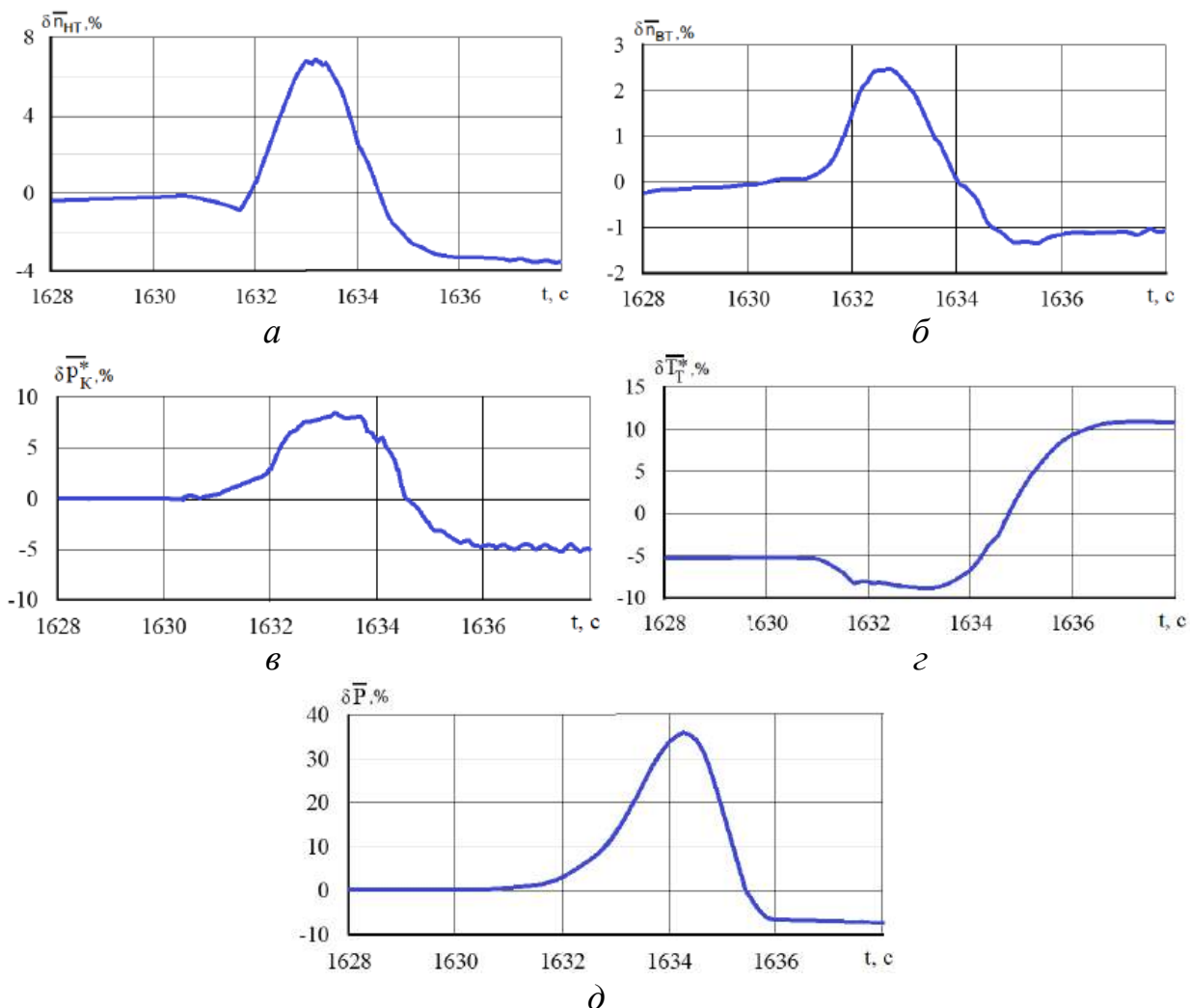


Рис. 2.15 - Похибки моделювання параметрів під час прийомистості:

$$a - n_{NT}; \text{ б} - n_{BT}; \text{ в} - p_K^*; \text{ г} - T_T^*; \text{ д} - P$$

При аналізі отриманих результатів необхідно урахувати вплив статичних похибок. Видно, що для всіх розглянутих параметрів, крім температури, статична модель на вихідному режимі є достатньо точною, а на кінцевому режимі її слід скоригувати. Тоді стане очевидним, що в початковій стадії перехідні процеси реального двигуна проходять повільніше, ніж модельні дані, і це є фактором, який визначає динамічну похибку. Затримка складає для частоти обертання ротора ВТ 0,2 с, а для частоти обертання ротора НТ і тиску 0,3-0,4 с.

Характер зміни температури залежить не тільки від моделі двигуна, але й від використаної динамічної характеристики терморпарі, аналіз якої виходить за межі цієї статті. Затримка зміни тяги є значно більшою: вона складає біля 1 с. Зважаючи на те, що всі параметри робочого процесу двигуна є взаємопов'язаними, можна

припустити, що динамічна похибка тяги зумовлена не тільки моделлю, але й динамічною похибкою вимірювального пристрою.

В цілому, швидкість зміни параметрів і тривалість перехідних процесів моделюються цілком задовільно для вирішення перелічених вище задач.

Розроблену методику формування швидкодіючої динамічної моделі було використано при розробці аналогічної моделі турбовального двигуна ТВЗ-117ВМА-СБМ1В.

### **2.3 Висновки за другим розділом**

В процесі аналізу задачі формування математичної моделі авіаційного газотурбінного двигуна для рішення задач автоматичного керування й імітаційного моделювання отримано такі основні результати:

1. Сформульовано вимоги до відповідних математичних моделей.
2. Запропоновано формувати модель на основі структури, до складу якої входять статична й динамічна підмоделі. Статична підмодель легко адаптується до індивідуальних особливостей двигуна. Динамічна підмодель має лінійну структуру, а її коефіцієнти залежать від режиму роботи двигуна.
3. Розглянуто деталі формування статичної й динамічної підмоделей ТРДД. Для урахування впливу положення КПП і РНА компресора виокремлено ділянки області робочих режимів, на яких локалізовано статичну й динамічну підмоделі. Як параметр, що визначає режим, обрана частота обертання ротора ВТ. Для урахування впливу польотних умов використано формули зведення, які розповсюджуються як на статичні параметри, так і на коефіцієнти лінійної динамічної підмоделі.
4. Розроблено деталізовану структуру ММ, яка ураховує перелічені особливості, а також необхідність завдання початкових умов при ініціалізації моделювання.
5. Виконано програмну реалізацію ММ ТРДД із використанням засобів Matlab Simulink.

6. Порівняння отриманих за її допомогою результатів моделювання перехідного процесу по витраті палива з результатами, отриманими із використанням нелінійної повузлової динамічної моделі, показало високий ступінь відповідності запропонованої швидкодійної моделі й базової нелінійної повузлової моделі двигуна.
7. Верифікацію розробленої ММ на реальних даних виконано з використанням результатів стендових випробувань двигуна. Установлено, що наявні статичні похибки пов'язані з індивідуальними відмінностями конкретного екземпляру двигуна та можуть бути усунені шляхом налагодження статичної підмоделі.
8. Модель адекватно описує характер перехідних процесів. Наявні динамічні похибки зумовлені більш повільним початком перехідних процесів у реальному двигуні, що зумовлює сповільнення зміни частоти обертання ротора ВТ на 0,2 с, частоти обертання ротора НТ і тиску на виході з компресора на 0,3-0,4 с, а тяги на 1 с.
9. Можливими причинами зазначеного сповільнення зміни параметрів є: затримка тепловиділення в камері згоряння; газодинамічна інерція внаслідок накопичування маси й енергії в об'ємах проточної частини; втрати енергії на нагрівання конструктивних елементів; затримка в зміні радіальних зазорів між робочими лопатками компресора й турбіни під час перехідних процесів порівняно зі статичними зазорами, які відповідають режимам роботи двигуна, що розглядаються.
10. Результати цього розділу опубліковано в роботах автора [4]-[9].

### **Список літератури до другого розділу**

100. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов и др. – К.: Техника, 1998. – 312 с.
101. Control Design for a Generic Commercial Aircraft Engine / J. Csank, M. Ryan, J. S. Litt, T. Guo // NASA/TM-2010-216811, 2010. – 17 p. <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20100037768>.

102. Propulsion Control Technology Development Needs to Address NASA Aeronautics Research Mission Goals for Thrusts 3a and 4 / S. Adibhatla, J. Ding, S. Garg, S. Griffith, K. Karnofski, N. Payne, D. Simon, B. Wood // AIAA Propulsion and Energy Forum. 2018, Cincinnati, OH, 2018. – 26 p.
103. Єпіфанов С. В. Дослідження проблеми формування залежності параметрів динамічної моделі двовального ТРДД від режиму роботи / С. В. Єпіфанов, Р. Л. Зеленський, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2020. – № 7 (167). – С. 89-97. doi: 10.32620/akt.2020.7.13.
104. Єпіфанов, С. В. Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. – № 4 (188). – С. 44-55. doi: 10.32620/akt.2023.4.05.
105. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2023. - № 4 sup1 (189). – С. 85-94. doi: 10.32620/akt.2023.4sup1.12.
106. Єпіфанов, С. В. Формування математичної моделі турбовального двигуна на режимі запуску / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко, Р. Р. Джаббаров // XXVII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2022. - С. 56-57.
107. Єпіфанов, С. В. Моделювання динаміки турбореактивного двоконтурного двигуна при аналізі й синтезі систем автоматичного керування / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // XXVIII міжнародний конгрес двигунобудівників: тез. доп. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2023. - С. 52-54.
108. Бондаренко О. В. Дослідження впливу зміни технічного стану газотурбінного двигуна на його динамічні характеристики / О. В. Бондаренко, С. В. Єпіфанов // *Матеріали V міжнародної науково-практичної морської конференції кафедри СЕУ і TE Marine Power Plants & Operation MPP&O-2024*. 2024. – С. 126-127.

### РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА МЕТОДУ АНАЛІЗУ ПОХИБОК ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНОВАЛЬНОГО ГАЗОГЕНЕРАТОРА

#### 3.1 Оцінювання параметрів динамічних моделей методом найменших квадратів і виникнення відповідних похибок

Розглянемо модель двигуна, представлена в попередньому розділі. Її динамічна частина описується системою рівнянь (2.23). Задачу корекції динамічної моделі можна сформулювати як задачу оцінювання параметрів математичної моделі

$$\vec{\theta} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{22} \ b_{11} \ b_{12} \ b_{21} \ b_{22} \ c_{11} \ c_{12} \ c_{21} \ c_{22} \ c_{31} \ c_{32} \ d_{11} \ d_{12} \ d_{21} \ d_{22} \ d_{31} \ d_{32}]^T$$

на основі відомих значень параметрів робочого процесу двигуна  $\vec{Z} = \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{bmatrix}$ , вимірюваних у моменти часу  $t_1, \dots, t_N$ . Крім того, в загальному випадку необхідно розв'язати задачу планування експерименту, тобто визначити оптимальні керуючі дії на двигун  $\Delta G_{\Pi}(t)$ .

Як приклад розглянемо задачу визначення коефіцієнтів рівняння динаміки ротора одновального двигуна. Тоді динамічна модель двигуна в околиці базового усталеного режиму має вигляд

$$\frac{dn}{dt} = a\Delta n + b\Delta G_{\Pi}, \quad (3.1)$$

або

$$\tau \frac{dn}{dt} + \Delta n = K\Delta G_{\Pi}, \quad (3.2)$$

де  $\tau$  – стала часу ротора;

$K$  – коефіцієнт підсилення ротора за витратою палива.

**Примітка:** У рівняннях (3.1), (3.2) символ « $\Delta$ » означає відхилення параметра від значення, яке відповідає статичній моделі (тобто динамічну добавку). У цьому й наступному розділах розглядаються виключно динамічні моделі та аналізуються похибки, тобто відхилення від істинних значень. Тому для запобігання виникненню

проблем з розрізненням цих відхилень, у розділах 3 і 4 символ « $\Delta$ » у динамічній моделі двигуна, тобто усі значення параметрів ( $n$ ,  $G$  тощо) відповідають відхиленням цих параметрів від значень, які відповідають статичній моделі, а « $\Delta$ » використовується для позначення похибок. Ми також опустимо індекс «П» в позначенні витрати палива.

Розглянемо задачу оцінювання коефіцієнтів цього рівняння за результатами вимірювання значень частоти обертання в перехідному процесі  $n(t)$ , який спричинений відомою зміною витрати палива  $G(t)$ . Нехай параметри моделі мають такі істинні значення:  $\tau = 1$  с,  $K = 10$  (об/хв)/(кг/год).

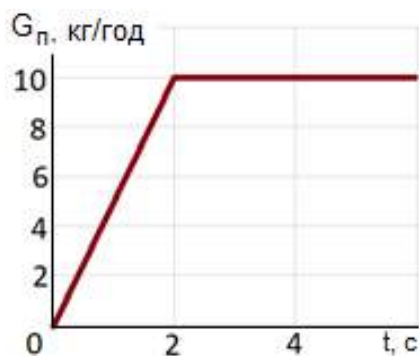
Вихідними даними є набори значень вхідного параметра  $G_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  і вихідного параметра  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , зареєстровані в моменти часу  $t_1, \dots, t_N$ .

Нехай витрата палива змінюється за часом лінійно зі швидкістю  $v = 5$  (кг/год)/с до заданого відхилення  $G = 10$  кг/год, а потім залишається сталим (рис. 3.1, а):

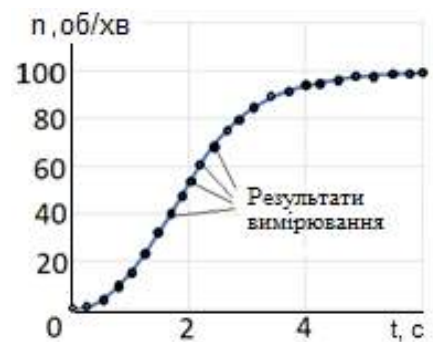
$$G = \begin{cases} vt, & vt < G_0; \\ G_0, & vt \geq G_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Тоді реакція ротора на такий вплив виглядає як (рис. 3.1, б)

$$n = \begin{cases} Kv \left[ t - \tau \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] = -\frac{bv}{a} \left[ t \frac{1}{a} (1 - e^{at}) \right], & vt < G_0; \\ Kv \left[ t_0 + \tau \left( e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right] = -\frac{bv}{a} \left[ t_0 + \tau (e^{at} - e^{a(t-t_0)}) \right], & vt \geq G_0. \end{cases} \quad (3.4)$$



а



б

Рис. 3.1 - Приклад керуючої дії (а) та реакції (б).

Використаємо для визначення коефіцієнтів метод найменших квадратів (МНК) [1]. Тоді оцінка  $\hat{\theta} = [\hat{a} \ \hat{b}]^T$  визначається в результаті мінімізації МНК-функціонала  $\Phi(\vec{\theta}) = \sum_{j=1}^N [n_j - n_{\text{мод}}(\vec{\theta}, t_j)]^2$ . Унаслідок нелінійного характеру математичної моделі (3.4) ця задача мінімізації є нелінійною. Для її чисельного розв'язання необхідно використовувати ітераційний метод, відповідно до якого на кожному  $i$ -му кроці математична модель лінеаризується по шуканим параметрам і виконується корекція оцінки:

$$\hat{\theta}^i = \hat{\theta}^{i-1} + \delta\hat{\theta}^i, \quad (3.5)$$

де  $\delta\hat{\theta}^i = (H^{(i-1)T} H^{i-1})^{-1} H^{(i-1)T} \delta n^i$  – лінійна оцінка корегувальної поправки;

$H^{i-1}$  –  $(n \cdot 2)$ -матриця чутливості, яка відповідає поточній оцінці  $\hat{\theta}^{i-1}$ ;

$\delta n^i$  –  $(N \cdot 1)$ -вектор відхилень вимірюваного значення від значень, розрахованих із використанням математичної моделі:

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; H^{i-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_1 & \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)_1 \\ \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_N & \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)_N \end{bmatrix}; \delta n^i = \begin{bmatrix} \Delta n_1 - \Delta n_{\text{мод}}(\vec{\theta}^{i-1}, t_1) \\ \dots \\ \Delta n_N - \Delta n_{\text{мод}}(\vec{\theta}^{i-1}, t_N) \end{bmatrix}.$$

Похибки оцінок визначаються коваріаційною матрицею [1]

$$P(\vec{\theta}) = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \text{cov}(a, b) \\ \text{cov}(a, b) & \sigma_b^2 \end{bmatrix}_n^2 = \sigma_n^2 (H^T H)^{-1}, \quad (3.6)$$

де

$$\sigma_a^2 = \frac{B}{AB - C^2}; \sigma_b^2 = \frac{A}{AB - C^2}, A = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_j^2; B = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)_j^2; C = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)_j; \quad (3.7)$$

$\sigma_n^2$  – дисперсія вимірювання частоти обертання ротора.

З (11) випливає:

$$\frac{\partial n}{\partial a} = \begin{cases} \frac{bv}{a^3} [at(1 - e^{at}) + 2(1 - e^{at})], vt < G_0; \\ \frac{bv}{a^3} [at_0(1 + e^{a(t-t_0)}) + (at - 2)e^{at}(1 - e^{-at_0})], vt \geq G_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial b} = \begin{cases} -\frac{v}{a} \left[ t + \frac{1}{a}(1 - e^{at}) \right], vt < G_0; \\ -\frac{v}{a} \left[ t_0 - \frac{1}{a}(e^{at} - e^{-a(t-t_0)}) \right], vt \geq G_0. \end{cases}$$

Отримані вище вирази дозволяють аналізувати похибки оцінювання з використанням математичної моделі, лінеаризованої в околі істинних значень оцінюваних параметрів.

Як приклад розглянемо похибку оцінювання коефіцієнта  $a$ . З (3.6) випливає:

$$\sigma_a = f(t)\sigma_n, \text{ де } f(t) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{B}{AB - C^2}.$$

Значення функції  $f(t)$  для прикладу, що розглядається, які відповідають різним випадкам оцінювання параметра  $a$  при інтервалі між вимірюваннями 0,2 с, представлені на рис. 3.2. Крива 1 відповідає зазначеним вище параметрам двигуна:  $\tau = 1$  с,  $K = 10$  об/хв/(кг/год); крива 2 – параметрам двигуна  $\tau = 10$  с,  $K = 10$  (об/хв)/(кг/год); крива 3 – параметрам двигуна  $\tau = 1$  с,  $K = 10$  (об/хв)/(кг/год) і випадку оцінювання, коли значення коефіцієнта підсилення  $K$  є відомим.

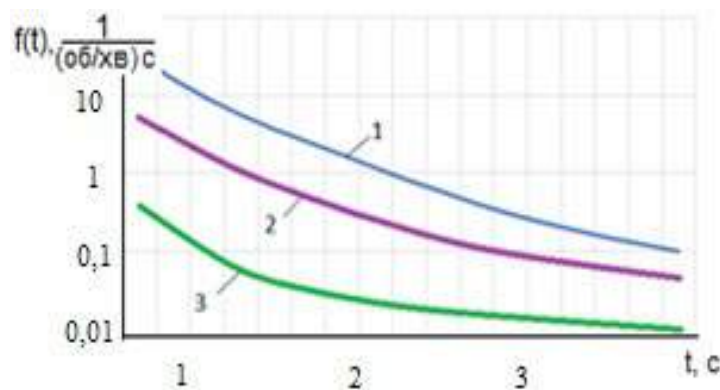


Рис. 3.2 - Функція  $f(t)$ , що пов'язує похибку оцінювання коефіцієнта  $a$  з похибкою вимірювання частоти обертання ротора

Розглянутий приклад показує, що похибки оцінювання суттєво залежать від багатьох впливових факторів: значень шуканих коефіцієнтів (які залежать від режиму та умов роботи двигуна), похибок вимірювання частоти обертання ротора та витрати палива, форми керуючої дії (в розглянутому прикладі – амплітуди та швидкості зміни витрати палива), частоти вимірювань, похибок використовуваної моделі та ін.

Таким чином, метою подальшого дослідження є формування методу прогнозування похибок оцінювання динамічних параметрів двигуна залежно від впливових факторів. Цей метод є ключовим для впровадження автоматичних алгоритмів адаптації в САК двигунів.

### **3.2 Розробка методу аналізу похибок оцінювання параметрів математичної моделі двигуна**

Для формування методики розглянемо найпростішу задачу: визначення сталої часу двигуна  $\tau$  з використанням моделі (3.2) і ступінчастої зміни витрати палива на величину  $G_0$ . Як показує аналіз, коефіцієнт підсилення  $K$  є не динамічним, а статичним параметром двигуна, тому що характеризує крутизну статичної характеристики – залежності частоти обертання від витрати палива на усталених режимах роботи двигуна.

Перехідна характеристика двигуна при зазначеному впливі має вигляд

$$n(t) = KG_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (3.9)$$

Факторами, що впливають на загальну похибку оцінювання сталої часу, є похибки вимірювання:  $\Delta n$  (частоти обертання ротора) та  $\Delta G$  (витрати палива); похибки структури моделі:  $\Delta K$  (похибка параметра  $K$  – параметрична похибка) та  $\Delta S$  (похибка, що виникає внаслідок припущення про сталість значень коефіцієнтів  $K$  і  $\tau$ ; інтервал реєстрації  $\Delta t$ ).

Будемо вважати, що інтервал  $\Delta t$  обирається достатньо великим, щоб виключити вплив автокореляції сигналу, а амплітуда зміни витрати палива  $G$  обирається достатньо малою, щоб мінімізувати вплив нелінійності моделі.

Тоді інструментальна похибка оцінки є сумою часткових похибок, а її дисперсія є сумою часткових дисперсій:

$$\Delta \tau = (\Delta \tau)_n + (\Delta \tau)_G + (\Delta \tau)_K; \quad \sigma_\tau^2 = \sigma_{\tau N}^2 + \sigma_{\tau G}^2 + \sigma_{\tau K}^2.$$

МНК-функціонал для цього випадку:

$$\Phi(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[ n_j - KG_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau}} \right) \right]^2 = \sum_{j=1}^N (\delta n)_j^2 = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta \tau^2,$$

$$\Phi(\tau) = \sum_{j=1}^N \left[ n_j - KG_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau}} \right) \right]^2 = \sum_{j=1}^N (\delta n)_j^2 = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta \tau^2,$$

звідки 
$$\Delta \tau^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (\delta n)_j^2}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2}.$$

Тоді дисперсія оцінки 
$$\sigma_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_n^2}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2}.$$

Перетворимо вираз для дисперсії оцінки до неперервного вигляду, припустивши, що виміри виконуються рівномірно за часом з інтервалом  $\Delta t$ :

$$\sigma_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta t} \approx \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt}, \quad (3.10)$$

де  $t_N$  – тривалість спостереження.

Ураховуючи (3.9), перетворимо (3.10):

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -KG_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{t}{\tau^2}; \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt = \frac{K^2 G_0^2}{2\tau} \left\{ \frac{1}{2} - e^{-\frac{2t_N}{\tau}} \left[ \left( \frac{t_N}{\tau} \right)^2 + \frac{t_N}{\tau} + \frac{1}{2} \right] \right\};$$

$$\sigma_{\tau_n}^2 = \frac{2\sigma_n^2 \tau \Delta t}{K^2 G_0^2 \frac{1}{2} - e^{-\frac{2t_N}{\tau}} \left[ \left( \frac{t_N}{\tau} \right)^2 + \frac{t_N}{\tau} + \frac{1}{2} \right]}. \quad (3.11)$$

Аналітичний вираз (3.11) пов'язує похибку оцінювання сталої часу з основними впливовими факторами: похибкою вимірювання частоти обертання, тривалістю спостереження, частотою вимірювання, а також властивостями двигуна, вираженими у вигляді залежності від часу часткової похідної від частоти обертання по сталій часу (ця похідна залежить також від виду вхідної дії – характеру зміни витрати палива).

Для отримання універсальної характеристики похибки введемо безрозмірні змінні  $\bar{n} = \frac{n}{KG_0}$ ;  $\bar{t} = \frac{t}{\tau_0}$ ;  $\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{\tau_0}$ , де  $\tau_0$  – істинне значення сталої часу двигуна;

$K$  - істинне значення коефіцієнта підсилення. Тоді

$$\bar{\sigma}_{\tau_n}^2 = \frac{\sigma_{\tau_n}^2}{\tau_0^2} = \sigma_n^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_n(\bar{t}_N),$$

де

$$f_n(\bar{t}_N) = \frac{2}{\frac{1}{2} - e^{-2\bar{t}_N} \left[ \bar{t}_N^2 + \bar{t}_N + \frac{1}{2} \right]}. \quad (3.12)$$

Функція  $f_n(\bar{t}_N)$  представлена на рис. 3.3. Очевидно, її значення при зростанні тривалості спостереження наближається не до нуля, а до скінченного значення, що дорівнює 4. Це вказує на те, що після закінчення перехідного процесу та стабілізації частоти обертання нові вимірювання не містять інформації про шукане значення сталої часу.

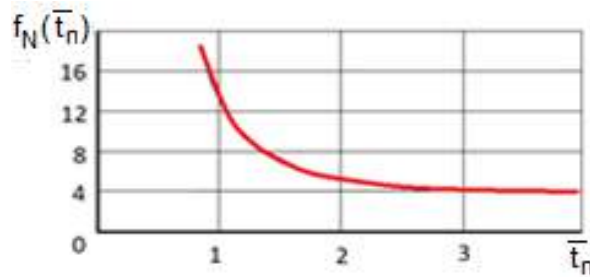


Рис. 3.3 - Функція впливу похибки вимірювання частоти обертання на похибку оцінювання сталої часу двигуна

Використовуючи отриману формулу (3.12) для питомої дисперсії, а також цей графік, можна спрогнозувати похибку для будь-якого двигуна, інтервалу часу, амплітуди стрибкоподібної дії та похибки вимірювання. Ця модель похибки є також основою для планування експерименту з оцінювання сталої часу (тобто розв'язання зворотної задачі моделювання).

Цю характеристику, що отримана для стрибкоподібної зміни витрати палива, можна розглядати як мінімальну можливу похибку, тому що реакція ротора на дію іншої форми буде повільнішою, що збільшує похибку.

### 3.3 Аналіз сумарної похибки оцінювання сталої часу двигуна

Запишемо вираз для МНК-функціонала, підставивши в нього рівняння моделі, лінеаризоване по всіх параметрах, які мають похибки (частоті обертання, витраті палива та апріорному значенню коефіцієнта підсилення, яке також може розглядатися як випадкова величина, тому що воно визначається на основі експериментальних даних про статичну характеристику двигуна):

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\tau) &= \sum_{j=1}^N \left[ n_j - KG \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau}} \right) \right]^2 = \sum_{j=1}^N \left[ n_j - \frac{\partial n}{\partial \tau} \Delta\tau - \frac{\partial n}{\partial G} \Delta G - \frac{\partial n}{\partial K} \Delta K \right]^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ n_j + K_0 G_0 e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \frac{t_j}{\tau_0^2} \Delta\tau - K \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) \Delta G - G_0 \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) \Delta K \right]^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

З умови мінімуму функціоналу МНК випливає:

$$\frac{\partial \Phi(\Delta \tau)}{\partial \Delta \tau} = 2 \sum_{j=1}^N \left[ \Delta n_j + K_0 G_0 e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \frac{t_j}{\tau_0^2} \Delta \tau - \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) (K_0 \Delta G_0 + G_0 \Delta K) \right] K_0 G_0 e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \frac{t_j}{\tau_0^2} = 0,$$

звідки отримаємо вираз для оцінки та її дисперсії:

$$\Delta \hat{\tau} = - \frac{\tau_0^2}{K_0 G_0} \cdot \frac{\sum_{j=1}^N \left[ \Delta n_j - \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) (K_0 \Delta G - G_0 \Delta K) \right] t_j e^{-\frac{t_j}{\tau_0}}}{\sum_{j=1}^N t_j^2 e^{-\frac{2t_j}{\tau_0}}}; \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_0^4}{K_0^2 G_0^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^N t_j^2 e^{-\frac{2t_j}{\tau_0}} \sigma_n^2 + K_0^2 \left[ \sum_{j=1}^N t_j e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) \right]^2 \sigma_G^2 + G_0^2 \left[ \sum_{j=1}^N t_j e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) \right]^2 \sigma_K^2}{\left( \sum_{j=1}^N t_j^2 e^{-\frac{2t_j}{\tau_0}} \right)^2}. \quad (3.15)$$

При отриманні виразу (3.15) для дисперсії ми враховували суттєву відмінність між впливом похибок вимірювання ( $\sigma_n^2$ ) і похибок задання коефіцієнтів моделі  $\sigma_G^2$ ,  $\sigma_K^2$ : і ті, й інші є випадковими величинами, але похибки коефіцієнтів змінюються тільки на множині повторюваних експериментів, а похибки вимірювання змінюються і на множині експериментів, і на множині вимірів у кожному експерименті. Тому похибки коефіцієнтів можна винести за знаки суми в чисельнику виразу (3.14).

Вплив похибки вимірювання частоти обертання проаналізовано вище. Тепер виконаємо аналіз впливу похибок вимірювання витрати палива за відомого коефіцієнта підсилення.

Перетворивши суми на інтеграли аналогічно (3.10) і виконавши інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau G_{10}}^2 &= \frac{\tau_0^4 K_0^2 \sigma_G^2}{K_0^2 G_0^2} \frac{\left[ \sum_{j=1}^N \left( 1 - e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right) t_j e^{-\frac{t_j}{\tau_0}} \right]^2}{\left( \sum_{j=1}^N t_j^2 e^{-\frac{2t_j}{\tau_0}} \right)^2} \approx \frac{\tau_0^4 \sigma_G^2}{G_0^2} \cdot \frac{\left[ \int_0^{t_N} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) t e^{-\frac{t}{\tau_0}} dt \right]^2}{\left( \int_0^{t_N} t^2 e^{-\frac{2t}{\tau_0}} dt \right)^2} = \\ &= \frac{\tau_0^2 \sigma_G^2}{G_0^2} \left\{ \frac{3 - 4(\bar{t}_N + 1)e^{-\bar{t}_N} + (2\bar{t}_N + 1)e^{-2\bar{t}_N}}{1 - [2\bar{t}_N^2 + 2\bar{t}_N + 1]e^{-2\bar{t}_N}} \right\}^2. \end{aligned}$$

Універсальна характеристика похибки в безрозмірних координатах має такий вигляд:

$$\bar{\sigma}_{\tau G}^2 = \frac{\sigma_{\tau G}^2}{\tau_0^2} = \frac{\bar{\sigma}_G^2}{\tau_0^2} f_1(\bar{t}_N),$$

де

$$f_1(\bar{t}_N) = \left\{ \frac{3 - 4(\bar{t}_N + 1)e^{-\bar{t}_N} + (2\bar{t}_N + 1)e^{-2\bar{t}_N}}{1 - [2\bar{t}_N^2 + 2\bar{t}_N + 1]e^{-2\bar{t}_N}} \right\}^2 \quad (3.16)$$

Аналогічно, використовуючи (3.14), отримаємо вираз для похибки оцінювання, зумовленої похибкою завдання коефіцієнта підсилення:

$$\bar{\sigma}_{\tau K}^2 = \frac{\sigma_{\tau K}^2}{\tau_0^2} = \frac{\sigma_K^2}{\tau_0^2} f_1(\bar{t}_N),$$

Графік функції  $f_1(\bar{t}_N)$  представлено на рис. 3.4. З (3.16) випливає, що при зростанні тривалості спостереження внесок нових вимірів до сумарної похибки зменшується, а сама функція наближається не до нуля, а до скінченного значення, яке дорівнює 9.

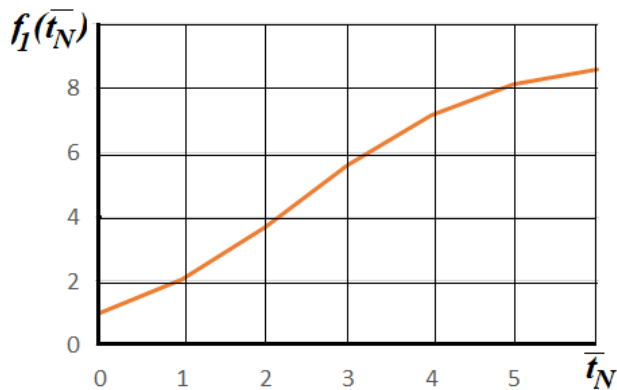


Рис. 3.4 - Функція впливу похибки вимірювання витрати палива та завдання коефіцієнта підсилення на похибку оцінювання сталої часу двигуна

Таким чином, у процесі дослідження проблеми розроблено узагальнений підхід до аналізу похибок адаптації моделі ГТД, головні концепції якого викладено нижче:

1. Використання лінійної апроксимації динамічної моделі двигуна в околиці істинних значень шуканих параметрів.
2. Аналіз впливу всіх похибок вимірювання та параметричних похибок моделі (похибок вимірювання частот обертання роторів і витрати палива, похибок коефіцієнтів підсилювання), форми та параметрів керуючої дії, а також інтервалу вимірювання.
3. Урахування похибок, що впливають, як незалежних нормально розподілених випадкових величин.
4. Використання питомих параметрів і відповідне перетворення рівнянь, які відбивають зв'язок між похибками оцінювання та впливовими факторами, що робить ці рівняння універсальними, придатними для аналізу будь-яких параметрів двигуна та будь-яких впливових дій.
5. Інструментальні похибки оцінок сталих часу двигуна мають нижню межу; це пояснюється скінченною тривалістю перехідних процесів, наприкінці яких вихідні параметри стабілізуються та стають нечутливими до динамічних параметрів двигуна (зокрема сталих часу). Ці похибки відповідають тривалому періоду реєстрації, коли нові дані не дають корисної інформації про сталу часу внаслідок того, що перехідний процес вже завершився.
6. У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при стрибкоподібній зміні витрати палива визначено мінімальну можливу похибку оцінювання. Зокрема, при номінальному значенні сталої часу 1 с і коефіцієнті підсилення подачі палива 10, похибки вимірювання частоти обертання ротора 0,2 %, витрати палива 0,5 %, стрибкоподібної зміни подачі палива на 10 кг/с і частоті реєстрації 5 Гц, мінімальне середньоквадратичне відхилення похибки оцінки сталої часу становитиме 0,2 с, тобто 20 %. Цей значний рівень похибки вимагає ретельного планування випробувань і постійної перевірки під час застосування запропонованого методу.

Запропонований підхід дає можливість визначити та зберегти в будь-якому зручному вигляді (аналітичному, табличному та ін.) узагальнену характеристику оцінювання параметрів математичної моделі двигуна, яка є тією ж самою для будь-якого двигуна, його умов роботи та факторів, що впливають.

Отримані діаграми можуть бути застосовані для налаштування функції автоматичної адаптації бортової моделі двигуна у складі САК. Вони також можуть бути використані для планування експерименту з перевірки та верифікації динамічної моделі двигуна.

### **3.4 Аналіз точності оцінювання сталої часу оновального газотурбінного двигуна в реальних умовах**

У попередньому підрозділі отримано узагальнені характеристики, які дозволяють визначати похибки оцінювання сталої часу оновального двигуна в заданих умовах його роботи у випадку використання стрибкоподібної зміни витрати палива.

Проте забезпечити зазначену зміну витрати палива практично неможливо внаслідок обмежень на швидкість її зміни, які вносять закони керування двигуна, а також динамічні властивості виконавчих пристроїв. Тому отримані раніше результати можуть бути використані тільки для отримання грубих, занадто оптимістичних значень похибок оцінювання.

Розглянемо похибки оцінювання динамічних характеристик ГТД у більш реальному випадку, коли витрата палива змінюється з постійною швидкістю, а потім набуває певного значення й стабілізується.

#### ***3.4.1 Аналіз задачі оцінювання сталої часу двигуна при лінійній зміні витрати палива з обмеженням***

Розглянемо рівняння (3.2).

Зміна витрати палива:

$$G = \begin{cases} vt, & G < G_0 (t < t_0); \\ G_0, & G \geq G_0 (t \geq t_0), \end{cases} \quad (3.17)$$

де  $G_0$  - амплітуда зміни витрати палива;  $t_0 = \frac{G_0}{\nu}$ .

Розв'язок рівняння динаміки ротора:

$$n = \begin{cases} K \frac{G_0}{t_0} \left[ t - \tau \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], & t < t_0; \\ K \frac{G_0}{t_0} \left[ t_0 + \tau \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right], & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Для визначення сталої часу будемо використовувати значення частоти обертання  $n_j$ , зареєстровані в моменти часу  $t_j, j = 1, \dots, N$  з постійним інтервалом спостереження  $\Delta t$ .

Оцінка, отримана методом найменших квадратів (МНК), мінімізує функціонал

$$\Phi(\Delta\tau) = \sum_{j=1}^N \left[ n_j - n_{\text{мод}}(\vec{\theta}, t_j) \right]^2, \quad (3.19)$$

де  $n_{\text{мод}}(\vec{\theta}, t_j)$  - значення, отримані за допомогою математичної моделі в моменти часу  $t_j$ ;

$\vec{\theta} = [G_0 \quad t_0 \quad K]^T$  - параметри моделі.

Приймаючи, що структурні похибки моделі є відсутніми, підставимо в МНК-функціонал (3.19) значення

$$n_{\text{мод}}(\vec{\theta}, t_j) = n_{\text{мод}}(\vec{\theta}^0, t_j) + \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \Delta\tau - \left( \frac{\partial n}{\partial G} \right)_j \Delta G - \left( \frac{\partial n}{\partial K} \right)_j \Delta K - \left( \frac{\partial n}{\partial t_0} \right)_j \Delta t_0,$$

де індекс «0» відповідає істинному значенню параметрів, а  $\Delta$  - відхилення (похибки) параметрів моделі (з яких  $\tau$  є шуканим параметром,  $G_0$  і  $t_0$  визначаються експериментально, а  $K$  задається).

З умови мінімуму цього функціоналу отримаємо вираз для похибки оцінки сталої часу:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\Delta \tau)}{\partial \Delta \tau} &= -2 \sum_{j=1}^N \left[ \Delta n_j - \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \Delta \tau - \left( \frac{\partial n}{\partial G} \right)_j \Delta G - \left( \frac{\partial n}{\partial K} \right)_j \Delta K - \left( \frac{\partial n}{\partial t_0} \right)_j \Delta t_0 \right] \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j = 0; \\
\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta \tau &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \Delta n_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial G} \right)_j \Delta G - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial K} \right)_j \Delta K - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial t_0} \right)_j \Delta t_0; \\
\Delta \hat{\tau} &= \frac{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \Delta n_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial G} \right)_j \Delta G - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial K} \right)_j \Delta K - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \left( \frac{\partial n}{\partial t_0} \right)_j \Delta t_0}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Функції чутливості:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \begin{cases} K \frac{G_0}{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right], & t < t_0; \\ K \frac{G_0}{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right], & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial n}{\partial G} = \begin{cases} K \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], & t < t_0; \\ K \left[ 1 + \frac{\tau}{t_0} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right], & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial n}{\partial K} = \begin{cases} G_0 \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], & t < t_0; \\ G_0 \left[ 1 + \frac{\tau}{t_0} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right], & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t_0} = \begin{cases} -K \frac{G_0}{t_0} \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right], & t < t_0; \\ -K \frac{G_0}{t_0} \left[ \left( 1 - \frac{\tau}{t_0} \right) e^{-\frac{t_0}{\tau}} + \frac{\tau}{t_0} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Таким чином, інструментальна похибка оцінки сталої часу

$$\Delta \tau = (\Delta \tau)_n + (\Delta \tau)_G + (\Delta \tau)_K + (\Delta \tau)_{t_0}.$$

Вважаючи похибки незалежними випадковими величинами, отримаємо дисперсію сумарної похибки:

$$\sigma_{\tau\Sigma}^2 = \sigma_{\tau n}^2 + \sigma_{\tau G}^2 + \sigma_{\tau K}^2 + \sigma_{\tau t_0}^2. \quad (3.25)$$

### 3.4.2 Аналітичне рішення задачі для складової, зумовленої похибкою вимірювання частоти обертання

Дисперсія інструментальної похибки, зумовленої похибками вимірювання частоти обертання:

$$\sigma_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta t} \approx \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt}. \quad (3.26)$$

При  $t_N < t_0$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt &= K^2 \nu^2 \int_0^{t_N} \left[ \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right]^2 dt = K^2 \nu^2 \tau \int_0^{t_N} \left[ \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\left(\frac{t}{\tau} + 1\right)} - 1 \right]^2 d\left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) = \\ &= K^2 \nu^2 \tau \left\{ e^2 \int_0^{t_N} x^2 e^{-2x} dx - 2e \int_0^{t_N} x e^{-x} dx + t_N \int_0^{t_N} dx \right\} = \\ &= K^2 \nu^2 \tau \left\{ \frac{e^2}{4} \left[ 1 - (2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} \right] \Big|_1^{\frac{t_N}{\tau} + 1} - 2e \left[ 1 - (x + 1)e^{-x} \right] \Big|_1^{\frac{t_N}{\tau} + 1} + \frac{t_N}{\tau} \right\} = \\ &= K^2 \nu^2 \tau \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left[ 2 \left( \frac{t_N}{\tau} \right)^2 + 6 \frac{t_N}{\tau} + 5 \right] e^{-2\frac{t_N}{\tau}} - 4 + 2 \left( \frac{t_N}{\tau} + 2 \right) e^{-\frac{t_N}{\tau} + \frac{t_N}{\tau}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Очевидно, що, якщо  $t_N = t_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt &= K^2 \nu^2 \tau \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left[ 2 \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^2 + 6 \frac{t_0}{\tau} + 5 \right] e^{-2\frac{t_0}{\tau}} - 4 + 2 \left( \frac{t_0}{\tau} + 2 \right) e^{-\frac{t_0}{\tau} + \frac{t_0}{\tau}} \right\} = \\ &= \frac{K^2 G_0^2}{t_0^2} \tau \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left[ 2 \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^2 + 6 \frac{t_0}{\tau} + 5 \right] e^{-2\frac{t_0}{\tau}} - 4 + 2 \left( \frac{t_0}{\tau} + 2 \right) e^{-\frac{t_0}{\tau} + \frac{t_0}{\tau}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\text{При } t_N > t_0, \quad \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt = \int_0^{t_0} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt + \int_{t_0}^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt.$$

Перетворимо вираз для  $\frac{\partial n}{\partial \tau}$ , який відповідає  $t_N > t_0$ :

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = Kv \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] = Kv \left[ \frac{t}{\tau} \left( 1 + e^{\frac{t_0}{\tau}} \right) + 1 + \left( 1 - \frac{t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t_0}{\tau}} \right] e^{\frac{t}{\tau}} = Kv \left( a \frac{t}{\tau} + b \right) e^{\frac{t}{\tau}}, \quad (3.29)$$

де  $a = 1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}$ ;  $b = 1 + \left( \frac{t_0}{\tau} - 1 \right) e^{-\frac{t_0}{\tau}}$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt &= K^2 v^2 \int_{t_0}^{t_N} \left( a \frac{t}{\tau} + b \right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = K^2 v^2 \left( a^2 \int_{t_0}^{t_N} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt + 2ab \int_{t_0}^{t_N} \frac{t}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt + b^2 \int_{t_0}^{t_N} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \right) = \\ &= K^2 v^2 \left\{ a^2 \frac{\tau}{4} \left[ 1 - \left( \frac{2}{\tau^2} t^2 + \frac{2}{\tau} t + 1 \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] \Big|_{t_0}^{t_N} + 2ab \frac{\tau}{4} \left[ 1 - \left( \frac{2}{\tau} t + 1 \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] \Big|_{t_0}^{t_N} + b^2 \frac{\tau}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \Big|_{t_0}^{t_N} \right\} = \\ &= K^2 v^2 \tau \left\{ \frac{a^2}{4} \left[ 2 \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^2 + 2 \frac{t_0}{\tau} + 1 \right] + \frac{ab}{2} \left( 2 \frac{t_0}{\tau} + 1 \right) + \frac{b^2}{2} \right\} e^{-\frac{2t_0}{\tau}} - \left\{ \frac{a^2}{4} \left[ 2 \left( \frac{t_N}{\tau} \right)^2 + 2 \frac{t_N}{\tau} + 1 \right] + \frac{ab}{2} \left( 2 \frac{t_N}{\tau} + 1 \right) + \frac{b^2}{2} \right\} e^{-\frac{2t_N}{\tau}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отримані аналітичні вирази (3.27), (3.28), (3.30) пов'язують похибку оцінювання сталої часу з основними впливовими факторами: похибкою вимірювання частоти обертання, тривалістю спостереження, частотою вимірювання, а також властивостями двигуна, вираженими у вигляді залежності від часу часткової похідної від частоти обертання по сталій часу (ця похідна залежить також від виду вхідної дії – характеру зміни витрати палива).

Для отримання універсальної характеристики введемо безрозмірні змінні

$$\bar{n} = \frac{n}{KG_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}; \quad \Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{\tau}, \quad \text{де } \tau - \text{істинне значення сталої часу двигуна; } K - \text{істинне}$$

значення коефіцієнту підсилення.

Тоді

$$\bar{\sigma}_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_{\tau n}^2}{\tau^2} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau^2 \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau^2 K^2 v^2 \tau \varphi \left( \frac{t_0}{\tau}, \frac{t_N}{\tau} \right)} = \frac{\sigma_n^2 \cdot t_0^2 \cdot \Delta t}{\tau^2 K^2 G_0^2 \tau \varphi \left( \frac{t_0}{\tau}, \frac{t_N}{\tau} \right)} = \sigma_n^2 \cdot \Delta \bar{t} f_n(\bar{t}_0, \bar{t}_N), \quad (3.31)$$

де  $f_n(\bar{t}_0, \bar{t}_N) = \frac{\bar{t}_0^2}{\varphi\left(\frac{t_0}{\tau}, \frac{t_N}{\tau}\right)}$  - функція похибки.

Функцію  $\varphi\left(\frac{t_0}{\tau}, \frac{t_N}{\tau}\right)$  визначено вище. Вона має такий вигляд:

$$\varphi\left(\frac{t_0}{\tau}, \frac{t_N}{\tau}\right) = \frac{\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)^2 dt}{K^2 v^2 \tau} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left[ 2\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^2 + 6\frac{t_0}{\tau} + 5 \right] e^{-2\frac{t_0}{\tau}} - 4 + 2\left(\frac{t_0}{\tau} + 2\right) e^{-\frac{t_0}{\tau}} + \frac{t_0}{\tau} + \left\{ \frac{a^2}{4} \left[ 2\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^2 + 2\frac{t_0}{\tau} + 1 \right] + \frac{ab}{2} \left( 2\frac{t_0}{\tau} + 1 \right) + \frac{b^2}{2} \right\} e^{-2\frac{t_0}{\tau}} - \left\{ \frac{a^2}{4} \left[ 2\left(\frac{t_N}{\tau}\right)^2 + 2\frac{t_N}{\tau} + 1 \right] + \frac{ab}{2} \left( 2\frac{t_N}{\tau} + 1 \right) + \frac{b^2}{2} \right\} e^{-2\frac{t_N}{\tau}}. \quad (3.32)$$

Функцію  $f_n(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$  представлено на рис. 3.5.

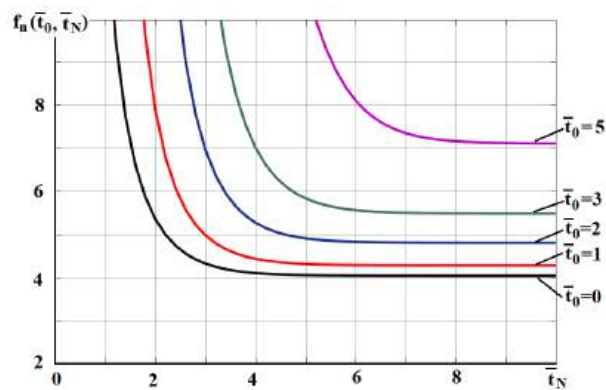


Рис. 3.5 - Функція похибки  $f_n(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$

Очевидно, її значення при зростанні тривалості спостереження наближається не до нуля, а до скінченного значення, яке залежить від параметра  $\bar{t}_0$ . Це визначає, що після закінчення перехідного процесу й стабілізації частоти обертання нові вимірювання не містять додаткової інформації щодо шуканого значення сталої часу.

Кінцеве значення зазначеної функції похибки  $f_n(\bar{t}_0, \infty)$  отримаємо, урахувавши, що при збільшенні терміну спостереження складова функції, що залежить від  $\bar{t}_N$ , наближається до нуля:

$$\varphi\left(\frac{t_0}{\tau}, \infty\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left[ 2\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^2 + 6\frac{t_0}{\tau} + 5 \right] e^{-2\frac{t_0}{\tau}} - 4 + 2\left(\frac{t_0}{\tau} + 2\right) e^{-\frac{t_0}{\tau}} + \frac{t_0}{\tau} + \left\{ \frac{a^2}{4} \left[ 2\left(\frac{t_0}{\tau}\right)^2 + 2\frac{t_0}{\tau} + 1 \right] + \frac{ab}{2} \left( 2\frac{t_0}{\tau} + 1 \right) + \frac{b^2}{2} \right\} e^{-2\frac{t_0}{\tau}}. \quad (3.33)$$

Коректність отриманого результату підтверджується тим, що значення  $t_0 = 0$  відповідає стрибкоподібній зміні витрати палива. Цей випадок представлено на рис. 3.6, де показано, що мінімальне значення функції похибки для зазначеної дії дорівнює 4.

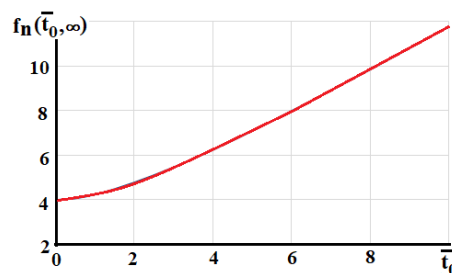


Рис. 3.6 - Функція похибки  $f_n(\bar{t}_0, \infty)$

### 3.4.3 Приклад аналізу похибок на ділянці лінійної зміни витрати палива

Розглянемо випадок, коли спостереження виконуються тільки на ділянці лінійної зміни витрати палива. Порівняємо можливості визначення сталої часу при одній і тій же амплітуді зміни витрати палива та різних значеннях швидкості його зміни. Припущення про однакову амплітуду зміни витрати палива можна пояснити намаганням обмежити та забезпечити однакову похибку, зумовлену заміною вихідної нелінійної моделі на лінійну модель із сталими коефіцієнтами.

Нехай  $\tau = 1$  с;  $K = 10$  (об/хв)/(кг/год);  $\Delta t = 0,2$  с;  $G_0 = 100$  кг/год.

Будемо змінювати значення швидкості  $v$  від 1 до 100 (кг/год)/с, розглядаючи як інтервал спостереження час  $t_0 = G_0/v$ . Визначимо середньоквадратичне відхилення (СКВ) відносної похибки оцінювання сталої часу

$$\frac{\sigma_\tau}{\sigma_n} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2}},$$

$$\text{де } N = \frac{t_0}{\Delta t} = \frac{G_0}{v\Delta t}.$$

Результати представлено в табл. 3.1 і на рис. 3.7.

Порівняння розглянутих варіантів показує, що на похибки оцінки сталої часу протилежний вплив мають два фактори: чутливість частоти обертання до сталої часу та кількість вимірів. Чутливість є прямо пропорційною до швидкості зміни витрати палива. Кількість вимірів є зворотно пропорційною. Напочатку перехідного процесу чутливість є невеликою. Далі вона зростає та через час, який перебільшує приблизно три сталих часу, стабілізується. Оскільки частота обертання після стабілізації зростає лінійно, кожний новий вимір дає додаткову інформацію. Зазначений вплив двох факторів приводить к того, що є оптимальна швидкість зміни витрати палива, при якій СКВ оцінки сталої часу має мінімум. Таким чином, існує швидкість, при якій забезпечується мінімальна похибка оцінювання сталої часу у випадку, коли для спостережень використовується тільки лінійна ділянка.

Таблиця 3.1 - Вплив швидкості зміни витрати палива на похибку оцінки на ділянці лінійної зміни

$v, (\text{кг/час})/\text{с}$	1	5	10	20	50	100
$t_0, \text{с}$	100	20	10	5	2	1
$N$	500	100	50	25	10	5
$\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2$	4990	216875	367549	487132	318206	125339
$\sigma_\tau / \sigma_n, \text{с}/(\text{об/хв})$	0,014	0,002147	0,001649	0,001433	0,001773	0,002825

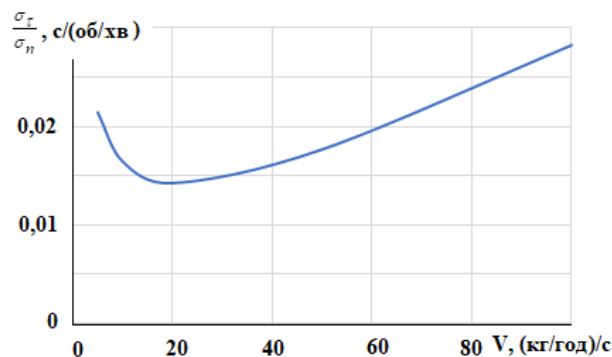


Рис. 3.7 - Залежність відносного СКВ оцінки від швидкості зміни витрати палива на лінійній ділянці

### 3.4.4 Приклад аналізу похибок на повному інтервалі спостереження

Розглянемо той же приклад:  $\tau = 1$  с;  $K = 10$  (об/хв)/(кг/год);  $\Delta t = 0,2$  с;  $\sigma_n = 10$  об/хв;  $G_0 = 100$  кг/год;  $\nu = 20$  (кг/год)/с.

$$\text{Для цих даних } \sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{(KG_0)^2} = 10^{-4}; t_0 = 5 \text{ с}; \bar{t}_0 = 5.$$

$$\text{Тоді } \varphi(\bar{t}_0, \infty) \approx 3,527; f_{n \min} \approx 26/3,527 = 7,088.$$

Відповідно, отримаємо мінімальне значення дисперсії оцінки сталої часу:

$$\sigma_{\tau n}^2 = \bar{\sigma}_{\tau n}^2 \tau^2 = \sigma_n^2 \cdot \tau^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_n(\bar{t}_0, \infty) = 10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,2 \cdot 7,088 = 1,42 \cdot 10^{-4} \cdot \text{с}^2.$$

$3\sigma$  – довірчий інтервал похибки оцінки в цьому випадку дорівнює

$$\Delta = 3\sqrt{\sigma_{\tau n}^2} = 0,036 \text{ с}.$$

Для реального вертолітного турбовального двигуна параметри ротора газогенератора складають: на максимальному режимі  $\tau = 0,3$  с;  $K = 15$  (об/хв)/(кг/год); на режимі малого газу  $\tau = 1,62$  с;  $K = 34$  (об/хв)/(кг/год).

У випадку  $G_0 = 50$  (кг/год)/с,  $\Delta t = 0,2$  с,  $\sigma_n = 15$  об/хв,  $t_0 = 1$  с отримаємо:

На максимальному режимі

$$\sigma_{\tau n} = \sigma_n \cdot \tau \cdot \sqrt{\Delta \bar{t} \cdot f_n(\bar{t}_0, \infty)} = \frac{\sigma_n t_0}{KG_0} \sqrt{\tau \cdot \Delta t \cdot f_n(\bar{t}_0, \infty)} = \frac{15 \cdot 1}{15 \cdot 50} \sqrt{0,3 \cdot 0,2 \cdot 5,711} = 0,0117 \text{ с}.$$

На режимі малого газу

$$\sigma_{\tau n} = \sigma_n \cdot \tau \cdot \sqrt{\Delta \bar{t} \cdot f_n(\bar{t}_0, \infty)} = \frac{\sigma_n t_0}{KG_0} \sqrt{\tau \cdot \Delta t \cdot f_n(\bar{t}_0, \infty)} = \frac{15 \cdot 1}{34 \cdot 50} \sqrt{1,62 \cdot 0,2 \cdot 4,11} = 0,0102 \text{ с}.$$

Відмітимо, що в прикладі, який розглядається, характер вхідного впливу є близьким до стрибкоподібного, тому значення функції похибки є близьким до мінімального, що дорівнює 4. Абсолютні значення похибок оцінювання сталої часу на різних режимах виявилися практично однаковими, однак, унаслідок значної різниці значень сталої часу, відносна похибка на режимі малого газу є дещо меншою, ніж на максимальному режимі.

### 3.4.5 Аналіз складових, зумовлених похибками вимірювання витрати палива та задання параметрів системи

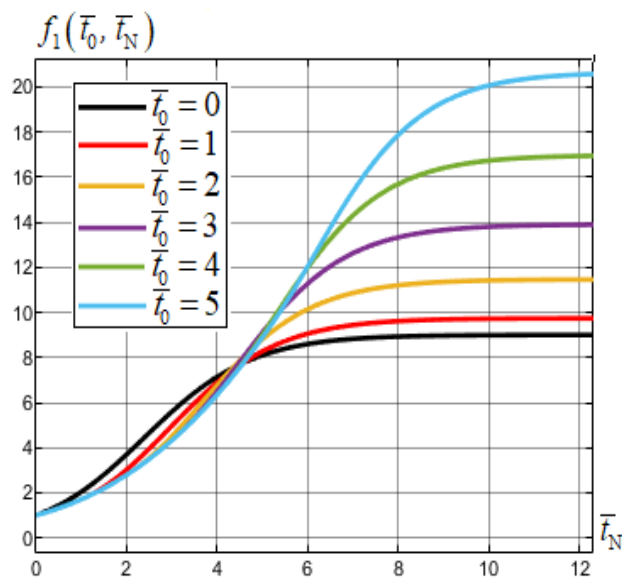
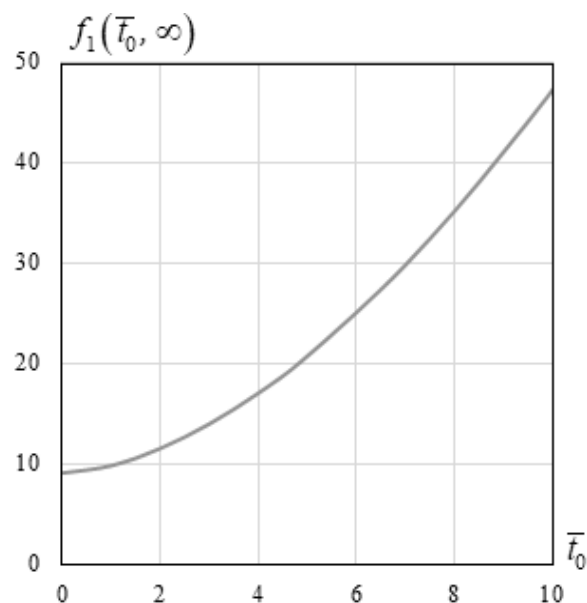
Використовуючи формулу (3.20), розглянемо вплив похибок вимірювання витрати палива, задання коефіцієнту підсилення по витраті палива та часу завершення лінійної ділянки на ділянці стабілізації витрати палива:

$$\bar{\sigma}_{\tau G}^2 = \frac{\sigma_G^2 \cdot \frac{K^4 G_0^2}{t_0^2} \left\{ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right] \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] \left[ 1 + \frac{\tau}{t_0} \left( e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right] dt \right\}^2}{\frac{K^4 G_0^4}{t_0^4} \tau^2 \left[ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right]^2 dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right]^2 dt \right]^2} = \sigma_G^2 \cdot f_1(\bar{t}_0, \bar{t}_N). \quad (3.34)$$

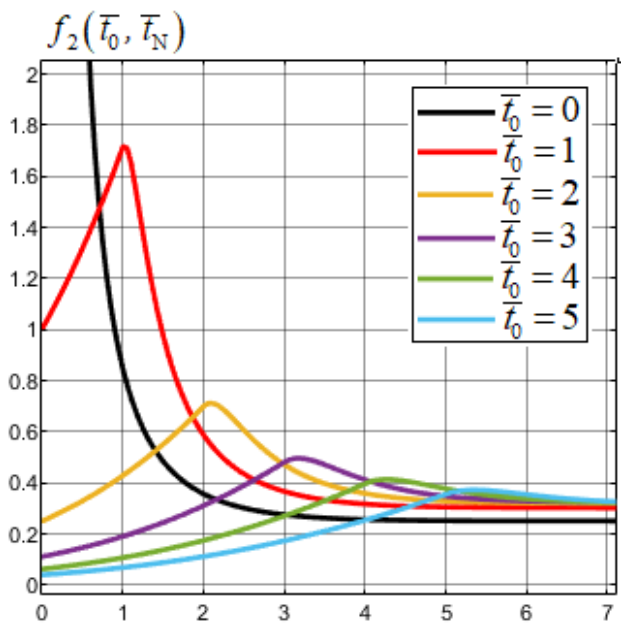
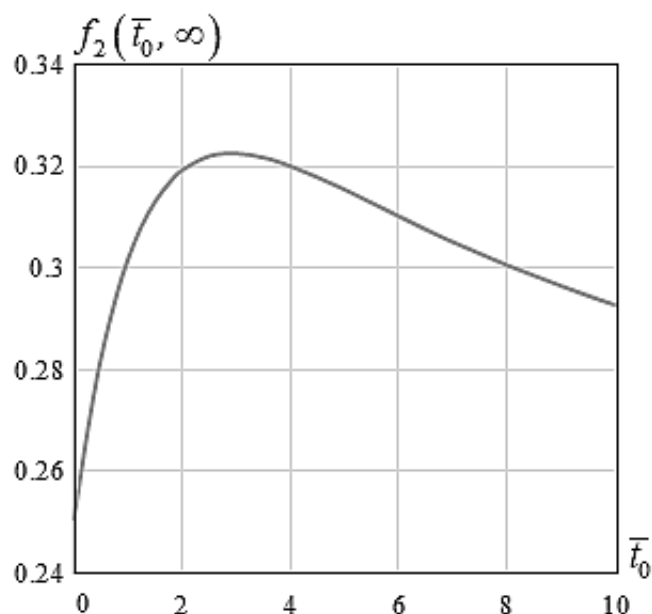
$$\bar{\sigma}_{\tau K}^2 = \frac{\sigma_K^2 \cdot \frac{K^2 G_0^4}{t_0^2} \left\{ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right] \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] \left[ 1 + \frac{\tau}{t_0} \left( e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \right] dt \right\}^2}{\frac{K^4 G_0^4}{t_0^4} \tau^2 \left[ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right]^2 dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right]^2 dt \right]^2} = \bar{\sigma}_K^2 \cdot f_1(\bar{t}_0, \bar{t}_N). \quad (3.35)$$

$$\bar{\sigma}_{\tau t_0}^2 = \frac{\sigma_{t_0}^2 \cdot \frac{K^4 G_0^4}{t_0^4} \left\{ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right] \left[ \frac{t}{t_0} - \frac{\tau}{t_0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] \left[ \left( 1 - \frac{\tau}{t_0} \right) e^{\frac{t_0}{\tau}} + \frac{\tau}{t_0} \right] e^{\frac{t}{\tau}} dt \right\}^2}{\frac{K^4 G_0^4}{t_0^4} \tau^2 \left[ \int_0^{t_0} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right]^2 dt + \int_{t_0}^{t_N} \left[ \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{\frac{t}{\tau}} - \left( 1 + \frac{t-t_0}{\tau} \right) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right]^2 dt \right]^2} = \bar{\sigma}_{t_0}^2 \cdot f_2(\bar{t}_0, \bar{t}_N). \quad (3.36)$$

На рис. 3.8, 3.9 представлена функцію похибки  $f_1(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$  та її граничні значення  $f_1(\bar{t}_0, \infty)$ . Збільшення ділянки лінійної зміни витрати палива призводить до збільшення функції похибки.

Рис. 3.8 - Функція похибки  $f_1(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$ Рис. 3.9 - Функція похибки  $f_1(\bar{t}_0, \infty)$ 

На рис. 3.10, 3.11 представлено функцію похибки  $f_2(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$  та її граничні значення  $f_2(\bar{t}_0, \infty)$ . Функція має максимум:  $f_2(3, \infty) = 0,3225$ .

Рис. 3.10 - Функція похибки  $f_2(\bar{t}_0, \bar{t}_N)$ Рис. 3.11 - Функція похибки  $f_2(\bar{t}_0, \infty)$ 

### 3.4.6 Приклад аналізу сумарної похибки оцінювання сталої часу газогенератора турбовального двигуна

Застосуємо викладену вище методику до аналізу похибок оцінювання сталої часу газогенератора вертолітного турбовального двигуна (ТВаД) типу ТВ3-117. Як

відомо, впливом вільної турбіни на роботу газогенератора можна знехтувати, тому динаміка ротора газогенератора описується рівнянням (3.2).

Розглянемо два режими роботи двигуна: максимальний і режим малого газу. Використаємо такі параметри керуючого впливу і СКВ похибок вихідних даних:

$$G_0 = 100 \text{ (кг/год)/с}; t_0 = 2 \text{ с}; \sigma_n = 20 \text{ об/хв}; \sigma_G = 0,5 \text{ кг/год}; \sigma_K = 0,03; \sigma_{t0} = 0,02 \text{ с}.$$

Вихідні дані та результати розрахунків представлено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Результати розрахунку похибок для газогенератора ТВад

Режим	$\tau, \text{ с}$	$\frac{K, \text{ об/хв}}{\text{кг/год}}$	$\Delta \bar{t}$	$\bar{t}_0$	$f_n$	$f_1$	$f_2$
Макс	0,3	15	0,667	6,67	8,595	28,06	0,3068
МГ	1,62	34	0,124	1,24	4,345	10,08	0,3082
Значення похибок							
Режим	$\sigma_{\tau n}, \text{ с}$	$\sigma_{\tau G}, \text{ с}$	$\sigma_{\tau K}, \text{ с}$	$\sigma_{\tau t0}, \text{ с}$	$\sigma_{\tau \Sigma}, \text{ с}$		
Формула	(3.31)	(3.34)	(3.35)	(3.36)	(3.25)		
Макс	0,0096	0,008	0,0032	0,0017	0,0224		
МГ	0,007	0,026	0,0045	0,009	0,0462		

Аналіз результатів показує, що основний внесок у сумарну похибку на режимі максимальний вносять похибки вимірювання частоти обертання та витрати палива. На режимі МГ основний внесок викликаний похибками вимірювання витрати палива, часу завершення лінійної ділянки та частоти обертання. Використане значення похибки частоти обертання є досить великим. Його можливо зменшити, тоді похибка вимірювання витрати палива стане визначальною. Отримані значення сумарної похибки оцінювання сталої часу на різних режимах роботи двигуна є близькими, що пояснюється дією протилежних чинників: зміною номінальних значень сталої часу та коефіцієнта підсилення по витраті палива.

Таким чином, запропонований підхід до аналізу точності оцінювання параметрів динамічних моделей ГТД розповсюджено на реальний випадок, коли керуюча дія на двигун змінюється лінійно. Розвинено метод прогнозування похибок при оцінці параметрів динамічних моделей ГТД. Для одновального

газогенератора отримано універсальне рівняння, яке визначає похибку оцінки коефіцієнтів лінійної динамічної моделі як функцію всіх основних впливових факторів: похибок вимірювання та частоти реєстрації, інтенсивності тестового впливу та номінальних значень коефіцієнтів моделі. Отримано такі основні результати:

1. Використання питомих параметрів і відповідне перетворення рівнянь, які відбивають зв'язок між похибками оцінювання та впливовими факторами, робить ці рівняння універсальними, придатними для аналізу будь-яких параметрів двигуна та будь-яких впливових дій.
2. Інструментальні похибки оцінок сталої часу двигуна мають нижню межу; це пояснюється скінченною тривалістю перехідних процесів, наприкінці яких вихідні параметри стабілізуються та стають нечутливими до динамічних параметрів двигуна (зокрема сталої часу). Ці похибки відповідають тривалому періоду реєстрації, коли нові дані не дають корисної інформації про сталу часу внаслідок того, що перехідний процес вже завершився.
3. Параметричні похибки оцінок сталої часу двигуна, зумовлені похибками визначення усталеного значення витрати палива та коефіцієнта підсилення, на відміну від інструментальних, за часом спостереження зростають. Це пояснюється тим, що оцінки динамічних параметрів (сталої часу) адаптуються з метою компенсації похибок, зумовлених неточністю суто статичних параметрів моделі. Втім ці параметричні похибки мають верхню межу через скінченну тривалість перехідних процесів. Динаміка алгоритму оцінювання (зміни оцінок) відрізняється від динаміки перехідного процесу: час стабілізації параметричних похибок більший за час стабілізації перехідного процесу.
4. Параметричні похибки оцінок сталої часу двигуна, зумовлені похибками визначення часу стабілізації витрати палива (часу завершення лінійної ділянки), на відміну від інструментальних та параметричних (п. 3), зростають, а потім спадають. Наявність ділянки зростання похибок

пояснюється тими ж причинами, що і в попередньому пункті (п. 3). Джерелом є похибка визначення залежності витрати палива від часу. Після завершення лінійної ділянки похибки спадають, оскільки джерело похибки зникає. Момент початку спадання похибок не збігається з моментом завершення лінійної ділянки. Таке неочевидне явище можна пояснити. Якби функція похибок була часткою функцій чутливості та коли функція-ділене (чисельник) починає спадати, функція-дільник (знаменник) зростає, тоді дійсно слід очікувати початку спадання похибки в момент стабілізації витрати палива. Але насправді функція похибок є квадратом частки інтегралів зазначених функцій; інтеграл у чисельнику не спадає, а продовжує зростати повільніше, тому спостерігається затримка моменту спадання в порівнянні з моментом стабілізації витрати палива. Отже, похибки оцінок сталих часу, зумовлені похибками визначення часу стабілізації керуючого впливу мають екстремум.

5. У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при зміні витрати палива з постійною швидкістю та наступною стабілізацією визначено похибку оцінювання при необмеженому часі спостереження, яка залежить від зазначеної швидкості та амплітуди вхідного впливу.

На прикладі газогенератора реального вертолітного турбовального двигуна отримано конкретні значення складових похибки оцінювання сталої часу. Показано, що головний внесок роблять похибки вимірювання частоти обертання ротора та витрати палива. Сумарна похибка внаслідок суперечливого впливу різних факторів слабо залежить від режиму роботи двигуна. Для розглянутого прикладу вона складає біля 0,05 с, що є суттєвим для багатьох задач, для рішення яких використовуються динамічні моделі двигунів. Це показує актуальність аналізу похибок оцінювання параметрів динамічних моделей, методика якого набула подальшого розвитку в цій роботі.

### 3.5 Висновки за третім розділом

Таким чином, системи адаптивного керування авіаційних двигунів потребують здатності до автоматичного самоналаштування, щоб урахувати відмінності статичних і динамічних параметрів кожного окремого двигуна. Для кращої оцінки невимірюваних параметрів, метод адаптації повинен ґрунтуватися на похибках вимірювання, а також аналізі апріорної інформації про ці похибки.

У результаті опрацювання загальної методики аналізу похибок оцінювання параметрів динамічних моделей отримано такі результати.

- 1) Доведено, що похибки параметричного оцінювання суттєво залежать від багатьох факторів, таких як істинні значення параметрів, що оцінюються, похибки вимірювань та апріорна інформація про модель.
- 2) Розроблено узагальнений підхід до аналізу похибок адаптації моделі ГТД, головні концепції якого полягають у використанні лінійної динамічної моделі в околиці істинних значень шуканих параметрів, розгляді похибок, що впливають, як незалежних нормально розподілених випадкових величин, використанні питомих параметрів і відповідного перетворення рівнянь, які відбивають зв'язок між похибками оцінювання та впливовими факторами, що робить ці рівняння універсальними, придатними для аналізу будь-яких параметрів двигуна та будь-яких впливових дій.
- 3) Із використанням зазначеного методу отримано нові співвідношення, що визначають залежність похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів від точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів. Із використанням зазначених співвідношень суттєво вдосконалено метод самоналаштування бортових динамічних моделей за результатами реєстрації параметрів під час роботи двигуна, що забезпечило моніторинг точності оцінок динамічних параметрів і визначення достатності отриманої інформації. Ці елементи (нові співвідношення та вдосконалення методу самоналаштування моделей) сформульовано як елементи наукової новизни роботи.

- 4) У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при стрибкоподібній зміні витрати палива визначено мінімальну можливу похибку оцінювання. Зокрема, при номінальному значенні сталої часу 1 с і коефіцієнті посилення подачі палива 10, похибки вимірювання частоти обертання ротора 0,2 %, витрати палива 0,5 %, стрибкоподібної зміні подачі палива на 10 кг/с і частоті реєстрації 5 Гц, мінімальне середньоквадратичне відхилення похибки оцінки сталої часу становитиме 0,2 с, тобто 20 %. Цей значний рівень похибки вимагає ретельного планування випробувань і постійної перевірки під час застосування запропонованого методу.
- 5) У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при зміні витрати палива з постійною швидкістю та наступною стабілізацією визначено мінімальну можливу інструментальну похибку оцінювання, яка залежить від зазначеної швидкості та амплітуди вхідного впливу.
- 6) На прикладі газогенератора реального вертолітного турбовального двигуна отримано конкретні значення складових похибки оцінювання сталої часу. Показано, що головний внесок роблять похибки вимірювання частоти обертання ротора та витрати палива, інші складові можна не урахувувати. Сумарна похибка внаслідок суперечливого впливу різних факторів слабо залежить від режиму роботи двигуна. Для розглянутого прикладу вона складає біля 0,05 с, що є суттєвим для багатьох задач, для рішення яких використовуються динамічні моделі двигунів. Це показує актуальність аналізу похибок оцінювання параметрів динамічних моделей, методика якого набула подальшого розвитку в цій роботі.
- 7) Результати цього розділу опубліковано в роботах автора [2] – [4].

### **Список літератури до третього розділу**

1. Visser, W. P. J. A Generic Approach for Gas Turbine Adaptive Modeling / W. P. J. Visser, O. Kogenhop, M. Oostveen // NASA Report NLR-TP-2004-391. – 2004. – 23 p.

2. Yepifanov, S. Development of turboshaft engine adaptive dynamic model: analysis of estimation errors / S. Yepifanov, O. Bondarenko // Transactions on Aerospace Research. – 2022. - Vol. 269, No. 4. – P. 31-43. doi: 10.2478/tar-2022-0024.
3. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності самоналаштування динамічної моделі газотурбінного двигуна / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2024. - № 2 (194). – С. 38-48. doi: 10.32620/aktt.2024.2.04.
4. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності оцінювання сталої часу одновального газотурбінного двигуна в реальних умовах / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2024. - № 4 sup2 (198). – С. 69-79. doi: 10.32620/aktt.2024.sup2.09.

## РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ ПОХИБОК ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ДВОВАЛЬНОГО ТРДД

Запропонований загальний підхід до визначення похибок оцінювання параметрів динамічних моделей двигунів у попередньому розділі був детально реалізований стосовно одновального двигуна або газогенератора. Проте переважна більшість двигунів, що знаходяться нині в експлуатації, є двовальними, тому в цій роботі розглянуто похибки оцінювання динамічних характеристик двовальними ГТД при використанні вимірювань частот обертання роторів. Додатково виконано аналіз максимальних значень похибок оцінювання при необмеженому часі спостереження, коли інформативність наближається до нуля.

Як об'єкт дослідження обрано турбореактивний двоконтурний двигун зі змішуванням потоків типу AI-322, структура математичної моделі якого представлена в розділі 2.

### 4.1 Формування динамічних параметрів двигуна

Запишемо систему рівнянь (2.21) для двовального двигуна у вигляді

$$\begin{cases} T_1 \dot{n}_1 + \Delta n_1 = K_{n12} \Delta n_2 + K_{G1} \Delta G; \\ T_2 \dot{n}_2 + \Delta n_2 = K_{n21} \Delta n_1 + K_{G2} \Delta G, \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – сталі часу роторів низького та високого тиску відповідно;

$K_G$  – коефіцієнти підсилення витрати палива  $i$ -го ротора (1 – низького тиску, 2 – високого тиску);

$\Delta G$  – зміна витрати палива в основній камері згоряння;

$\Delta n_i$  – зміна частоти обертання  $i$ -го ротора;

$K_{nij}$  – коефіцієнти впливу  $j$ -го ротора на  $i$ -й ротор.

Виконавши перетворення рівнянь (4.1), отримаємо диференціальні рівняння для кожного ротора:

$$\begin{cases} \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \ddot{n}_1 + \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \dot{n}_1 + \Delta n_1 = \frac{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}{1 - K_{n12} K_{n21}} \left[ \frac{T_2 K_{G1}}{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}} \dot{G} + \Delta G \right]; \\ \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \ddot{n}_2 + \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \dot{n}_2 + \Delta n_2 = \frac{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}{1 - K_{n12} K_{n21}} \left[ \frac{T_1 K_{G2}}{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}} \dot{G} + \Delta G \right]. \end{cases} \quad (4.2)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}}; & 2\tau\xi &= \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}}; \\ K_G^{n1} &= \frac{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}{1 - K_{n12} K_{n21}}; & K_G^{n2} &= \frac{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}{1 - K_{n12} K_{n21}}; \\ \tau_G^{n1} &= \frac{T_2 K_{G1}}{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}; & \tau_G^{n2} &= \frac{T_1 K_{G2}}{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}. \end{aligned}$$

Тоді модель (4.2) можемо записати як

$$\begin{cases} \tau^2 \ddot{n}_1 + 2\tau\xi \dot{n}_1 + \Delta n_1 = K_G^{n1} (\tau_G^{n1} \dot{G} + \Delta G); \\ \tau^2 \ddot{n}_2 + 2\tau\xi \dot{n}_2 + \Delta n_2 = K_G^{n2} (\tau_G^{n2} \dot{G} + \Delta G). \end{cases} \quad (4.3)$$

Аналізуючи систему (4.3), можна виділити такі комплекси параметрів динамічної моделі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \\ \xi \end{array} \right\} - \text{значення, що відображають власні динамічні властивості двигуна};$$

$K_G^{n1}, K_G^{n2}$  – значення, що відображають статичні властивості двигуна (вони можуть бути визначені зі статичних характеристик двигуна);

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_G^{n1} \\ \tau_G^{n2} \end{array} \right\} - \text{значення, що відображають динаміку за впливами.}$$

Форма запису (4.3) має ряд переваг:

- 1) У такій формі запису розділені статичні та динамічні властивості двигуна.
- 2) Динамічні властивості поділено на параметри, що відображають незалежно тривалість та коливальність процесу. Тривалість процесу відображає еквівалентна стала часу  $\tau$ , що має розмірність часу. Коливальність процесу відображає безрозмірний відносний коефіцієнт

загасання  $\xi$ . Якщо  $\xi=0$  – процес не згасає,  $0<\xi<1$  – коливальний,  $\xi \geq 1$  – аперіодичний.

Ліві частини рівнянь для частот обертання є однаковими, а це означає, що власні властивості будь-якої з частот обертання є ідентичними, а відмінність поведінки визначають коефіцієнти правої частини рівняння. Таким чином, як універсальне для будь-якого параметра використаємо диференціальне рівняння вигляду

$$\tau^2 \ddot{n} + 2\tau\xi \dot{n} + \Delta n = K_G (\tau_G \dot{G} + \Delta G). \quad (4.4)$$

#### 4.2 Отримання розв'язку рівняння та скорочення кількості незалежних динамічних характеристик

Розв'яжемо рівняння (4.4) при ступінчастій зміні витрати палива:

$$\Delta G = \begin{cases} 0, & t = 0; \\ G_0, & t > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$n(0) = 0; \dot{n}(0) = K_G \frac{\tau_G}{\tau^2}. \quad (4.6)$$

- для  $\xi < 1$ :

$$n(t) = K_G G_0 \left( \begin{array}{l} 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{t}{\tau}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\xi - \frac{\tau_G}{\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{t}{\tau}\right) \right] \end{array} \right) = K_G G_0 \left( 1 - e^{-\xi \bar{t}} \left[ \begin{array}{l} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \bar{t}\right) + \\ + \frac{\xi - \bar{\tau}_G}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \bar{t}\right) \end{array} \right] \right); \quad (4.7)$$

- для  $\xi = 1$ :

$$n(t) = K_G G_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \left( 1 - \frac{\tau_G}{\tau} \right) \frac{t}{\tau} \right) \right\} = K_G G_0 \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right\}; \quad (4.8)$$

- для  $\xi > 1$ :

$$n(t) = K_G G_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \left[ \frac{\tau_G}{\tau} - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} + \left[ -\frac{\tau_G}{\tau} + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \right) \right\} = \quad (4.9)$$

$$= K_G G_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left( \left[ \bar{\tau}_G - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \cdot e^{-\bar{t}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} + \left[ -\bar{\tau}_G + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \cdot e^{-\bar{t}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \right) \right\}.$$

Для розглянутого прикладу залежності динамічних коефіцієнтів від режиму роботи двигуна мають вигляд, показаний на рис. 4.1-4.3. Кожна з показаних на цих рисунках точок отримана окремо для кожного режиму за допомогою вихідної нелінійної повузлової статичної моделі двигуна розрахунковими методами, описаними в роботі [1].

Аналіз коефіцієнтів, поданих на рис. 4.1-4.3, показує:

- відносний коефіцієнт згасання  $\zeta$  в усьому діапазоні робочих режимів є близьким до 1;
- спостерігається наявність залежності  $\tau_G^{n_1}, \tau_G^{n_2}$  від  $\tau$ .

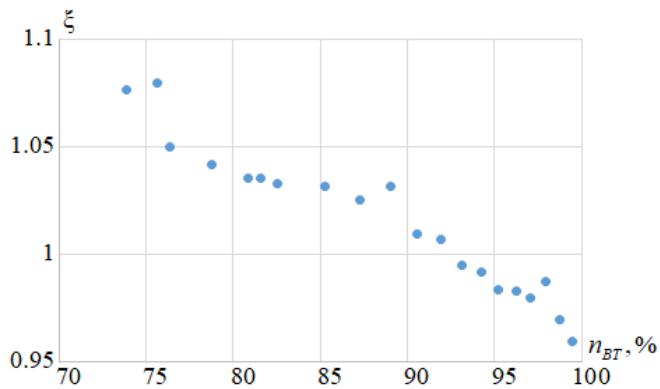


Рис. 4.1 - Коефіцієнт  $\zeta$  за режимами

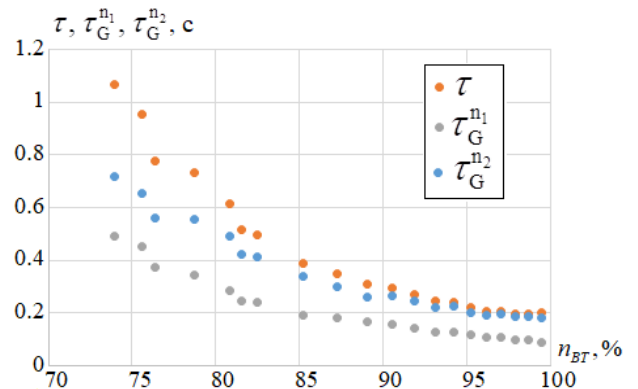


Рис. 4.2 - Сталі часу  $\tau, \tau_G^{n_1}, \tau_G^{n_2}$  за режимами

Це дозволяє зробити декілька кроків до спрощення:

- 1) використати розв'язок при  $\zeta = 1$ , і тим самим виключити один з динамічних параметрів із переліку незалежних;
- 2) вигляд наведених вище розв'язків надає можливість використовувати як

$$\text{аргументи відносні параметри } \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \bar{\tau}_G = \frac{\tau_G}{\tau};$$

Коефіцієнти підсилення витрати палива можна визначити за статичними характеристиками двигуна – залежностями частот обертання роторів від витрати палива.

### 4.3 Аналіз задачі оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна при ступінчастій зміні витрати палива

Розглянемо завдання оцінювання динамічних коефіцієнтів моделі одного ротора за його перехідною характеристикою.

Застосуємо для визначення значень постійних часу метод найменших квадратів (МНК). Тоді оцінка  $\hat{\theta} = [\tau \quad \tau_G]^T$  визначається результатом мінімізації МНК-функціоналу  $\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{j=1}^N [n_j - n(\bar{\theta}, t_j)]^2$ .

Унаслідок нелінійного характеру математичної моделі ця задача мінімізації є нелінійною. Для її чисельного розв'язання необхідно використовувати ітераційний метод, відповідно до якого на кожному етапі математична модель лінеаризується за шуканими параметрами і виконується корекція оцінки:

$$\hat{\theta}^i = \hat{\theta}^{i-1} + \delta\hat{\theta}^i,$$

де  $\delta\hat{\theta}^i = (H^{(i-1)T} H^{i-1})^{-1} H^{(i-1)T} \Delta\bar{n}^i$  – лінійна МНК-оцінка коригуючої поправки;

$H^{i-1}$  –  $(n \cdot 2)$  - матриця чутливості, що відповідає поточній оцінці  $\hat{\theta}^{i-1}$ ;

$\Delta\bar{n}^i$  –  $(n \cdot 1)$ - вектор відхилень виміряного значення від значень, розрахованих з використанням математичної моделі:

Похибки оцінок визначаються коваріаційною матрицею

$$P(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \sigma_\tau^2 & \text{cov}(\tau, \tau_G) \\ \text{cov}(\tau_G, \tau) & \sigma_{\tau_G}^2 \end{bmatrix} = \sigma_n^2 (H^T H)^{-1} = \sigma_n^2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 & \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \\ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j & \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Для визначення сталої часу будемо використовувати значення частоти обертання  $n_j$ , зареєстровані в моменти часу  $t_j, j = 1, \dots, N$  з постійним інтервалом спостереження  $\Delta t$ .

Оцінка, отримана методом найменших квадратів (МНК), мінімізує функціонал

$$\Phi(\Delta\tau) = \sum_{j=1}^N [n_j - n_{\text{mod}}(\vec{\theta}, t_j)]^2.$$

Приймаючи, що структурні похибки моделі є відсутніми, підставимо в МНК-функціонал значення

$$n_{\text{mod}}(\vec{\theta}, t_j) = n_{\text{mod}}(\vec{\theta}^0, t_j) - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j \Delta\tau_G - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0 - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \left(\frac{\partial n}{\partial \xi}\right)_j \Delta \xi,$$

де індекс «0» відповідає істинному значенню параметрів, а  $\Delta$  – відхилення (похибки) параметрів моделі (з яких  $\tau, \tau_G$  є шуканими параметрами,  $K_G$  та  $\xi$  задається,  $G_0$  визначається з експерименту).

З умови мінімуму цього функціоналу отримаємо вирази для оцінок шуканих параметрів:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\Delta\tau)}{\partial \Delta\tau} &= -2 \sum_{j=1}^N \left[ \Delta n_j - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j \Delta\tau_G - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0 - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \left(\frac{\partial n}{\partial \xi}\right)_j \Delta \xi \right] \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j = 0; \\ \frac{\partial \Phi(\Delta\tau_G)}{\partial \Delta\tau_G} &= -2 \sum_{j=1}^N \left[ \Delta n_j - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j \Delta\tau_G - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0 - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \left(\frac{\partial n}{\partial \xi}\right)_j \Delta \xi \right] \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j = 0. \end{aligned}$$

Отримана система двох рівнянь з невідомими  $\Delta\tau$  и  $\Delta\tau_G$ :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j^2 \Delta\tau + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j \Delta\tau_G = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \Delta n_j\right) - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0 - \\ - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi}\right)_j \Delta \xi; \\ \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j \Delta\tau + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G}\right)_j^2 \Delta\tau_G = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G} \Delta n_j\right) - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0 - \\ - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi}\right)_j \Delta \xi. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є:

$$\begin{aligned} \Delta \tau = & \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \Delta n \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \Delta n \right)_j \right] + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \right] \Delta G_0 + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \right] \Delta K_G + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j \right] \Delta \xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_G = & \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \Delta n \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \Delta n \right)_j \right] + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \right] \Delta G_0 + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \right] \Delta K_G + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j \right] \Delta \xi \end{aligned}$$

$$\text{де } D = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 - \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \right]^2$$

$$\Delta \tau = (\Delta \tau)_n + (\Delta \tau)_G + (\Delta \tau)_K + (\Delta \tau)_\xi; \quad \Delta \tau_G = (\Delta \tau_G)_n + (\Delta \tau_G)_G + (\Delta \tau_G)_K + (\Delta \tau_G)_\xi.$$

Вважаючи похибки незалежними випадковими величинами, отримаємо дисперсію сумарної похибки:

$$\sigma_{\tau \Sigma}^2 = \sigma_{\tau n}^2 + \sigma_{\tau G}^2 + \sigma_{\tau K}^2 + \sigma_{\tau \xi}^2. \quad (4.10)$$

$$\sigma_{\tau_G \Sigma}^2 = \sigma_{\tau_G n}^2 + \sigma_{\tau_G G}^2 + \sigma_{\tau_G K}^2 + \sigma_{\tau_G \xi}^2. \quad (4.11)$$

Дисперсії похибок сталих часу, зумовлених похибками вимірювання частоти обертання та похибками значень коефіцієнта підсилення, витрати палива, відносного коефіцієнта загасання:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tau}^2 &= \frac{1}{D^2} \left[ \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 - \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \right] \sigma_n^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \right]^2 \sigma_{G_0}^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \right]^2 \sigma_{K_G}^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j \right]^2 \sigma_{\xi}^2, \\
\sigma_{\tau_G}^2 &= \frac{1}{D^2} \left[ \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 - \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \right] \sigma_n^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \right]^2 \sigma_{G_0}^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \right]^2 \sigma_{K_G}^2 + \\
&+ \frac{1}{D^2} \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j \right]^2 \sigma_{\xi}^2,
\end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
M_{\tau n} &= \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j - \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \\
M_{\tau G} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \\
M_{\tau K} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \\
M_{\tau \xi} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j \\
M_{\tau_G n} &= \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j - \left( \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \right)^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \\
M_{\tau_G G} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} \right)_j \\
M_{\tau_G K} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} \right)_j \\
M_{\tau_G \xi} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} \right)_j
\end{aligned}$$

Можемо подати вирази для дисперсій оцінок у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tau}^2 &= \frac{M_{\tau n}}{D^2} \sigma_n^2 + \left( \frac{M_{\tau G}}{D} \right)^2 \sigma_G^2 + \left( \frac{M_{\tau K}}{D} \right)^2 \sigma_{K_G}^2 + \left( \frac{M_{\tau \xi}}{D} \right)^2 \sigma_{\xi}^2, \\
\sigma_{\tau_G}^2 &= \frac{M_{\tau_G n}}{D^2} \sigma_n^2 + \left( \frac{M_{\tau_G G}}{D} \right)^2 \sigma_G^2 + \left( \frac{M_{\tau_G K}}{D} \right)^2 \sigma_{K_G}^2 + \left( \frac{M_{\tau_G \xi}}{D} \right)^2 \sigma_{\xi}^2,
\end{aligned}$$

Виконуємо перехід від сум до інтегралів для усіх складових дисперсій:

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j - \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)_j \right]^2 = \\
&= \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt \cdot \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)^2 dt - \left[ \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right) dt \right]^2 \right]
\end{aligned}$$



Запишемо вирази похідних для розв'язку (4.7) за параметрами  $\tau, \tau_G, K_G, G_0$ , а також похідні за  $\xi$  для розв'язків (4.6) та (4.8):

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -\frac{K_G G_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \left(1 - \frac{\tau_G}{\tau}\right) \cdot \frac{t}{\tau} + 2 \frac{\tau_G}{\tau} \right] = -\frac{K_G G_0}{\tau} e^{-\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2 \bar{\tau}_G \right];$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau_G} = \frac{K_G G_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{K_G G_0}{\tau} \bar{t} \cdot e^{-\bar{t}}; \quad \frac{\partial n}{\partial K_G} = G_0 \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right\};$$

$$\frac{\partial n}{\partial G_0} = K_G \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right\};$$

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} (\xi < 1) = -\frac{K_G^n G_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{\tau}} \left( \frac{\tau_G \cdot \xi - \tau}{\tau \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \cos \left( \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\tau_G \cdot t \cdot (1 - \xi^2) + \tau (\tau - \tau_G \cdot \xi)}{\tau^2 (1 - \xi^2)} \right).$$

$$\cdot \sin \left( \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{t}{\tau} \right) = -\frac{K_G^n G_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \bar{t}} \left( \frac{\bar{\tau}_G \cdot \xi - 1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \bar{t} \cdot \cos \left( \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \bar{t} \right) + \bar{\tau}_G \cdot \bar{t} + \frac{1 - \bar{\tau}_G \cdot \xi}{1 - \xi^2} \cdot \sin \left( \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \bar{t} \right) \right)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} (\xi > 1) = -\frac{K_G^n G_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \right) = -\frac{K_G^n G_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( A \cdot e^{-\bar{t}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} + B \cdot e^{-\bar{t}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \right)$$

$$A = -\frac{\xi}{\xi^2 - 1} \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \frac{\tau_G}{\tau} - \xi \right) + \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right) - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \frac{\tau_G}{\tau} - \xi \right) \frac{t}{\tau} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) =$$

$$= -\frac{\xi}{\xi^2 - 1} \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \bar{\tau}_G - \xi \right) + \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right) - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \bar{\tau}_G - \xi \right) \bar{t} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right)$$

$$B = -\frac{\xi}{\xi^2 - 1} \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{\tau_G}{\tau} + \xi \right) + \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + 1 \right) - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{\tau_G}{\tau} + \xi \right) \frac{t}{\tau} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) =$$

$$= -\frac{\xi}{\xi^2 - 1} \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \bar{\tau}_G + \xi \right) + \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + 1 \right) - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \bar{\tau}_G + \xi \right) \bar{t} \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right)$$

Розглядаємо випадок коли значення  $\xi$  знаходяться в околі 1, знайдемо границю:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{\partial n}{\partial \xi} (\xi < 1) &= \lim_{\xi \rightarrow 1^+} \frac{\partial n}{\partial \xi} (\xi > 1) = -K_G G_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \left( \frac{\tau_G}{\tau} + \frac{1 - \frac{\tau_G}{\tau}}{3} \cdot \frac{t}{\tau} \right) = \\ &= -K_G G_0 e^{-\bar{t}} \bar{t}^{-2} \left( \frac{\bar{\tau}_G}{\tau} + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) \end{aligned}$$

Запишемо вирази для інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau^2} \int_0^{t_N} e^{-2\frac{t}{\tau}} \left[ \left( 1 - \frac{\tau_G}{\tau} \right) \cdot \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + 2 \frac{\tau_G}{\tau} \cdot \frac{t}{\tau} \right]^2 dt = \\ &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t}^{-2} e^{-2\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right]^2 d\bar{t} = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G); \\ \int_0^{t_N} \left( \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \right)^2 dt &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau^2} \int_0^{t_N} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t}^{-2} \cdot e^{-2\bar{t}} d\bar{t} = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_2(\bar{t}_N); \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} dt &= -\frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t}^{-2} \cdot e^{-2\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right] d\bar{t} = -\frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial K_G} dt &= -K_G G_0^2 \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right] \left[ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right] d\bar{t} = -K_G G_0^2 \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G); \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial G_0} dt &= -K_G^2 G_0 \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right] \left[ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right] d\bar{t} = -K_G^2 G_0 \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G); \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial K_G} dt &= K_G G_0^2 \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right] d\bar{t} = K_G G_0^2 \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G); \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial G_0} dt &= K_G^2 G_0 \int_0^{\bar{t}_N} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ 1 - e^{-\bar{t}} \left( 1 + (1 - \bar{\tau}_G) \bar{t} \right) \right] d\bar{t} = K_G^2 G_0 \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G); \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} dt &= (K_G G_0)^2 \int_0^{\bar{t}_N} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right) \left( \frac{\bar{\tau}_G}{\tau} + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = (K_G G_0)^2 \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\ \int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} dt &= -(K_G G_0)^2 \int_0^{\bar{t}_N} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( \frac{\bar{\tau}_G}{\tau} + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = -(K_G G_0)^2 \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\partial n}{\partial \xi} dt = (K_G G_0)^2 \int_0^{\bar{t}_N} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right) \left( \frac{\bar{t}}{\tau_G} + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = (K_G G_0)^2 \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$$

$$\int_0^{t_N} \frac{\partial n}{\partial \tau_G} \frac{\partial n}{\partial \xi} dt = -(K_G G_0)^2 \int_0^{\bar{t}_N} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( \frac{\bar{t}}{\tau_G} + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = -(K_G G_0)^2 \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$$

Ураховуючи вирази для інтегралів:

$$D = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

$$M_{\tau n} = \frac{1}{(\Delta t)^3} \frac{(K_G G_0)^6}{\tau^3} \left[ \varphi_2^2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) \right]$$

$$M_{\tau G} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{K_G^4 G_0^3}{\tau} \left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_2(\bar{t}_N) \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

$$M_{\tau \xi} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau} \left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

$$M_{\tau_G n} = \frac{1}{(\Delta t)^3} \frac{(K_G G_0)^6}{\tau^3} \left[ \varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

$$M_{\tau_G G} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{K_G^4 G_0^3}{\tau} \left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_1(\bar{t}_N) \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

$$M_{\tau_G \xi} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau} \left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]$$

Задля універсальності формул розрахунку похибки вводимо функції, які залежать виключно від відносних параметрів. Для отримання універсальної

характеристики введемо безрозмірні змінні  $\bar{n} = \frac{n}{K_G G_0}$ ;  $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$ ;  $\bar{\tau}_G = \frac{\tau_G}{\tau}$ ;  $\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{\tau}$ ,

де  $\tau$  – істинне значення сталої часу двигуна;

$K_G$  – істинне значення коефіцієнта підсилення.

Тепер можемо записати вирази для складових похибок

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tau n}^2 &= \frac{M_{\tau n}}{D^2} \sigma_n^2 = \frac{\frac{1}{(\Delta t)^3} \frac{(K_G G_0)^6}{\tau^3} \left[ \varphi_2^2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) \right]}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_n^2 = \tau^2 \bar{\sigma}_n^2 \Delta \bar{t} f_{\tau n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\
f_{\tau n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\varphi_2^2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N)}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2} \\
\sigma_{\tau G}^2 &= \left( \frac{M_{\tau G}}{D} \right)^2 \sigma_G^2 = \frac{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{K_G^4 G_0^3}{\tau} \left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_2(\bar{t}_N) \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_G^2 = \\
&= \tau^2 \bar{\sigma}_G^2 f_{\tau G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\
f_{\tau G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_2(\bar{t}_N) \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2} \\
\sigma_{\tau \xi}^2 &= \left( \frac{M_{\tau \xi}}{D} \right)^2 \sigma_\xi^2 = \frac{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau} \left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_\xi^2 = \\
&= \tau^2 \sigma_\xi^2 f_{\tau \xi}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\
f_{\tau \xi}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_2(\bar{t}_N) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2} \\
\sigma_{\tau G n}^2 &= \frac{M_{\tau G n}}{D^2} \sigma_n^2 = \frac{\frac{1}{(\Delta t)^3} \frac{(K_G G_0)^6}{\tau^3} \left[ \varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_n^2 = \\
&= \tau^2 \bar{\sigma}_n^2 \Delta \bar{t} f_{\tau G n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\
f_{\tau G n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau_G G}^2 &= \left( \frac{M_{\tau_G G}}{D} \right)^2 \sigma_G^2 = \frac{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{K_G^4 G_0^3}{\tau} \left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_1(\bar{t}_N) \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_G^2 = \\ &= \tau^2 f_{\tau_G G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \bar{\sigma}_G^2 \\ f_{\tau_G G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\left[ \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) - \varphi_1(\bar{t}_N) \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2} \\ \sigma_{\tau_G \xi}^2 &= \left( \frac{M_{\tau_G \xi}}{D} \right)^2 \sigma_\xi^2 = \frac{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau} \left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2}{\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right] \right)^2} \sigma_\xi^2 = \\ &= \tau^2 \sigma_\xi^2 f_{\tau_G \xi}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \\ f_{\tau_G \xi}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) &= \frac{\left[ -\varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_6(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) + \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_7(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2}{\left[ \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \cdot \varphi_2(\bar{t}_N) - \varphi_3^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G) \right]^2} \end{aligned}$$

На рис. 4.4–4.9 подано функції впливів інструментальних та параметричних похибок моделі на похибки оцінок динамічних характеристик двигуна.

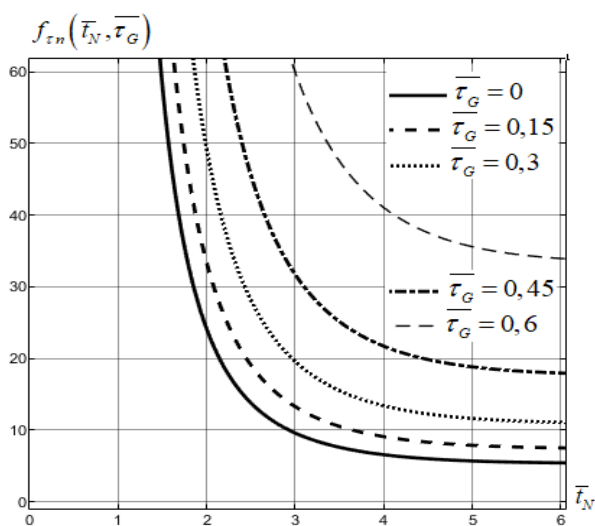


Рис. 4.3 - Функція похибки  $f_{\tau_n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$

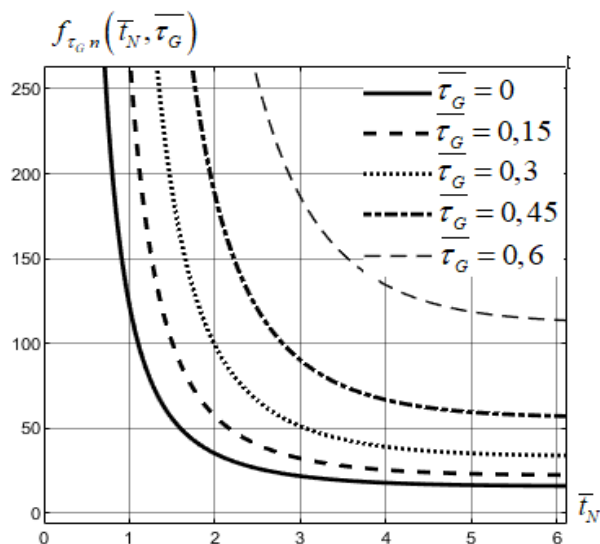
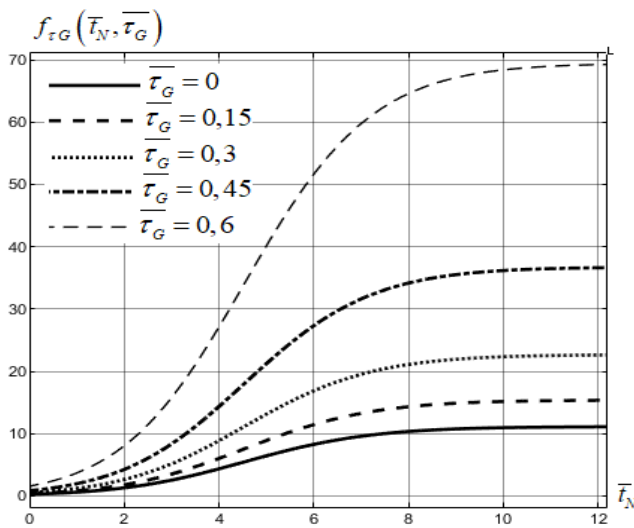
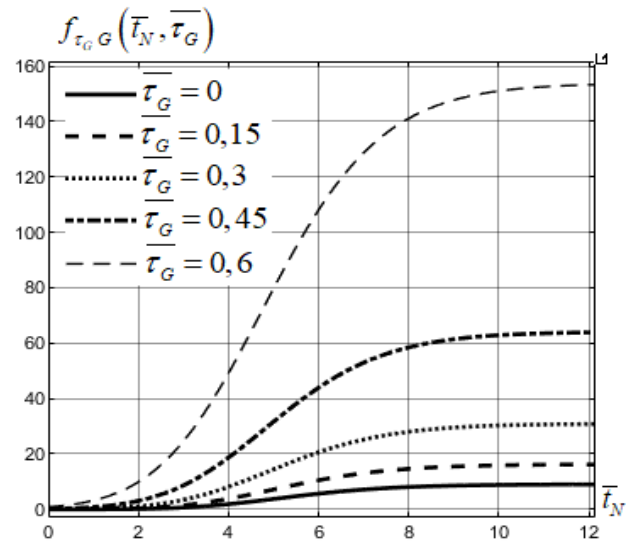
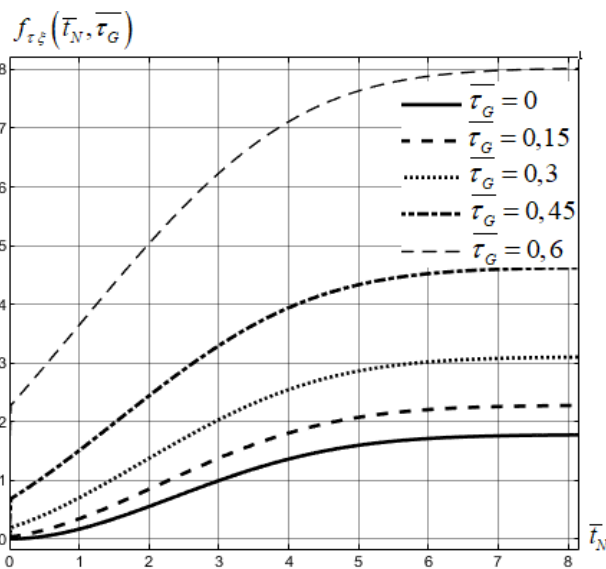
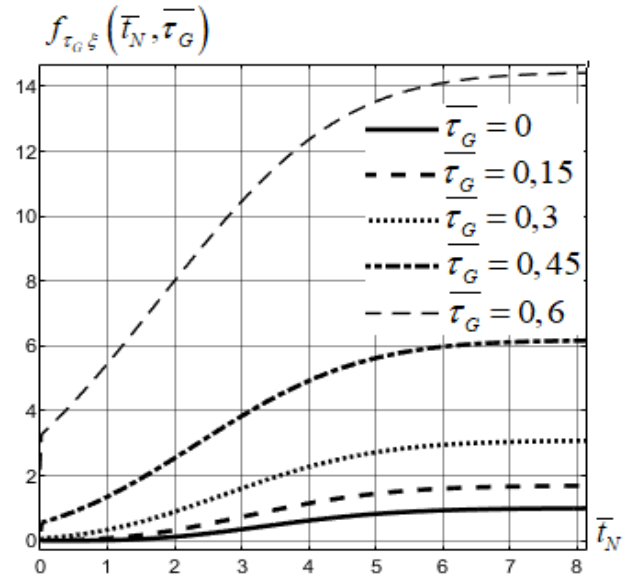


Рис. 4.4 - Функція похибки  $f_{\tau_{Gn}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$

Рис. 4.5 - Функція похибки  $f_{\tau_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ Рис. 4.6 - Функція похибки  $f_{\tau_{G,G}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ Рис. 4.7 - Функція похибки  $f_{\tau_{\xi}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ Рис. 4.8 - Функція похибки  $f_{\tau_{G,\xi}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ 

Зазначимо, що зі збільшенням часу спостереження функції стабілізуються, а це означає, що інформативність вимірювань зменшується та наближається до нуля після стабілізації параметрів двигуна.

Для розрахунку дисперсій оцінок розрахуємо значення функцій, що пов'язують відносні дисперсії впливових факторів та оцінок динамічних характеристик, при необмеженому часі спостереження.

$$\varphi_1(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} t^{-2} e^{-2t} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot t + 2\bar{\tau}_G \right]^2 dt = \frac{\bar{\tau}_G^{-2} + 3}{4};$$

$$\varphi_2(\bar{t}_N \rightarrow \infty) = \int_0^{\infty} t^{-2} \cdot e^{-2t} dt = \frac{1}{4};$$

$$\varphi_3(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} \bar{t}^{-2} \cdot e^{-2\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right] d\bar{t} = \frac{\bar{\tau}_G + 3}{8};$$

$$\varphi_4(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right] \left[ 1 - e^{-\bar{t}} (1 + (1 - \bar{\tau}_G)\bar{t}) \right] d\bar{t} = \frac{\bar{\tau}_G^2 + 11}{8};$$

$$\varphi_5(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} \bar{t} e^{-\bar{t}} \left[ 1 - e^{-\bar{t}} (1 + (1 - \bar{\tau}_G)\bar{t}) \right] d\bar{t} = \frac{\bar{\tau}_G + 2}{4};$$

$$\varphi_6(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( (1 - \bar{\tau}_G) \cdot \bar{t} + 2\bar{\tau}_G \right) \left( \bar{\tau}_G + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = \frac{\bar{\tau}_G^2 + 5}{8};$$

$$\varphi_7(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \int_0^{\infty} e^{-2\bar{t}} \bar{t}^{-3} \left( \bar{\tau}_G + \frac{1 - \bar{\tau}_G}{3} \cdot \bar{t} \right) d\bar{t} = \frac{\bar{\tau}_G + 2}{8}.$$

$$D(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \left( \frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \right)^2 \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2}.$$

$$\cdot \left[ \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{16} - \frac{\bar{\tau}_G^2 + 6\bar{\tau}_G + 9}{64} \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \frac{4\bar{\tau}_G^2 + 12 - \bar{\tau}_G^2 - 6\bar{\tau}_G - 9}{64} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left[ \frac{3\bar{\tau}_G^2 - 6\bar{\tau}_G + 3}{64} \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \left( \frac{3}{64} (\bar{\tau}_G - 1)^2 \right).$$

$$\varphi_2^2 \cdot \varphi_1 - \varphi_3^2 \cdot \varphi_2 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} = \left( \frac{1}{4} \right)^2 \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} - \frac{\bar{\tau}_G^2 + 6\bar{\tau}_G + 9}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4\bar{\tau}_G^2 + 12 - \bar{\tau}_G^2 - 6\bar{\tau}_G - 9}{256} =$$

$$= \frac{3\bar{\tau}_G^2 - 6\bar{\tau}_G + 3}{256} = \frac{3}{256} (\bar{\tau}_G - 1)^2;$$

$$-\varphi_3 \cdot \varphi_5 + \varphi_2 \cdot \varphi_4 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} = -\frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \cdot \frac{\bar{\tau}_G + 2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 11}{8} = \frac{-\bar{\tau}_G^2 - 5\bar{\tau}_G - 6 + \bar{\tau}_G^2 + 11}{32} = \frac{5}{32} (1 - \bar{\tau}_G);$$

$$\varphi_3 \cdot \varphi_7 - \varphi_2 \cdot \varphi_6 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} = \frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \cdot \frac{\bar{\tau}_G + 2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 5}{8} = \frac{\bar{\tau}_G^2 + 5\bar{\tau}_G + 6 - 2\bar{\tau}_G^2 - 10}{64} =$$

$$= -\frac{\bar{\tau}_G^2 - 5\bar{\tau}_G + 4}{64} = -\frac{(\bar{\tau}_G - 1)(\bar{\tau}_G - 4)}{64};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3^2 \cdot \varphi_1 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} &= \left( \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} - \left( \frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \right)^2 \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} = \frac{(\bar{\tau}_G^2 + 3) [3\bar{\tau}_G^2 - 6\bar{\tau}_G + 3]}{256} \\
&= \frac{3}{256} (\bar{\tau}_G^2 + 3) [\bar{\tau}_G^2 - 2\bar{\tau}_G + 1] = \frac{3}{256} (\bar{\tau}_G^2 + 3) (\bar{\tau}_G - 1)^2; \\
\varphi_3 \cdot \varphi_4 - \varphi_1 \cdot \varphi_5 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} &= \frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 11}{8} - \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} \cdot \frac{\bar{\tau}_G + 2}{4} = \frac{(\bar{\tau}_G + 3)(\bar{\tau}_G^2 + 11)}{64} - \\
&- 4 \frac{(\bar{\tau}_G^2 + 3)(\bar{\tau}_G + 2)}{64} = \frac{-3\bar{\tau}_G^3 - 5\bar{\tau}_G^2 - \bar{\tau}_G + 9}{64} = -\frac{(\bar{\tau}_G - 1)(3\bar{\tau}_G^2 + 8\bar{\tau}_G + 9)}{64}; \\
-\varphi_3 \cdot \varphi_6 + \varphi_1 \cdot \varphi_7 \Big|_{\bar{t}_N \rightarrow \infty} &= -\frac{\bar{\tau}_G + 3}{8} \cdot \frac{\bar{\tau}_G^2 + 5}{8} + \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{4} \cdot \frac{\bar{\tau}_G + 2}{8} = \frac{\bar{\tau}_G^3 + \bar{\tau}_G^2 + \bar{\tau}_G - 3}{64} = \\
&= \frac{(\bar{\tau}_G - 1)(\bar{\tau}_G^2 + 2\bar{\tau}_G + 3)}{64}.
\end{aligned}$$

Розраховуємо значення функцій похибок при необмеженому часі спостереження:

$$\begin{aligned}
f_{\tau n}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) &= \frac{16}{3} \frac{1}{(\bar{\tau}_G - 1)^2}; \quad f_{\tau G}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) = \frac{100}{9} \frac{1}{(\bar{\tau}_G - 1)^2}; \\
f_{\tau \xi}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) &= \left( -\frac{(\bar{\tau}_G - 1)(\bar{\tau}_G - 4)}{64} \right)^2 \left( \frac{64}{3(\bar{\tau}_G - 1)^2} \right)^2 = \left( -\frac{(\bar{\tau}_G - 1)(\bar{\tau}_G - 4)}{3(\bar{\tau}_G - 1)^2} \right)^2 = \frac{1}{9} \left( \frac{\bar{\tau}_G - 4}{\bar{\tau}_G - 1} \right)^2; \\
f_{\tau_{Gn}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) &= \frac{3}{256} \frac{(\bar{\tau}_G^2 + 3)(\bar{\tau}_G - 1)^2}{\left( \frac{3}{64} (\bar{\tau}_G - 1)^2 \right)^2} = \frac{16}{3} \frac{\bar{\tau}_G^2 + 3}{(\bar{\tau}_G - 1)^2}; \\
f_{\tau_{GG}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) &= \frac{1}{9} \left( \frac{3\bar{\tau}_G^2 + 8\bar{\tau}_G + 9}{\bar{\tau}_G - 1} \right)^2; \\
f_{\tau_{G\xi}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_G) &= \left( \frac{(\bar{\tau}_G - 1)(\bar{\tau}_G^2 + 2\bar{\tau}_G + 3)}{64} \right)^2 \left( \frac{64}{3(\bar{\tau}_G - 1)^2} \right)^2 = \frac{1}{9} \left( \frac{\bar{\tau}_G^2 + 2\bar{\tau}_G + 3}{\bar{\tau}_G - 1} \right)^2.
\end{aligned}$$

Аналіз отриманих результатів:

Визначник  $D(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$  при  $\bar{\tau}_{G1} = 1$  наближається до нескінченності, це пояснюється тим, що розглянуте рівняння другого порядку в такому випадку вироджується в рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned}\tau^2 \ddot{n} + 2\tau \dot{n} + \Delta n &= K_G (\tau_G \dot{G} + \Delta G); \\ \Delta n(s) (\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1) &= \Delta G(s) K_G (\tau_G s + 1); \\ \frac{\Delta n(s)}{\Delta G(s)} &= \frac{K_G (\tau_G s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} = \frac{K_G (\tau_G s + 1)}{(\tau s + 1)^2}; \\ \tau_G &= \tau; \\ \frac{\Delta n(s)}{\Delta G(s)} &= \frac{K_G (\tau s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{K_G}{\tau s + 1}.\end{aligned}$$

Збіг сталих часу спричиняє скорочення параметрів, які визначають динаміку системи, внаслідок чого зникає незалежна чутливість розв'язку до кожного з параметрів. Оскільки оцінювання параметрів здійснюється одночасно, структура рівняння стає такою, що не дає змоги розрізнити внесок кожного з параметрів у формування вихідного сигналу. У результаті виникає структурна невизначеність: коваріаційна матриця стає виродженою, її визначник наближається до нуля, що свідчить про неідентифікованість обох параметрів. Жоден із параметрів не може бути оцінений окремо, оскільки їх впливи на поведінку системи математично не розрізнявані. Це демонструє обмеження ідентифікації вироджених моделей.

Функції інструментальних похибок  $f_{\tau n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ ,  $f_{\tau_{Gn}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$  є монотонно спадаючими функціями часу спостереження. Це пояснюється тим, що інструментальні похибки пов'язані з шумом вимірювань. Із зростанням тривалості спостереження обсяг інформації збільшується, що зумовлює зменшення невизначеності оцінок і, відповідно, зменшення дисперсії інструментальних похибок. Функції дисперсій похибок мають нижню межу через скінченну тривалість перехідного процесу.

Функції дисперсій параметричних похибок  $f_{\tau_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ ,  $f_{\tau_\xi}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ ,  $f_{\tau_{GG}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$ ,  $f_{\tau_{G\xi}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_G)$  монотонно зростають унаслідок того, що параметричні похибки зумовлені неточністю апріорної інформації або обмеженою точністю ідентифікації параметрів моделі, яка використовується в процесі оцінювання.

На відміну від шуму вимірювання, похибки параметрів мають систематичний характер і не змінюються з часом. Вони не є реалізаціями випадкових процесів, які нівелюються при тривалому спостереженні, а натомість виступають як постійна невизначеність. У результаті оцінки динамічних параметрів частково компенсують систематичний зсув, спричинений параметричними похибками, внаслідок чого оцінки адаптуються до недоліків моделі. Це й зумовлює монотонне зростання функцій дисперсії параметричних похибок, яке обмежене зверху внаслідок насичення. Різниця в залежностях інструментальних і параметричних похибок від часу обумовлена різною природою джерел невизначеності.

З графіків функцій похибок видно, що зі збільшенням часу спостереження інструментальні похибки зменшуються, а параметричні – зростають. Унаслідок цього сумарна похибка, яка є їхньою сумою, досягає мінімуму при певному значенні часу. Отже, існує оптимальний час спостереження, якому відповідає найменша загальна похибка оцінювання. Наявність цього оптимуму зумовлена протилежним впливом часу спостереження: інструментальні похибки зменшуються повільніше, а параметричні зростають швидше, що після певного моменту призводить до загального збільшення сумарної похибки.

#### **4.4 Задача спільного оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна при ступінчастій зміні витрати палива**

Розглянемо випадок, коли для оцінювання використовуються результати вимірювання одразу двох частот обертання роторів. Вектор оцінок

$\hat{\theta} = [\hat{t} \quad \hat{t}_G^{HT} \quad \hat{t}_G^{HT}]^T$  визначається в результаті мінімізації МНК-функціонала:

$$\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{j=1}^N \left[ \left( n_{HTj} - n_{HT}^{Mod}(\bar{\theta}, t_j) \right)^2 + \left( n_{BTj} - n_{BT}^{Mod}(\bar{\theta}, t_j) \right)^2 \right].$$

Лінеаризована модель частот обертання роторів:

$$n_{HT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}, t_j) = n_{HT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}^0, t_j) - \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \tau} \right)_j \Delta \tau - \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \tau_G^{HT}} \right)_j \Delta \tau_G^{HT} - \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial G_0} \right)_j \Delta G - \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial K_G^{HT}} \right)_j \Delta K_G^{HT} - \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \xi} \right)_j \Delta \xi;$$

$$n_{BT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}, t_j) = n_{BT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}^0, t_j) - \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \tau} \right)_j \Delta \tau - \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \tau_G^{BT}} \right)_j \Delta \tau_G^{BT} - \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial G_0} \right)_j \Delta G - \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial K_G^{BT}} \right)_j \Delta K_G^{BT} - \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \xi} \right)_j \Delta \xi.$$

З огляду на більший порядок системи сформулюємо алгоритм розрахунку через матричні операції:

$$H_j \cdot \delta \theta = \delta n_j - Q_j \cdot \delta W$$

де  $\delta \theta = [\Delta \tau \quad \Delta \tau_G^{HT} \quad \Delta \tau_G^{BT}]^T$  – вектор відхилень оцінок;

$$\delta n_j = \begin{bmatrix} n_{HT j} - n_{HT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}^0, t_j) \\ n_{BT j} - n_{BT}^{\text{мод}}(\bar{\theta}^0, t_j) \end{bmatrix} - \text{вектор різниць вимірних значень та значень моделі}$$

частот обертання НТ, ВТ в  $j$ -й момент часу;

$\delta W = [\Delta G \quad \Delta K_G^{HT} \quad \Delta K_G^{BT} \quad \Delta \xi]^T$  – вектор відхилень параметрів моделі;

$$H_j = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \tau} \right)_j & \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \tau_G^{HT}} \right)_j & 0 \\ \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \tau} \right)_j & 0 & \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \tau_G^{BT}} \right)_j \end{bmatrix} - \text{матриця чутливості частот обертання до}$$

оцінюваних параметрів в  $j$ -й момент часу;

$$Q_j = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial G_0} \right)_j & \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial K_G^{HT}} \right)_j & 0 & \left( \frac{\partial n_{HT}}{\partial \xi} \right)_j \\ \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial G_0} \right)_j & 0 & \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial K_G^{BT}} \right)_j & \left( \frac{\partial n_{BT}}{\partial \xi} \right)_j \end{bmatrix} - \text{матриця чутливості частот}$$

обертання до параметрів моделі  $G_0, K_G^{HT}, K_G^{BT}, \xi$  в  $j$ -й момент часу;

Виконаємо перетворення:

$$H_j^T H_j \cdot \delta \theta = H_j^T \delta n_j - H_j^T Q_j \cdot \delta W; \quad \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \cdot \delta \theta = \sum_{j=1}^N H_j^T \delta n_j - \sum_{j=1}^N H_j^T Q_j \cdot \delta W.$$

Тоді розв'язок виглядатиме наступним чином:

$$\delta\theta_j = \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^N H_j^T \delta n_j - \sum_{j=1}^N H_j^T Q_j \cdot \delta W \right) = \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^N H_j^T \delta n_j - \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^N H_j^T Q_j \cdot \delta W.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів:

$$\text{cov}\theta = \begin{bmatrix} \sigma_\tau^2 & \text{cov}(\tau, \tau_G^{HT}) & \text{cov}(\tau, \tau_G^{BT}) \\ \text{cov}(\tau, \tau_G^{HT}) & \sigma_{\tau_G^{HT}}^2 & \text{cov}(\tau_G^{HT}, \tau_G^{BT}) \\ \text{cov}(\tau, \tau_G^{BT}) & \text{cov}(\tau_G^{HT}, \tau_G^{BT}) & \sigma_{\tau_G^{BT}}^2 \end{bmatrix}^2;$$

$$\text{cov}\theta_j = \sigma_n^2 \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1} + \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^N H_j^T Q_j \cdot \sigma_W^2 \cdot \sum_{j=1}^N Q_j^T H_j \cdot \left( \sum_{j=1}^N H_j^T H_j \right)^{-1};$$

$$\text{cov}\theta_j = \sigma_n^2 \Delta t \left( \int_0^{t_j} H_j^T H_j dt \right)^{-1} + \left( \int_0^{t_j} H_j^T H_j dt \right)^{-1} \cdot \int_0^{t_j} H_j^T Q_j dt \cdot \text{cov}W \cdot \int_0^{t_j} Q_j^T H_j dt \cdot \left( \int_0^{t_j} H_j^T H_j dt \right)^{-1}.$$

Коваріаційні матриці:

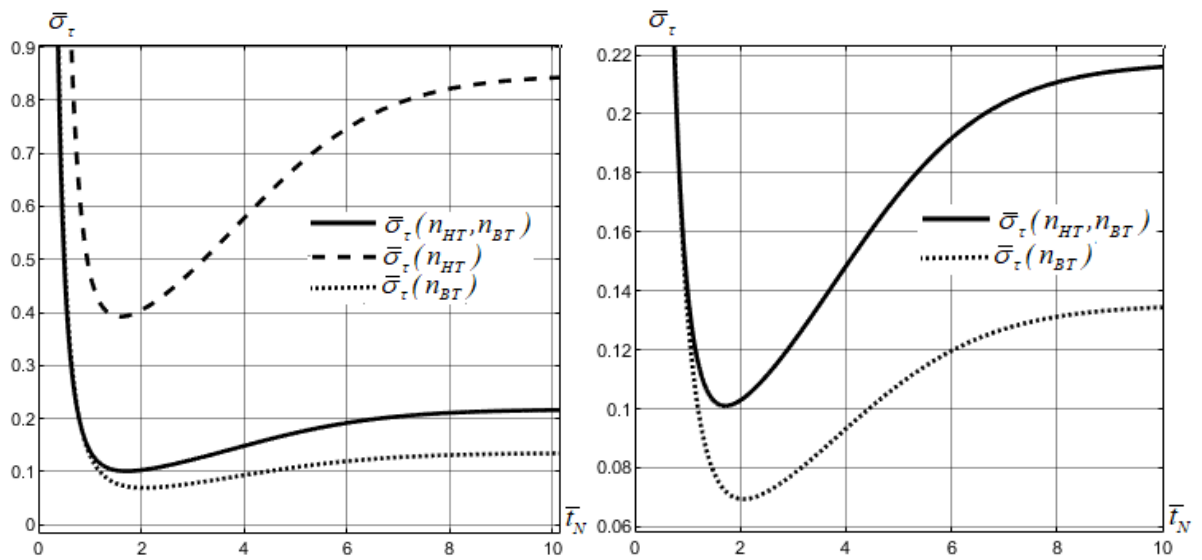
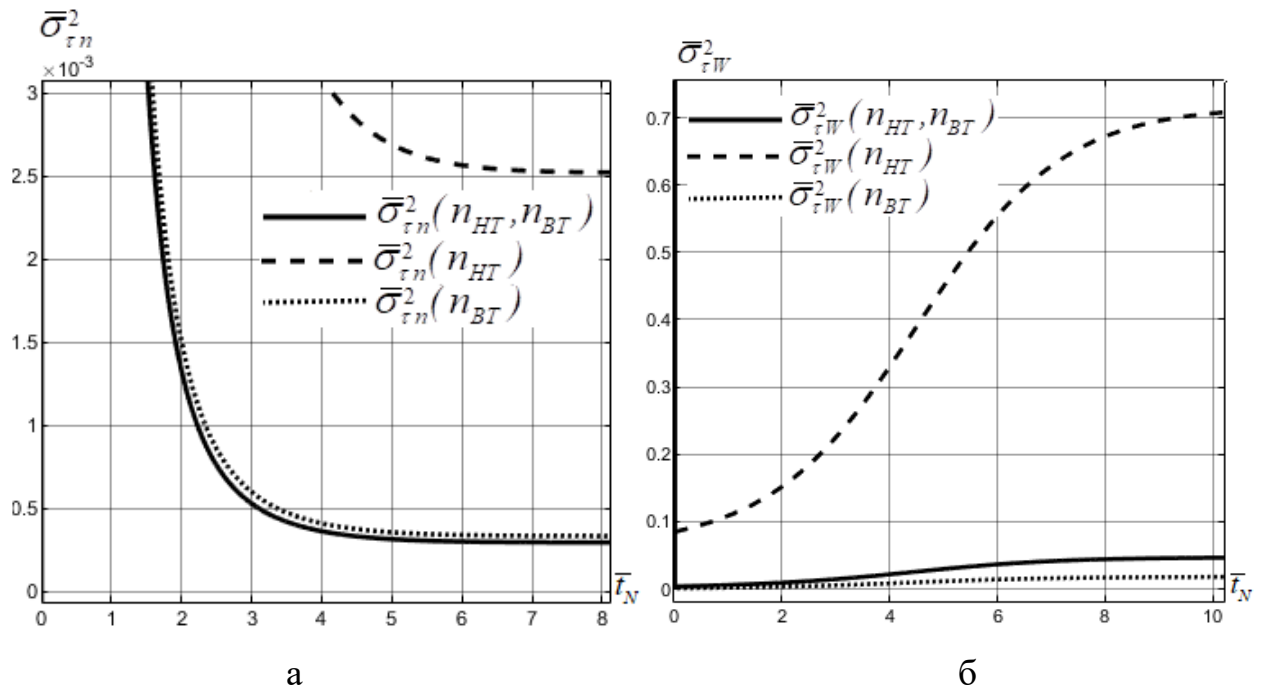
$$\text{diag}(\sigma_{n_{HT}}^2, \sigma_{n_{BT}}^2) = \sigma_n^2 I; \text{cov}W = \text{diag}(\sigma_G^2, \sigma_{K_G^{HT}}^2, \sigma_{K_G^{BT}}^2, \sigma_\xi^2).$$

Приклад розрахунку похибок оцінок на режимах роботи МГ (малий газ) та Максимальний. Розглянуто розрахунок відносних СКВ використанням частот обертання роторів НТ, ВТ окремо та разом.

$$\text{Режим малого газу (МГ): } \tau_0 = 2 \text{ c}; \tau_G^{HT} = 1,86 \text{ c}; \tau_G^{BT} = 1,1 \text{ c}; K_G^{HT} = 49 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / 20\text{д}};$$

$$K_G^{BT} = 21 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / 20\text{д}}; G_0 = 30 \frac{\text{кз}}{20\text{д}}; \sigma_G = 0,5 \frac{\text{кз}}{20\text{д}}; \sigma_{K_G^{HT}} = 0,03 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / 20\text{д}}; \sigma_{K_G^{BT}} = 0,03 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / 20\text{д}}; \sigma_\xi = 0,02;$$

$$\bar{\tau}_G^{HT} = 0,93; \bar{\tau}_G^{BT} = 0,55.$$

Рис. 4.9 – Відносне СКВ похибки оцінки  $\tau$ Рис. 4.10 – Відносні дисперсії похибок оцінки  $\tau$ 

(а – інструментальні, б – параметричні)

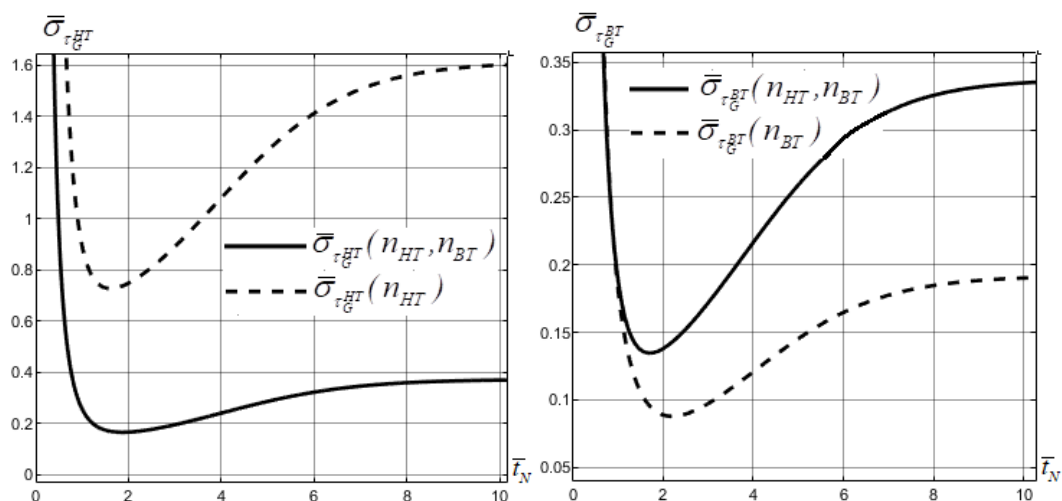


Рис. 4.11 – Відносне СКВ похибок оцінки  $\tau_G^{HT}$ ,  $\tau_G^{BT}$

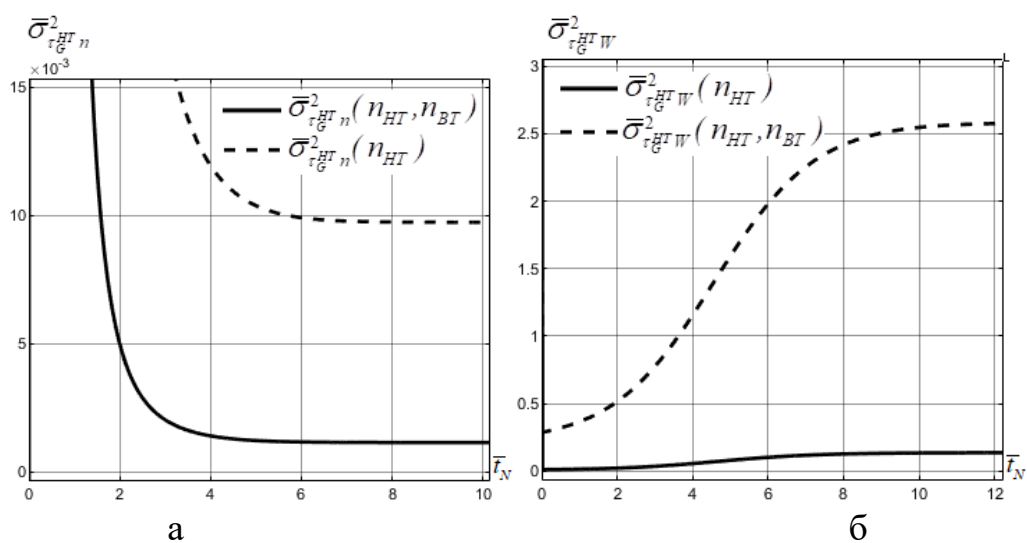


Рис. 4.12 – Відносні дисперсії похибок оцінки  $\tau_G^{HT}$

(а – інструментальні, б – параметричні)

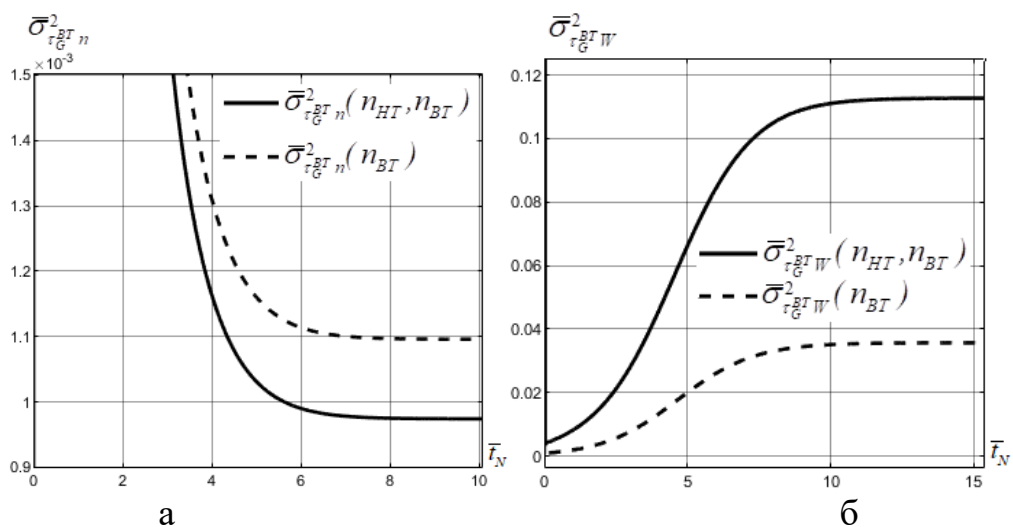


Рис. 4.13 – Відносні дисперсії похибок оцінки  $\tau_G^{BT}$

(а – інструментальні, б – параметричні)

Режим максимальний:

$$\tau_0 = 0,2 \text{ c}; \tau_G^{HT} = 0,095 \text{ c}; \tau_G^{BT} = 0,19 \text{ c}; K_G^{HT} = 2,53 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / \text{зод}}; K_G^{BT} = 1,45 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / \text{зод}}; G_0 = 200 \frac{\text{кз}}{\text{зод}};$$

$$\sigma_G = 0,5 \frac{\text{кз}}{\text{зод}}; \sigma_{K_G^{HT}} = 0,03 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / \text{зод}}; \sigma_{K_G^{BT}} = 0,03 \frac{\text{об} / \text{хв}}{\text{кз} / \text{зод}}; \sigma_\xi = 0,02; \bar{\tau}_G^{HT} = 0,45; \bar{\tau}_G^{BT} = 0,95$$

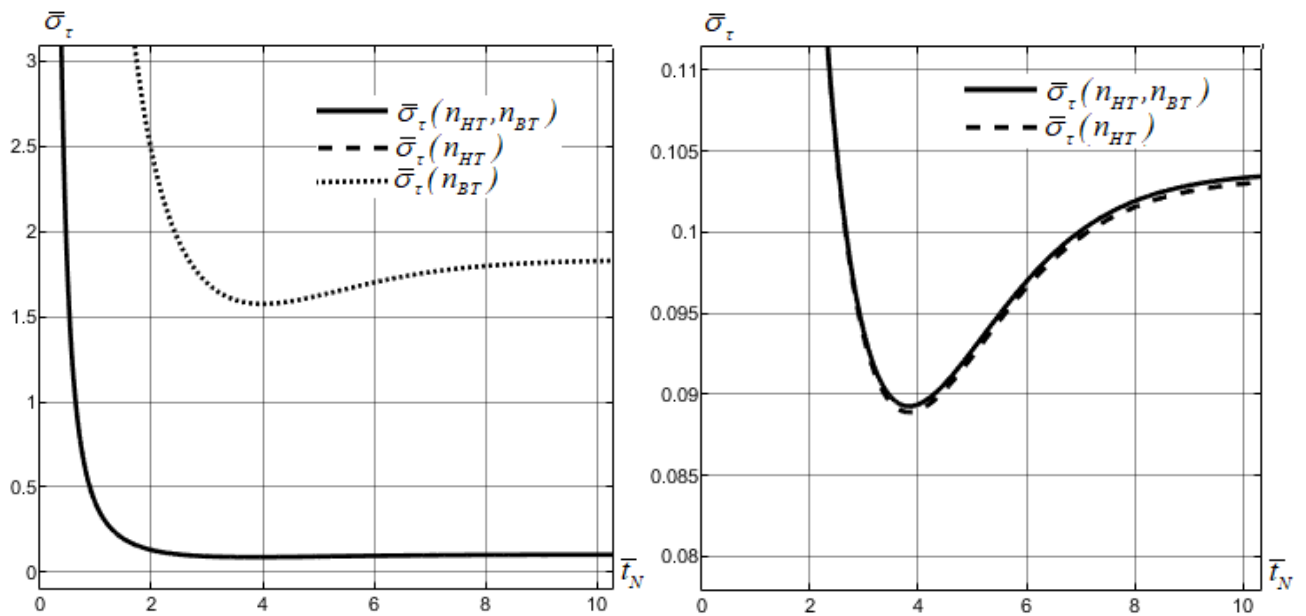


Рис. 4.14 – Відносне СКВ похибки оцінки  $\tau$

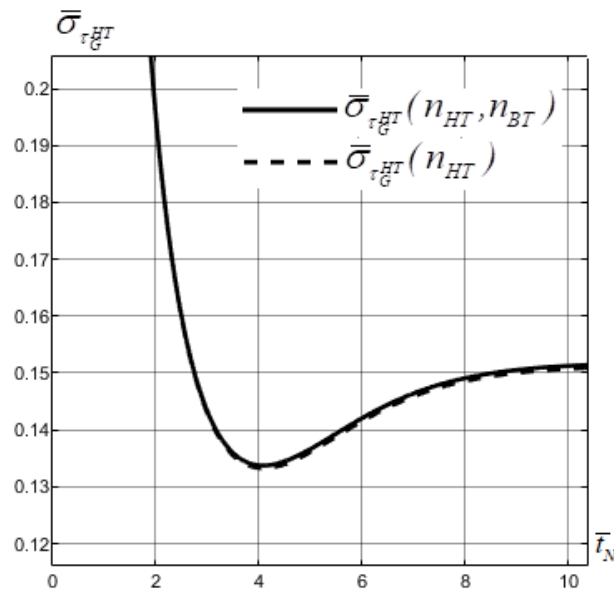


Рис. 4.15 – Відносне СКВ похибки оцінки  $\tau_G^{HT}$

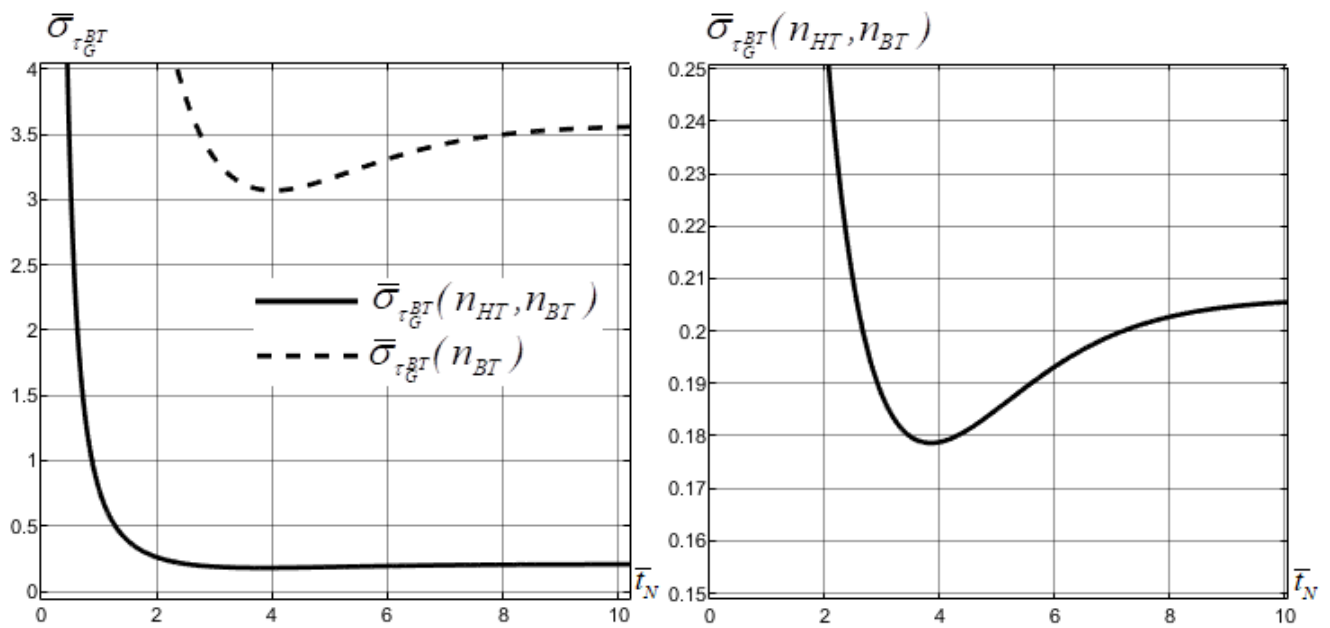


Рис. 4.16 – Відносне СКВ похибки оцінки  $\tau_G^{BT}$

За виразами отриманих функції похибок видно, що похибки при наближенні  $\bar{\tau}_G$  до 1 прямують до нескінченності через вироджуваність рівняння. Тому на режимі МГ ( $\bar{\tau}_G^{HT} = 0,93$ ) оцінки за вимірюванням  $n_{HT}$  та режимі Макс ( $\bar{\tau}_G^{BT} = 0,95$ ) за вимірюванням  $n_{BT}$  дають великі похибки, як інструментальні так і параметричні.

Інструментальні похибки при спільному оцінюванні не більше за найменшу з похибок оцінювання окремо. Це пояснюється з тим, що додаткові вимірювання збільшують або принаймні не зменшують інформативність. На рис. 4.10(a), 4.12(a), 4.13(a) видно, що дисперсія інструментальної похибки при спільному оцінюванні менша за дисперсії похибок при окремому оцінюванні.

Дисперсії параметричних похибок при спільному оцінюванні  $\tau$  лежать між дисперсіями параметричних похибок оцінювання, отриманими окремо (рис 4.9, 4.14). Додавання нових вимірювань, які мають нижчу точність або пов'язані з виродженими структурами, призводить до збільшення дисперсії, оскільки додаються нові джерела похибок.

На режимі роботи МГ основний внесок зумовлено параметричними похибками, тому доцільно виконувати оцінювання  $\tau, \tau_G^{BT}$  за результатами вимірювання частоти обертання ротора ВТ. Уникнення використання вимірювань частоти обертання ротора НТ пов'язано з високими значеннями похибок через

виродженість рівняння. Оцінювання  $\tau_G^{HT}$  слід виконувати з використанням обох вимірювань, оскільки це дозволяє зменшити дисперсію похибки.

На режимі роботи Максимальний основний внесок зумовлений також параметричними похибками, тому доцільно виконувати оцінювання  $\tau, \tau_G^{HT}$  за результатами вимірювання частоти обертання ротора НТ. Оцінювання  $\tau_G^{BT}$  слід виконувати з використанням обох вимірювань; це дозволяє зменшити дисперсію похибки.

Отримані залежності та підхід для розрахунку дисперсій складових похибок дозволяють визначити:

- 1) спосіб оцінювання динамічних параметрів (спільно чи роздільно);
- 2) час спостереження, який забезпечує мінімальну загальну дисперсію;
- 3) точність і період вимірювання частоти обертання та визначення параметрів моделі для забезпечення необхідної точності оцінок;
- 4) інтенсивність керуючої дії для забезпечення необхідної точності оцінок.

#### 4.5 Висновки за четвертим розділом

У результаті робіт за даним розділом отримано такі основні результати:

1. Запропонований підхід до аналізу точності оцінювання коефіцієнтів динамічних моделей розповсюджено на двовальний двигун, кількість динамічних характеристик якого більша, а параметричні похибки моделі також впливають на оцінки динамічних характеристик. Для двовального двигуна отримано універсальне рівняння, яке визначає похибку оцінки коефіцієнтів лінійної динамічної моделі як функцію всіх основних впливових факторів: похибок вимірювання та частоти реєстрації, інтенсивності тестового впливу та номінальних значень коефіцієнтів моделі.
2. Аналіз динамічних коефіцієнтів на наявність взаємної залежності для досліджуваного двигуна дозволяє скоротити кількість незалежних параметрів, а також отримати розв'язки рівнянь у питомих параметрах, а отже й залежності для похибок оцінювання в універсальному вигляді.

3. Інструментальні похибки оцінок сталих часу двигуна мають нижню межу; це зумовлено скінченною тривалістю перехідних процесів, наприкінці яких вихідні параметри стабілізуються та стають нечутливими до динамічних параметрів двигуна. Ці похибки відповідають тривалому періоду реєстрації, коли нові дані не дають корисної інформації про сталу часу внаслідок того, що перехідний процес вже завершився.
4. Параметричні похибки оцінок сталих часу двигуна зростають і мають верхню межу; це зумовлено зміщенням оцінюваних динамічних параметрів задля ліквідації параметричних похибок моделі.
5. Сумарна похибка оцінок сталих часу, досягає мінімуму при певному значенні тривалості спостереження. Існує оптимальна тривалість спостереження, яка забезпечує мінімальну можливу загальну похибку оцінювання.
6. Складові відносної дисперсії оцінок при необмеженому часі спостереження для двовального двигуна залежать від  $\bar{\tau}_G$ .
7. Результати цього розділу дисертації опубліковано в роботі автора [2].

#### **Список літератури до четвертого розділу**

1. Синтез систем управління и диагностирования газотурбинных двигателей / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов и др. – К.: Техника, 1998. – 312 с.
2. Бондаренко, О. В. Ідентифікація динамічних характеристик двовального турбореактивного двигуна / О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка та технологія*. – 2024. - № 4 sup1 (197). – С. 125-136. doi: 10.32620/aktt.2024.4sup1.17.

## **РОЗДІЛ 5. ВИКОРИСТАННЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ ПІДХОДІВ У СИСТЕМАХ ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ І ВІДПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Описані в попередніх розділах методики формування моделей двигунів, розрахунку похибок оцінювання параметрів динамічної моделі та оцінювання невимірюваних параметрів за вимірюваними параметрами застосовано для побудови бортової самоналаштувальної динамічної моделі ТРДД для визначення невимірюваних параметрів робочого процесу.

Для відпрацювання отриманих результатів використано значення параметрів, отримані за допомогою математичної моделі двигуна типу АІ-322.

Перелік параметрів, які моделюються: частоти обертання роторів низького та високого тиску; повний тиск за компресором; повна температура за турбіною; тяга двигуна. Вхідні параметри: повна температура та повний тиск повітря на вході до двигуна; витрата палива.

### **5.1 Формування структури системи оцінювання невимірюваних параметрів двигуна**

#### ***5.1.1 Загальна структура системи***

Система вимірювання параметрів робочого процесу ТРДД (див. рис. 5.1) реєструє набір параметрів з заданою частотою та точністю. Серед усіх вимірюваних параметрів відокремлюється режимний параметр та умови на вході в двигун. Як режимний параметр обрано частоту обертання ротора високого тиску, оскільки саме  $n_{ВТ}$  є аргументом статичної, динамічної характеристик і залежності матриці коефіцієнтів впливу  $H$  від режиму роботи.

За формулами зведення, які ґрунтуються на теорії подібності, розраховуються зведені параметри, які відповідають стандартним атмосферним умовам ( $p_0 = 101325$  Па,  $T_0 = 288,15$  К).

За визначеною зведеною частотою обертання ротора ВТ розраховуються зведені значення усіх параметрів, передбачених моделлю. Ці значення відповідають параметрам середнього двигуна.

Визначення відхилень невимірюваних параметрів складається з двох етапів: визначення матриці коефіцієнтів впливу на поточному режимі роботи двигуна, і розрахунок матриці зв'язку відхилень  $F$ .

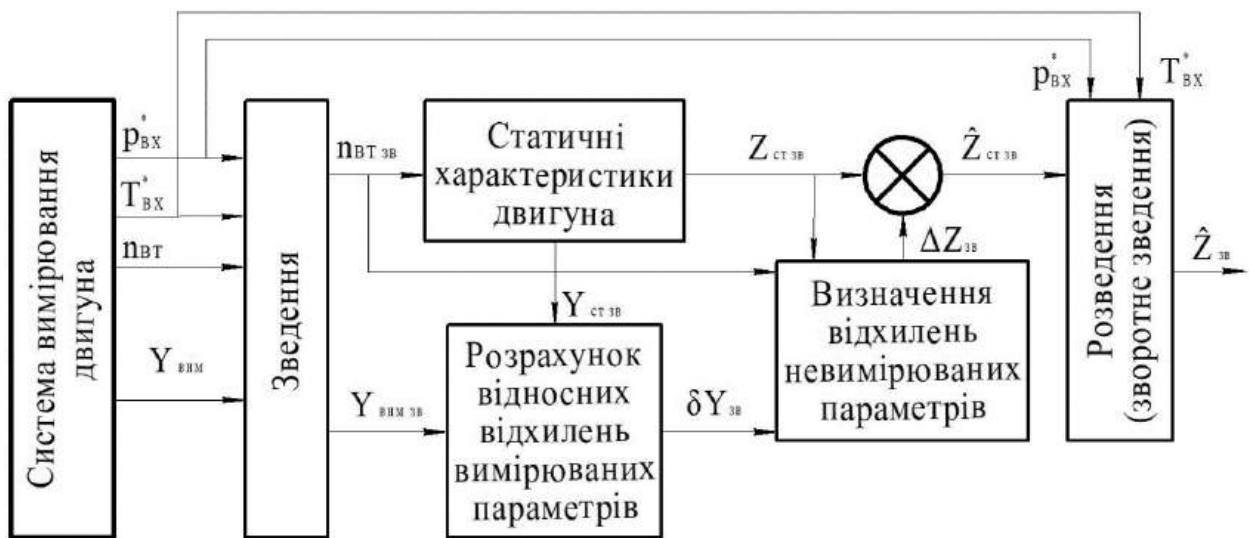


Рис. 5.1 - Схема системи оцінювання невимірюваних параметрів

Відхилення характеристик вузлів по-різному впливають на параметри робочого процесу на різних режимах; це видно зі змінності коефіцієнтів впливу за режимами. В моделі залежності коефіцієнтів впливу від частоти обертання ротора високого тиску подаються у вигляді таблиці. Розрахунок в проміжних точках виконується шляхом інтерполяції кубічними сплайнами.

За представленою далі методикою за розрахованими відхиленнями вимірюваних параметрів розраховуються відхилення невимірюваних параметрів. Ці розрахунки виконуються на усталених режимах роботи двигуна.

Для виявлення усталених режимів використовуються така ознака [1]: *СКВ усіх вимірюваних параметрів на заданому часовому інтервалі не перевищують порогових значень*. Тривалість інтервалу контролю та порогові значення СКВ параметрів обираються за результатами обробки типових стендових випробувань. Емпіричне отримання цих значень зумовлене тим, що необхідно оцінити типову тривалість перехідного процесу, час стабілізації параметра унаслідок протікання

менш інтенсивних процесів, але більш довготривалих (стабілізація радіальних зазорів та теплових потоків), а також часу перебування на усталеному режимі. Попередній аналіз цих тривалостей дозволить обґрунтовано обрати часовий інтервал та порогові значення. На вибір цих параметрів впливають шум датчиків, а також шум, пов'язаний з особливостями робочого процесу виконавчих пристроїв (наприклад, паливного насоса).

### ***5.1.2 Взаємодія складових бортової самоналаштовувальної динамічної моделі ТРДД для визначення тяги***

У складі самоналаштовувальної моделі ТРДД паралельно працює дві моделі параметрів робочого процесу двигуна: налаштовувана динамічна модель та статична підмодель, побудована на основі базової термогазодинамічної моделі двигуна. До налаштування статичні підмоделі кожної з них збігаються.

Налаштування передбачає усунення відмінностей між значеннями параметрів, розрахованими за допомогою моделі, та вимірними значеннями. Для усунення відмінностей реалізуються такі етапи:

- 1) Усунення статичної похибки коригуванням статичної підмоделі вимірюваних параметрів. На усталених режимах роботи розраховуються відхилення вимірюваних параметрів. За значеннями відхилень коригується статична підмодель налаштовуваної моделі двигуна.
- 2) Усунення динамічної похибки коригуванням динамічних коефіцієнтів. Оцінки вектора відхилень динамічних коефіцієнтів, отримані на тестових перехідних режимах, використовуються для коригування динамічної підмоделі.

На цьому етапі формується налаштована модель двигуна для моделювання вимірюваних параметрів двигуна.

- 3) Усунення статичної похибки невимірюваного параметра (наприклад, тяги) коригуванням статичної підмоделі невимірюваних параметрів. Коригувальний доданок статичної моделі тяги розраховуються за

значеннями відхилень вимірюваних параметрів та в подальшому враховується при моделюванні тяги.

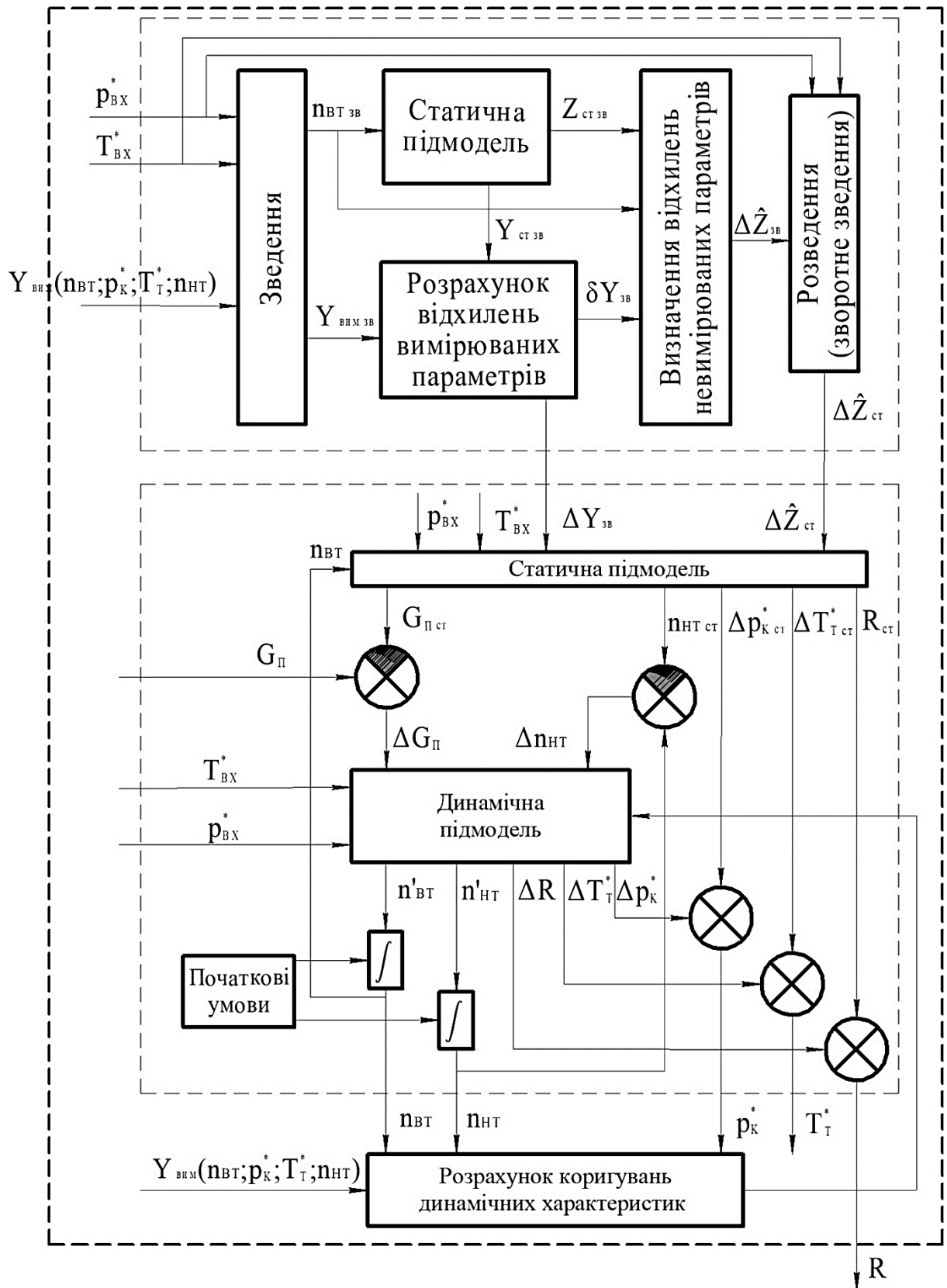


Рис. 5.2 - Схема бортової самоналаштувальної моделі ТРДД

Процес налаштування може бути вдосконалено, якщо шуканий параметр є невимірюваним лише штатною системою, тобто вимірювання є принципово можливим. Тяга відноситься до складу параметрів, які вимірюються під час стендових випробувань. Тому коригування моделі тяги може бути виконано на етапі 1. У подальшій експлуатації двигуна використовується коригувальний доданок (див. етап 3).

## **5.2 Розробка методу визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів з урахуванням зміни технічного стану**

### **5.2.1 Формулювання задачі**

Відомо [2], що результати моделювання ГТД не збігаються з результатами вимірювання параметрів під час експлуатації та стендових випробувань на статичних і динамічних режимах. Наявні статичні й динамічні похибки пов'язані з індивідуальними відмінностями конкретного зразка двигуна від моделі, яка налаштована для середнього представника серії двигунів.

Причинами відхилень параметрів конкретного двигуна від середнього можуть бути деградація характеристик двигуна під час експлуатації або індивідуальні відмінності характеристик нового двигуна. Хоча природа цих відхилень різна (в одному випадку вони спричинені накопиченим зносом та пошкодженнями, в іншому – сукупністю відхилень численних технологічних і збиральних операцій елементів двигуна), але зрештою в обох випадках причиною є відхилення геометричних розмірів (площ прохідних перерізів, кутів установки лопаток, характерних розмірів мікрорельєфу поверхонь та ін.).

Однак зазвичай розглядають модель, до складу параметрів якої входять не геометричні параметри, а параметри вузлів, що визначають їх характеристики. Це зумовлено рівнем моделі проточної частини, в якій не враховується детальна структура вузлів. Тому поставлене завдання в рамках даної моделі можна вирішити, імітуючи зміни геометричних параметрів відповідним деформуванням характеристик вузлів: вертикальним, горизонтальним зсувом та обертанням.

Контроль зміни геометрії лопаткових машин є складнішим і більш трудомістким порівняно з контролем зміни інших елементів проточної частини двигуна. Також чутливість параметрів робочого процесу до відхилень геометричних розмірів елементів лопаткових машин є вищою, ніж до відхилень геометричних розмірів сопел та вхідних пристроїв. Тому для моделювання дефектів проточної частини ТРДД було обрано обмежений перелік несправностей вузла – зміна ККД вузла та зміна пропускної здатності. Розглянуто чотири вузли: каскади високого та низького тиску компресора та турбіни. Такий перелік дефектів, які відносяться до саме лопаткових машин, вважається найпоширенішим для ТРДД і розглядається багатьма дослідниками [3–6].

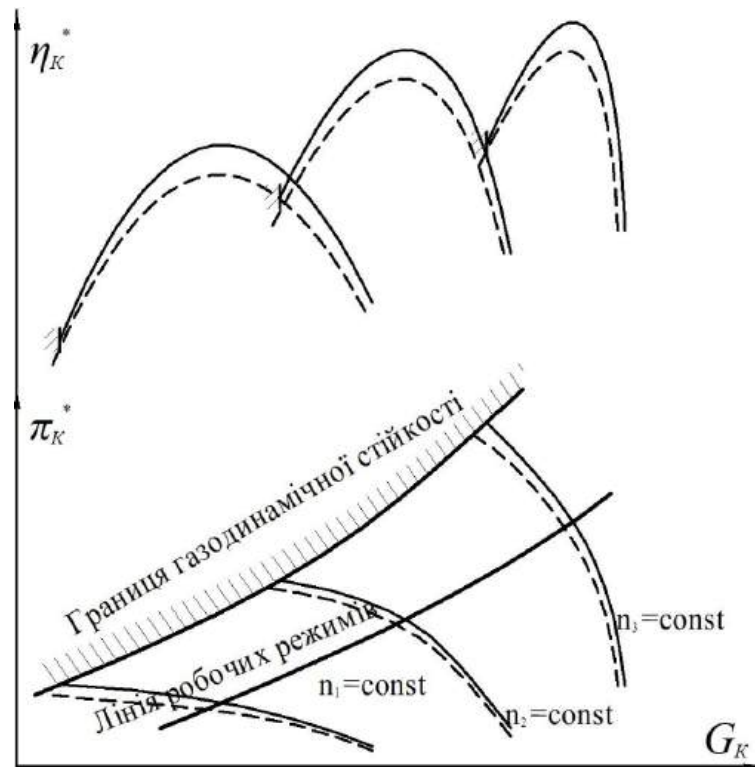


Рис. 5.3 - Приклади зсуву характеристики компресора за значеннями витрати та ККД

Залежність параметрів газу в проточній частині від параметрів технічного стану є нелінійною через нелінійність законів термодинаміки, газової динаміки та залежностей властивостей газу від температури. Але нами розглядається задача оцінювання параметрів у справному стані, тобто в такому технічному стані, коли

відхилення параметрів є помірними й не виходять за межі, визначені нормативно-технічною документацією або експлуатаційними вимогами.

Оскільки справний стан передбачає незначні відхилення, модель відхилень параметрів проточної частини з достатньою точністю може бути замінена лінійним наближенням:

$$\delta Y = H_Y \cdot \delta \theta; \quad (5.1)$$

$$\delta Z = H_Z \cdot \delta \theta, \quad (5.2)$$

де 
$$\delta Y = \frac{Y(\delta \theta) - Y_0}{Y_0} = \frac{Y(\delta \theta)}{Y_0} - 1; \delta \theta = \frac{\Delta \theta}{\theta_0}; \delta Z = \frac{Z(\delta \theta) - Z_0}{Z_0} = \frac{Z(\delta \theta)}{Z_0} - 1;$$

$\delta Y = (\delta p_K^* \quad \delta T_T^* \quad \delta n_{\text{HT}} \quad \delta G_{\Pi})^T$  – вектор відносних відхилень вимірюваних параметрів;

$\delta Z = (\delta R \quad \delta T_T^* \quad \delta K_{\text{КНТ}} \quad \delta K_{\text{КВТ}})^T$  – вектор відносних відхилень невимірюваних параметрів (тяги, температури за камерою згоряння, коефіцієнтів запасу стійкості компресорів високого на низького тиску);

$\delta \theta = (\delta G_{\text{КНТ}} \quad \delta \eta_{\text{КНТ}} \quad \delta G_{\text{КВТ}} \quad \delta \eta_{\text{КВТ}} \quad \delta A_{\text{ТВТ}} \quad \delta \eta_{\text{ТВТ}} \quad \delta A_{\text{ТНТ}} \quad \delta \eta_{\text{ТНТ}})^T$  – вектор відносних відхилень параметрів технічного стану (ККД та витрати робочого тіла) через каскади компресора та турбіни;

$H_Y$  – матриця коефіцієнтів впливу параметрів технічного стану на вимірювані параметри;

$H_Z$  – матриця коефіцієнтів впливу параметрів технічного стану на невимірювані параметри.

У випадку, коли кількість вимірюваних параметрів дорівнює кількості параметрів технічного стану, задача перетворюється на розв'язання матричного рівняння (5.1) та підстановку розв'язку в формулу (5.2):

$$\delta Y = H_Y \cdot \delta \theta; \delta \theta = H_Y^{-1} \delta Y; \delta Z = H_Z H_Y^{-1} \delta Y. \quad (5.3)$$

Обмеженість складу вимірюваних параметрів унеможливорює обернення матриці  $H_Y$ . Тому оцінку вектора параметрів технічного стану можливо визначити через розрахунок псевдообернених матриць:

- лівої псевдооберненої матриці  $\delta\theta = (H_Y^T \cdot H_Y)^{-1} \cdot H_Y^T \cdot \delta Y$ ;
- правої псевдооберненої матриці  $\delta\theta = H_Y^T \cdot (H_Y \cdot H_Y^T)^{-1} \cdot \delta Y$ .

Визначник  $\det(H_Y^T \cdot H_Y) \approx 0$ , тому використання лівої псевдооберненої матриці буде мати неприйнятно велику похибку розрахунку через велике число обумовленості матриці  $H_Y^T H_Y$  [7].

Використання правої псевдооберненої матриці дає меншу похибку, оскільки матриця  $H_Y H_Y^T$  краще обумовлена.

### **5.2.2 Аналіз методів оцінювання невимірюваних параметрів**

Оцінювання невимірюваних параметрів у технічних системах є складною задачею, що потребує врахування числової стабільності, обчислювальної ефективності та точності оцінок. Важливими критеріями порівняння методів є обчислювальна стійкість, складність, здатність враховувати шум вимірювань та усунення поганої обумовленості.

Розглянемо деякі найбільш відомі методи.

1. **Розрахунок лівої псевдооберненої матриці** [7]. Використання лівої псевдооберненої матриці дозволяє знайти оцінку параметрів шляхом мінімізації похибки у векторі вимірюваних параметрів. Однак цей метод має суттєві недоліки: він не враховує шум вимірювань та є нестійким при погано обумовлених матрицях, що може призводити до значних похибок. Обчислювальна складність цього методу є відносно невеликою.
2. **Метод Мура-Пенроуза (розрахунок правої псевдооберненої матриці)** [7]. Використання правої псевдооберненої матриці дозволяє зменшити проблеми числової нестійкості порівняно з лівою псевдооберненою, проте все ще залишається висока чутливість до поганої обумовленості. Цей

метод мінімізує норму вектора параметрів технічного стану, але не враховує шум вимірювань.

3. **Зважений метод найменших квадратів (WLS)** [8]. WLS є класичним підходом, що мінімізує зважену суму квадратів похибок вимірюваних параметрів із урахуванням їхньої коваріаційної матриці. Основним недоліком цього методу є низька обчислювальна стійкість, оскільки погана обумовленість матриці не усувається. Як наслідок, результати можуть бути нестабільними, особливо при високій корельованості вхідних даних.
4. **Регуляризація Тихонова** (гребенева регресія) [9]. Регуляризація Тихонова є вдосконаленням WLS, яке додає спеціальний регуляризаційний член для зменшення чутливості до малих сингулярних значень. Це суттєво покращує обчислювальну стійкість, але водночас викривлює спектр сингулярних значень, що може призводити до втрати точності. Основним викликом у використанні цього методу є правильний вибір коефіцієнта регуляризації, оскільки його надмірне значення може суттєво спотворити результати.
5. **Метод головних компонент (PCA)** [10]. Метод головних компонент використовується для зменшення розмірності вектору параметрів технічного стану. Він ґрунтується на заміні початкових параметрів на нові псевдопараметри, які є лінійними комбінаціями вихідних величин. Це означає, що під час вибору проєкції даних обираються такі напрями, вздовж яких варіативність даних, а відповідно й інформативність, найбільша. Основною перевагою цього методу є покращена числова стійкість завдяки відкиданню малозначущих компонент. Однак у задачах оцінки параметрів важливо мінімізувати дисперсію похибки оцінки, а не просто зберігати якомога більше вихідної варіативності. PCA не враховує шум вимірювань і може орієнтуватися на напрями, що містять значний шум, а це робить оцінку неточною.
6. **Метод найкращої лінійної незміщеної оцінки (BLUE – Best Linear Unbiased Estimator)** [11]. Метод BLUE забезпечує отримання незміщеної

оцінки параметрів із мінімальною дисперсією, враховуючи шум вимірювань. Проте, подібно до WLS, він не вирішує проблему поганої обумовленості матриць, що може призводити до нестійких розрахунків. Обчислювальна складність цього методу є високою, що обмежує його застосування для великих систем.

7. **Фільтр Калмана та його варіації** [12]. Фільтр Калмана є рекурсивним алгоритмом, що забезпечує оптимальну оцінку параметрів у динамічних системах шляхом комбінування прогнозних і вимірних значень. Цей метод має вбудовану регуляризацію, що допомагає боротися з погано обумовленими матрицями. Проте, він потребує значних обчислювальних ресурсів та для чисто статичних задач зводиться до WLS [13]. Тому його застосування у даному випадку є надлишковим.
8. **Баєсівське оцінювання** [14]. Баєсівські методи використовують апріорну інформацію про розподіл параметрів для отримання максимально вигідної оцінки. Вони мають високу стійкість до числових похибок, але водночас є обчислювально складними. У статичних задачах їх використання є надмірним через високу складність обчислень.

Аналіз переваг і недоліків зазначених методів дав змогу запропонувати для використання в системах двигунів метод, який ураховує: статичний характер задачі; неповний ранг матриць коефіцієнтів впливу; похибки вимірювання; необхідність мінімізації похибок оцінок невимірюваних параметрів.

### 5.2.3 Формування методу оцінювання невимірюваних параметрів ГТД

Будемо використовувати адитивну модель вимірювань

$$\delta Y_{\text{вим}} = \delta Y + \varepsilon_Y, \quad (5.4)$$

де  $\varepsilon_Y$  – похибка вимірювань,

Припустимо, що відхилення параметрів технічного стану та похибки вимірюваних параметрів підкорюються нормальному закону розподілу з нульовим математичним сподіванням:

$$\delta\theta \sim N(0, \sigma_{\theta}^2); \varepsilon_Y \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_Y}^2).$$

Припускаючи, що  $\delta Z = F\delta Y_{\text{вим}}$ , за допомогою формул (5.1) і (5.2) отримаємо:

$$H_Z \cdot \delta\theta = F(H_Y \cdot \delta\theta + \varepsilon_Y). \quad (5.5)$$

Тепер задача оптимального оцінювання невимірюваних параметрів зводиться до визначення матриці  $F$ , яка мінімізує похибку оцінки. За умови припущення про те, що відхилення параметрів технічного стану та похибки вимірювань є некорельованими,  $\text{cov}(\theta, \varepsilon_Y) = 0$ , розв'язком рівняння (5.5) є

$$F = H_Z \text{cov}(\delta\theta) \cdot H_Y^T (H_Y \text{cov}(\delta\theta) H_Y^T + \text{cov} \varepsilon_Y)^{-1}. \quad (5.6)$$

Для обернення суми матриць використаємо формулу Шермана-Моррісона-Вудбері [7]

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1} = A^{-1} (I - B A^{-1}).$$

Припустимо, що відхилення параметрів технічного стану мають рівні між собою дисперсії та некорельовані між собою. Тоді

$$\text{cov} \delta\theta = \text{diag} \left\{ \sigma_{\delta G_{\text{кнт}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{кнт}}}^2, \sigma_{\delta G_{\text{квт}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{квт}}}^2, \sigma_{\delta A_{\text{твт}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{твт}}}^2, \sigma_{\delta A_{\text{тнт}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{тнт}}}^2 \right\} = \sigma_{\delta\theta}^2 I; \quad (5.6)$$

$$\text{cov} \varepsilon_Y = \text{diag} \left( \sigma_{p_k^*}^2, \sigma_{T_t^*}^2, \sigma_{n_{\text{нт}}}^2, \sigma_{G_{\text{п}}}^2 \right); \quad (5.7)$$

$$F = H_Z \text{cov}(\delta\theta) H_Y^T (H_Y \text{cov}(\delta\theta) H_Y^T + \text{cov} \varepsilon_Y)^{-1} = H_Z \sigma_{\delta\theta}^2 I H_Y^T \cdot$$

$$\cdot (H_Y \cdot \sigma_{\delta\theta}^2 I \cdot H_Y^T + \text{cov} \varepsilon_Y)^{-1} = H_Z \sigma_{\delta\theta}^2 I H_Y^T (\sigma_{\delta\theta}^2)^{-1} \left( H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov} \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = \quad (5.8)$$

$$= H_Z H_Y^T \left( H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov} \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = H_Z H_Y^T \cdot (H_Y H_Y^T)^{-1} \left( I - \frac{\text{cov} \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} (H_Y H_Y^T)^{-1} \right) = F_0 (I - \Delta F),$$

де  $F_0 = H_Z H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1}$  – матриця перетворення, яка не враховує шум вимірювань; вона відповідає результату розрахунку через праву псевдообернену матрицю.

$$\Delta F = \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} (H_Y H_Y^T)^{-1} - \text{матриця-поправка, яка враховує співвідношення}$$

дисперсій вимірювання та відхилень параметрів технічного стану. При відсутніх шумах вимірювання ця поправка дорівнює нулю.

Розрахунок правої псевдооберненої матриці дає меншу похибку, оскільки матриця  $H_Y H_Y^T$  краще обумовлена.

Обчислювальна стійкість розрахунків визначатиметься числами обумовленості матриць  $(H_Y H_Y^T)$  і  $\left( H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)$ . Загальноприйнятого порогу

для значення числа обумовленості не існує, оскільки це залежить від конкретної задачі та вимог до точності. Однак, як правило, значення порядку  $10^3$  або менше вважається прийнятним. При значеннях числа обумовленості порядку  $10^6$  і вище матриця вважається погано обумовленою, і обернення такої матриці може привносити велику похибку [15].

До складу вимірюваних можуть входити параметри, які реагують майже однаково на зміну стану (повний тиск і температура у відповідних перерізах або вздовж енергоізолюваних каналів), цей випадок зустрічається рідко, його просто виключити шляхом аналізу складу параметрів. Однак не виключено, що коефіцієнти впливу неоднорідних параметрів не будуть корельовані на певних режимах. Мультиколінеарність рядків матриці коефіцієнтів впливу призводить до збільшення числа обумовленості. Тому у випадку неприйнятно великих чисел обумовленості пропонуємо матрицю  $H_Y H_Y^T$  замінити її сингулярним розкладенням з подальшим видаленням малих сингулярних значень.

Найбільш розрахунково стійким методом обернення матриці є її попереднє сингулярне розкладення (SVD – singular value decomposition) [16], яке полягає в представленні початкової  $(n \cdot n)$ -матриці  $H_Y H_Y^T$  у вигляді добутку трьох матриць:

$$H_Y H_Y^T = USV^T,$$

де  $U(n \cdot n)$ ,  $V(n \cdot n)$  – ортогональні матриці;

$S(n \cdot n)$  – матриця сингулярних чисел.

Далі відкидаємо стовпці та рядки матриці  $S$ , які містять малі сингулярні числа, таким чином отримавши усічену матрицю  $S'(r \cdot r)$ . У матриці  $V$  слід залишити тільки перші  $r$  стовпців, таким чином отримуємо  $V'(n \cdot r)$ . Використане сингулярне розкладення зменшує число обумовленості матриці яка обертається:

$$H_Y H_Y^T \approx US'V'^T; (H_Y H_Y^T)^{-1} \approx V'(S')^{-1} U^T;$$

$$F = H_Z H_Y^T \left( H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = H_Z H_Y^T \left( US'V'^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1};$$

$$F = H_Z H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} \left( I - \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} (H_Y H_Y^T)^{-1} \right) = H_Z H_Y^T V'(S')^{-1} U^T \left( I - \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} V'(S')^{-1} U^T \right).$$

Зауважимо: матриця  $F$ , яка пов'язує вимірювані параметри з невимірюваними, знайдена саме таким чином, що виконується умова

$$\sum (\delta \hat{Z} - \delta Z)^2 \rightarrow \min,$$

тобто коефіцієнти матриці знайдені з умови мінімізації суми квадратів відхилень оцінок невимірюваних параметрів від їх справжніх значень.

#### 5.2.4 Ключові особливості та переваги методу

Особливості формулювання задачі полягають у тому, що, на відміну від класичних методів, які орієнтовані на точне відновлення внутрішніх параметрів і лише опосередковано впливають на точність оцінки невимірюваного параметра, запропонований підхід безпосередньо мінімізує похибку визначення саме невимірюваного параметра. Метод не передбачає оцінювання вектору параметрів технічного стану, оскільки це не є метою задачі. Крім того, визначення великої кількості параметрів є неможливим через обмежену кількість (як правило, 3–5) вимірюваних параметрів. Отже, відновлення всього вектору параметрів технічного стану в класичному розумінні не є можливим.

*Обчислювальна стійкість:* завдяки використанню правого псевдообернення та сингулярного розкладання (SVD) метод усуває проблеми, пов'язані з поганою обумовленістю матриць, що є суттєвою перевагою порівняно з класичними методами, такими як WLS або BLUE.

*Обчислювальна складність:* метод є обчислювально ефективнішим за BLUE або WLS, оскільки оцінювання невимірюваного параметра відбувається напряму, без проміжного розрахунку внутрішніх параметрів. Це дозволяє знизити складність розрахунків та уникнути накопичення числових похибок.

*Аналitична зручність представлення:* знайдена матриця перетворення представлена у вигляді добутку двох компонентів: основної частини, яка визначає залежність між вимірюваними та невимірюваним параметрами за відсутності шуму, та коригувального множника, який залежить від шуму вимірювань.

Така форма дає додаткові переваги в аналізі, зокрема:

- дозволяє окремо досліджувати вплив шуму вимірювань на кінцевий результат;
- можна аналізувати, як саме множник при шумі змінює поправку та на які параметри найбільше впливає.

*Врахування шуму вимірювань:* метод забезпечує корекцію оцінки залежно від рівня шуму вимірювань, що суттєво підвищує точність визначення невимірюваного параметра.

Запропонований метод є альтернативою класичним підходам, що дозволяє ефективно оцінювати невимірювані параметри в умовах погано обумовлених задач із шумовими спотвореннями. Основна ідея полягає в безпосередньому обчисленні матриці перетворення між вимірюваними параметрами та невимірюваним параметром, уникаючи проміжного оцінювання внутрішніх параметрів технічного стану. Його ключові переваги — числова стійкість, мінімізація похибки саме невимірюваного параметра та зручне аналітичне представлення, яке спрощує аналіз впливу шуму.

### 5.3 Похибки оцінювання невимірюваних параметрів

Визначимо похибки запропонованого методу оцінювання невимірюваних параметрів на основі вимірюваних. Похибка визначення невимірюваного параметра  $\varepsilon_{z_i}$ :

$$\varepsilon_{z_i} = \frac{\hat{z}_i - z_i}{z_i} = \frac{z_0(1 + \delta\hat{z}_i) - z_0(1 + \delta z_i)}{z_0(1 + \delta z_i)} = \frac{\delta\hat{z}_i - \delta z_i}{(1 + \delta z_i)}. \quad (5.9)$$

Припустимо, що  $\delta z_i$  приймає малі значення, тоді дисперсія похибки визначатиметься як

$$\sigma^2(\varepsilon_{z_i}) = \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot (1 + \sigma^2(\delta z_i)) = \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) + \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot \sigma^2(\delta z_i). \quad (5.10)$$

Доданок  $\sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot \sigma^2(\delta z_i)$  має менший порядок, тому можемо ним знехтувати. Таким чином, похибка визначатиметься лише чисельником виразу (5.9). Можемо записати вираз для розрахунку похибки усього вектора невимірюваних параметрів:

$$\varepsilon_z = \delta\hat{Z} - \delta Z = F\delta Y_{\text{вим}} - H_z\delta\theta = F(\delta Y + \varepsilon_Y) - H_z\delta\theta = (FH_Y - H_z)\delta\theta + F\varepsilon_Y = \varepsilon_z^M + \varepsilon_z^i. \quad (5.11)$$

де  $\varepsilon_z^M = (FH_Y - H_z)\delta\theta$  – методична похибка, зумовлена відкиданням нульових і малих сингулярних чисел у матриці  $S$ ;

$\varepsilon_z^i = F\varepsilon_Y$  – інструментальна похибка, зумовлена похибками вимірювань.

Представимо перший доданок у вигляді

$$\varepsilon_z^M = (FH_Y - H_z)\delta\theta = \left( H_z H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - H_z \right) \delta\theta = H_z \left( H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - I \right) \delta\theta.$$

Видно, що методична похибка залежить від відхилень параметрів технічного стану та множника  $\left( H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - I \right)$ . Вона зумовлена виключно методикою, яка ґрунтується на заміні більшої кількості параметрів технічного стану обмеженою кількістю вимірюваних параметрів.

$\Pi_{H_Y} = H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y$  – матриця ортогональної проєкції на чотиривимірний підпростір у восьмивимірному просторі, породжений матрицею  $H_Y$ .  $\Pi_{H_Y} \neq I$ , бо не зберігає всю інформацію через неповний ранг матриці  $H_Y$ . Таким чином,  $(\Pi_{H_Y} - I)$  відображає ступінь втрати інформації під час реконструкції.

При заміні матриці  $H_Y H_Y^T$  на її сингулярне розкладення  $US^T V^T$  методична похибка буде додатково збільшена через відкидання малих сингулярних чисел:

$$\varepsilon_Z^M = (FH_Y - H_Z) \delta\theta = H_Z \left( H_Y^T V^T (S^T)^{-1} U^T H_Y - I \right) \delta\theta. \quad (5.12)$$

Коваріаційні матриці складових похибок:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z^M) = (FH_Y - H_Z) \text{cov}(\delta\theta) (FH_Y - H_Z)^T; \quad \text{cov}(\varepsilon_Z^i) = F \text{cov}(\varepsilon_Y) F^T. \quad (5.13)$$

Урахувавши (5.6), отримаємо:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z^M) = (FH_Y - H_Z) (FH_Y - H_Z)^T \sigma_{\delta\theta}^2. \quad (5.14)$$

Коваріаційна матриця загальної похибки вектору невимірюваних параметрів:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z) = \text{cov}(\varepsilon_Z^M) + \text{cov}(\varepsilon_Z^i). \quad (5.15)$$

## 5.4 Приклад – визначення тяги двигуна AI-322

### 5.4.1 Формування алгоритму й аналіз похибок

Розглянемо використання запропонованої методики на прикладі ТРДД типу AI-322. До складу вимірюваних параметрів належать: тиск за компресором, температура за турбіною, частота обертання ротора низького тиску, витрата палива. Частота обертання ротора високого тиску використовується як параметр, що визначає режим роботи двигуна. Невимірюваним параметром є тяга, тому  $H_Z$  являє собою матрицю-рядок.

Матриці коефіцієнтів впливу розраховані за допомогою базової нелінійної моделі, що ґрунтується на розв'язанні рівнянь робочого процесу з використанням характеристик вузлів, налаштованих на параметри «середнього» двигуна. Для розрахунку кожен параметр технічного стану було почергово відхилено на 3 %.

Розрахунки виконано в усьому робочому діапазоні двигуна. Детальні дані представлено нижче для режиму 85% максимальної частоти обертання ротора ВТ.

Матриці коефіцієнтів впливу

$$H_Y = \begin{pmatrix} 0,0827 & 0,3425 & 1,364 & -0,7231 & -0,5767 & -0,7528 & -0,5365 & 0,0519 \\ -0,0385 & -0,0929 & 0,3673 & -1,231 & 0,4788 & -1,496 & -0,6069 & -0,1798 \\ -0,379 & 0,5192 & 0,9496 & -0,6013 & 0,2807 & -0,7389 & -0,9557 & 0,3356 \\ 0,0319 & 0,2734 & 1,867 & -2,33 & 0,9712 & -2,845 & -1,5815 & -0,068 \end{pmatrix};$$

$$H_Z = (0,1989 \quad 0,9836 \quad 2,2308 \quad -1,6173 \quad 0,7379 \quad -1,988 \quad -2,0132 \quad 0,5387).$$

У таблиці 5.1 наведено СКВ похибок вимірювань, значення яких обґрунтовано в роботі [17].

Таблиця 5.1 – СКВ похибок вимірювань, %

$P_H^*$	$T_H^*$	$n_{BT}$	$G_{\Pi}$	$P_K^*$	$T_K^*$	$P_{TBT}^*$	$T_{TBT}^*$	$T_{THT}^*$
0,03	0,2	0,05	0,5	0,2	0,2	0,3	0,25	0,2

Відповідно,  $\text{cov } \varepsilon_Y = \text{diag}(0,2^2, 0,2^2, 0,05^2, 0,5^2)$ . Приймаючи, що  $\sigma_{\delta\theta} = 1\%$ , отримаємо:

$$\frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} = \begin{pmatrix} 0,2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5^2 \end{pmatrix}.$$

Розрахунок чисел обумовленості:

$$\kappa(H_Y H_Y^T) = 403,4; \quad \kappa\left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2}\right) = 179,3.$$

У нашому випадку число обумовленості має прийнятні значення, тому сингулярне розкладення та відкидання малих сингулярних значень є недоцільним.

Розрахуємо матриці  $F_0$  і  $F$  для порівняння їх значень:

$$F = (f_{P_K^*} \quad f_{T_T^*} \quad f_{n_{HT}} \quad f_{G_{\Pi}}) = (0,1548 \quad -0,4702 \quad 1,106 \quad 0,63);$$

$$F_0 = (-0,0936 \quad -1,458 \quad 0,6932 \quad 1,307).$$

Розрахунок похибок:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z) = \text{cov}(\varepsilon_Z^M) + \text{cov}(\varepsilon_Z^i);$$

$$FH_Y - H_Z = (-0,567 \quad -0,14 \quad 0,0338 \quad -0,0484 \quad -0,13 \quad -0,0343 \quad 0,1621 \quad -0,1178);$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 0,4025; \quad \sigma(\varepsilon_Z^M) = 0,6344\%.$$

$$\text{cov}(\varepsilon_Z^i) = F \text{cov}(\varepsilon_Y) F^T;$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\varepsilon_Z^i) &= (f_{P_K^*} \sigma_{P_K^*})^2 + (f_{T^*} \sigma_{T^*})^2 + (f_{n_{HT}} \sigma_{n_{HT}})^2 + (f_{G_{II}} \sigma_{G_{II}})^2 = \\ &= (0,1548 \cdot 0,2)^2 + (-0,4702 \cdot 0,2)^2 + (1,106 \cdot 0,05)^2 + (0,63 \cdot 0,5)^2 = 0,1121. \end{aligned}$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,3348\%; \quad \sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 0,5146; \quad \sigma(\varepsilon_Z) = 0,7173\%.$$

Важливим етапом аналізу є визначення внеску окремих складових (як методичної, так і інструментальної) у загальну похибку оцінки. Джерелом методичної похибки є неповний ранг матриці коефіцієнтів впливу через обмежену кількість вимірюваних параметрів, які лише частково відтворюють параметри технічного стану. Фактично це означає вибір лише найбільш інформативних напрямків простору – головних компонент. У даному випадку збережено чотири напрямки, які несуть найбільшу частку інформації про дефекти. Це означає, що деякі компоненти вектора параметрів технічного стану реконструюються менш точно через втрату проєкцій у напрямках зі слабкою інформативністю. Аналіз окремих складових дисперсії методичної похибки дозволяє кількісно оцінити, які параметри технічного стану найгірше піддаються оцінюванню за наявної структури вимірюваних параметрів та їх точності. Аналіз окремих складових дисперсії інструментальної похибки дозволяє кількісно оцінити внесок похибок вимірювання кожного вимірюваного параметра в загальну інструментальну похибку. Такий підхід може лежати в основі обґрунтованого вибору складу вимірюваних параметрів та точності датчиків для збільшення точності оцінювання невимірюваних параметрів.

Для оцінки впливу окремих параметрів на методичну та інструментальну похибку оцінки невимірюваного параметра розраховуються відносні дисперсії:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_\Sigma^2}, \quad (5.16)$$

де  $\sigma_\Sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2$  – сумарна дисперсія;

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$  – складові сумарної дисперсії.

Відносні складові дисперсії методичної похибки:

$$\bar{\sigma}_{\delta G_{\text{кнт}}}^2 = \frac{(-0,567)^2}{0,4025} = 0,798; \quad \bar{\sigma}_{\delta \eta_{\text{кнт}}}^2 = 0,049; \quad \bar{\sigma}_{\delta G_{\text{квт}}}^2 = 0,003; \quad \bar{\sigma}_{\delta \eta_{\text{квт}}}^2 = 0,006;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta A_{\text{твт}}}^2 = 0,042; \quad \bar{\sigma}_{\delta \eta_{\text{твт}}}^2 = 0,003; \quad \bar{\sigma}_{\delta A_{\text{тнт}}}^2 = 0,065; \quad \bar{\sigma}_{\delta \eta_{\text{тнт}}}^2 = 0,034.$$

Відносні складові дисперсії інструментальної похибки:

$$\bar{\sigma}_{p_k^*}^2 = \frac{(f_{p_k^*} \sigma_{p_k^*})^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,086; \quad \bar{\sigma}_{T_T^*}^2 = \frac{(f_{T_T^*} \sigma_{T_T^*})^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,079;$$

$$\bar{\sigma}_{n_{\text{нт}}}^2 = \frac{(f_{n_{\text{нт}}} \sigma_{n_{\text{нт}}})^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,027; \quad \bar{\sigma}_{G_{\text{п}}}^2 = \frac{(f_{G_{\text{п}}} \sigma_{G_{\text{п}}})^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,885.$$

Аналогічним чином виконано розрахунки на інших режимах. Результати для всього діапазону режимів роботи ТРДД представлено на рис. 5.4–5.7.

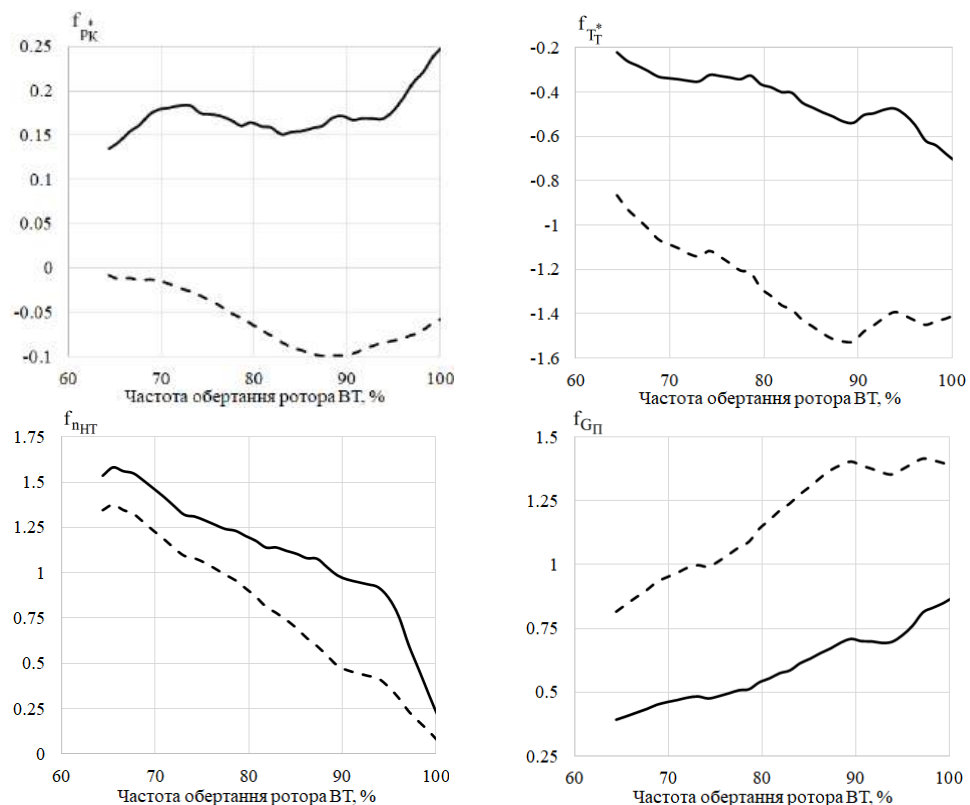


Рис. 5.4 - Значення коефіцієнтів матриць  $F_0$  (штрихова лінія) та  $F$  (суцільна лінія)

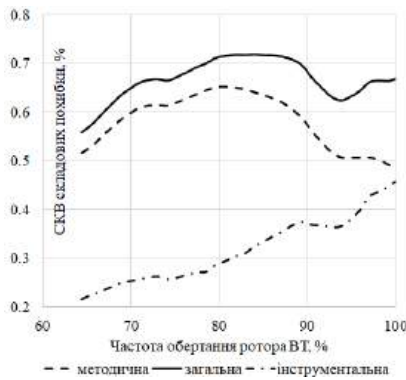


Рис. 5.5 - Складові похибки оцінки тяги (загальна, методична, інструментальна)

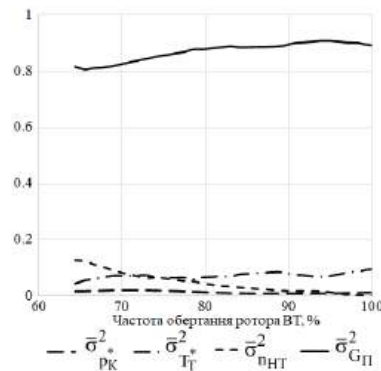


Рис. 5.6 - Відносні дисперсії складових інструментальної похибки оцінки тяги

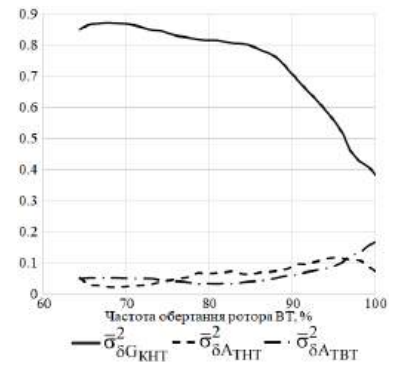


Рис. 5.7 - Відносні дисперсії складових методичної похибки оцінки тяги

Класичним підходом до оцінювання тяги в бортових системах є використання емпірично підбраного вимірюваного параметра, який корелює з тягою, та подальше масштабування його залежності відповідно до режиму роботи двигуна. У таких алгоритмах, як правило, застосовується лише один параметр-представник тяги, частота обертання ротора НТ (вентилятора) чи повний тиск за компресором. Такий метод відрізняється простотою реалізації, високою обчислювальною ефективністю, але має обмежену точність та гнучкість, особливо за умов зміни технічного стану двигуна.

Покажемо на розглянутому прикладі для режиму 85% максимальної частоти обертання ротора ВТ, що використання лише одного вимірюваного параметра дає більшу похибку оцінювання, ніж у разі використання запропонованої методики.

#### 5.4.2 Оцінювання за відхиленнями тиску за компресором

$$F = 1,805;$$

$$FH_Y - H_Z = (-0,05 \quad -0,365 \quad 0,23 \quad 0,312 \quad -1,779 \quad 0,629 \quad 1,045 \quad -0,445);$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 5,136; \quad \sigma(\varepsilon_Z^M) = 2,266\%; \quad \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = (f_{P_k^*} \sigma_{P_k^*})^2 = (1,805 \cdot 0,2)^2 = 0,1303.$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,361\%; \quad \sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 5,267; \quad \sigma(\varepsilon_Z) = 2,295\%.$$

Основним чинником методичної похибки при використанні тиску за компресором є відхилення пропускної здатності турбін  $\sigma_{\delta A_{ТВТ}}^2 = 3,165$ ;  $\sigma_{\delta A_{ТНТ}}^2 = 1,092$ .

### 5.4.3 Оцінювання за відхиленнями частоти обертання ротора НТ

$$F = 2,195;$$

$$FH_Y - H_Z = (-1,03 \quad 0,156 \quad -0,147 \quad 0,298 \quad -0,122 \quad 0,366 \quad -0,084 \quad 0,198);$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 1,39; \quad \sigma(\varepsilon_Z^M) = 1,179 \%. \quad \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = (f_{\text{ннт}} \sigma_{\text{ннт}})^2 = (2,195 \cdot 0,05)^2 = 0,012;$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,11 \%; \quad \sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 1,402; \quad \sigma(\varepsilon_Z) = 1,184 \%.$$

Основним чинником методичної похибки при використанні частоти обертання ротора НТ є відхилення витрати повітря в КНТ  $\sigma_{\delta G_{\text{КНТ}}}^2 = 1,061$ .

Обидва скорочених склади вимірюваних параметрів порівняно з розширеним дають більшу похибку оцінювання через необхідність обрання лише одного головного напрямку замість чотирьох. Більшу точність оцінювання тяги забезпечує використання вимірювання частоти обертання ротора НТ. Так само як і для розширеного складу вимірюваних параметрів, найбільший внесок у методичну похибку спричиняє відхилення витрати повітря КНТ.

### 5.4.4 Імітаційне моделювання при різних видах дефекту

Виконано моделювання при дії кожного виду дефекту окремо серед восьми розглянутих. Відносні відхилення параметрів технічного стану задавалися на рівні -2,5% від їх номінальних значень. За запропонованою методикою при заданій зміні витрати палива розраховано оцінки тяги та порівняно їх з істинними значеннями.

На графіках показано зміну відносної похибки за часом.

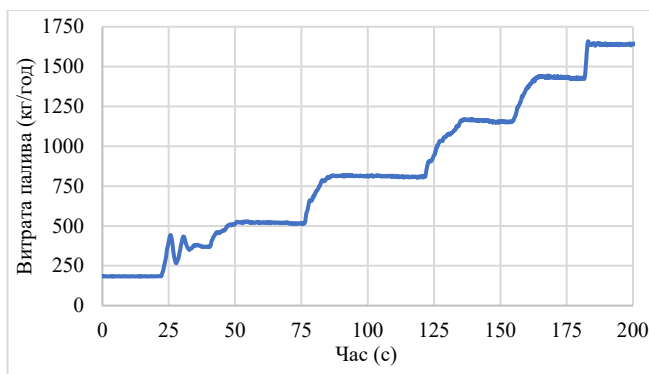


Рис. 5.8 – Залежність витрати палива за часом

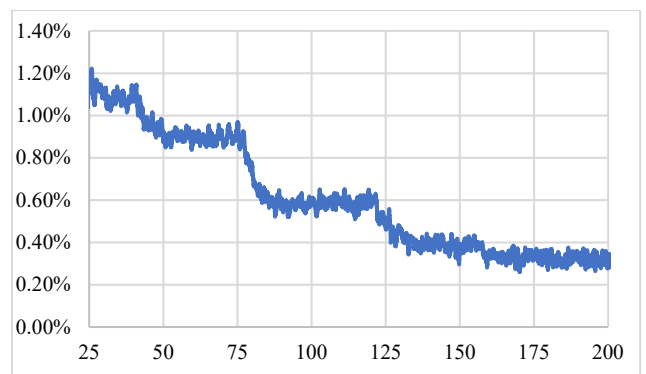


Рис. 5.9 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta G_{\text{КНТ}} = -0,025$

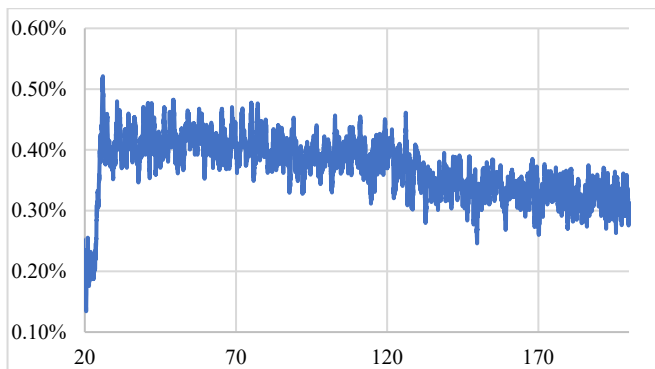


Рис. 5.10 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta\eta_{\text{КНТ}} = -0,025$

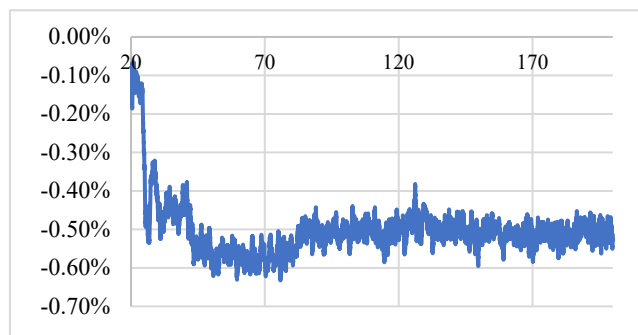


Рис. 5.11 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta G_{\text{КВТ}} = -0,025$

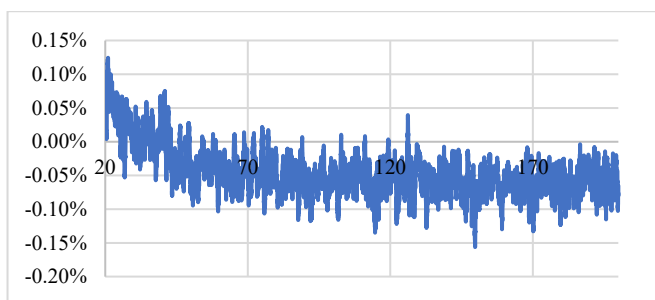


Рис. 5.12 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta\eta_{\text{КВТ}} = -0,025$

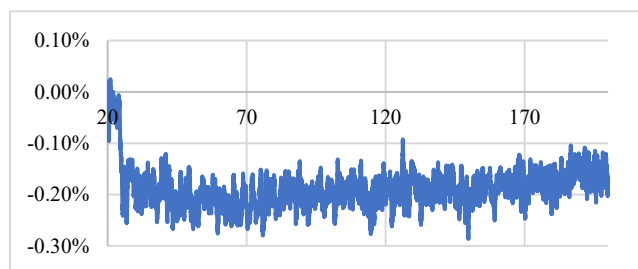


Рис. 5.13 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta A_{\text{ТВТ}} = -0,025$

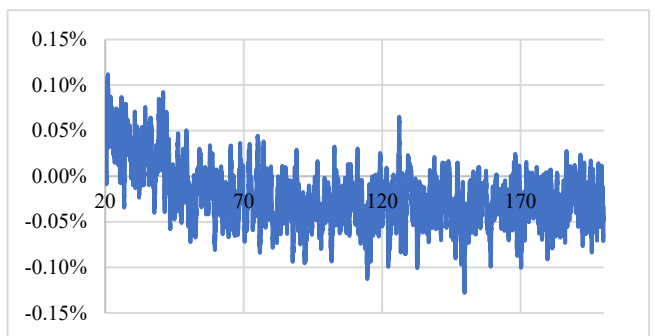


Рис. 5.14 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta\eta_{\text{ТВТ}} = -0,025$

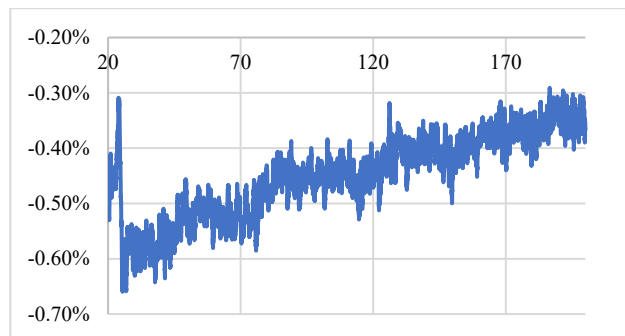


Рис. 5.15 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta A_{\text{ТНТ}} = -0,025$

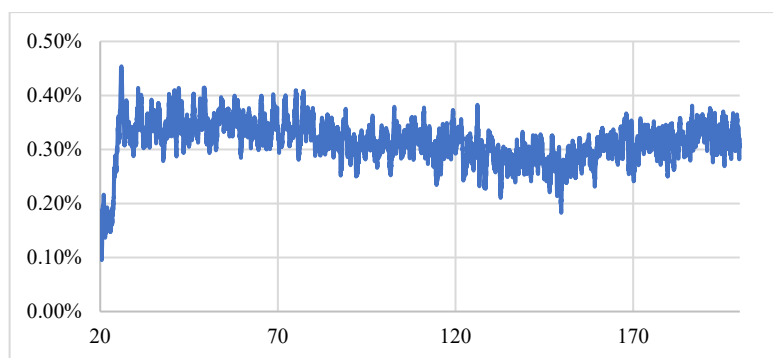


Рис. 5.16 – Відносна похибка оцінки тяги при  $\delta\eta_{\text{ТНТ}} = -0,025$

Розраховано похибки оцінок тяги при дії різних дефектів. Такий аналіз дозволяє дослідити вплив кожного дефекту на похибку оцінювання тяги. Аналіз показує, що найбільшою є похибка при відхиленні витрати повітря через КНТ

(вентилятор), але на режимах, близьких до максимального, похибка стає співрозмірною з похибками при відхиленнях ККД КНТ, ТНТ. Оцінки тяги більші за істинні значення при зменшенні витрати повітря через КНТ, коефіцієнтів корисної дії КНТ та ТНТ від своїх номінальних значень. Наявність таких дефектів призводить до завищення оцінок тяги приблизно на 0,3% (на максимальному режимі роботи). Відхилення ККД компресора та турбіни високого тиску не призводять до значних похибок оцінювання тяги. Зменшення пропускної здатності турбін НТ, ВТ та витрати повітря через КВТ призводить до зниження оцінок тяги.

Таку відмінність впливів різних дефектів на точність оцінювання тяги за застосованою методикою зумовлена впливом дефектів на тягу та вимірювані параметри.

Похибка оцінювання є меншою, коли:

- дефект слабо впливає на оцінюваний параметр;
- серед вимірюваних є параметри, на які сильно впливають дефекти; тоді за їх відхиленнями можна точно відновити відхилення параметрів технічного стану.

На прикладі відхилень ККД компресора та турбіни високого тиску видно, що ці види дефектів мають незначний вплив на похибку оцінювання.

На прикладі відхилення витрати повітря через КНТ видно, що висока похибка обумовлена одночасно як відсутністю параметра-представника дефекту серед вимірюваних, так і високим впливом цього дефекту саме на тягу.

Аналіз похибок для розглянутого прикладу показує, що на точність оцінювання тяги впливають вид дефекту, значення відносного відхилення параметра технічного стану, режим роботи двигуна.

На точність оцінки тяги можна вплинути такими заходами:

- урахування поточного стану двигуна для уточнення коваріаційної матриці відхилень параметрів технічного стану;
- включення до складу вимірюваних більш інформативних параметрів (наприклад тиску в зовнішньому контурі).

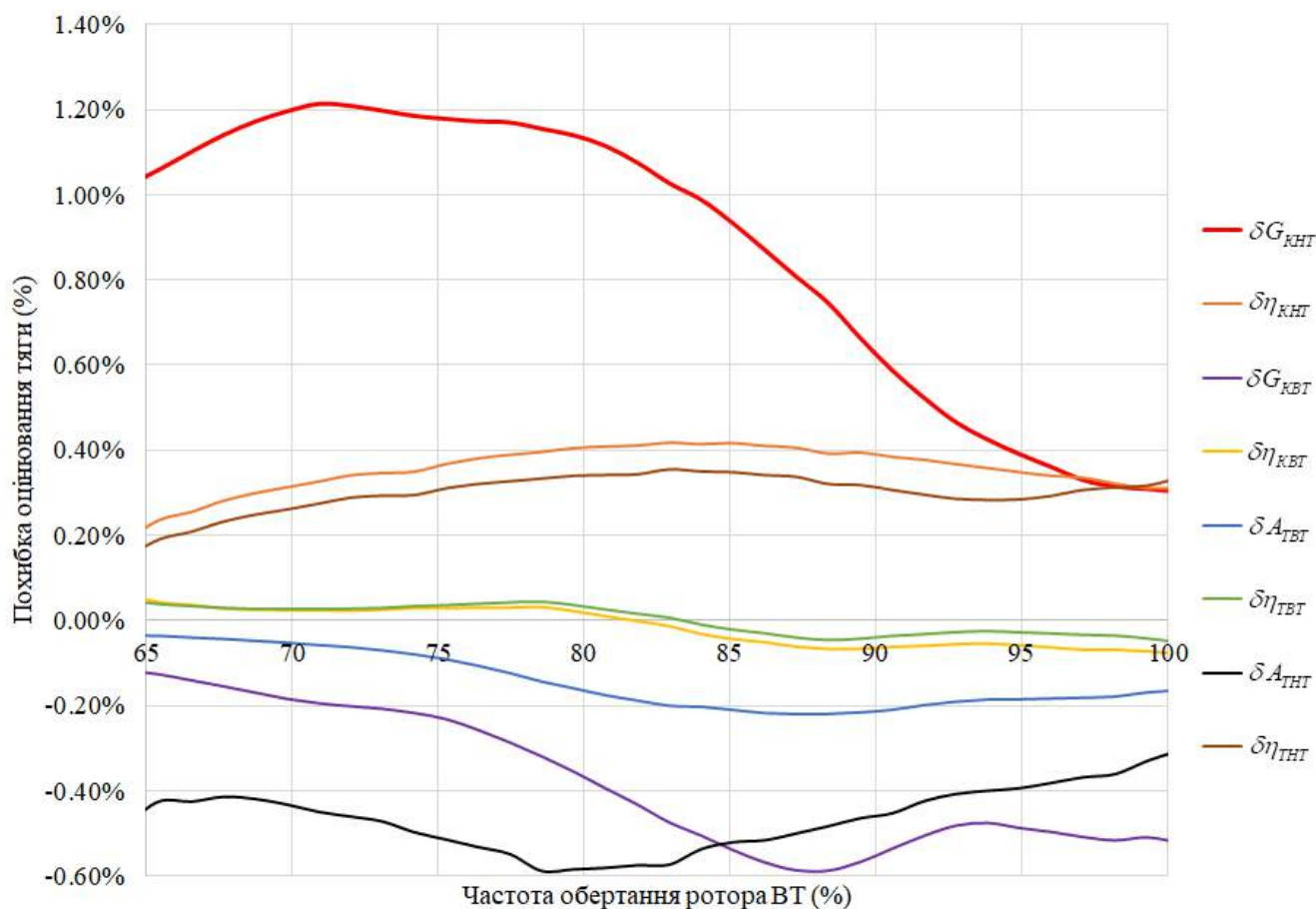


Рис. 5.17 – Похибки оцінювання тяги при різних видах дефектів в діапазоні робочих режимів роботи

#### 5.4.5 Аналіз результатів за прикладом

Для розглянутого прикладу запропонований метод визначення тяги забезпечує прийнятні значення числа обумовленості матриць. Суттєва відмінність між значеннями матриць  $F_0$  і  $F$  вказує на необхідність урахування похибок вимірювання. З рис. 5.4 видно, що врахування похибок вимірювання призвело до коригування коефіцієнтів матриці  $F$ . Абсолютні значення коефіцієнтів при відхиленнях тиску за компресором, температури за турбіною та витрати палива зменшились, а коефіцієнти при відхиленні частоти обертання ротора НТ збільшились. Це пояснюється перерозподілом ваг на користь тих параметрів, які вимірюються більш точно.

На рис. 5.5 наведено залежність СКВ похибок від режимного параметра. В усьому діапазоні робочих режимів значну частину загальної похибки складає методична похибка. На рис. 5.7 зображена залежність відносної дисперсії

складових методичної похибки від режимного параметра. Показано лише три складові, оскільки порядок величин інших п'яти співставний з  $\bar{\sigma}_{\delta_{\text{АТВТ}}}^2$ ,  $\bar{\sigma}_{\delta_{\text{АТНТ}}}^2$ . Основним чинником методичної похибки є відхилення  $\delta G_{\text{КНТ}}$ . Це пояснюється такими причинами: серед вимірюваних параметрів немає тих, які добре відтворюють цей дефект, а відхилення витрати повітря через вентилятор має прямий вплив на тягу.

На рис. 5.6 зображена залежність відносної дисперсії складових інструментальної похибки. Похибка вимірювання витрати палива домінує у формуванні інструментальної похибки. Це зумовлено не лише тим, що СКВ похибки вимірювання витрати палива є найбільшою серед вимірюваних параметрів. Застосований метод мінімізує загальну похибку, враховуючи похибки вимірювання, надаючи більшу вагу параметрам із вищою точністю. Однак береться до уваги й ступінь інформативності кожного вимірюваного параметра. Таким чином, витрата палива є прикладом параметра, який є одночасно інформативним і недостатньо точно вимірюваним.

### 5.5 Висновки за п'ятим розділом

У результаті робіт за даним розділом отримано такі основні результати:

1. Для ефективного вирішення задач керування та моніторингу двигуна необхідно знати ряд параметрів робочого процесу, які безпосередньо не вимірюються. Серед причин – складність організації вимірювань, обмежений ресурс датчиків, висока вартість елементів вимірювальної системи, захаращення проточної частини датчиками.
2. Параметри робочого процесу двигуна залежать від умов роботи, а також від індивідуальних особливостей (які пов'язані з похибками виготовлення та збирання деталей та вузлів), а також від зміни технічного стану вузлів у процесі експлуатації.
3. Аналіз відомих методів непрямих вимірювань показує, що багато з них не можуть бути використані для розв'язання задачі, що розглядається,

оскільки вимагають визначення відхилень параметрів технічного стану вузлів двигуна від нормальних значень.

4. Запропоновано загальну структуру системи оцінювання невимірюваних параметрів і відповідний метод, орієнтований на безпосереднє визначення шуканого параметра з урахуванням шумів вимірювання та обмеженість кількості вимірюваних параметрів, який є прикладною реалізацією регуляризованої форми зваженого методу найменших квадратів. Такий підхід до розв'язання задачі оцінювання можна також інтерпретувати як статичну адаптацію оцінки Калмана–Бюсі, в якій динамічний компонент свідомо вилучено як надлишковий з огляду на статичний характер задачі.
5. Зазначений метод інтегровано до складу структури самоналаштувальної моделі ТРДД.
6. За запропонованим методом виконано розрахунки та проаналізовано похибки та чинники, які мають найбільший вплив. Як об'єкт практичної перевірки обрано двигун типу AI-322.
7. З використанням інформації про реальний рівень похибок вимірювання параметрів авіаційних двигунів у експлуатації показано, що вони мають великий вплив на точність визначення тяги. Обґрунтовано потрібність використання вагових коефіцієнтів, які враховують суттєво різну точність вимірювання окремих параметрів.
8. Методична складова загальної похибки є також значною. Найбільший вплив мають індивідуальні особливості двигуна, пов'язані з відхиленням характеристики вентилятора за витратою повітря.
9. Результати цього розділу дисертації опубліковано в роботі автора [18].

#### **Список літератури до п'ятого розділу**

1. Matioudakis, K. Determining steady-state operation criteria using transient performance modelling and steady-state diagnostics / K. Matioudakis, N. Aretakis, A. Alexiou // Applied Sciences, 2024, Vol. 14 (2863). – 15 p. doi: <https://doi.org/10.3390/app14072863>.

2. Єпіфанов, С. В. Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко / *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2023. – №4 (188) – С. 50-61. doi: <https://doi.org/10.32620/akt.2023.4.06>.
3. Status of Gas Turbine Performance Degradation / R. Kurz, K. Brun, M. Pinelli, A. Suman // *Proc. of ASME Turbo Expo 2024 Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. GT2024-122216. – 2024. – 16 p. doi: <https://doi.org/10.1115/GT2024-122216>.
4. Signatures of Compressor and Turbine Faults in Gas Turbine Performance Diagnostics. A Review / K. Mathioudakis, A. Alexiou, N. Aretakis, C. Romesis // *Energies*. – 2024. – Vol. 3409, No. 17. – 22 p. doi: <https://doi.org/103390/en17143409>.
5. Simultaneous Fault Diagnostics for Three-shaft Industrial Gas Turbine / W. Salilew, S. Gilani, T. Lemma, A. Fentaye, & et al. // *Machines*. – 2023. – Vol. 832, No. 11. – 42 p. doi: <https://doi.org/10.3390/machines11080832>.
6. Linear Model of a Turboshaft Aero-engine Including Components Degradation for Control-oriented Applications / T. Castiglione, D. Perrone, L. Strafella, A. Fiscarella et al. // *Energies*. – 2023. – Vol. 2634, No. 16. – 18 p. doi: <https://doi.org/10.3390/en160626>.
7. Ben-Israel, A. *Generalized Inverses: Theory and Applications* / A. Ben-Israel, T. N. E. Greville. – New York : Springer. – 2003. – 420 p. doi: <https://doi.org/10.1007/b97366>.
8. Canty, A. J. *Weighted Least Squares* / A. J. Canty. – McMaster University. – 2015. – 25 p.
9. Hastie, T. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – 2nd ed. – New York: Springer. – 2009. – 745 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7>.
10. Jolliffe, I. T. *Principal Component Analysis* / I. T. Jolliffe. – 2nd ed. – New York : Springer. – 2002. – 487 p. doi: <https://doi.org/10.1007/b98835>.
11. Hoff, P. *Best Linear Unbiased Estimation* / P. Hoff. – Duke University. – 2022. – 30 p.

12. Grewal, M. S. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB / M. S. Grewal, A. P. Andrews. – 4th ed. – Hoboken: Wiley. – 2014. – 584 p. doi: <https://doi.org/10.1002/9781118984987>.
13. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches / D. Simon. – Wiley-Interscience. – 2006. – 552 p. doi: <https://doi.org/10.1002/0470045345>.
14. Bayesian Data Analysis / A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern et al. – 3rd ed. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC. – 2013. – 675 p. doi: <https://doi.org/10.1201/b16018>.
15. Higham, N. J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms / N. J. Higham // Philadelphia: SIAM, 2002. - 680 p. doi: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718027>.
16. Golub, G. H. Matrix Computations / G. H. Golub, C. F. Van Loan // Baltimore, Johns Hopkins University Press, 2013. - 756 p. doi: <https://doi.org/10.56021/9781421407944>.
17. Loboda, I., Miró Zárate, L. A., Yepifanov, S., Herrera, C. M., & Pérez Ruiz J. L. Estimation of Gas Turbine Unmeasured Variables for an Online Monitoring System / I. Loboda, L. A. Miró Zárate, S. Yepifanov et al. // International Journal of Turbo and Jet Engines, 2018, vol. 37, iss. 4, pp. 413-428. <https://doi.org/0.1515/tjj-2017-0065>.
18. Єпіфанов, С. В. Метод визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів з урахуванням технічного стану / С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко // Авіаційно-космічна техніка та технологія. – 2025. - № 2 (202). – С. 25-37. doi: 10.32620/aktt.2025.2.03.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну прикладну задачу визначення невимірюваних параметрів двигунів на усталених і перехідних режимах роботи з використанням бортових самоналаштувальних моделей. На основі проведених теоретичних і експериментальних досліджень отримано такі основні результати:

1. Виконано аналіз проблем визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів. Для цього нині сформована й успішно розвивається багатьма науковими школами концепція бортової самоналаштувальної моделі. На точність результатів, одержуваних з використанням цієї моделі, значний вплив мають похибки, зумовлені індивідуальними особливостями двигуна, які пов'язані з розкидом параметрів робочого процесу в результаті похибок виготовлення та збирання, а також зі зміною параметрів характеристик вузлів унаслідок деградації проточної частини. Тому роботу спрямовано саме на аналіз похибок оцінювання та вибір методів, які забезпечують їх найменші значення.
2. Сформульовано вимоги до відповідних математичних моделей. Запропоновано формувати модель на основі структури, до складу якої входять статична й динамічна підмоделі. Статична підмодель легко адаптується до індивідуальних особливостей двигуна. Динамічна підмодель має лінійну структуру, а її коефіцієнти залежать від режиму роботи двигуна.
3. Розроблено математичні моделі ТРДД зі змішуванням потоків і турбовального двигуна. Виконано їх верифікацію з використанням реальних даних. Встановлено, що моделі адекватно описують характер перехідних процесів. Наявні динамічні похибки зумовлені більш повільним початком перехідних процесів у реальному двигуні, що зумовлює сповільнення зміни частоти обертання ротора ВТ на 0,2 с, частоти обертання ротора НТ і тиску на виході з компресора на 0,3-0,4 с, а тяги на 1 с.

4. Доведено, що похибки параметричного оцінювання суттєво залежать від багатьох факторів, таких як істинні значення параметрів, що оцінюються, похибки вимірювань та апріорна інформація про модель. Розроблено узагальнений підхід до аналізу похибок адаптації моделі ГТД, головні концепції якого полягають у використанні лінійної динамічної моделі в околі істинних значень шуканих параметрів, розгляді похибок, що впливають, як незалежних нормально розподілених випадкових величин, використанні питомих параметрів і відповідного перетворення рівнянь, які відбивають зв'язок між похибками оцінювання та впливовими факторами, що робить ці рівняння універсальними, придатними для аналізу будь-яких параметрів двигуна та будь-яких впливових дій.
5. Із використанням зазначеного методу отримано нові співвідношення, що визначають залежність похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів від точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів. Із використанням зазначених співвідношень суттєво вдосконалено метод самоналаштування бортових динамічних моделей за результатами реєстрації параметрів під час роботи двигуна, що забезпечило моніторинг точності оцінок динамічних параметрів і визначення достатності отриманої інформації. Ці елементи (нові співвідношення та вдосконалення методу самоналаштування моделей) сформульовано як елементи наукової новизни роботи.
6. У результаті аналізу перехідної характеристики двигуна при стрибкоподібній зміні витрати палива визначено мінімальну можливу похибку оцінювання. Зокрема, при номінальному значенні сталої часу 1 с і коефіцієнті підсилення подачі палива 10, похибки вимірювання частоти обертання ротора 0,2 %, витрати палива 0,5 %, стрибкоподібної зміни подачі палива на 10 кг/с і частоті реєстрації 5 Гц, мінімальне середньоквадратичне відхилення похибки оцінки сталої часу становитиме 0,2 с, тобто 20 %. Цей значний рівень похибки вимагає

ретельного планування випробувань і постійної перевірки під час застосування запропонованого методу.

7. На прикладі газогенератора реального вертолітного турбовального двигуна отримано конкретні значення складових похибки оцінювання сталої часу. Показано, що головний внесок роблять похибки вимірювання частоти обертання ротора та витрати палива. Сумарна похибка внаслідок суперечливого впливу різних факторів слабо залежить від режиму роботи двигуна. Для розглянутого прикладу вона складає біля 0,05 с, що є суттєвим для багатьох задач, для розв'язання яких використовуються динамічні моделі двигунів. Це показує актуальність аналізу похибок оцінювання параметрів динамічних моделей, методика якого набула подальшого розвитку в цій роботі.
8. Запропонований підхід до аналізу точності оцінювання коефіцієнтів динамічних моделей розповсюджено на двовальний двигун, кількість динамічних характеристик якого більша та параметричні похибки моделі також впливають на оцінки динамічних характеристик. Для двовального двигуна отримано універсальне рівняння, яке визначає похибку оцінки коефіцієнтів лінійної динамічної моделі як функцію всіх основних впливових факторів: похибок вимірювання та частоти реєстрації, інтенсивності тестового впливу та номінальних значень коефіцієнтів моделі.
9. Запропоновано загальну структуру системи оцінювання невимірюваних параметрів та відповідний метод, орієнтований на безпосереднє визначення шуканого параметра з урахуванням похибок вимірювання та обмеженості кількості вимірюваних параметрів, і є прикладною реалізацією регуляризованої форми зваженого методу найменших квадратів.
10. За запропонованим методом виконано розрахунки та проаналізовано похибки й чинники, які мають найбільший вплив. Як об'єкт практичної перевірки обрано двигун типу AI-322.

Усі поставлені в роботі завдання вирішено з отриманням позитивних результатів, мету дослідження досягнуто.

Перспективними завданнями подальших досліджень є:

- практична перевірка запропонованого методу визначення невимірюваних параметрів (зокрема тяги) із використанням експериментальної інформації, отриманої під час стендових випробувань із вимірюванням тяги;
- розширення отриманих результатів на інші невимірювані параметри (температуру газу перед турбіною, параметри граничних умов теплообміну деталей із контрольованим ресурсом та ін.).
- розширення аналізу точності оцінювання параметрів на динамічні моделі інших параметрів двигуна (температури, тиску та ін.);
- продовження дослідження аналізу точності оцінювання параметрів двовальних двигунів із урахуванням кореляцій оцінок;
- аналіз нелінійних ефектів, які в першу чергу визначаються залежністю динамічних коефіцієнтів двигунів від умов їх роботи;
- практична реалізація запропонованих підходів у системах автоматичного керування двигунів.

Розв'язання цих завдань забезпечить подальше підвищення точності визначення невимірюваних параметрів і відповідне вдосконалення систем автоматичного керування та діагностування авіаційних газотурбінних двигунів.

## Додаток А

ЗАТВЕРДЖУЮ

Головний інженер

"МОТОР СІЧ"



Костянтин БАЛУШОК

» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## АКТ

про впровадження результатів дисертаційного дослідження  
аспіранта БОНДАРЕНКА Олексія Васильовича  
на здобуття наукового ступеня доктора філософії  
за спеціальністю 142 – енергетичне машинобудування

Комісія у складі

голови – головного конструктора АТ «МОТОР СІЧ»,  
Подгорського К. М.

членів – директора по якості Папченкова О.В., головного конструктора,  
к.т.н. Басова Ю.Ф.

у період з 20.05.2025р. по 10.06.2025 р. розглянула матеріали наукових  
досліджень аспіранта Національного аерокосмічного університету  
«Харківський авіаційний інститут» Бондаренка О. В.

Комісія засвідчує:

1. У результаті наукових досліджень, проведених Бондаренком  
Олексієм Васильовичем у рамках виконання договору №203-25/2021 між АТ  
«МОТОР СІЧ» і «ХАІ», отримано наступні результати:

- вдосконалено метод формування швидкорозрахункових  
багаторежимних математичних моделей турбовальних двигунів на основі  
повузлової статичної моделі, і на цій основі створено модель двигуна ТВ3-  
117ВМА-СБМ1В 1 серії;

- визначено співвідношення між похибками оцінювання коефіцієнтів лінійних динамічних моделей двигунів і впливовими факторами, які дозволяють раціонально планувати експериментальні дослідження;

- запропоновано метод визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів за вимірюваною інформацією, а також аналізу відповідних похибок.

2. Результати наукових досліджень використано при проектуванні системи автоматичного керування двигуна ТВ3-117ВМА-СБМ1В.

Голова комісії:



Подгорський К. М.

Члени комісії: к.т.н.



Басов Ю.Ф.



Папченков О.В.

## Додаток Б



## АКТ

про впровадження результатів дисертаційного дослідження  
аспіранта БОНДАРЕНКА Олексія Васильовича  
на здобуття наукового ступеня доктора філософії  
за спеціальністю 142 – енергетичне машинобудування

Комісія у складі

голови – заступника голови правління Кононихіна О. В.

членів – головного конструктора АТ «ФЕД» Кравченка Ю. Г.,  
начальника управління програм і проєктів, д.т.н. Логінова В. В.

розглянула матеріали наукових досліджень  
аспіранта Національного аерокосмічного університету «Харківський  
авіаційний інститут» Бондаренка О. В.

- Комісія засвідчує:

1. У результаті наукових досліджень, проведених Бондаренко  
Олексієм Васильовичем отримано наступні результати:

- сформовано швидкорозрахункову багаторежимну математичну  
модель турбореактивного двоконтурного двигуна AI-322;

- розроблено метод аналізу похибок оцінювання параметрів динамічної  
моделі двовального двигуна, який дозволяє урахувати вплив похибок  
вимірювання та інтенсивності керуючих дій, які спричиняють перехідні  
процеси;

- запропоновано метод визначення невимірюваних параметрів  
газотурбінних двигунів за вимірюваною інформацією, а також аналізу  
відповідних похибок.

2. Результати наукових досліджень використано при проєктуванні  
агрегатів і системи автоматичного керування двигуна AI-322.

Голова комісії:

Кононихін О. В.

Члени комісії:

Кравченко Ю.Г.

д.т.н.

Логінов В.В.

## Додаток В

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної роботи Національного аерокосмічного університету «Харківський авіаційний інститут», к.т.н., доцент



Андрій ГУМЕННИЙ

АКТ

впровадження в навчальному процесі результатів дисертаційної роботи Бондаренка Олексія Васильовича, виконаної на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Комісія у складі голови – декана факультету авіаційних двигунів, к.т.н., доцента Юрія ШИРОКОГО, членів професора кафедри конструкції авіаційних двигунів, к.т.н. Юрія ГУСЄВА та доцента кафедри конструкції авіаційних двигунів, к.т.н. Олександра ГАРКУШИ встановила, що результати наукових досліджень Бондаренка Олексія Васильовича, а саме:

- 1) співвідношення, що визначають залежність похибок оцінок параметрів лінійних динамічних моделей газотурбінних двигунів від точності вимірюваних параметрів, значень оцінюваних параметрів та характеру керуючих впливів;
  - 2) співвідношення, що визначають залежність похибок визначення невимірюваних параметрів газотурбінних двигунів на усталених і перехідних режимах роботи від похибок вимірюваних параметрів, а також похибок налаштування використовуваних моделей із урахуванням режиму роботи та характеру зміни керуючих впливів
  - 3) метод самоналаштування бортових динамічних моделей за результатами реєстрації параметрів під час роботи двигуна
- було впроваджено в навчальному процесі кафедри конструкції авіаційних двигунів у вигляді лекційних матеріалів і практичних робіт за навчальними дисциплінами «Системи автоматичного керування авіаційних двигунів і енергетичних установок», «Моделювання та розрахунок процесів в авіаційній

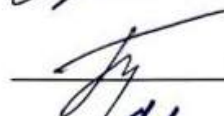
і ракетно-космічній техніці» та «Методи аналізу та синтезу систем керування та діагностування об'єктів енергетичного машинобудування».

Це дозволило впровадити в навчальний процес нові науково-технічні досягнення, покращити наочність, фундаментальну та практичну спрямованість навчального процесу і у кінцевому результаті підвищити якість підготовки спеціалістів з авіаційної техніки.

Голова комісії:

 Юрій ШИРОКИЙ

Члени комісії:

 Юрій ГУСЄВ

 Олександр ГАРКУША

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 р.