

О. В. Малєєва, Ю. А. Малєєва

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ БІЗНЕС-РІШЕНЬ
У СЕРЕДОВИЩІ РОМ QM**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»

О. В. Малєєва, Ю. А. Малєєва

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ БІЗНЕС-РІШЕНЬ
У СЕРЕДОВИЩІ РОМ QM**

Навчальний посібник до лабораторного практикуму

Харків «ХАІ» 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»

О. В. Малєєва, Ю. А. Малєєва

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ БІЗНЕС-РІШЕНЬ
У СЕРЕДОВИЩІ РОМ QM**

Навчальний посібник до лабораторного практикуму

Харків «ХАІ» 2026

УДК 004-048.34(076.5)
М18

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. М. В. Євланов,
канд. техн. наук, доц. Г. А. Плехова

Малєєва, О. В.

М18 Методи дослідження та оптимізації бізнес-рішень у середовищі POM-QM [Електронний ресурс] : навч. посіб. до лаб. практикуму / О. В. Малєєва, Ю. А. Малєєва. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Харків. авіац. ін-т», 2026. – 63 с.

ISBN 978-966-966-097-9

Викладено матеріал, який дасть змогу опанувати практичне використання методів дослідження та оптимізації бізнес-рішень в організаційно-технічних та соціально-економічних системах. Описано порядок виконання лабораторних робіт у програмному середовищі *POM QM* для ОС *Windows* за темами: «Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування», «Транспортні задачі», «Задача про призначення», «Методи прийняття рішень в умовах невизначеності», а також «Теорія ігор». Наведено контрольні запитання.

Для здобувачів освіти спеціальностей F3 «Комп'ютерні науки» та F6 «Інформаційні системи та технології» під час вивчення дисциплін «Методи дослідження та оптимізації бізнес-рішень» і «Оптимізація рішень в комп'ютерних системах управління», а також під час виконання курсових і дипломних робіт.

Іл. 23. Табл. 7. Бібліогр.: 9 назв

УДК 004-048.34(076.5)

© Малєєва О. В., Малєєва Ю. А., 2026
© Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут», 2026

ISBN 978-966-966-097-9

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Лабораторна робота № 1. Лінійне програмування	5
Опис інтерфейсу ПП <i>POM QM</i> для ОС <i>Windows</i>	5
Теоретичні відомості.....	13
Робота в модулі <i>Linear Programming</i>	14
Вихідні дані.....	18
Контрольні запитання.....	20
Лабораторна робота № 2. Транспортні задачі лінійного програмування	20
Теоретичні відомості.....	21
Робота в модулі <i>Transportation</i>	25
Вихідні дані.....	29
Контрольні запитання.....	33
Лабораторна робота № 3. Задача про призначення.....	34
Теоретичні відомості.....	34
Робота в модулі <i>Assignments</i>	36
Вихідні дані.....	38
Контрольні запитання.....	39
Лабораторна робота № 4. Аналіз таблиць рішень в умовах невизначеності	40
Теоретичні відомості.....	40
Робота в модулі <i>Decisions Tables</i>	42
Вихідні дані.....	46
Контрольні запитання.....	49
Лабораторна робота № 5. Розв'язання матричної гри	49
Теоретичні відомості.....	49
Робота в модулі <i>Game Theory</i>	54
Вихідні дані.....	57
Контрольні запитання.....	61
Бібліографічний список.....	62

ВСТУП

Оптимізація бізнес-рішень є ключем до збільшення продуктивності та ефективності будь-якої діяльності як у виробничій, так і в організаційній сферах. Оптимізація – це постійний процес в управлінні, й незалежно від галузі вона сприяє формуванню ефективних рішень, які приводять до успіху та підвищують конкурентоспроможність.

Використання аналітики даних для прийняття обґрунтованих рішень, замість рішень, прийнятих на основі інтуїції, покращує результати діяльності та знижує ризики.

Постійне відстеження бізнес-процесів та оцінювання результатів їх оптимізації допомагають виявляти слабкі місця і вчасно вносити корективи. Аналітичні методи надають можливість детально аналізувати, вдосконалювати та керувати бізнес-процесами, виявляти проблеми і скорочувати витрати.

Сукупність аналітичних методів, які використовують для оптимізації бізнес-рішень процесів, ґрунтується на класичній теорії дослідження операцій, яка є основним і невід'ємним інструментом під час прийняття рішень у найрізноманітніших сферах людської діяльності.

Основою оптимізації бізнес-рішень є *математичне моделювання*. Хоча дані, отримані у процесі дослідження математичних моделей, є основою для формування рішень, остаточний вибір зазвичай робиться з урахуванням множини інших чинників, які не формалізуються та які неможливо врахувати в математичних моделях.

Не існує єдиного методу розв'язання задач для усіх математичних моделей, що описують практичні ситуації. Вибір методу розв'язання зумовлюють тип і складність математичної моделі.

У посібнику наведено рекомендації щодо виконання лабораторних робіт за темами: «Технології моделювання задачі лінійного програмування симплекс-методом та аналіз чутливості отриманого рішення», «Розв'язання транспортної задачі лінійного програмування», «Розв'язання задачі про призначення», «Технології моделювання оптимального рішення (в умовах невизначеності) за критеріями Вальда, Севіджа, Гурвіца» та «Розв'язання матричних ігор методами лінійного програмування».

Лабораторні роботи виконуються в середовищі пакета програм *Decision Science* від *Prentice Hall: POM-QM* для *Windows* (також відомого як *POM* для *Windows* і *QM* для *Windows*). Програмне забезпечення містить велику кількість моделей (29 модулів і понад 60 підмодулів). Це є найбільш зручним пакетом програмного забезпечення, доступним у сферах керування виробництвом, кількісних методів дослідження операцій, а також у менеджменті.

Лабораторна робота № 1

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Мета роботи: отримати оптимальне рішення на основі моделі задачі лінійного програмування.

Завдання:

1. Ознайомитись із можливостями та інтерфейсом програмного пакета *ПОМ QM* для ОС *Windows*.
2. Ознайомитись із теоретичною частиною.
3. Вибрати модуль *Linear Programming*.
4. Ввести вихідні дані для розв'язання.
5. Отримати результати розв'язання задачі лінійного програмування:
 - основну таблицю результатів з оптимальним рішенням;
 - таблицю діапазонів;
 - таблицю «списком»;
 - таблицю ітерацій.
6. Описати отримані результати, зробити висновки:
 - з таблиці результатів вказати оптимальні значення змінних і цільової функції, також відобразити значення тінювих цін / подвійних оцінок, визначити тип ресурсів і найбільш цінний дефіцитний ресурс;
 - з таблиці діапазонів вказати межі зміни ресурсів та межі зміни цільової функції;
 - з таблиці «списком» виокремити значення базисних та вільних змінних;
 - з таблиці ітерацій зазначити кількість ітерацій та відстежити послідовну зміну цільової функції.
7. Сформулювати загальний висновок (згідно з метою роботи).

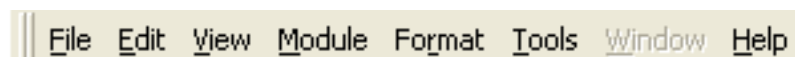
Опис інтерфейсу ПП *ПОМ QM* для ОС *Windows*

Основний екран. Якщо після запуску програми з'являється «Підказка дня», зніміть прапорець у нижній лівій частині форми. Наступний екран – вибір модуля.

На рис. 1.1 відображено всі компоненти екрана (з вибраним модулем і завантаженим файлом даних).

У верхній частині екрана відображається стандартна панель заголовка вікна. Спочатку йде назва *ПОМ-QM* для ОС *Windows*. У рядку заголовка можна бачити ім'я файла (якщо файл завантажений або збережений). Ліва і права частини рядка заголовка є стандартним блоком керування *Windows*.

Нижче заголовка знаходиться рядок, який містить головне меню:



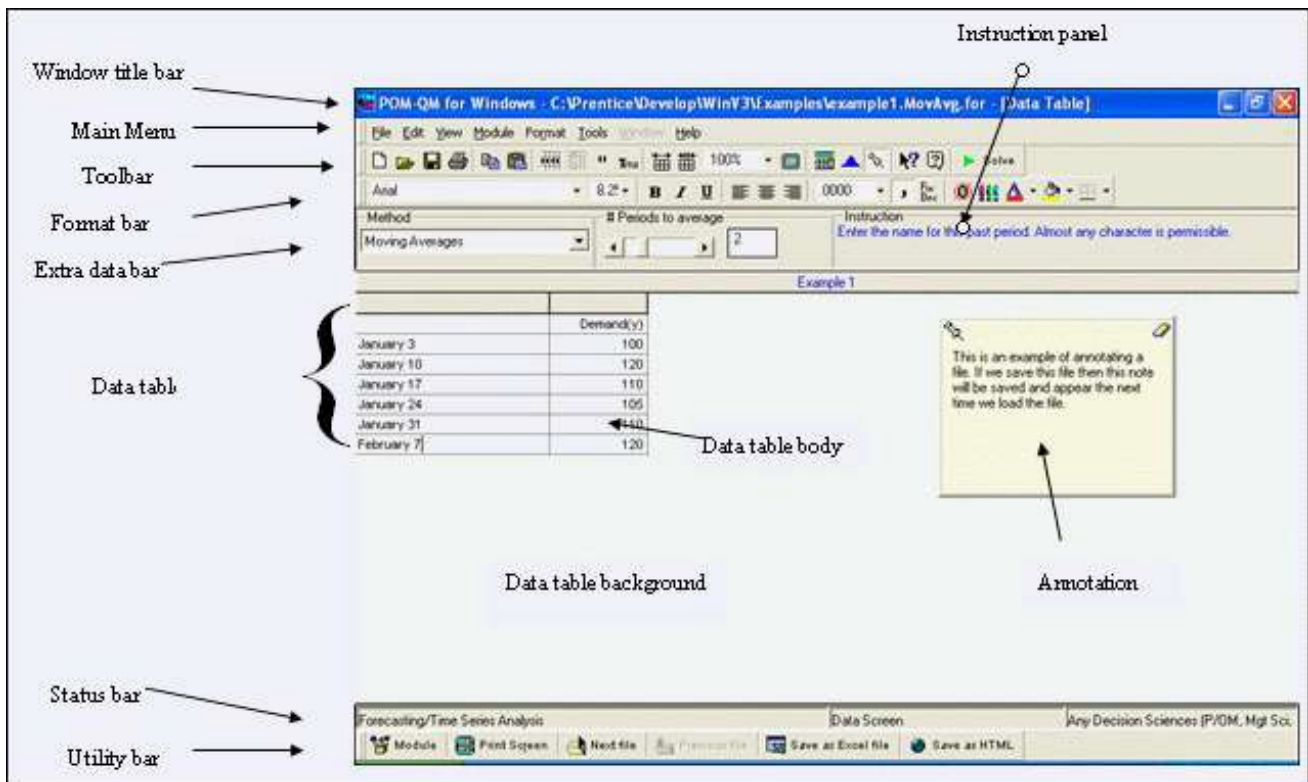


Рис. 1.1. Компоненти основного екрана

На початку роботи опція редагування може не входити до меню, тому що немає ніяких даних для редагування. Опція *Window* також вимкнена, оскільки це відноситься до результатів вікна, а поки немає ніяких результатів.

Нижче показано меню стандартної панелі інструментів:



Ця панель містить ярлики для деяких із найбільш часто використовуваних команд меню.

Одним з найбільш важливих інструментів на стандартній панелі є інструмент розв'язання задачі *Solve* «Вирішити» у правій частині панелі інструментів. Це той елемент меню, на який слід натиснути після того, як введено дані й необхідно розв'язати задачу. Після натискання інструмента *Solve* він зміниться на інструмент *Edit*. Для двох модулів – лінійного програмування і транспортної задачі – є ще одна команда, яка буде відображатися на стандартній панелі інструментів. Це команда *Step* (не відображається на рисунку), що дає можливість покроково відображати ітерації.

Нижче стандартної панелі інструментів розташована панель формату:



Вона є дуже схожою на стандартні панелі інструментів *Excel* і *Word*.

Існує ще одна панель інструментів, розташована за замовчуванням у нижній частині екрана:



Ця панель містить шість інструментів. Інструмент зліва називають *Module* «Модуль». Список модулів можна відобразити двома способами: або за допомогою цього інструмента, або за допомогою додаткового модуля в головному меню. Наступний інструмент має назву *Print Screen*. Наступні два інструменти (*Previous file*, *Next file*) дають можливість завантажувати файли в алфавітному порядку (вперед або назад). Два останніх інструменти дають змогу зберігати файли у форматі *Excel* або *HTML*.

У центрі є дві області, одна з яких є основною таблицею даних (рис. 1.2).

		Example 1
	Demand(y)	
January 3	100	
January 10	120	
January 17	110	
January 24	105	
January 31	110	
February 7	120	

Рис. 1.2. Основна таблиця даних

Таблиця на екрані містить або тільки заголовок, або заголовок і рядки та стовпці. Кількість рядків і стовпців залежить від модуля, типу задачі та її змісту.

Над таблицею даних розташована область із панеллю додаткової інформації про задачу:



Іноді необхідно вказати максимізацію або мінімізацію цільової функції, вибрати метод розв'язання або задати деяке значення. Панель зазвичай з'являється над даними. Праворуч від додаткової панелі розташована панель інструкцій.

Також існує форма для коментарів задачі (рис. 1.3). Тут може бути розміщений коментар. Коли файл буде збережений, коментар також буде збережений; коли файл завантажено, з'являється коментар, який може бути надрукований.

У нижній частині екрана знаходиться рядок стану (рис. 1.4).

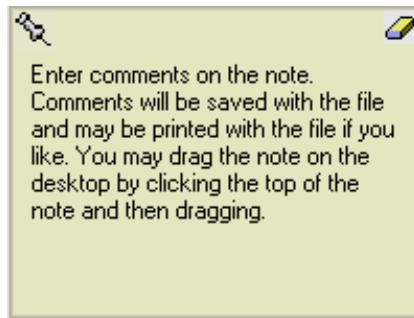


Рис. 1.3. Приклад коментаря до задачі



Рис. 1 4. Рядок стану задачі

Крайня ліва частина відображає ім'я модуля і підмоделі у випадку вибору різних модулів. На рис. 1.4 показано приклад рядка для модуля *Forecasting* «Прогнозування» і підмоделі *Time Series Anlisy* «Аналіз часових рядів». У центрі панелі – тип екрана (дані, результати, меню, графік тощо), а крайня права частина містить назву підрозділу допоміжної інформації (якщо такий було вибрано).

Вибір модуля. Хоча не всі задачі пакета або модулі є ідентичними, існує значна подібність між ними. Першим кроком для початку роботи є вибір модуля (рис. 1.5).

Є доступними 29 модулів, які поділено на три групи. Модулі в першій групі здебільшого включено до пакета *POM QM*, в той час як модулі у другій групі зазвичай з'являються тільки в *POM*-пакеті, а модулі у третій групі – з'являються тільки в пакеті *QM*.

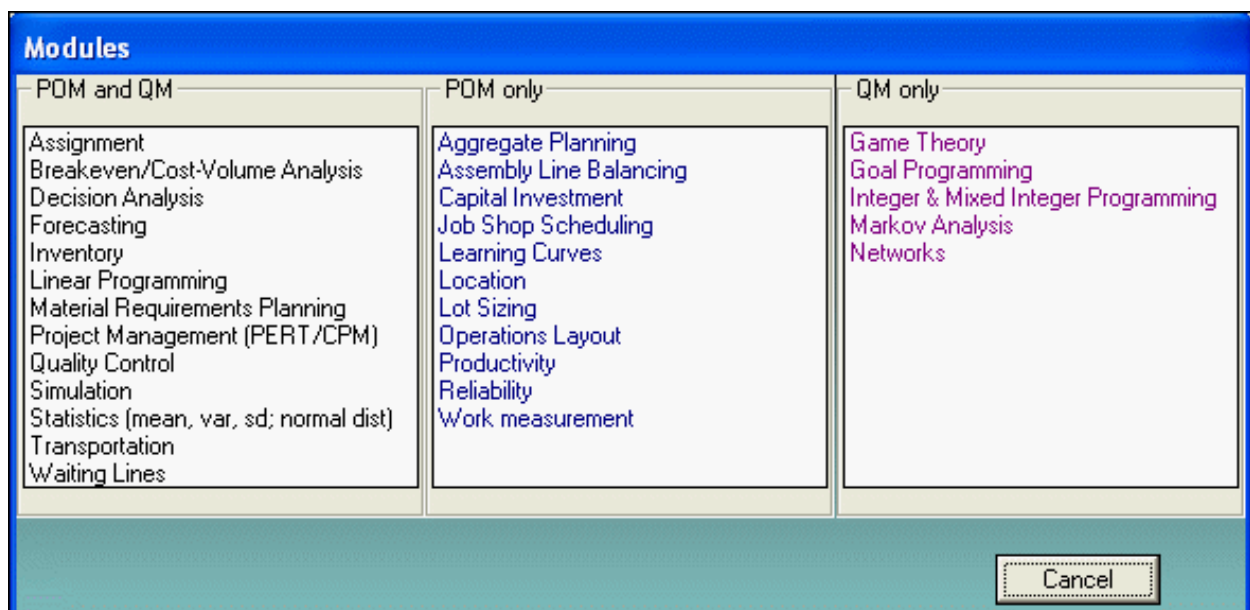


Рис. 1.5. Вибір модуля

Створення нових даних. Для вибору файла можна використовувати опцію *New*, щоб створити новий набір даних, або *Open*, щоб завантажити раніше збережені дані. На рис. 1.6 зображено екран створення нової задачі. Екрани створення даних є аналогічними для всіх модулів, але можуть бути наявними і невеликі відмінності. Верхній рядок містить текстове поле, в якому може бути введено назву задачі. За замовчуванням це *untitled* («без назви»). Назву за замовчанням можна змінити, натиснувши на кнопку *Modify default title* «Змінити назву за замовчанням».

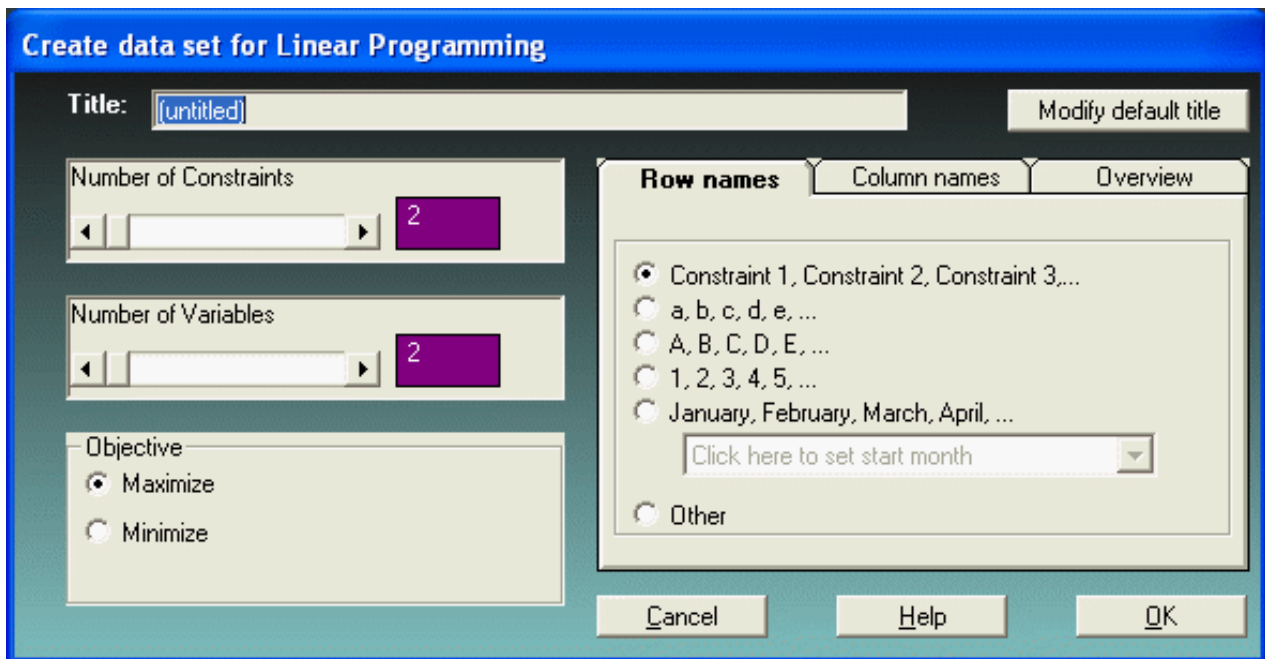


Рис. 1.6. Екран створення даних

Для багатьох модулів необхідно ввести кількість рядків у задачі. Рядки матимуть різні назви залежно від модуля; наприклад, у модулі «Лінійне програмування» рядки є обмеженнями, в той час як у модулі «Прогнозування» вони є минулими періодами. Кількість рядків може бути подана за допомогою смуги прокручування або текстового поля. Максимальна кількість рядків у будь-якому модулі дорівнює 90.

Є три способи додавання або видалення рядків та стовпців після того, як задачу було створено. Можна використовувати опції в меню *Edit* «Правка» або натиснути правою кнопкою миші на таблиці даних, яка дає змогу копіювати і вставляти або видаляти параметри. Щоб вставити рядок або стовець, можна використовувати панель інструментів.

Для задання імен рядків також існує кілька варіантів. Виберіть одну з шести кнопок (праворуч) для того, щоб вказати, який стиль має бути використаний. У більшості модулів імена рядків не використовують для обчислень, але слід бути обережним, оскільки в деяких модулях («Керування проєктами» і «Планування потреби в матеріалах») імена можуть мати

відношення до обчислень. У більшості модулів імена рядків можуть бути змінені шляхом редагування даних таблиці.

Багато модулів вимагають визначити кількість стовпців. Її задають тим же самим способом, що і кількість рядків. Програма дає можливість вибирати імена стовпців таким же чином, як і імена рядків, але у вкладці *Column names* «Назви стовпців».

У вкладці *Overview* «Огляд» подано стислий опис доступних моделей, а також надано важливу інформацію, що стосується створення даних для цього модуля (рис. 1.7).

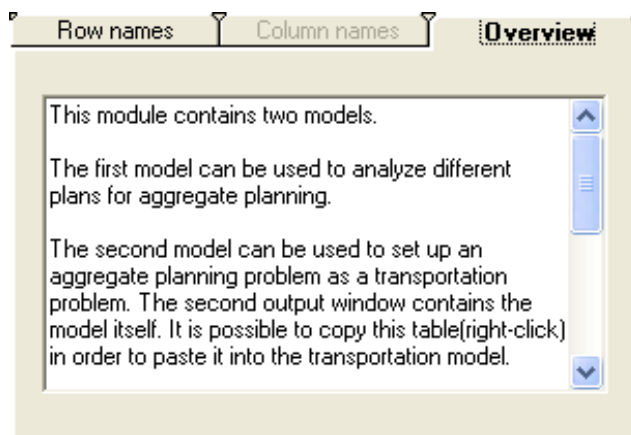


Рис. 1.7. Приклад стислого опису моделей

Екран даних містить таблицю вихідних даних (рис. 1.8). Для багатьох моделей наявна додаткова інформація, яка відображається над таблицею даних.

Введення і редагування даних. Після того, як новий набір даних був створений, або один з наявних наборів був завантажений, дані можуть бути додані або відредаговані у будь-якій позиції рядка і стовпця. Переміщення таблицею відбувається за допомогою клавіш переміщення курсора (або миші). Ці клавіші функціонують звичайним чином, за винятком клавіші *[Enter]*.

За допомогою клавіші *[Enter]* можна перейти до наступної комірки в таблиці (спочатку вправо, а потім – вниз). Коли рядок закінчується, *[Enter]* переходить у першу комірку у наступному рядку, який містить дані, а не ім'я рядка; наприклад, якщо у вікні на рис. 1.8 в кінці рядка з ім'ям «*Source 1*» натиснути *[Enter]*, курсор переміститься у клітинку з «0» в наступному рядку. Крім того, якщо використовувати клавішу *[Enter]* з метою введення даних, то після того, як закінчиться робота з останньою коміркою, програма автоматично перейде до розв'язання введеної задачі (позбавляючи необхідності натискати кнопку *Solve*).

Рамка *Instruction* «Інструкція» на екрані містить стислу інструкцію з описом того, що повинно бути виконано.

The screenshot shows the POM-QM for Windows interface. At the top, there is a menu bar (File, Edit, View, Module, Format, Tools, Window, Help) and a toolbar with icons for file operations and solving. Below the toolbar is a text area with the text "(untitled)".

	Destination 1	Destination 2	Destination 3	SUPPLY
Source 1	0	0	0	0
Source 2	0	0	0	0
DEMAND	0	0	0	0

Рис. 1.8. Екран вихідних даних

У таблиці даних є три типи клітинок.

Перший тип клітинок є звичайною коміркою із даними, в яку вводять ім'я або номер. У випадку введення імен та номерів просто треба ввести ім'я або номер, а потім або натиснути клавішу *[Enter]*, або одну з клавіш напрямку, або натиснути на іншу комірку. Якщо буде набраний неприпустимий символ, відобразатиметься вікно повідомлення із зазначенням помилки.

Другий тип клітинок являє собою комірку, якій не може бути змінена; наприклад, порожня клітинка в лівому верхньому кутку таблиці не може бути змінена.

Третій тип клітинок являє собою комірки, в яких розкривається зміст; наприклад, це можуть бути знаки в обмеженнях задачі лінійного програмування (рис. 1.9). Щоб побачити всі варіанти, слід натиснути на стрілку списку.

Коли закінчено введення даних, слід натиснути *Solve* на панелі інструментів, або *[F9]*. З'явиться екран рішення, як на рис. 1.10.

Екран рішення (Solution windows). Важливо зазначити, що тут більше інформації, ніж одна таблиця. Це можна побачити на іконках, що містяться у нижній частині екрана. Натисніть на них, щоб переглянути інформацію.

На рис. 1.11 наведено опис результатів, які можна переглянути. Його можна отримати через довідкову інформацію користувача.

	x	y		RHS
Maximize	3	3		
labor hours	3	4	<=	14
material (pounds)	6	4	<=	15

<=
=
>=

Рис. 1.9. Приклад подання комірки, що розкривається

The screenshot shows the POM-QM for Windows interface. The main window displays the problem data from Figure 1.9. Below it, a 'Linear Programming Results' window is open, showing the 'Example Solution' table:

	x	y		RHS	Dual
Maximize	3	3			
labor hours	3	4	<=	14	.5
material (pounds)	6	4	<=	15	.25
Solution->	.3333	3.25		10.75	

Рис. 1.10. Екран рішення

The 'Solution Windows' dialog box lists the following options:

Window	Description of results
Basic Results	Standard results for this problem
Ranging	A ranging table for the variables and a ranging table for the constraints
Solution list	The solution to the problem expressed in list form and including the variable type (basic vs non basic)
Iterations	The step by step iterations for solving the problem
Dual	The expression of the dual problem for this problem
Graph	

There are 4 different options that you may choose from for what you want to be displayed when each problem is solved. These options may be set here by using the Options button or in Help, User Preferences. NOTE: This window does not appear if there is only one main results window.

Рис. 1.11. Приклад опису екрана рішення

Натиснувши на кнопку *Options*, можна налаштувати режим виводу рішення (рис. 1.12).

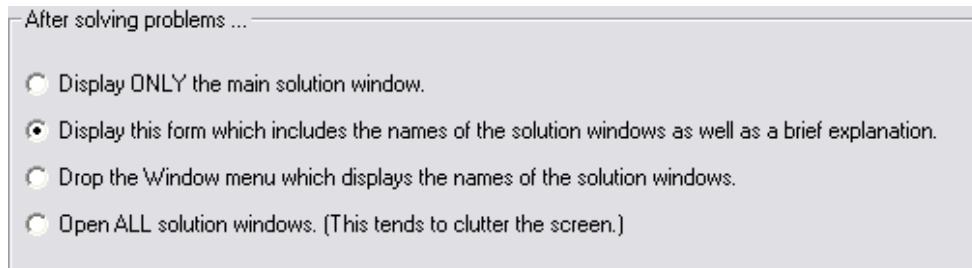


Рис. 1.12. Варіанти виводу рішення

Перший варіант просто відображає рішення. Наступні три варіанти нагадують, що існує більше результатів, ніж ті, що відображаються в одному вікні. Другий варіант відображає вікно *Solutions*, яке містить короткий опис кожного вікна нижніх іконок. Третій варіант автоматично опускається в меню *Window*.

Теоретичні відомості

Задачею лінійного програмування називають задачу дослідження операцій, математична модель якої має вигляд

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min);$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}; \quad x_j \geq 0.$$

Система лінійних рівнянь і нерівностей визначає допустиму множину рішень, і її називають *системою обмежень* задачі лінійного програмування, а лінійну функцію $f(X)$ називають *цільовою функцією*, або *критерієм оптимальності*. Будь-яка задача лінійного програмування визначається кількістю змінних та кількістю обмежень.

Не враховуються обмеження, які мають від'ємну праву частину. Більшість пакетів лінійного програмування припускають, що якщо не вказано інше, змінні також не повинні бути від'ємними.

Основна ідея симплекс-методу є такою. Розв'язання задачі за допомогою симплекс-методу відбувається по кроках. На кожному кроці від опорного базису X переходять до нового базису X' так, щоб значення функції f зменшувалося (якщо задача мінімізується), тобто $f_6' \leq f_6$. Для переходу до нового базису видаляють одну з базисних змінних і замість неї вводять іншу з-поміж вільних. Таким чином знаходять деякий базис $X^{(k)}$, для якого $f_6^{(k)}$ є оптимальним рішенням, або з'ясовують, що задача не має рішення.

В результаті розв'язання в оптимальній таблиці міститься інформація про таке:

- оптимальне рішення;
- тип ресурсів;
- цінність ресурсів;
- чутливість оптимального рішення.

Оптимальне рішення складають значення змінних (без урахування вирівнювальних) та значення цільової функції.

Інтенсивність покращення оптимального рішення (відношення приросту цільової функції до приросту ресурсу) називають *тіньовою ціною* або *двоїстою оцінкою*; вона характеризує *цінність ресурсу*.

Інформацію про *тип ресурсів* можна отримати зі значення двоїстої оцінки. Якщо вона дорівнює нулю, це означає, що ресурс є недефіцитним і навпаки. Додатне значення двоїстої оцінки говорить про дефіцитність ресурсу. Його зміна впливає на зміну цільової функції.

Під час аналізу *чутливості оптимального рішення* необхідно визначити інтервал можливої зміни запасу ресурсу (або коефіцієнтів цільової функції), за якого оптимальне рішення залишається незмінним.

Робота в модулі *Linear Programming*

Розглянемо такий приклад із двома обмеженнями та двома змінними.

Слід максимізувати функцію $3x + 3y$ за умов обмежень

$$3x + 4y \leq 14 \text{ (робочі години);}$$

$$6x + 4y \leq 15 \text{ (кількість матеріалів);}$$

$$x, y \geq 0.$$

1. Екран даних. На екрані видно, що інструмент *Step* тепер з'являється на панелі інструментів перед інструментом *Solve* (рис. 1.13). Також у меню *File* увімкнено функцію *Step*.

Цільова функція (Objective). Вибір мінімізації або максимізації виконується звичайним способом під час створення задачі, але напрямок цільової функції можна змінити на екрані даних, використовуючи відповідну опцію над даними.

Коефіцієнти цільової функції. Коефіцієнти витрат / прибутку (зазвичай їх позначають c_j) вводять як числові значення. Ці коефіцієнти можуть бути додатними або від'ємними.

Коефіцієнти обмежень. Основний обсяг інформації міститься у коефіцієнтах обмежень, які зазвичай позначають a_{ij} . Вони можуть бути додатними або від'ємними.

Коефіцієнти правої сторони (Right-hand side – RHS) – це значення правої сторони обмежень. Вони мають бути додатними і позначаються b_j .

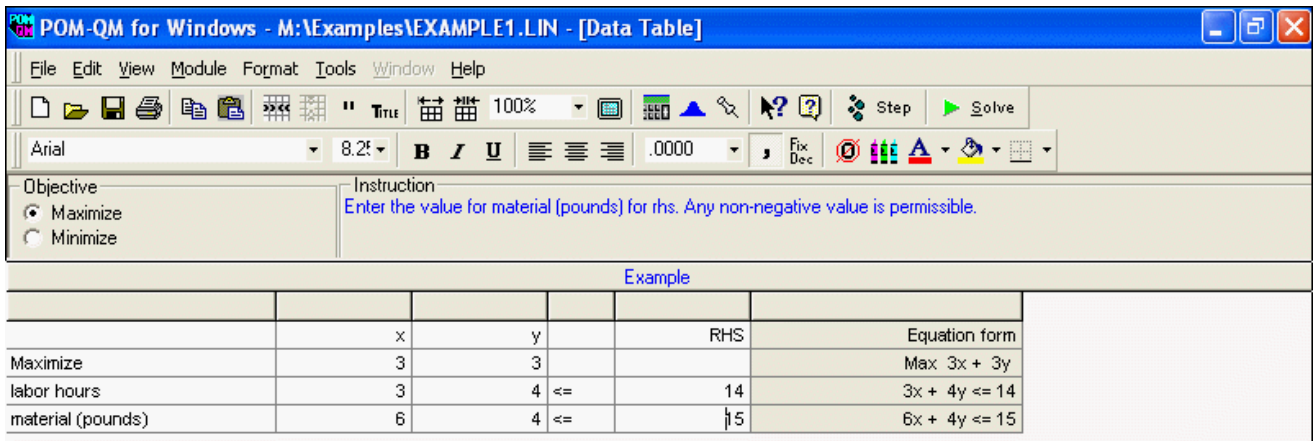


Рис. 1.13. Екран вихідних даних

Знак обмеження. Знак можна ввести одним із двох способів. Перший – натисканням клавіші [$<$], клавіші [$>$] або клавіші [=]. Другий – коли робиться перехід до комірки зі знаком обмеження; в ньому з'являється стрілка спадного меню, як показано раніше на рис. 1.9.

Форма рівняння (Equation form). Столпець праворуч відображає форму рівняння обмеження і не може бути безпосередньо відредагований, але змінюється у міру зміни коефіцієнтів, назви стовпця, знака чи правої сторони обмежень.

2. Результати розв'язання (Results). На рис. 1.14 наведено приклад рішення.

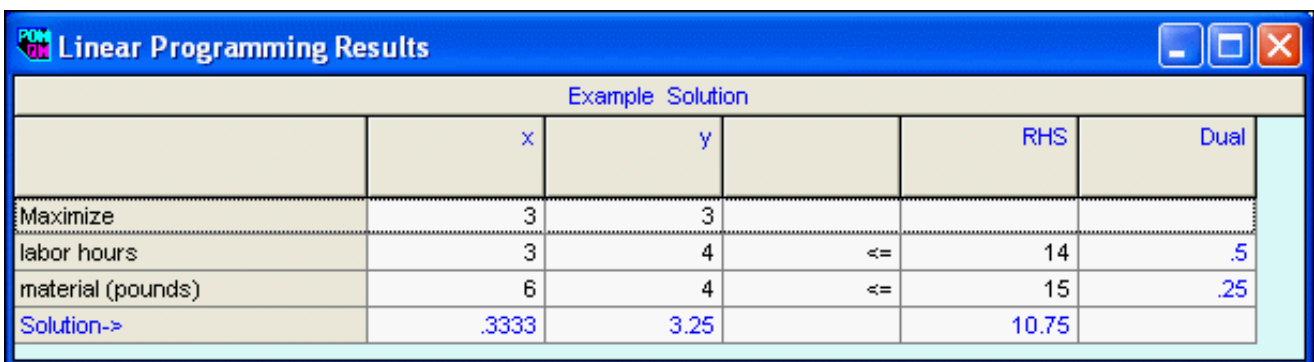


Рис. 1.14. Екран із прикладом рішення

Оптимальні значення для змінних (Solution). Під кожним стовпцем подано оптимальні значення змінних. У цьому прикладі

$$x = 0,3333, y = 3,25.$$

Оптимальна вартість / прибуток. У нижньому правому кутку таблиці вказано максимальний прибуток або мінімальну вартість. У цьому прикладі максимальний прибуток становить 10,75 г.о.

Тіньові ціни або подвійні (*Dual*) з'являються праворуч від кожного обмеження. У цьому прикладі прибуток збільшиться на 0,5 г.о. за одиницю першого ресурсу (і на 0,25 г.о. – за одиницю другого ресурсу).

У звіті до лабораторної роботи здобувачі освіти мають **сформулювати висновок**, який повинен містити оптимальні значення змінних, оптимальне значення цільової функції та значення цінності ресурсів (тіньові ціни). Треба вказати, які ресурси є дефіцитними, а які – ні. При цьому слід визначити найбільш цінний ресурс.

3. Таблиця діапазонів (*Ranging*). Окрім переліку значень (*Value*), у цій таблиці також надається додаткова інформація про змінні (рис. 1.15).

Example Solution					
Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
x	.3333	0	3	2.25	4.5
y	3.25	0	3	2	4
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
labor hours	.5	0	14	7.5	15
material (pounds)	.25	0	15	14	28

Рис. 1.15. Екран аналізу чутливості рішення

У прикладі можна побачити зменшену вартість (*Reduced cost*), вихідні коефіцієнти цільової функції (*Original val*), а також нижню та верхню межі коефіцієнтів (*Lower Bound, Upper Bound*), за якими рішення буде незмінним. Іншими словами, змінні зберігають оптимальні значення 0,3333 та 3,25; зміниться лише значення цільової функції (прибуток або вартість).

Нижче вказано вихідні значення ресурсів (*Original val*), а також їх нижню та верхню межі (*Lower Bound, Upper Bound*).

У звіті до лабораторної роботи має міститися **висновок**, в якому здобувачі освіти вказують у вигляді подвійних нерівностей межі зміни коефіцієнтів цільової функції (c_i) та межі зміни запасів ресурсів (P_j), в яких оптимальне рішення є незмінним.

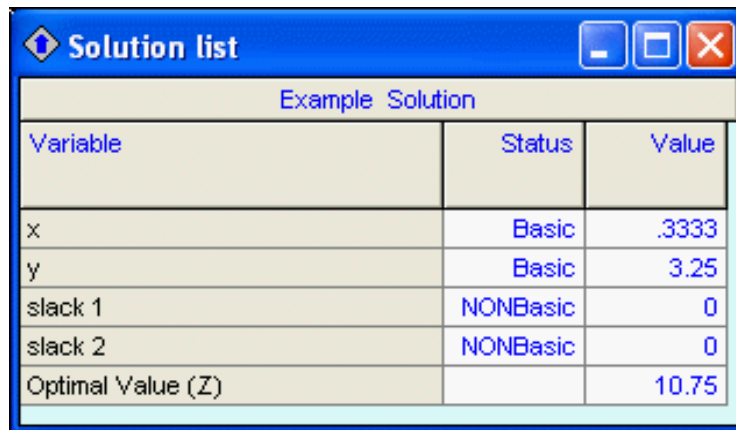
4. Рішення спуском (*Solution list*). Можна отримати рішення у вигляді списку, як показано на рис. 1.16.

У звіті до лабораторної роботи у **висновку** здобувачі освіти мають вказати значення всіх змінних (в тому числі й вирівнювальних – *slack1, slack2*); також має бути зазначено, які змінні є базисними (*Basic*), а які – вільними (*NONBasic*).

5. Ітерації (*Iterations*) розв'язання можна відобразити у вигляді симплекс-таблиць (рис. 1.17).

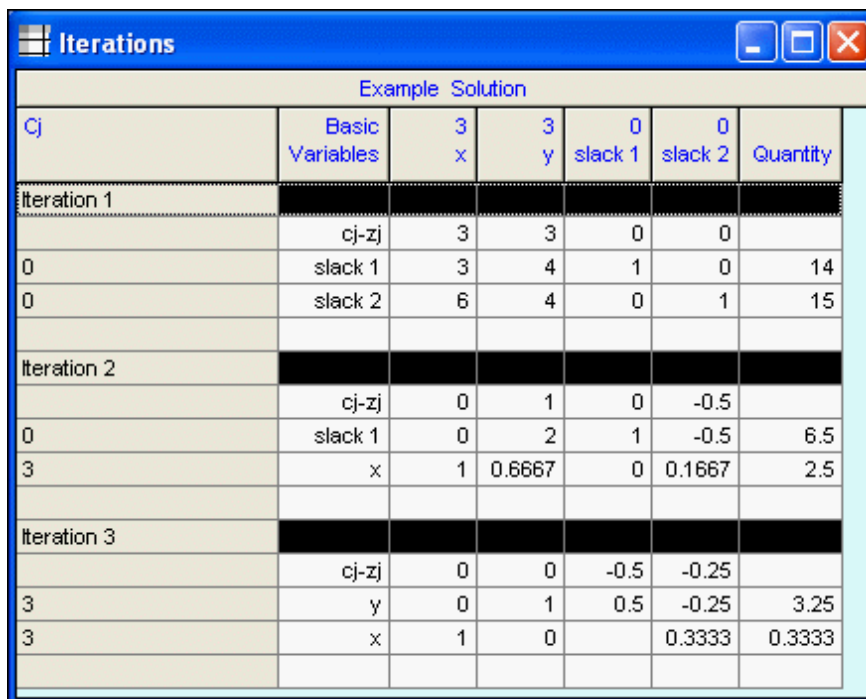
У звіті до лабораторної роботи здобувачі освіти у **висновку** вказують кількість ітерацій.

У **загальному висновку** у звіті до лабораторної роботи здобувачі освіти мають описати прийняте бізнес-рішення за результатами розв'язання задачі та проведеного аналізу. Оптимальне рішення слід обґрунтувати отриманими числовими даними розрахунків.



Example Solution		
Variable	Status	Value
x	Basic	.3333
y	Basic	3.25
slack 1	NONBasic	0
slack 2	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		10.75

Рис. 1.16. Екран значень всіх змінних і цільової функції



Example Solution						
Cj	Basic Variables	3	3	0	0	Quantity
		x	y	slack 1	slack 2	
Iteration 1						
	cj-zj	3	3	0	0	
0	slack 1	3	4	1	0	14
0	slack 2	6	4	0	1	15
Iteration 2						
	cj-zj	0	1	0	-0.5	
0	slack 1	0	2	1	-0.5	6.5
3	x	1	0.6667	0	0.1667	2.5
Iteration 3						
	cj-zj	0	0	-0.5	-0.25	
3	y	0	1	0.5	-0.25	3.25
3	x	1	0		0.3333	0.3333

Рис. 1.17. Послідовність ітерацій

Звіт з лабораторної роботи має містити:

- вихідні дані;
- таблицю вихідних даних;
- основну таблицю результатів (з висновком);
- таблицю діапазонів (з висновком);
- таблицю «списком» (з висновком);
- таблицю ітерацій (з висновком);
- загальний висновок.

Вихідні дані

Варіант 1

Цех виготовляє деталі видів А, В та С, кожна з яких піддається обробленню трьома верстатами. Організація виробництва:

Верстати	Тривалість оброблення деталей, хв			Фонд часу, год
	А	В	С	
1-й	12	10	9	220
2-й	16	20	18	300
3-й	6	4	4	100
Відпускна ціна за 1 дет.	32	30	32	—

Скласти план виробництва деталей, що максимізує прибуток від продажу.

Варіант 2

Для випуску трьох видів запасних частин використовують три види ресурсів:

Ресурси	Витрата матеріалів на одну запасну частину, кг			Запаси ресурсів, кг
	А	В	С	
1-й	5	5	2	1200
2-й	3	1	5	500
3-й	0	2	4	800
Прибуток від реалізації однієї запасної частини	6	10	8	—

Скласти план виробництва, що максимізує прибуток.

Варіант 3

Підприємство випускає продукцію видів А та В, кожна з яких обробляється чотирма верстатами. Організація технологічного процесу:

Верстати	Трудомісткість на одиницю продукції		Фонд часу, год
	А	В	
1-й	3	4	15
2-й	3	6	20
3-й	4	1	18
4-й	2	2	10
Прибуток на одиницю продукції	2	4	—

Скласти план випуску продукції, що максимізує прибуток.

Варіант 4

Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси для виробництва чотирьох видів товару. Організація виробництва:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів				Об'єм ресурсів
	A	B	C	D	
Сировина	3	5	7	2	430
Робоча сила	13	23	16	12	800
Устаткування	14	18	8	15	525
Прибуток на одиницю товару	33	27	46	31	—

Скласти план випуску продукції, що максимізує прибуток.

Варіант 5

На станках двох типів виготовляють три види килимових покриттів з наявних ресурсів вовни та барвників. Відомі дані про запаси та виробництво:

Ресурси	Об'єми ресурсів	Продуктивність та норми витрат		
		1	2	3
Верстат 1-й	20	10	20	25
Верстат 2-й	35	15	17	30
Вовна	40	110	145	190
Барвники	1,5	8	9	12
Вартість 1 м ² покриття	—	29	35	43

Визначити асортимент килимових покриттів, що максимізує прибуток.

Варіант 6

Здійснюється виготовлення виробів чотирьох типів, при якому витрачають три види ресурсів. Наведено дані про технологічний процес:

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю виробу				Запаси ресурсів
	1	2	3	4	
Енергія	2	3	1	2	30
Матеріали	3	4	2	3	35
Труд	1	2	3	1	25
Прибуток від реалізації одиниці виробу	3	2	2	6	—

Скласти план виробництва, що максимізує прибуток.

Варіант 7

Із трьох продуктів складається суміш, в яку повинно входити не менше 10 од. речовини А, 8 од. речовини В та 6 од. речовини С. Наведено вміст речовин:

Продукт	Вміст речовини в одиниці продукції			Вартість одиниці продукції
	А	В	С	
1-й	2	3	3	1
2-й	2	2	3	3
3-й	3	2,5	2	3,5

Скласти найбільш дешеву суміш.

Контрольні запитання

1. Надайте загальний вигляд задачі лінійного програмування.
2. Опишіть основну ідею симплекс-методу.
3. Яких значень можуть набувати коефіцієнти цільової функції, коефіцієнти обмежень, правої частини обмежень (у випадку застосування симплекс-методу)?
4. На які типи поділяють змінні в разі застосування симплекс-методу?
5. Як визначають область допустимих рішень?
6. З яких значень складається оптимальне рішення?
7. Що являє собою тіндова ціна ресурсу?
8. На які типи поділяють ресурси?
9. На основі якого значення можна визначити тип ресурсу?
10. Що характеризує чутливість оптимального рішення?
11. Яким чином у програмі можна отримати рішення задачі?
12. Яка інформація розташована безпосередньо над таблицею даних?
13. Який рядок знаходиться в нижній частині екрана?
14. На скільки груп поділяють всі доступні модулі?
15. Скільки типів клітинок можна використовувати в таблиці даних?
16. Як налаштувати режим виведення рішення?

Лабораторна робота № 2

ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета роботи: отримати оптимальне рішення транспортної задачі лінійного програмування. Провести порівняльний аналіз двох методів отримання опорного рішення.

Завдання:

1. Ознайомитись із теоретичною частиною.
2. Вибрати модуль *Transportation*.

3. Ввести вихідні дані для розв'язання задачі.
4. Отримати результати розв'язання задачі.
5. Порівняти два методи отримання опорного рішення.
6. Описати отримані результати, зробити проміжні висновки із зазначених питань.
7. Зробити загальний висновок (згідно з метою роботи).

Теоретичні відомості

Під терміном «транспортні задачі» розуміють широке коло задач не тільки транспортного характеру. Загальним для них є *розподіл ресурсів*, що знаходяться у m виробників (постачальників), по n споживачів.

Часто зустрічаються такі задачі, що належать до транспортних:

- прикріплення споживачів ресурсу до виробників;
- прив'язування пунктів відправлення до пунктів призначення;
- взаємне прив'язування вантажопотоків прямого і зворотного напрямків;
- окремі завдання оптимального завантаження промислового обладнання;
- оптимальний розподіл обсягів випуску промислової продукції.

Розглянемо математичну модель прикріплення пунктів відправлення до пунктів призначення. Є m пунктів відправлення вантажу і обсяги відправлення до кожного пункту a_1, a_2, \dots, a_m . Відома потреба у вантажах b_1, b_2, \dots, b_n кожного з n пунктів призначення. Задано матрицю вартостей доставлення за кожним варіантом c_{ij} , $i = 1..m, j = 1..n$. Необхідно розрахувати оптимальний план перевезень, тобто визначити: скільки вантажу має бути відправлено з кожного i -го пункту відправлення (від постачальника) до кожного j -го пункту призначення (до споживача) x_{ij} з мінімальними транспортними витратами.

У загальному вигляді вихідні дані наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Транспортна задача в загальному вигляді

Постачальники	Споживачі				Запаси (обсяги відправлення)
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_n	—

Транспортну задачу називають *закритою*, якщо сумарний обсяг вантажів, що відправляються, дорівнює сумарному обсягу потреб у цих вантажах за пунктами призначення:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Якщо такої рівності немає (обсяг потреби перевищує обсяг запасів або навпаки), задачу називають *відкритою*.

Перевезення необхідно здійснити з мінімальними транспортними витратами, цільова функція є такою:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

У моделі замість матриці вартостей перевезень c_{ij} можуть бути задані матриці відстаней. В такому випадку як цільову функцію розглядають мінімум сумарної транспортної роботи.

Рівняння балансу є обов'язковою умовою розв'язання транспортної задачі. Тому коли у вихідних умовах подано відкриту задачу, її необхідно привести до *закритої форми*. У разі якщо:

– потреби за пунктами призначення перевищують запаси пунктів відправлення, вводять фіктивного постачальника з відсутнім обсягом відправлення;

– запаси постачальників перевищують потреби споживачів, то вводять фіктивного споживача з необхідним обсягом споживання.

Транспортні задачі можуть розв'язуватися симплекс-методом. Однак, завдяки своїм особливостям, цей вид задач розв'язують більш простим методом.

Алгоритм методу потенціалів

Найбільш поширеним методом розв'язання транспортних задач є *метод потенціалів*.

Розв'язання задачі методом потенціалів складається з таких *етапів*:

- 1) розроблення початкового плану (опорного рішення);
- 2) розрахунок потенціалів;
- 3) перевірка плану на оптимальність;
- 4) пошук ланки максимальної неоптимальності (якщо умову п. 3 не було досягнуто);
- 5) складання контуру перерозподілу ресурсів;
- 6) визначення мінімального елемента в контурі перерозподілу і перерозподіл ресурсів по контуру;
- 7) отримання нового плану.

Описану процедуру повторюють кілька разів (ітерацій), поки не буде знайдено оптимальне рішення.

Для транспортної задачі існує декілька *методів* формування початкового плану (*опорного рішення*):

- метод північно-західного кута;
- метод мінімальної вартості;
- метод Фогеля;
- метод подвійної переваги тощо.

1. *Визначення опорного рішення. Метод північно-західного кута*
Приклад. Вихідні дані задачі подано в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Вихідні дані транспортної задачі

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	1	2	3	4	a ₁ = 60
A ₂	4	3	2	0	a ₂ = 80
A ₃	0	2	2	1	a ₃ = 100
Потреби	b ₁ = 40	b ₂ = 60	b ₃ = 80	b ₄ = 60	240

Розподіл обсягів вантажу із пунктів призначення до пунктів споживання (завантаження клітинок) починається з верхньої лівої клітинки (північно-західного кута) і триває вниз та вправо.

Завантажуємо першу клітинку за правилом

$$x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(60, 40) = 40.$$

Перший пункт відправлення має залишок вантажу

$$\Delta a_1 = 60 - 40 = 20,$$

який розподіляємо у другий пункт:

$$x_{12} = \min(\Delta a_1, b_2) = \min(20, 60) = 20.$$

На наступному кроці:

$$x_{22} = \min(a_2, \Delta b_2) = \min(80, 40) = 40 \text{ тощо.}$$

Результати розподілу наведено в табл. 2.3.

Після отримання опорного рішення необхідно *перевірити умову*:

$$N = m + n - 1,$$

де N – кількість завантажених клітинок, m – кількість рядків (постачальників), а n – кількість стовпців (споживачів).

У прикладі m = 3, n = 4, N = 6. Умова виконується: 6 = 3 + 4 - 1.

Таблиця 2.3

Опорне рішення транспортної задачі

Постачальники	Споживачі				Запаси	α_i
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄		
A ₁	1 P 40	2 20 3	3	4	a ₁ = 60	0
A ₂	4	3 40 P	3 2 40	0	a ₂ = 80	1
A ₃	+ 0 3	2	2 P 40	1 60	a ₃ = 100	1
Потреби	b ₁ = 40	b ₂ = 60	b ₃ = 80	b ₄ = 60	240	
β_j	1	2	1	0		

Якщо ця умова не виконується – опорне рішення називають *виродженим*. Тоді в будь-які вільні клітинки необхідно поставити потрібну кількість нулів і вважати ці клітинки зайнятими.

Значення цільової функції є таким:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 60 = 420.$$

2. Розрахунок потенціалів (див. табл. 2.3)

Для завантажених клітинок повинна виконуватися умова:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij},$$

де α_i – потенціал і-го рядка;

β_j – потенціал j-го стовпця.

Для першого рядка беремо $\alpha_1 = 0$.

$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 1$, якщо $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 = 1$;

$\alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 2$, якщо $\alpha_1 = 0$, то $\beta_2 = 2$;

$\alpha_2 + \beta_2 = c_{22} = 3$, якщо $\beta_2 = 2$, то $\alpha_2 = 1$;

$\alpha_2 + \beta_3 = c_{23} = 2$, якщо $\alpha_2 = 1$, то $\beta_3 = 1$ тощо.

3. Перевірка на оптимальність

Для незавантажених клітинок перевіряється умова

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}.$$

Якщо хоча б в одній клітинці ця умова не виконується – план не є оптимальним.

У прикладі для клітинки (1–3) умова $0 + 1 < 3$ виконується. Для інших незавантажених клітинок:

$$(1-4) 0 + 0 < 4;$$

$$(2-1) 1 + 1 < 4;$$

(2–1) $1 + 0 > 0$ – умова не виконується, вартість перевищує потрібну, тобто маємо відхилення $\Delta c_{24} = 1$;

$$(3-1) 1 + 1 > 0, \Delta c_{31} = 2;$$

$$(3-2) 1 + 2 > 2, \Delta c_{32} = 1.$$

Опорний план потребує покращення.

4. Пошук ланки неоптимальності

Значення Δc_{ij} показує подальшу економію витрат. У прикладі найбільшу економію можна отримати за клітинкою (3–1). Це означає, що її необхідно довантажити за рахунок перерозподілу з інших клітинок. Помічаємо її знаком «+» як вершину максимальної неоптимальності.

5. Складання контуру перерозподілу ресурсів

З урахуванням цієї клітинки складаємо контур перерозподілу ресурсів за такими правилами:

– контур являє собою замкнений багатокутник із вершинами в завантажених клітинках, за винятком клітинки з вершиною максимальної неоптимальності «+», і ланками, що лежать уздовж рядків і стовпців таблиці;

– ламана лінія повинна бути зв'язаною в тому сенсі, що з будь-якої її вершини можна потрапити в будь-яку іншу вершину по ланках ланцюга (по рядку або по стовпцю);

– у кожній вершині контуру зустрічаються тільки дві ланки, одна з яких розташована по рядку, інша – по стовпцю;

– кількість вершин контуру є парною; всіх їх у процесі перерозподілу поділяють на завантажувані та розвантажувані;

– у кожному рядку (та стовпці) є дві вершини: одна – завантажувана, інша – розвантажувана.

Таким чином по контуру здійснюється перерозподіл ресурсів.

У процесі розв'язання після кожної ітерації (в тому числі й після отримання допустимого рішення) по завантажених клітинках перевіряють виконання такої умови: $N = m + n - 1$.

Робота в модулі *Transportation*

Модуль *Transportation* використовують для розв'язання транспортних задач.

Цей модуль може бути використаний також для розв'язання інших видів задач, таких як задачі про призначення, про планування виробництва та ін.

1. Дані. Транспортна задача є структурованою відповідно до кількості джерел відправлення вантажу та кількості одержувачів. Хоча мінімізація

є звичайною метою транспортування, під час створення набору даних можна вибрати функцію максимізації. Це можна зробити також на екрані редагування, через поле *Objective* «Цільова функція» над набором даних.

Розглянемо виконання роботи на такому *прикладі*. Екран вихідних даних для цієї задачі (з таблицею розміром 5 на 6) має такий вигляд, як показано на рис. 2.1.

The screenshot shows the POM-QM software interface. At the top, there is a menu bar (File, Edit, View, Module, Format, Tools, Window, Help) and a toolbar with various icons. Below the toolbar, there are settings for the objective function (Maximize/Minimize), starting method (Any starting method), and an instruction box. The instruction box contains the text: "We have typed an 'x' in the cell from Glenside to Oak Brook to prevent any units from being shipped." Below these settings is a data table with the following structure:

	Evanston	Oak Brook	Northbrook	Willmette	Morton Grove	Skokie	Supply
Glenside	12	9,999	24	64	22	23	100
Cheltenham	15	30	22	55	38	26	121
Jenkintown	25	22	33	87	43	24	245
Ambler	25	32	66	21	12	55	237
Hatboro	13	34	25	65	23	23	104
Demand	112	69	123	224	26	154	

Рис. 2.1. Екран вихідних даних

Objective «Цільова функція». Функцію цілі можна змінити вказаним вище способом.

Shipping costs «Вартість доставки». Основною інформацією є вартість доставки від кожного пункту відправлення до кожного пункту призначення.

Примітка. Якщо ввести «x» для певної комірки, то у клітинку буде поміщено велику вартість доставки (9999 г.о. за одиницю вантажу), що у подальшому приведе до усунення цієї клітинки від розгляду під час розв'язання.

Supply «Запаси, пропозиція». У крайньому правому стовпці міститься пропозиція для кожного джерела.

Demands «Попит». Останній рядок містить попит у кожному пункті призначення.

Starting method «Метод отримання опорного рішення». У спадному вікні методу є доступними чотири варіанти. Вони є такими:

- 1) будь-який метод (програмне забезпечення за замовчуванням використовує метод наближення Фогеля);
- 2) метод північно-західного кута;
- 3) метод наближення Фогеля;
- 4) метод мінімальних витрат.

Оптимальне рішення не залежить від початкового методу.

2. Рішення (Solution). Нижче наведено приклад розв'язання задачі (рис. 2.2). На головному екрані рішення відображаються обсяги відправлень, які мають бути здійснені, й міститься загальна вартість перевезень у верхньому лівому куті. Якщо потрібно додати фіктивний рядок або стовпець, він з'явиться автоматично у цій таблиці (*Dummy*).

Optimal cost «Оптимальна вартість». У верхньому лівому кутку відображається загальна вартість перевезень або прибуток.

Example 1 Solution							
Optimal cost = \$14,364	Evanston	Oak Brook	Northbrook	Willmette	Morton Grove	Skokie	Dummy
Glenside	100						
Cheltenham			121				
Jenkintown		69				77	99
Ambler				224	13		
Hatboro	12		2		13	77	

Рис. 2.2. Екран рішення задачі

3. Покрокове розв'язання (Stepping). Далі розглядається та сама задача, але метод опорного розв'язання змінюється на метод північно-західного кута. Замість того, щоб натискати *Solve*, натисніть *Step*. Перша таблиця має такий вигляд, як показано нижче (рис. 2.3).

Example 1 Shipments NOTE: Dummy column has been added							
Cost =31,087	Evanston	Oak Brook	Northbrook	Willmette	Morton Grove	Skokie	Dummy
Glenside	100	(9,972)	(5)	(-9)	(-42)	(-84)	(-84)
Cheltenham	12	69	40	(-21)	(-29)	(-84)	(-87)
Jenkintown	(-1)	(-19)	83	162	(-35)	(-97)	(-98)
Ambler	(65)	(57)	(99)	62	26	149	(-32)
Hatboro	(85)	(91)	(90)	(76)	(43)	5	99

Рис. 2.3. Екран покрокового розв'язання

Зверніть увагу, що деякі з цифр подано у дужках, а інші – ні. На екрані цифри також відображаються двома різними кольорами. Цифри без дужок (сині) вказують обсяг вантажів, тоді як цифри у дужках (червоні) позначають собою граничні витрати. Найбільша (за абсолютною величиною) гранична вартість становить -98 у клітинці від *Jenkintown* до *Dummy* (це поточний осередок, вибраний програмним забезпеченням). Вона показує клітинку максимальної неоптимальності.

Також зверніть увагу, що загальна вартість, яка становить 31,087 г.о., відображається у верхній частині таблиці.

Повторення цього процесу (натискання клавіші *Step*) ще декілька разів (для цього прикладу – п'ять) приведе до відображення екрана, на якому після вартості міститиметься повідомлення про те, що рішення є оптимальним і потрібно натиснути *Finish* (рис. 2.4). Таким чином можна відобразити відправлення, граничні витрати (по незавантажених клітинках) або те й інше в одній таблиці. Зверніть увагу, в оптимальній таблиці немає від'ємних (неоптимальних) значень вартості у дужках.

Example 1 Shipments NOTE: Dummy column has been added							
OPTIMAL COST = 14,364	Evanston	Oak Brook	Northbrook	Willmette	Morton Grove	Skokie	Dummy
Glenside	98	(9,979)	2	(33)	(0)	(1)	(2)
Cheltenham	(5)	(12)	121	(26)	(18)	(6)	(4)
Jenkintown	(11)	69	(7)	(54)	(19)	77	99
Ambler	(23)	(22)	(52)	224	13	(43)	(12)
Hatboro	14	(13)	(0)	(33)	13	77	(1)

Рис. 2.4. Екран оптимального рішення, отриманого покроковим розв'язанням

4. Додаткові таблиці. У 5-й версії програмного забезпечення існує можливість отримати інші види відображення рішення:

Marginal Costs – вартість перевезень у незавантажених клітинках;

Final Solution Table – таблиця обсягів перевезень та вартості у незавантажених клітинках;

Shipments with Costs – таблиця обсягів перевезень та вартості цих перевезень у завантажених клітинках;

Shipping List – таблиця, що показує певну інформацію стосовно кожного маршруту: пункт відправлення, пункт призначення, обсяг перевезень, вартість за одиницю вантажу та загальну вартість перевезення маршрутом.

Послідовність виконання лабораторної роботи

1. Створіть новий файл даних. Вкажіть назви рядків та стовпців згідно з наданим варіантом.

2. Виберіть один з методів отримання опорного рішення. Отримайте оптимальне рішення.

У висновку має бути вказано:

- чи був доданий фіктивний стовпець або рядок;
- скільки клітинок було завантажено;
- чому дорівнює оптимальна вартість перевезення.

3. Виконайте покрокове розв'язання.

У висновку має бути зазначено:

- кількість ітерацій;
- клітинки максимальної неоптимальності та значення цільової функції (за кожною ітерацією).

4. Поверніться до вихідних даних. Виберіть *інший метод* отримання опорного рішення. Отримайте оптимальне рішення. Перегляньте таблицю ітерацій (*Iterations*).

У висновку має бути вказано:

- кількість ітерацій;
- який метод із двох використовує менше ітерацій для наданого варіанта.

5. Отримайте додаткові таблиці. За кожною таблицею стисло опишіть її зміст.

Звіт з лабораторної роботи має містити:

- вихідні дані;
- таблицю оптимального рішення (з висновком);
- всі ітерації покрокового розв'язання в разі застосування першого із вибраних методів (з висновком);
- список ітерацій покрокового розв'язання у випадку застосування другого із вибраних методів (з висновком);
- таблицю маргінальних вартостей, фінальну таблицю рішення, перевезення та вартості, список перевезень;
- загальний висновок відповідно до змісту вихідних даних.

Вихідні дані

Варіант 1

Майстерні ремонтують двигуни. Витрати на перевезення одного двигуна задано в таблиці:

Райони	Майстерні			Потреби у ремонті
	1	2	3	
1	45	35	83	100
2	20	43	25	180
3	75	70	42	130
4	55	12	60	120
5	41	65	31	850
Потужності (рем/рік)	100	800	980	–

Спланувати ремонти по районах таким чином, щоб мінімізувати транспортні витрати.

Варіант 2

Здійснюється перевезення зерна зі сховищ. У таблиці задано вартість перевезення за кожним маршрутом:

Сховища	Споживачі				Обсяги зерна
	1	2	3	4	
А	80	35	50	25	100
В	45	10	65	70	155
С	10	95	40	35	250
Потреби	55	100	250	150	–

Мінімізувати загальну вартість перевезення вантажу.

Варіант 3

Здійснюється перевезення виробів із цехів на склади. У таблиці задано вартість перевезення 1 тис. шт.:

Цехи	Склади				Обсяг виробництва
	1	2	3	4	
А	20	35	40	45	30
В	35	20	55	10	45
С	40	35	20	65	20
Пропускна спроможність (тис. шт.)	25	30	35	10	–

Мінімізувати загальну вартість перевезення вантажу.

Варіант 4

Три заводи виготовляють певну продукцію. Задано вартості перевезень:

Заводи	Споживачі			Виробництво	Собівартість
	А	В	С		
1	6	5	3	500	24
2	2	4	2	450	20
3	4	5	5	510	25
Потреби	310	400	450		–

Скласти оптимальний план перевезень продукції (собівартість продукції додати до вартості перевезень).

Варіант 5

Здійснюється перевезення вантажу зі складів до магазинів. У таблиці задано відстані. Вартість провезення вантажу на 1 км дорівнює 10 г.о:

Склади	Магазини				Обсяги вантажу
	1	2	3	4	
А	13	15	6	5	60
В	5	7	15	41	85
С	12	15	2	20	106
Потреби	40	70	55	82	–

Мінімізувати вартість перевезення вантажу.

Варіант 6

З метою виконання ремонту доріг здійснюється перевезення ґрунту машинами. У таблиці подано відстані до вибоїн дороги:

Пункти відправлення	Вибоїни на дорозі			Наявність ґрунту
	1	2	3	
А	1	3	3	115
В	2	2	3	120
С	1	3	4	30
Потреби	100	150	60	–

Мінімізувати загальний пробіг машин.

Варіант 7

Задано відстані від пунктів відправлення до пунктів споживання:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	1	2	3	4	5	
А	20	10	12	13	16	200
В	25	19	20	14	10	300
С	17	18	15	10	17	250
Потреби	210	150	120	135	135	–

Мінімізувати загальний пробіг машин.

Варіант 8

Здійснюється перевезення цегли від підприємств-виробників до будівельних об'єктів, відстані задано в таблиці. Залишки цегли відправляють залізницею до інших районів:

Підприємства	Об'єкти				Виробництво
	1	2	3	4	
1	14	15	10	18	700
2	13	14	11	19	700
3	18	18	14	8	600
Потреби	350	550	300	550	–

Визначте оптимальний план перевезення цегли на будівельні об'єкти і в інші райони з мінімізацією витрат.

Варіант 9

Станції технічного обслуговування (СТО) виконують роботи для автотранспортних підприємств:

СТО	Вартість ремонту	Витрати на транспортування			Виробнича потужність
		АТП1	АТП2	АТП3	
1	520	70	70	10	10
2	700	40	60	30	18
Потрібна кількість ремонтів		6	8	5	8

Яку кількість автомашин слід відремонтувати на кожній СТО з мінімальними витратами (до витрат на транспортування додати вартість ремонту)?

Варіант 10

Три магазини подали замовлення до овочесховищ на здійснення поставок картоплі по 15, 12 і 30 т. Овочесховища мають запаси по 20, 25, 25 і 20 т. Тарифи на перевезення 1 т задано в таблиці:

Овочесховища	Магазини		
	1	2	3
1	2	7	4
2	4	3	2
3	5	6	2
4	2	5	6

Скласти план перевезень, що мінімізує транспортні витрати.

Варіант 11

Знайти оптимальний розподіл трьох видів механізмів між чотирма ділянками відповідно до потреб 15, 20, 35, 40 за продуктивності, заданої у таблиці:

Механізми	Ділянки				Кількість
	1	2	3	4	
1	4	2	2	0	45
2	2	4	3	3	25
3	2	0	5	2	35

Варіант 12

Зерно, завантажене на елеваторах, необхідно перевезти до трьох хлібозаводів. У таблиці вказано відстані (км) (витрати на перевезення 1 т зерна на 1 км складають 20 г.о.):

Елеватори	Хлібозаводи			Запаси, т
	1	2	3	
1	20	40	50	3200
2	50	20	30	1200
Потреби, т	1000	1500	1600	–

Спланувати перевезення так, щоб мінімізувати витрати.

Варіант 13

Для здійснення поливу ділянок саду використовують колодязі. Відстані задано в таблиці:

Колодязі	Ділянки			Витрати
	сливи	яблуні	груші	
1	10	5	12	180
2	25	25	35	100
3	43	40	39	40
Потреби	110	100	120	–

Як найбільш ефективно організувати полив?

Варіант 14

Заводи поставляють продукцію до сховищ з певними транспортними витратами, які задано в таблиці:

Заводи	Сховища					Виробництво
	1	2	3	4	5	
1	520	450	650	550	720	45
2	450	520	630	565	750	75
Місткість	20	15	15	25	28	–

Спланувати перевезення так, щоб мінімізувати транспортні витрати.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачі, які можна віднести до транспортного типу.
2. Вкажіть основну мету розв'язання будь-якої транспортної задачі.
3. Надайте математичну модель транспортної задачі.
4. Які транспортні задачі називають закритими?
5. Як відкриту транспортну задачу зробити закритою?
6. Чи можна транспортну задачу розв'язати симплекс-методом?
7. Розкрийте основні етапи методу потенціалів.
8. Укажіть методи визначення опорного рішення транспортної задачі.
9. Опишіть процедуру визначення опорного рішення транспортної задачі методом північно-західного кута.

10. Коли опорне рішення є виродженим?
11. Як визначити клітинку максимальної неоптимальності?
12. Розкрийте правила складання контуру перерозподілу ресурсів.
13. Як називають (англійською) фіктивний стовпець / рядок у лабораторній роботі?
14. Які значення в покроковій таблиці надано в дужках?
15. Які значення знаходяться в дужках в оптимальній (фінальній) покроковій таблиці?
16. Який вигляд має клітинка максимальної неоптимальності (в лабораторній роботі)?
17. Які значення задано в маргінальній таблиці?
18. Які значення подано у фінальній таблиці рішення (Final Solution Table)?
19. Які значення містяться в таблиці «Перевезення та вартості» (Shipments with Costs)?
20. Які значення містяться в таблиці «Список перевезень» (Shipping List)?

Лабораторна робота № 3

ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Мета роботи: виконати оптимальний розподіл ресурсів.

Завдання:

1. Ознайомитись із теоретичною частиною.
2. Вибрати модуль *Assignments*.
3. Ввести вихідні дані для розв'язання задачі.
4. Отримати результати розв'язання задачі (у вигляді таблиці та списку).
5. Описати отримані результати.
4. Зробити загальний висновок (згідно з метою роботи).

Теоретичні відомості

Модель задачі про призначення використовують для розв'язання таких типів задач: призначення співробітників на робочі місця; закріплення за співробітниками певних видів обладнання; розподіл устаткування для виконання окремих завдань тощо. Модель є окремим випадком транспортної задачі. Щоб сформулювати задачу про призначення, необхідно визначити, наприклад, кількість завдань і робочих місць та зазначити, чи розв'язується ця задача з метою мінімізації чи максимізації. Кількість робочих місць та кількість завдань не обов'язково мають бути однаковими, але зазвичай вони є рівними.

Вид цільової функції (мінімізація або максимізація) встановлюється на екрані вихідних даних, але він може бути змінений.

Вихідні параметри моделі задачі про призначення:

- 1) n – кількість ресурсів, m – кількість робіт;
- 2) $a_i = 1$ – одинична кількість ресурсу A_i ($i = 1..n$), наприклад: один працівник; один транспортний засіб; одна наукова тема тощо;
- 3) $b_j = 1$ – одинична кількість роботи V_j ($j = 1..m$), наприклад: одна посада; один маршрут; одна лабораторія;
- 4) c_{ij} – характеристика якості виконання роботи V_j за допомогою ресурсу A_i ; наприклад, показник компетентності i -го працівника під час роботи на j -й посаді; оцінка часу, за який i -й транспортний засіб перевезе вантаж по j -му маршруту; ступінь кваліфікації i -ї лабораторії під час роботи над j -ю науковою темою.

В табл. 3.1 наведено загальний вигляд вихідних даних задачі про призначення.

Таблиця 3.1

Загальний вигляд транспортної матриці для задачі про призначення

Ресурси A_i	Роботи V_j				Кількість ресурсів
	V_1	V_2	...	V_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	1
...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	1
Кількість робіт	1	1	...	1	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

Вихідні параметри:

1. x_{ij} – факт призначення чи непризначення ресурсу A_i для роботи V_j :

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i\text{-й ресурс не призначений для } j\text{-ї роботи;} \\ 1, & \text{якщо } i\text{-й ресурс призначений для } j\text{-ї роботи.} \end{cases}$$

2. $L(X)$ – загальна (сумарна) характеристика якості розподілу ресурсів на роботи.

Модель задачі про призначення:

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}), \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, m}), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) . \end{cases}$$

Специфічна структура задачі про призначення дає можливість застосувати Угорський метод її розв'язання.

Робота в модулі *Assignments*

1. Дані. У табл. 3.2 наведено приклад вихідних даних задачі розміром 7 на 7. Метою розв'язання цієї задачі є призначення кожного продавця на певну територію з мінімальною загальною вартістю робіт. На кожній території має бути тільки один продавець, а для кожного продавця має бути відведена лише одна територія.

Таблиця 3.2

Вихідні дані задачі про призначення

	<i>Mort</i>	<i>Cippy</i>	<i>Bruce</i>	<i>Beth</i>	<i>Lauren</i>	<i>Eddie</i>	<i>Brian</i>
<i>Pennsylvania</i>	12	54	*	87	54	89	98
<i>New Jersey</i>	33	45	87	27	34	76	65
<i>New York</i>	12	54	76	23	87	44	62
<i>Florida</i>	15	37	37	65	26	96	23
<i>Canada</i>	42	32	18	77	23	55	87
<i>Mexico</i>	40	71	78	76	82	90	44
<i>Europe</i>	12	34	65	23	44	23	12

* *Bruce* не дозволено працювати у штаті *Pennsylvania*.

Структура даних є ідентичною структурі транспортної моделі. Основна відмінність полягає в тому, що модель призначення не відображає наявних ресурсів та потреб, оскільки всі вони дорівнюють одиниці.

Примітка. Щоб спробувати запобігти виконанню призначення, наприклад виконанню призначення Брюса в Пенсильванію, треба ввести дуже велику вартість. Якщо ввести «х», програма визначить витрати 9999 для задачі мінімізації або прибуток -9999 для задачі максимізації в цій клітинці.

2. Знаходження рішення. На рис. 3.1 подано такі результати:

Assigns «Призначення» в основній частині таблиці – це призначення, які мають бути виконані. У цьому прикладі Морт має бути призначений на

Optimal cost = \$191	Mort	Cippy	Bruce	Beth	Lauren	Eddie	Brian
Pennsylvania	Assign 12	54	9,999	87	54	89	98
New Jersey	33	45	87	27	Assign 34	76	65
New York	12	54	76	Assign 23	87	44	62
Florida	15	Assign 37	37	65	26	96	23
Canada	42	32	Assign 18	77	23	56	87
Mexico	58	71	78	76	82	90	Assign 44
Europe	12	34	65	23	44	Assign 23	12

Рис. 3.1. Результат розв'язання задачі про призначення

роботу в Пенсильванію, Сіппі – у Флориду, Брюс – у Канаду, Бет – у Нью-Йорк, Лорен – у Нью-Джерсі, Едді – в Європу та Брайан – у Мексику.

Optimal cost «Оптимальна вартість». Загальна вартість відображається у верхньому лівому куті, у цьому прикладі – 191 долар.

Примітка. Чорним кольором позначено коефіцієнти якості (ефективності) непризначених робіт, синім – коефіцієнти якості (ефективності) призначених робіт.

Призначення можуть бути задані у вигляді списку, як показано на рис. 3.2.

JOB	Assigned to	Cost
Pennsylvania	Mort	12
New Jersey	Lauren	34
New York	Beth	23
Florida	Cippy	37
Canada	Bruce	18
Mexico	Brian	44
Europe	Eddie	23
Total		191

Рис. 3.2. Результат розв'язання задачі у вигляді списку

Звіт з лабораторної роботи має містити:

- вихідні дані;
- таблицю оптимального рішення (*Assignments*). У висновках слід описати зміст таблиці, вказати оптимальне значення цільової функції;
- таблицю розв'язання задачі у вигляді списку (*Assignment List*). У висновках слід стисло описати зміст таблиці.

Вихідні дані

Варіант 1

Задано тривалість виконання операцій робітниками:

Робітники	Операції				
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅
P ₁	25	22	30	24	31
P ₂	32	-	14	34	30
P ₃	35	-	32	31	28
P ₄	36	27	14	24	30
P ₅	35	25	30	22	-

Розподіліть операції між робітниками із мінімальним сумарним часом виконання.

Варіант 2

Задано витрати у випадку використання різних автобусів на певних маршрутах:

Автобуси	Маршрути			
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
A ₁	51	59	47	53
A ₂	55	61	46	45
A ₃	50	57	53	52
A ₄	52	60	54	50

Розподіліть автобуси за маршрутами з мінімальними витратами.

Варіант 3

Задано кваліфікацію співробітників, яких слід призначити виконувати певні види робіт:

Робітники	На-лашту-вання звуку	Налашту-вання світла	Налашту-вання екранів та дисплеїв	Зустріч та реєстрація гостей	Відповідальний за кофе-брейк
Марія	7	3	6	9	5
Петро	7	5	7	5	6
Олександра	7	6	8	8	9
Ольга	3	1	6	5	7
Іван	2	4	9	9	5

Розподіліть працівників для виконання певних видів робіт із максимальною ефективністю.

Варіант 4

Задано тривалість виконання операцій кожним робітником:

Робітники	Операції				
	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅
P ₁	65	22	11	24	10
P ₂	32	5	14	64	30
P ₃	-	-	12	31	88
P ₄	36	27	14	74	30
P ₅	35	15	30	12	-

Розподіліть операції між робітниками таким чином, щоб досягти мінімального сумарного часу їх виконання.

Варіант 5

Задано транспортні витрати у випадку використання різних автобусів на певних маршрутах:

Автобуси	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
A ₁	61	59	77	53
A ₂	55	31	46	13
A ₃	90	57	93	52
A ₄	52	20	54	12

Розподіліть автобуси за маршрутами таким чином, щоб досягти мінімальних транспортних витрат.

Контрольні запитання

1. Якою є постановка задачі про призначення?
2. У чому полягає відмінність моделі задачі про призначення від класичної моделі транспортної задачі?
3. Опишіть вихідні параметри та результати розв'язання задачі про призначення.
4. Надайте математичну модель задачі про призначення.
5. В який спосіб у моделі задачі про призначення можна заборонити конкретне призначення?
6. У чому полягають особливості процесу приведення задачі про призначення до закритого (збалансованого) виду?
7. Опишіть таблицю вихідних даних.
8. Розкрийте зміст оптимальної таблиці *Assignments*.
9. Охарактеризуйте зміст таблиці *Assignment List*.

Лабораторна робота № 4

АНАЛІЗ ТАБЛИЦЬ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета роботи: вибрати оптимальне рішення на основі низки критеріїв.

Завдання:

1. Ознайомитись із теоретичною частиною.
2. Вибрати модуль та підмодуль *Decisions Analysis / Decisions Tables*.
3. Ввести вихідні дані для аналізу таблиць рішень.
4. Отримати результати розв'язання у вигляді таких таблиць:
 - основної таблиці результатів;
 - інформації про найкраще рішення;
 - інформації про втрати.
5. Охарактеризувати отримані результати, зробити висновки (за кожною таблицею).
6. Сформулювати загальний висновок (згідно з метою роботи).

Теоретичні відомості

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Невизначеність є характеристикою середовища («природи»), в якому приймається рішення. Розглянемо невизначеність «природи», викликану недостатністю інформації про умови, за яких розвивається об'єкт. Зовнішнє середовище може перебувати в одному із множини можливих станів. Ця множина може бути скінченною і нескінченною. Вважатимемо множину станів скінченною.

Нехай S_i – стан «природи», причому $i = 1 \dots n$, де n – кількість можливих станів. Всі можливі стани є відомими; невідомим тільки є стан, який матиме місце під час планування рішення. Множину рішень R_j також визначено, їх кількість дорівнює m . Реалізація R_j рішення, коли «природа» знаходиться в S_i стані, приводить до результату, який можна оцінити кількісно. Такою мірою можуть бути виграші від прийнятого рішення чи втрати, або відповідно корисність, ризик.

Вихідні дані задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям (рішенням) R_j , а стовпці – можливим станам «природи» S_i .

Припустимо, кожному R_j -му рішенням та кожному можливому S_i -му стану «природи» відповідає результат, що визначає виграш у разі вибору j -го рішення та реалізації i -го стану – V_{ji} (табл. 4.1).

Модель задачі визначається множиною станів $\{S_i\}$, множиною рішень (стратегій) $\{R_j\}$ і матрицею можливих результатів V_{ji} .

Критерій Вальда (мінімакс або максимін). Цей критерій спирається на принцип максимальної обережності, оскільки він ґрунтується на виборі кращої з найгірших стратегій.

Таблиця 4.1

Вихідні дані задачі в умовах невизначеності

	S ₁	...	S _i	...	S _n
R ₁	V ₁₁	...	V _{1i}	...	V _{1n}
...
R _j	V _{j1}	...	V _{ji}	...	V _{jn}
...
R _m	V _{m1}	...	V _{mi}	...	V _{mn}

Якщо у вихідній матриці задано виграш, то використовують максимінний критерій. У кожному рядку матриці результатів виділяють найменший елемент, а потім вибирають рішення R_j (рядок), якому відповідає найбільший елемент серед виділених

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}.$$

Якщо задано втрати, використовують мінімаксний критерій. У кожному рядку знаходять найбільший елемент, а потім вибирають рішення R_j, якому відповідає найменший елемент

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}.$$

Критерій Севіджа. Використовують лише для матриці ризиків (втрат). Елементи матриці ризиків обчислюють за елементами матриці виграшу таким чином:

$$r_{ji} = \max_j V_{ji} - V_{ji}.$$

Якщо задано матрицю втрат або витрат, то елементи матриці ризиків визначають за формулою

$$r_{ji} = V_{ji} - \min_j V_{ji}.$$

Критерій Севіджа оснований на критерії Вальда. Ризик завжди являє собою втрати, отже, у цьому випадку використовують мінімаксний критерій.

Критерій Гурвіца ґрунтується на тому, що «природа» може перебувати в найвигіднішому стані з імовірністю α і в найневигіднішому з імовірністю $(1 - \alpha)$, де α – коефіцієнт довіри. Якщо результат – прибуток, то критерій Гурвіца

$$W = \max_j [\alpha \max_i V_{ji} + (1 - \alpha) \min_i V_{ji}].$$

Коли задано витрати

$$W = \min_j [\alpha \min_i V_{ji} + (1 - \alpha) \max_i V_{ji}].$$

Робота в модулі *Decisions Tables*

Таблицю рішень можна використовувати для пошуку оптимального значення, максиміну (мінімаксу) або максимаксу (мініміну), коли є кілька варіантів прийняття рішення і є кілька можливих сценаріїв. Крім того, можна розрахувати очікувану вартість в умовах невизначеності, очікувану вартість за наявності повної інформації та альтернативну вартість.

Загальна структура таблиць рішень визначається кількістю варіантів (або альтернатив), доступних особі, яка приймає рішення, та кількістю можливих сценаріїв (або станів). Крім того, мета може бути визначена або для максимізації прибутку, або для мінімізації витрат.

1. Дані

Можливості станів (probability). Для кожного стану існує можливість призначити ймовірність. Вимірювання очікуваної вартості (середньо-очікуваної вартості, очікуваної вартості в умовах визначеності та очікуваної вартості у найкращому варіанті) вимагає призначення ймовірностей, тоді як максимін (мінімакс) та максимакс (мінімін) – ні.

Примітка. Якщо ймовірності є однаковими, введіть «=» в один із осередків імовірності, і програма встановить їх рівними.

Прибуток чи витрати (Profits / Costs). Прибуток (або витрати) для кожної комбінації варіантів та сценаріїв має бути вказаний.

Значення альфа для критерію Гурвіца (Hurwicz Alpha). Над даними знаходиться комбінація смуги прокручування або текстового поля для введення значення альфа критерію Гурвіца. Це значення використовують для отримання середньозваженого значення найкращих та найгірших результатів для кожної стратегії.

У наступному **прикладі** розглянуто три варіанти рішень (рис. 4.1):

- 1) *subcontract* (субпідряд);
- 2) *overtime* (використання понаднормової роботи);
- 3) *part-time help* (використання неповної допомоги).

Objective		Hurwicz Alpha		Instruction		
<input checked="" type="radio"/> Profits (maximize) <input type="radio"/> Costs (minimize)		<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>		Enter the probability for regular dem. If you enter an equal probability for all scenarios, the probabilities will be set equal. This is a probability or a percentage between 0 and 1.		
Example 1						
	Low demand	Regular dem	High demand	Strike	Slowdwn	
Probabilities	.2	.3	.25	.15	.1	
Subcontract	100	120	140	120	130	
Overtime	120	150	180	10	90	
Parttime help	105	130	190	50	80	

Рис. 4.1. Вихідні дані для прийняття рішення

Можливі сценарії (стан природи):

- *lowdemand* (попит буде низьким);
- *regulardemand* (попит буде нормальним);

- *high demand* (попит буде високим);
- *strike* (буде страйк);
- *slowdown* (буде уповільнення роботи).

Таблиця містить дані про *Profits* «Прибуток». Перший рядок у таблиці являє собою ймовірності того, що кожен із можливих станів буде реалізований. Три рядки, що залишилися, являють собою прибуток, який буде отримано, якщо прийнято певне рішення і відбувається відповідний сценарій (стан); наприклад, якщо було вибрано використання понаднормованої роботи і очікується високий попит, прибуток становитиме 180 г.о.

2. Розв'язання

Таблиця результатів. Наступний екран результатів містить дані та результати для зазначеного прикладу (рис. 4.2).

	Low demand	Regular dem	High demand	Strike	Slowdown	EMV	Row Min	Row Max	Hurwicz
Probabilities	.2	.3	.25	.15	.1				
Subcontract	100	120	140	120	130	122	100	140	116
Overtime	120	150	180	10	90	124.5	10	180	78
Parttime help	105	130	190	50	80	123	50	190	106
					maximum	124.5	100	190	116
						Best EV	maximin	maximax	Best

The maximum expected monetary value is 124.5 given by Overtime
 The maximin is 100 given by Subcontract
 The maximax is 190 given by Parttime help

Рис. 4.2. Отримані результати

EMV «Середньоочікувана вартість». Очікувані значення було розраховано й вони відображаються у стовпці, доданому у правій частині таблиці даних.

Row min «Мінімум рядка». Для кожного рядка було знайдено та вказано мінімальний елемент. Цей елемент використовують для пошуку максиміну (або мініміну, якщо цільова функція мінімізується).

Row max «Максимум рядка». Для кожного рядка було знайдено та вказано максимальний елемент у рядку. Це число використовують для визначення максиміну (або максимаксу, якщо цільова функція мінімізується).

Hurwicz «Критерій Гурвіца». Це значення становить 40 % (відповідно до заданого значення альфа 0.4), і його помножено на найкращий результат плюс 60 %, які помножено на найгірший результат для кожного рядка; наприклад, для субпідряду критерій Гурвіца дає значення

$$(0.4 \times 140) + (0.6 \times 100) = 116.$$

Maximum. Оскільки розв'язується задача отримання прибутку, важливо визначити максимальні значення. Максимальне очікуване значення – це найбільше у стовпці очікуваних значень, яке в цьому прикладі становить 124.5.

Maximin. Максимін є найбільшим числом у стовпці *Row min*. У цьому прикладі максимін дорівнює 100 г.о.

Maximax. Максимальне значення – це найбільше значення у таблиці та найбільше значення у максимальному стовпці. У наданому прикладі це 190.

Інформація про найкраще рішення (*Perfect Information*). Другий екран результатів подає обчислення очікуваної цінності у випадку отримання найкращого рішення (рис. 4.3).

	Low demand	Regular dem	High demand	Strike	Slowdown	Maximum
Probabilities	.2	.3	.25	.15	.1	
Subcontract	100	120	140	120	130	
Overtime	120	150	180	10	90	
Parttime help	105	130	190	50	80	
Perfect Information	120	150	190	120	130	
Perfect*probability	24	45	47.5	18	13	147.5
Best Expected Value						124.5
Exp Value of Perfect Info						23

Рис. 4.3. Результати найкращого рішення

Perfect information «Найкраще рішення». Додатковий рядок із позначкою *Perfect information* додано нижче вихідних даних. У цьому рядку вказано найкращий результат для кожного стовпця; наприклад, для сценарію з низьким попитом найкращий результат – це 120 г.о. з використанням понаднормових.

Perfect's probability «Найкраще рішення з урахуванням імовірностей». Очікуване значення розраховують як суму ймовірностей, які помножено на кращі результати. У прикладі це

$$(0.2 \times 120) + (0.3 \times 150) + (0.25 \times 190) + (0.15 \times 120) + (0.1 \times 130) = 147.50.$$

У рядку відображаються окремі доданки попереднього виразу (24, 45, 47.5, 18 та 13), а сума (147.5) відображається у кінці рядка.

Expected value of perfect information «Очікувана цінність ідеального рішення». Очікуване значення ідеального рішення (*EVPI*) є різницею між середньоочікуваним значенням (124.5) і найкращим рішенням з урахуванням імовірностей (147.5), яке в цьому прикладі становить 23.

Втрачені можливості. Третій екран результатів – відображення втрат (ризик) або втрачених можливостей (рис. 4.4).

Regret or Opportunity Loss							
Example 1 Solution							
	Low demand Regret	Regular dem Regret	High demand Regret	Strike Regret	Slowdown Regret	Maximum Regret	Expected Regret
Probabilities	.2	.3	.25	.15	.1		
Subcontract	20	30	50	0	0	50	25.5
Overtime	0	0	10	110	40	110	23
Parttime help	15	20	0	70	50	70	24.5
Minimax regret						50	

Рис. 4.4. Результати втрачених можливостей

Значення в таблиці розраховуються для кожного стовпця як значення клітинки, яке віднімається з найкращого значення у стовпці даних; наприклад, за низького попиту найкращий результат – 120. Якщо було укладено субконтракт і отримано 100 г.о. прибутку, втрати становитимуть

$$120 - 100 = 20,$$

але якщо був використаний неповний робочий день, втрати будуть

$$120 - 105 = 15 .$$

Два стовпці праворуч дають два набори результатів. У стовпці *Maximum Regret* «Максимальні втрати» визначаються найгірші (найвищі) втрати для кожного рішення, а потім визначаються *Minimax Regret* «Мінімаксні втрати», які дорівнюють 50, якщо визначити найкращі (найнижчі) з цих втрат. У стовпці *Expected Regret* «Очікувані втрати» втрати в кожному рядку помножують на відповідні ймовірності ситуацій.

Звіт з лабораторної роботи має містити:

- вихідні дані;
- основну таблицю результатів. У висновку слід указати оптимальні рішення за кожним із чотирьох критеріїв у стовпцях таблиці;
- інформацію про найкраще рішення. У висновку слід пояснити результати, що містяться в останніх трьох рядках таблиці;
- інформацію про втрати. У висновку слід вказати оптимальне рішення та порівняти його з результатами останнього стовпця.

У загальному висновку здобувачі освіти мають узагальнити інформацію за п'ятьма критеріями та обрати оптимальне рішення, або множину субоптимальних.

Вихідні дані

Варіант 1

Роздрібне торговельне підприємство розробило кілька варіантів плану продажу товарів на майбутньому ярмарку з урахуванням мінливої кон'юнктури ринку та попиту покупців. Ймовірність настання можливих станів становить: 0.5; 0.2; 0.25 та 0.05. Величини прибутку подано у таблиці:

План продажу	Стан кон'юнктури ринку			
	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄
I ₁	5.0	4.5	5.1	4.0
I ₂	4.2	5.6	3.9	4.3
I ₃	3.6	4.1	4.7	4.0
I ₄	3.5	3.9	4.6	3.8

Визначити оптимальний план продажу товарів.

Варіант 2

Очікується настання повені, яка може мати категорію з першої по п'яту. Як профілактичну дію можна побудувати дамбу. Є п'ять варіантів вибору висоти дамби: ($h_1 < h_2 < h_3 < h_4 < h_5$), причому дамба висотою h_1 захищає тільки від повені першої категорії; дамба висотою h_2 – від повені першої та другої категорії тощо; дамба висотою h_5 захищає від повені будь-якої категорії. Особа, що приймає рішення, має шість стратегій (не будувати дамбу взагалі (A_0) або будувати дамбу висотою h_i (A_i), $i = 1...5$). Природа також «має» шість стратегій (не здійснювати повинь (Π_0) або здійснити повинь j -ї категорії (Π_j), $j = 1...5$). Ймовірність настання можливих станів: 0.15, 0.20; 0.45; 0.14; 0.05 та 0.01. Задано матрицю втрат:

Висота дамби	Стани природи					
	Π_0	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A ₀	0	5	10	13	16	20
A ₁	2	2	12	15	18	22
A ₂	4	4	4	17	20	24
A ₃	6	6	6	6	22	26
A ₄	8	8	8	8	8	28
A ₅	10	10	10	10	10	10

Визначити оптимальну висоту дамби.

Варіант 3

Підприємство може виготовляти чотири види продукції: A₁, A₂, A₃, A₄, одержуючи відповідний прибуток. Його величину визначає стан попиту

(природа ринку), який може перебувати в одному з чотирьох можливих станів: V_1, V_2, V_3, V_4 . Максимальний попит – V_4 . Ймовірність настання можливих станів: 0.4; 0.3; 0.25; 0.05. Залежність величини прибутку від виду продукції та стану ринку подано в таблиці:

Види продукції	Можливі стани ринку попиту			
	V_1	V_2	V_3	V_4
A_1	4	4	4	4
A_2	2	2	2	2
A_3	3	3	3	3
A_4	3	3	3	3

Визначити оптимальний вид продукції.

Варіант 4

Фермер, що має обмежену ділянку земельних угідь, може засадити її трьома різними культурами: A_1, A_2, A_3 . Урожай цих культур залежить, головним чином, від погоди («природи»), яка може перебувати у трьох різних станах: V_1, V_2, V_3 . Фермер має інформацію (статистичні дані) про середню врожайність цих культур у випадку настання трьох різних станів погоди (посуха, нормальна, дощова) і має у своєму розпорядженні три стратегії:

– перша стратегія передбачає, що вся ділянка землі буде засіяна культурою A_1 ;

– друга стратегія передбачає, що вся ділянка землі буде засіяна культурою A_2 ;

– третя стратегія передбачає, що вся ділянка буде засіяна культурою A_3 .

Природа може також використовувати три можливі стратегії:

– посушливу погоду, яка відповідає першій стратегії V_1 ;

– нормальну погоду, яка відповідає другій стратегії V_2 ;

– дощову погоду, яка відповідає третій стратегії V_3 .

Ймовірність настання станів погоди дорівнює відповідно: 0.1; 0.7 та

0.2.

Задано матрицю доходів фермера:

Види культур	Можливі стани природи		
	V_1	V_2	V_3
A_1	100	100	100
A_2	49	49	49
A_3	0	0	0

Визначити оптимальну культуру для посіву.

Варіант 5

Фірма планує реалізацію своєї продукції на ринках, враховуючи можливі варіанти купівельного попиту Π_j , $j = 1 \dots 4$ (дуже високий, високий, середній та низький). На підприємстві розроблено три стратегії збуту товарів: A_1 , A_2 , A_3 . Обсяг товарообігу, що залежить від стратегії та купівельного попиту з відповідними ймовірностями, відображено у таблиці:

Стратегії збуту	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	19.9	2	8	2.65
A_2	15	13,4	4,6	2.5
A_3	7.05	7	16	5.85
p_j	0.3	0.4	0.2	0.1

Вибрати оптимальну стратегію збуту.

Варіант 6

Задано очікувані значення прибутку для трьох товарних ринків:

Можливі нові товарні ринки	Політична обстановка			
	стабільна	стабільна	нестабільна	нестабільна
	Ступінь конкуренції			
	слабка Z_1	сильна Z_2	слабка Z_3	сильна Z_4
Ринок A_1	530	Ринок A_1	530	Ринок A_1
Ринок A_2	490	Ринок A_2	490	Ринок A_2
Ринок A_3	575	Ринок A_3	575	Ринок A_3

Визначити найкращий ринок з урахуванням варіантів поєднання двох факторів.

Варіант 7

Розглядається сільськогосподарське підприємство, яке має три стратегії: A_1 – сіяти картоплю на ділянці з вологою землею; A_2 – на ділянці із землею із середнім рівнем вологості; A_3 – на сухій ділянці. Природа також має три стратегії: Π_1 відповідає кількості опадів, меншій ніж за норму; Π_2 – кількість опадів є нормальною; Π_3 – кількість опадів є більшою за норму. Прибуток підприємства за кожною стратегією задається врожайністю картоплі:

Стратегії	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	250	200	100
A_2	200	230	120
A_3	100	240	260

Визначити оптимальну земельну ділянку для здійснення посіву.

Контрольні запитання

1. Звідки виникає невизначеність у завданнях із прийняття рішень?
2. Що являють собою вихідні дані у завданнях із прийняття рішень за умов невизначеності?
3. На якому принципі ґрунтується критерій Вальда?
4. Наведіть формулу критерію Вальда.
5. На якому принципі ґрунтується критерій Гурвіца?
6. Що являє собою коефіцієнт довіри?
7. Наведіть формулу критерію Гурвіца.
8. Які види очікуваної вартості мають розраховуватися у роботі?
9. Які вихідні дані потрібно задати у роботі?
10. Які критерії застосовуються для прийняття рішень в основній підсумковій таблиці?
11. Які результати містяться внизу основної підсумкової таблиці?
12. Як розраховують вартість рішення з урахуванням імовірностей?
13. Як розраховують значення критерію Гурвіца?
14. Які підсумкові результати містяться у таблиці з найкращим рішенням?
15. Які результати наведено у таблиці втрат?

Лабораторна робота № 5 РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ

Мета роботи: розв'язати ігрову (матричну) задачу у змішаних стратегіях.

Завдання:

1. Ознайомитись із теоретичною частиною.
2. Вибрати модуль *Game Theory*.
3. Ввести вихідні дані для розв'язання задачі.
4. Отримати результати розв'язання (у вигляді чотирьох таблиць і графіка).
5. Описати отримані результати, зробити висновки за кожною таблицею та графіком.
6. Сформулювати загальний висновок (згідно з метою роботи).

Теоретичні відомості

Розглядаються конфліктні ситуації у відносинах сторін, інтереси яких є протилежними. Рішення приймаються в умовах невизначеності двома і більше розумними супротивниками, кожен з яких прагне оптимізувати свої рішення за рахунок інших. Математична модель конфліктної ситуації є грою.

Гра – це сукупність правил, що описують суть конфліктної ситуації.
Правилами встановлено:

- вибір дій гравців на кожному етапі гри;
 - інформацію, якою володіє кожен з гравців під час вибору;
 - плату для кожного гравця після завершення будь-якого етапу гри.
- Необхідні *умови* гри є такими:
- є гравці, інтереси яких не збігаються;
 - сформульовано правила вибору допустимих стратегій, вони відомі гравцям;
 - визначено набір можливих кінцевих станів гри (виграш, нічия, програш);
 - всім гравцям відомі розміри платежів, що відповідають кожному кінцевому стану.

Кожен гравець має деяку множину можливих стратегій.

Стратегією гри називають сукупність правил, що визначають поведінку гравця від початку гри до її завершення. Стратегії кожного гравця визначають результати або платежі у грі. Серед стратегій виділяють найбільш *ефективну (оптимальну)*, яка в разі багаторазового повторення гри забезпечує певному гравцю максимальний виграш. Гру називають *грою з нульовою сумою*, якщо програш одного гравця дорівнює виграшу іншого.

Будемо розглядати гру двох осіб із нульовою сумою. Завдання стратегій гравців (A і B) в парній грі визначає її результат, тобто виграш одного або програш іншого. Результат гри задається матрицею $A = ||a_{ij}||$, рядки і стовпці якої відповідають різним стратегіям, а її елементи – виграшу однієї сторони (дорівнюють програшу іншої). Цю матрицю називають *платіжною матрицею, або матрицею гри*.

Якщо перший гравець має m стратегій $\{A_i\}$, а другий – n стратегій $\{B_j\}$, то маємо гру $m \times n$ із платіжною матрицею A , де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$ – числове подання виграшу гравця A (або програшу гравця B) у випадку вибору ними стратегій A_i і B_j відповідно.

Кожен із гравців вибирає однозначно з імовірністю, що дорівнює одиниці, деяку стратегію, тобто користується під час вибору рішення чистою стратегією. При цьому рішення гри визначається в *чистих* стратегіях. Перший гравець прагне максимізувати свій виграш, а другий – мінімізувати свій програш.

В ігровій таблиці є один рядок для кожної зі стратегій гравця A і один стовпець – для кожної зі стратегій гравця B. Гра з нульовою сумою подається за допомогою таблиці, яка визначає виплату «гравцю рядка» (гравець A) «гравцем стовпця» (гравець B).

Розглянемо гру для двох гравців, наведену в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Приклад подання вихідних даних матричної гри

Стратегії гравців	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	-12	34	75	67
A_2	38	57	96	28	-33

Якщо гравець А вибирає стратегію A_1 , а гравець В – стратегію B_1 , гравець В виплачує гравцеві А 10 г.о. Якщо гравець А вибирає стратегію A_1 , а гравець В – стратегію B_2 , гравець А сплачує 12 г.о., або, іншими словами, гравець В отримує 12 г.о. від гравця А. Кожен з гравців А та В повинен вибрати стратегію, не знаючи, яку стратегію вибрав опонент.

Мінімаксний метод розв'язання гри

Для розв'язання гри двох осіб використовують «песимістичний» критерій (Вальда). Якщо перший гравець застосовує стратегію A_i , то другий буде прагнути того, щоб вибором своєї стратегії звести виграш першого гравця до мінімуму. Величина цього мінімуму дорівнює

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Перший гравець (при будь-яких відповідях супротивника) буде прагнути знайти таку стратегію, при якій α_i є максимумом:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величину α називають *нижньою ціною гри*. Їй відповідає максимінна стратегія, за умов якої перший гравець при будь-яких стратегіях противника забезпечить собі виграш, не менший α . Нижня ціна гри є *гарантованим виграшем* першого гравця.

Аналогічно визначимо за кожним стовпцем матриці

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Його мінімальне значення

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

називають *верхньою ціною гри*. Їй відповідає мінімаксна стратегія другого гравця. Величина β – *гарантований програш* другого гравця.

Для будь-якої матриці А виконується нерівність $\beta \geq \alpha$.

Якщо $\beta = \alpha$, тобто верхня ціна гри дорівнює нижній ціні гри, то чисті стратегії називають *оптимальними*, а гра має *сідлову точку*. Сідлова точка є мінімальним елементом відповідного рядка і максимальним елементом відповідного стовпця.

Величину $C = \beta = \alpha$ називають *ціною гри*. Вона визначає середній виграш гравця А і середній програш гравця В при оптимальних стратегіях.

Змішані стратегії

Багато задач не мають сідлової точки. Тоді використовують змішані стратегії. В ході гри відбувається випадковий вибір стратегії з множини змішаних і для кожної змішаної стратегії вказується ймовірність її вибору. Змішана стратегія для гравця А – це вектор

$$P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_m),$$

де p_i – ймовірність вибору i -ї стратегії, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Аналогічно для гравця В змішана стратегія становить

$$Q = (q_1, \dots, q_j, \dots, q_n).$$

За критерієм мінімаксу при змішаних стратегіях гравець А вибирає стратегію p_i так, щоб максимізувати *найменший очікуваний вигравш* по стовпцях матриці

$$\max_{p_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} p_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} p_i \right) \right\},$$

тоді як гравець В вибирає стратегію q_j , з метою мінімізувати *найбільший очікуваний програвш* по рядках

$$\min_{q_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} q_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} q_j, \dots \right) \right\}.$$

Коли стратегії p_i^0 і q_j^0 є оптимальними, то виконується рівність між очікуваним вигравшем і програвшем, а результуюче значення є оптимальним.

Ціну гри визначають за формулою

$$M(P^0, Q^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^0 q_j^0.$$

Ціна гри знаходиться між нижньою і верхньою цінами:

$$\alpha \leq M(P^0, Q^0) \leq \beta.$$

Рішення гри має таку властивість: якщо гравець А використовує свою оптимальну стратегію, а гравець В змішує свої стратегії, то середній вигравш гравця А не зменшується. Стратегії, які змішуються для оптимальної стратегії, називають *корисними*.

Існує кілька методів знаходження оптимальних стратегій. Метод лінійного програмування для розв'язання ігор застосовують за відсутності сідлової точки для змішаних стратегій.

Графічний метод розв'язання гри

Розглянемо платіжну матрицю, яка не має сідлової точки

Стратегії	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	2	2	3	-1
A ₂	4	3	2	6

Треба визначити оптимальні змішані стратегії та ціну гри.

Запишемо систему обмежень для гравця А (за стовпцями матриці)

$$2p_1 + 4p_2 \geq M \text{ у випадку стратегії } B_1,$$

$$2p_1 + 3p_2 \geq M \text{ у випадку стратегії } B_2,$$

$$3p_1 + 2p_2 \geq M \text{ у випадку стратегії } B_3,$$

$$-1p_1 + 6p_2 \geq M \text{ у випадку стратегії } B_4,$$

де M – ціна гри.

Гравець В застосовує свої стратегії з множини Q за умов обмежень (по рядках матриці, які відповідають стратегіям гравця А)

$$2q_1 + 2q_2 + 3q_3 - 1q_4 \leq M \text{ у випадку стратегії } A_1,$$

$$2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 3/2q_4 \leq M \text{ у випадку стратегії } A_2.$$

Шукатимемо рішення для гравця А. Використовуючи спеціальну систему координат, відзначимо на осях виграші гравця А при виборі відповідних чистих стратегій $p_1 = 0, p_2 = 1$ або $p_1 = 1, p_2 = 0$ (рис. 5.1).

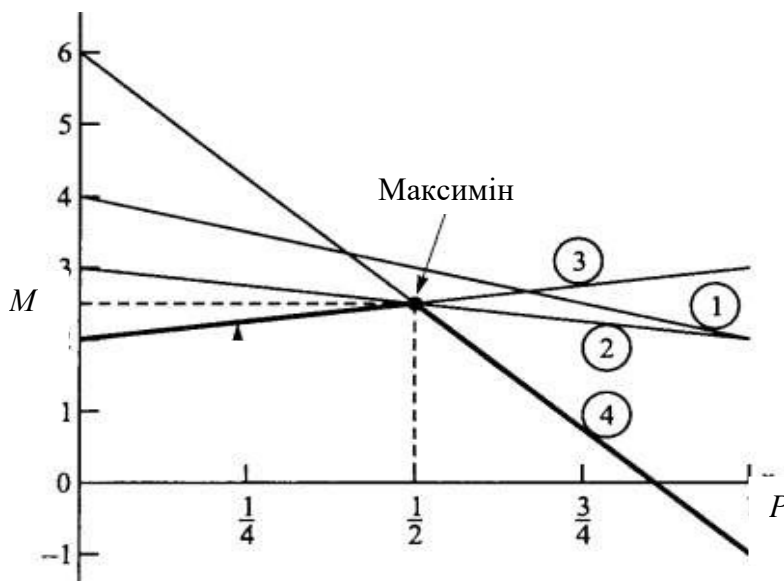


Рис. 5.1. Графічний метод розв'язання ігрової задачі

Для визначення області можливих рішень будуюмо чотири прямі, що відповідають чистим стратегіям гравця В (із системи обмежень).

Щоб визначити найкращий результат із найгірших, побудовано нижню огинальну чотирьох зазначених прямих (зображена на рисунку товстими лінійними сегментами), яка являє собою мінімальний (найгірший) виграш для гравця А незалежно від того, що робить гравець В. Максимум

(найкраще рішення) нижньої огинальної відповідає максимуму в точці перетину третьої та четвертої стратегій (B_3 та B_4).

Координати точки знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{aligned} 3p_1 + 2p_2 &= M, \\ -1p_1 + 6p_2 &= M, \\ p_1 + p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Отримуємо $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$, $M = 8/3$.

Знайдемо рішення для гравця В. Оскільки оптимальними є стратегії B_1 і B_2 , інші стратегії можна не враховувати, отже $q_3 = 0$ і $q_4 = 0$. Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 3q_1 + 2q_2 &= M, \\ 2q_1 + 4q_2 &= M, \\ q_3 + q_4 &= 1. \end{aligned}$$

Отже, оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 та A_2 з імовірностями $2/3$ та $1/3$ відповідно. Ціне гри M визначають підстановкою p_1 та p_2 у рівняння прямої B_3 або B_4 . Отримуємо $q_1 = 2/3$, $q_2 = 1/3$, $M = 8/3$ – ціна гри.

Рішення гри – змішані стратегії $P = (2/3, 1/3)$, $Q = (2/3, 1/3, 0, 0)$.

Робота в модулі *Game Theory*

1. Дані. Розглянемо приклад, взятий з табл. 5.1.

2. Максимум і Мінімакс (Maximin / Minimax)

Розглядаючи ігри, можна почати з пошуку максимуму та мінімаксу. Щоб знайти максимум для гравця А, треба в кожному рядку знайти найгірший (мінімальний) результат. Вони відображаються у таблиці результатів у стовпці з назвою *Row minimum* «Мінімум рядка» як -12 і -33 на рис. 5.2. Найкраще з них (з погляду гравця А) є -12, що є максимумом мінімумів, або *максиміном*.

Example Solution							
	Col strat1	Col strat2	Col strat3	Col strat4	Col strat 5	Row Minimum	Maximin
Row strategy 1	10	-12	34	75	67	-12	-12
Row strategy 2	38	57	96	28	-33	-33	
Column Maximum	38	57	96	75	67		
Minimax	38						
-12 <= value <= 38							

Рис. 5.2. Таблиця результатів пошуку максимуму та мінімаксу

Щоб визначити *мінімакс* для гравця В, у кожному стовпці слід знайти найгірші варіанти (максимальні значення, оскільки В платить). Вони відображаються в рядку з позначкою *Column Maximim* «Максимум стовпця» і становлять 38, 57, 96, 75 та 67. Мінімакс є найкращим (найменшим) з них, тобто 38.

Значення гри знаходиться між максимумом і мінімаксом, тобто від -12 до 38.

3. Рішення (Results) у змішаних стратегіях

Рішення для цього прикладу показано на рис. 5.3.

	Col strat1	Col strat2	Col strat3	Col strat4	Col strat 5	Row Mix
Row strategy 1	10	-12	34	75	67	.5325
Row strategy 2	38	57	96	28	-33	.4675
Column Mix--->	0	.5917	0	0	.4083	
Value of game (to row)	20.2544					

Рис. 5.3. Таблиця результатів у змішаних стратегіях

Row Mix (змішані стратегії рядків – гравця А) – вказує ймовірності застосування стратегій відповідних рядків.

Column Mix (змішані стратегії стовпців – гравця В) – вказує ймовірності застосування стратегій, зазначених у відповідних стовпцях.

Value of game «Ціна гри» – ціна гри у змішаних стратегіях.

З отриманих результатів можна описати *рішення гри* таким чином. Гравець А повинен грати першу стратегію 53.25 % часу, а другу стратегію – 46.75 % часу. Гравець В повинен грати другу стратегію 59.17 % часу і п'яту стратегію в 40.83 % випадків і ніколи не грати стратегії 1, 3 або 4-ту. Якщо вони дотримуються цих комбінацій, (очікувана) цінність гри полягає в тому, що гравець В буде платити гравцю А 20.2544 г.о. Іншими словами, якби вони грали цю гру велику кількість разів, дотримуючись своїх оптимальних стратегій, виграші / програші становили б (-12, 67, 57, -33) і в середньому – 20.2544 г.о.

4. Очікувані цінності для гравця А (Row's Expected Values)

На рис. 5.4 показано очікувані значення виграшу для кожної зі стратегій гравця А.

Column's Optimal Mix «Оптимальні змішані стратегії стовпців» – ймовірності оптимальних стратегій для гравця В.

За рядками таблиці – очікуваний виграш гравця А у випадку застосування ним відповідної стратегії для кожної стратегії гравця В.

Row's Expected Values						
Example Solution						
	Col mix 1 * cell payoff	Col mix 2 * cell payoff	Col mix 3 * cell payoff	Col mix 4 * cell payoff	Col mix 5 * cell payoff	Expected Value (row sum)
Column's Optimal Mix	0	.5917	0	0	.4083	
Row strategy 1	0	-7.1006	0	0	27.355	20.2544
Row strategy 2	0	33.7278	0	0	-13.4734	20.2544
Value of game (to row)						20.2544

Рис. 5.4. Таблиця очікуваних цінностей для гравця А

Expected Values (Row sum) (очікувана цінність, сума по рядках) – сумарне (за всіма стратегіями гравця В) значення очікуваного виграшу гравця А.

Оскільки гравець А має використовувати обидві стратегії, очікувані значення є однаковими та відповідають очікуваній цінності гри (*Value of game*).

5. Очікувані цінності для гравця В (*Column's Expected Values*)

Аналогічно, якщо гравець В грає стратегії 2 або 5-ту, він досягне значення гри. Однак якщо В вибирає стратегії 1, 3 або 4-ту, він заплатить більше, ніж ціна гри, як показано на рис. 5.5.

Column's Expected Values						
Example Solution						
	Optimal Row Mix	Col strat1	Col strat2	Col strat3	Col strat4	Col strat 5
Row 1 mix * cell payoff	.5325	5.3254	-6.3905	18.1065	39.9408	35.6805
Row 2 mix * cell payoff	.4675	17.7633	26.645	44.8757	13.0888	-15.426
Expected Value (Col sum)		23.0888	20.2544	62.9823	53.0296	20.2544
Value of game (to row)	20.2544					

Рис. 5.5. Таблиця очікуваних цінностей для гравця В

Optimal Row Mix «Оптимальні змішані стратегії стовпців» – оптимальні стратегії (їх імовірності) для гравця В.

Expected Values (Col sum) «Очікувана цінність, сума по стовпцях» – сумарне (для двох стратегій гравця А) значення очікуваного програшу для кожної стратегії В.

6. Графічне розв'язання (*Graph*)

Побудова графіка є можливою, якщо один або обидва гравці мають не більше двох стратегій (рис. 5.6).

Змініть вихідні дані: залиште в одного із гравців дві корисні стратегії (ймовірність яких не дорівнює нулю), інші рядки (або стовпці) видаліть із таблиці вихідних даних і побудуйте графік.

Example Row's graph vs Column's Strategies

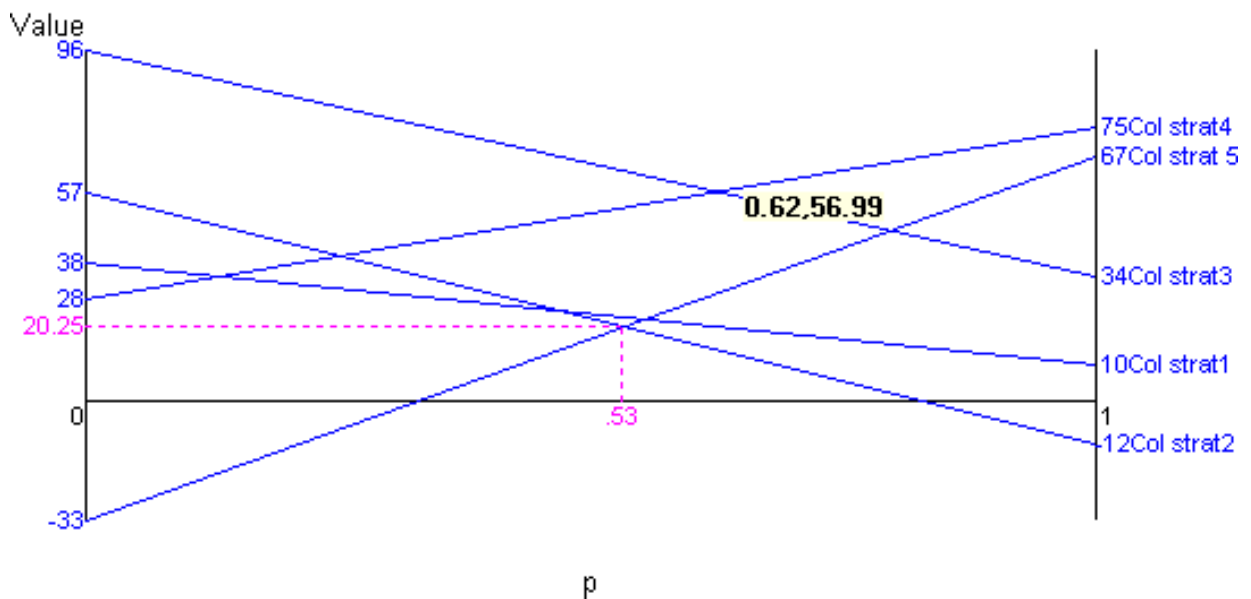


Рис. 5.6. Розв'язання матричної гри графічним методом

Звіт з лабораторної роботи має містити:

- таблицю вихідних даних;
- таблицю «Максимін і Мінімакс» (*Maximin / Minimax*). У висновку слід зазначити відсутність або наявність сідлової точки та вказати інтервал ціни гри;
- таблицю результатів у змішаних стратегіях (*Results*). У висновку слід записати вектори змішаних стратегій обох гравців та вказати ціну гри;
- таблиці очікуваних значень для гравців А (*Row's Expected Values*) та В (*Column's Expected Values*). У висновку слід вказати вигреш / програш при неоптимальних стратегіях гравців;
- графічне розв'язання. Якщо у вихідних даних в обох гравців більше двох стратегій, слід видалити неоптимальні в одного з гравців (залишити дві). У висновку необхідно розкрити значення, що виділені червоним кольором на осях графіка.

У кінці роботи слід сформулювати *загальний висновок*, в якому описати розподіл стратегій (ймовірності для обох гравців) і ціну гри. Приклад висновку надано як опис рішення у п.3.

Вихідні дані

Варіант 1

Банк А планує вивести на ринок новий фінансовий продукт і розглядає п'ять різних варіантів його просування (A₁–A₅). Конкурентний банк В може діяти двома способами:

В₁ – швидко відповісти запуском у виробництво аналогічного продукту;

В₂ – зайняти вичікувальну позицію, інвестуючи у вже наявні продукти. Очікувані виграші банку А (у млн грн) наведено в таблиці:

Стратегії А	Стратегії В	
	В ₁	В ₂
А ₁	2	6
А ₂	4	3
А ₃	1	8
А ₄	5	3
А ₅	3	4

Варіант 2

Компанія А (виробник смартфонів) розглядає три стратегії розвитку:

А₁ – запуск у виробництво бюджетної моделі; А₂ – запуск виробництва флагманської моделі; А₃ – розвиток лінійки планшетів.

Конкурент В може обрати:

В₁ – агресивну рекламу; В₂ – зниження цін; В₃ – інвестиції в післяпродажний сервіс.

Очікувані прибутки компанії А (у млн \$):

Стратегії А	Стратегії В		
	В ₁	В ₂	В ₃
А ₁	2	5	8
А ₂	7	6	10
А ₃	12	10	8

Варіант 3

Компанія А визначає стратегію запуску у виробництво нового продукту:

А₁ – енергетичний напій; А₂ – безалкогольний мікс.

Споживачі (гравець В) можуть виявити інтерес до:

В₁ – смаку «класичний»; В₂ – смаку «тропічний»; В₃ – смаку «ягідний»; В₄ – низькокалорійної версії; В₅ – преміальної лінійки.

Матриця прибутків (млн \$):

Стратегії А	Стратегії В				
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
А ₁	2	4	6	4	7
А ₂	6	3	3	5	1

Варіант 4

Компанія А (виробник) розглядає п'ять можливих стратегій виходу на ринок (A₁–A₅).

Компанія В (конкурент) може обрати один із двох варіантів дій (В₁ або В₂):

В₁ – агресивна стратегія (цінова війна, активний маркетинг);

В₂ – поміркована стратегія (утримання ринку без значних витрат).

Результати вибору стратегій для компанії А (очікуваний прибуток у млн \$) задаються такою матрицею виграшів:

Стратегії А	Стратегії В	
	В ₁	В ₂
A ₁	7	6
A ₂	4	0,5
A ₃	2	5
A ₄	5	1
A ₅	3	4

Варіант 5

Компанія А планує оптимізувати доставку і може обрати:

A₁ – залізничні перевезення; A₂ – автотранспорт; A₃ – авіадоставку.

Конкурент В обирає спосіб конкурентної боротьби:

В₁ – зниження тарифів;

В₂ – підвищення швидкості доставки;

В₃ – інвестиції у клієнтський сервіс.

Очікувані виграші компанії А (у млн грн):

Стратегії А	Стратегії В		
	В ₁	В ₂	В ₃
A ₁	2	5	8
A ₂	7	6	10
A ₃	12	10	8

Варіант 6

Стартап А розробляє новий софт і може обрати:

A₁ – модель SaaS з підпискою;

A₂ – разовий продаж ліцензій;

A₃ – «фріміум-модель» із платними розширеннями.

Конкурент В реагує так:

В₁ – виводить власний аналогічний продукт;

В₂ – знижує ціни на свої послуги;

В₃ – посилює партнерські програми.

Очікувані прибутки стартапу А (у млн \$):

Стратегії А	Стратегії В		
	В ₁	В ₂	В ₃
А ₁	2	8	7
А ₂	3	7	4
А ₃	6	5	3

Варіант 7

Компанія А розглядає п'ять моделей авто для випуску:

А₁ – компактний електромобіль; А₂ – седан; А₃ – кросовер; А₄ – міні-вен; А₅ – спорткар.

Конкурент В може:

В₁ – вийти на ринок із бюджетною моделлю;

В₂ – зробити ставку на преміум-клас.

Матриця прибутків (млн \$):

Стратегії А	Стратегії В	
	В ₁	В ₂
А ₁	2	6
А ₂	3	6
А ₃	8	0
А ₄	2	5
А ₅	3	4

Варіант 8

Компанія А обирає формат просування турів:

А₁ – масову рекламу через соцмережі;

А₂ – партнерство з великими турагентами.

Клієнти (гравець В) можуть надавати перевагу різним напрямам:

В₁ – морські курорти; В₂ – гірськолижні тури; В₃ – культурні подорожі;

В₄ – екотуризм; В₅ – міські вікенди.

Матриця прибутків (млн грн):

Стратегії А	Стратегії В				
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
А ₁	6	5	4	6	7
А ₂	2	3	7	3	4

Варіант 9

Фермерське господарство А вирішує, яку культуру вирощувати:

А₁ – пшеницю; А₂ – кукурудзу; А₃ – сою; А₄ – соняшник; А₅ – овочі.

Покупець (гравець В) може орієнтуватися на два ринки:
 V_1 – внутрішній ринок; V_2 – експорт.
 Матриця прибутків (млн грн):

Стратегії А	Стратегії В	
	V_1	V_2
A_1	9	5
A_2	6	8
A_3	4	10
A_4	7	6
A_5	8	6

Контрольні запитання

1. Якими правилами можна описати гру?
2. Розкрийте необхідні умови гри.
3. Що являє собою стратегія гри?
4. Що являє собою оптимальна стратегія?
5. Якій умові має задовольняти гра з нульовою сумою?
6. Які дані містяться у платіжній матриці?
7. Розкрийте поняття «рішення гри».
8. Що являє собою чиста стратегія?
9. Чим відрізняються одна від одної нижня і верхня ціна гри?
10. Якій умові має задовольняти сідлова точка гри?
11. Якого результату прагнуть гравці А і В?
12. Охарактеризуйте змішану стратегію.
13. За якої умови використовують змішані стратегії?
14. Які стратегії називають корисними?
15. Як співвідносяться між собою величина виграшу та величина програшу для оптимальних стратегій?
16. Які стратегії є наявними у змішаній стратегії (корисні / безкорисні)?
17. Як середній виграш співвідноситься з ціною гри?
18. Що являє собою ціна гри (яким є виграш)?
19. Якою є система координат графічного методу?
20. Як визначають корисні стратегії в разі застосування графічного методу?
21. Де розташоване значення ціни гри на графіку в разі застосування графічного методу?
22. Як визначають область допустимих значень для гравця А або В у разі застосування графічного методу?
23. Який метод застосовують для розв'язання гри у змішаних стратегіях будь-якої розмірності?
24. Як розраховують очікувані значення для гравця А або В?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Васильєва, Л. В. Математичні методи дослідження операцій : посіб. для студ. вищих навчальних закладів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Л. В. Васильєва, М. П. Богдан. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – 144 с.
2. Вовк, В. М. Математичні методи дослідження операцій в економіко-виробничих системах : монографія / В. М. Вовк. – Львів : Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. – 622 с.
3. Малярець, Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум. В 2 ч. Ч. 1 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедева, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 169 с.
4. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посіб. / уклад. : Я. Б. Сікора, А. Й. Щехорський, Б. Л. Якимчук. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. – 148 с.
5. Павленко, В. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень / В. Павленко, А. Тимошенко, О. Бескровний. – Київ : Університет «Україна», 2019. – 420 с.
6. Панченко, Н. Г. Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень : підручник. Ч. 1 / Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко. – Харків : УкрДУЗТ, 2015. – 280 с.
7. Ульяновченко, О. В. Дослідження операцій в економіці : підручник / О. В. Ульяновченко. – Суми : Вид-во «Довкілля», 2010. – 594 с.
8. Taha, H. A. Operations research: an introduction / H. A. Taha. – 10th ed. – Upper Saddle River : Pearson Prentice Hall, 2003. – 833 p.
9. Weiss, H. J. POM-QM v. 3 for Windows manual / H. J. Weiss. – Upper Saddle River : Prentice Hall, 2007. – 222 p.

Навчальне видання

Малєєва Ольга Володимирівна

Малєєва Юлія Анатоліївна

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ БІЗНЕС-РІШЕНЬ
У СЕРЕДОВИЩІ РОМ QM**

Редактор К. В. Хорошилова

Зв. план, 2026

Підписано до видання 09.06.2026

Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 3,94. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17
<http://www.khai.edu>

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001