Т. В. Рвачова

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»

Т. В. Рвачова

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2026

УДК 519.86:336(075.8)
Р29

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
д-р техн. наук, проф. В. О. Дорошенко

Рвачова, Т. В.
Р29 Математичні моделі фінансової математики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. В. Рвачова. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т «Харків. авіац. ін-т», 2026. – 39 с.

ISBN 978-966-996-110-5

Розглянуто основні поняття й методи фінансової математики: різні методи нарахування відсотків, потоки платежів та їх узагальнювальні характеристики, кредитні розрахунки, характеристики ефективності виробничих інвестицій, операції з цінними паперами. Стисло описано поняття опціону.

Для здобувачів освіти вищих навчальних закладів, що вивчають курс «Фінансова математика».

Бібліогр.: 5 назв

УДК 519.86:336(075.8)

© Рвачова Т. В., 2026
© Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», 2026

ISBN 978-966-996-110-5

1. ПРОСТІ ВІДСОТКИ

Відсотки називають **простими**, якщо базою для їх нарахування є початкова сума P (весь термін дії договору).

Формула нарощення за простими відсотками має вигляд

$$S = P(1+ni), \tag{1.1}$$

де P – початкова сума грошей; i – відсоткова ставка; n – термін користування кредитом у періодах нарахування; S – нарощена сума. Величину $1+ni$ називають множником нарощення.

Практика нарахування простих відсотків. Нехай i – річна відсоткова ставка, t – термін користування кредитом у днях $(t = t_2 - t_1)$, k – кількість днів на рік. Тоді

$$S = P\left(1+\frac{t}{k}i\right). \tag{1.2}$$

Якщо $k = 365$ днів, то відсоток називають точним, якщо $k = 360$ (12·30), – комерційним, або звичайним. Величину t теж обчислюють різними способами: або точно $t = t_2 - t_1$, або наближено (по 30 днів у кожному місяці). Відповідно до цього існують британський $\left(\frac{365}{365}\right)$, германський $\left(\frac{360}{360}\right)$ і французький $\left(\frac{365}{360}\right)$ способи обчислення за формулою (1.2).

Операція нарощення – розрахунок нарощеної суми S за початковою сумою P .

Операція дисконтування – розрахунок початкової суми P за нарощеною сумою S.

Види дисконтування:

1. **Математичне дисконтування** (з урахуванням відсоткової ставки i)

$$P = \frac{S}{1+in}, \tag{1.3}$$

де S – номінальна вартість векселя; n – термін від дати обліку до дати погашення; P – сума, яку банк платить під час обліку векселя.

2. **Банківський облік** (з урахуванням дисконтної ставки d)

$$P = S(1-nd). \tag{1.4}$$

Векселем називають письмове зобов'язання сплатити певну суму грошей у встановлений термін. Вексель видається позичальником (векселедавцем) кредитору (векселеутримувачу).

Під час **обліку векселя** (його дострокового викупу у кредитора) [4, 5] сплачену суму P визначають одним зі способів – (1.3) або (1.4).

Прості змінні ставки. Нехай $i_1, i_2,\ldots, i_k$ – значення відсоткової ставки, що змінюється в часі; $n_1, n_2,\ldots, n_k$ – відповідні періоди. Тоді нарощена сума

$$S = P(1+n_1i_1+\cdots+n_ki_k).$$

Реінвестування – неодноразове послідовне повторення нарощення в межах заданого загального терміну. При цьому нарощена сума

$$S = P(1+n_1i_1)(1+n_2i_2)...(1+n_ki_k),$$

де $n_1,n_2,\ldots,n_k$ – терміни між реінвестиціями; k – кількість реінвестицій.

Якщо ставки й терміни не змінюються в часі, то $S = P(1+ni)^k$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Капітал 200 тис. грн укладено в банк на вісім місяців під 12 % простих річних. Знайти суму на рахунку наприкінці терміну.

Розв'язання:

$$S = P(1+in) = 200\left(1+0{,}12\frac{8}{12}\right) = 200\cdot 1{,}08 = 216 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 1.2. Капітал 200 тис. грн укладено в банк на 80 днів під 12 % простих річних. Знайти величину вкладу через 80 днів: а) точним методом; б) банківським методом.

Розв'язання:

а) $S = P(1+ni) = 200\left(1+0{,}12\frac{80}{365}\right) = 205{,}260$ тис. грн;

б) $S = P(1+ni) = 200\left(1+0{,}12\frac{80}{360}\right) = 205{,}330$ тис. грн.

Приклад 1.3. Початковий капітал дорівнює 30 млн грн. Знайти нарощену суму через п'ять місяців за простими ставками: а) річною 30 %; б) місячною 3 %; в) квартальною 5 %.

Розв'язання:

а) $S = 30\left(1+0{,}3\frac{5}{12}\right) = 33{,}75$ млн грн;

б) $S = 30(1+5\cdot 0{,}03) = 34{,}5$ млн грн;

в) $S = 30\left(1+0{,}05\cdot 5\frac{1}{3}\right) = 32{,}5$ млн грн (місяць дорівнює $\frac{1}{3}$ кварталу).

Приклад 1.4. Векселеутримувач подав для обліку вексель на 5 млн грн з терміном погашення 28.09.10. Вексель подано 13.09.10. Яку суму отримує векселеутримувач, якщо: а) вексель погашається за

дисконтною ставкою $d = 0,75$; б) вексель погашається за відсотковою ставкою $i = 0,75$?

Розв'язання:

а) $P = S(1 - nd) = 5\left(1 - \frac{15}{360}0,75\right) = 4,844$ млн грн;

б) $P = \frac{S}{1 + in} = \frac{5}{1 + 0,75\frac{15}{360}} = 4,848$ млн грн.

Приклад 1.5. Суму 100 тис. грн поклали 1 січня на місячний депозит під 20 % річних. Якою буде нарощена сума, якщо операцію повторювали три рази? Розрахунок виконати за точними й банківськими відсотками.

*Розв'язання***.** За банківськими відсотками

$$S = 100\left(1 + \frac{30}{360}0,2\right)^3 = 105,084 \text{ тис. грн,}$$

за точними –

$$S = 100\left(1 + \frac{31}{365}0,2\right)\left(1 + \frac{28}{365}0,2\right)\left(1 + \frac{30}{365}\right) = 105,013 \text{ тис. грн.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Фірма взяла позику в банку на розширення виробництва в сумі 1 млн грн під 20 % простих річних з 20.01 по 05.10 включно. Яку суму фірма має повернути наприкінці терміну? Визначити коефіцієнт нарощення. Задачу розв'язати за допомогою двох методів: а) точного; б) банківського.

1.2. Через 200 днів після підписання договору фірма зобов'язується сплатити 300 тис. грн. Кредит видано під 16 % простих річних. Якою є початкова сума кредиту?

1.3. Між двома внесками різниця дорівнює 500 грн. Більшу суму внесено на шість місяців за ставкою 5 %, а меншу – на три місяці за ставкою 6 %. Відсотки за першим внеском є вдвічі більшими. Знайти величину внесків.

1.4. Визначити множник нарощення за 2,5 року, якщо за контрактом передбачено такий порядок нарахування простих відсотків: перший рік – 16 % річних, а в кожному наступному півріччі ставка підвищується на 1 %.

1.5. Початкова сума дорівнює 10 тис. грн. Визначити нарощену суму через рік, якщо в першому півріччі річна ставка простих відсотків дорівнює 18 %, а в другому – 15 %.

1.6. Через скільки років подвоїться сума вкладу, якщо нараховується проста ставка 15 %?

1.7. 10 квітня обліковано вексель з терміном погашення 9 липня того ж року. Обчислити номінальну вартість векселя, якщо відсоткова ставка дисконтування – 5 % річних, а за вексель отримано 4 000 грн.

1.8. Скільки днів знадобиться, щоб 5 000 грн «заробили» 100 грн, якщо вони інвестуються за простою ставкою 8 %?

1.9. Різниця між номінальними вартостями векселів становить 400 тис. грн. Один з них (з більшою номінальною вартістю) обліковано за один квартал до дати погашення (дисконтна ставка – 24 %), а інший – за пів року до дати погашення (дисконтна ставка – 12 %). При цьому за перший вексель отримано суму, у три рази більшу, ніж за другий. Знайти номінальну вартість кожного векселя.

1.10. Нараховується проста відсоткова ставка: перше півріччя – 17 %, третій квартал – 14 %; четвертий квартал – 16 %; наступний рік – 18 %. Чому дорівнює середня відсоткова ставка за весь термін?

1.11. Визначити початкову суму вкладу, на який нараховувалися відсотки за простою ставкою 16 % річних за період два роки і два місяці, якщо після закінчення терміну на рахунку була сума 260 000 грн.

1.12. Вкладник уніс до банку 500 000 грн. Якою буде нарощена за три місяці сума вкладу, якщо за перший місяць нараховуються 6 % річних, а кожного наступного місяця відсоткова ставка збільшується на 0,2 % з одночасною капіталізацією відсоткового доходу?

1.13. У банк було покладено 1 500 грн. Через один рік і три місяці на рахунку виявилося 1 631,25 грн. Скільки простих процентів на рік виплачує банк?

1.14. Вкладник уніс у банк під певний відсоток 20 тис. грн. Через рік він зняв з рахунку половину відсоткової надбавки, а основний вклад і другу половину надбавки залишив у банку. Ще через рік у вкладника на рахунку виявилося 26 400 грн. Яким є відсоток річних за вкладом у цьому банку?

1.15. Пенсіонер уніс 5 000 грн на терміновий пенсійний вклад на пів року під 14 % річних. Яку суму буде накопичено наприкінці терміну і який відсоток він зможе зняти? Чому дорівнює коефіцієнт нарощення?

1.16. Знайти величину дисконту від суми заборгованості 30 000 грн за пів року за простою дисконтною ставкою 3 % на місяць.

2. СКЛАДЕНІ ВІДСОТКИ

Відсотки називають **складеними**, якщо відсоткові гроші періодично додаються до основної суми і ця нова сума використовується як основна для наступного часового періоду (капіталізація відсотків).

Формула нарощення за складеними відсотками має вигляд

$$S = P(1+i)^n, \qquad (2.1)$$

де P – початковий капітал; i – відсоткова ставка; n – термін дії договору (у періодах нарахування); S – нарощена сума.

Номінальною відсотковою ставкою [4] називають річну відсоткову ставку j, при якій відсотки нараховуються m разів на рік за складеною ставкою $\frac{j}{m}$. При цьому нарощена сума за n років визначається формулою

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.2)$$

Ефективною відсотковою ставкою називають річну складену відсоткову ставку i_{ef} складених відсотків, нарахування за якою дає такий же фінансовий результат, що й нарахування за номінальною ставкою j m разів на рік. Зв'язок між номінальною й ефективною ставками є таким:

$$i_{ef} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (2.3)$$

Мішаний спосіб нарахування відсотків описується рівністю

$$S = P(1+i)^{a}(1+bi), \qquad (2.4)$$

де a – кількість років; b – дробова частина року.

Облік за складеною ставкою відсотків також буває математичним і банківським:

1. При **математичному обліку**

$$P = \frac{S}{(1+i)^{n}}, \qquad (2.5)$$

якщо нарахування здійснюється один раз на рік за річною відсотковою ставкою i;

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}, \qquad (2.6)$$

якщо нарахування здійснюється m разів на рік за номінальною річною ставкою j.

2. При **банківському обліку** з дисконтуванням один раз на рік маємо

$$P = S(1-d)^{n}, \qquad (2.7)$$

де d – річна складена дисконтна ставка.

При дисконтуванні m разів на рік

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.8)$$

Аналогічно поняттю ефективної ставки відсотків уводиться поняття **ефективної дисконтної ставки**. При цьому

$$d_{ef} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}, \qquad (2.9)$$

де f – номінальна дисконтна ставка.

Формула нарощення за неперервним відсотком має вигляд

$$S = Pe^{n\delta}, \qquad (2.10)$$

де δ – ставка неперервних відсотків (сила зростання).

Формули переходу від неперервних відсотків до дискретних і навпаки мають вигляд

$$\delta = \ln(1+i);\ i = e^{\delta} - 1. \qquad (2.11)$$

Еквівалентні відсоткові ставки. Ставку i_1 назвемо еквівалентною ставці i_2, якщо застосування i_1 у конкретній фінансовій операції дає той самий фінансовий результат, що й застосування i_2.

Формули еквівалентності ставок отримують, прирівнявши відповідні множники нарощення:

1. Еквівалентність простої відсоткової і простої дисконтної ставок:

$$1 + ni_s = \frac{1}{1 - d_s n} \Rightarrow i_s = \frac{d_s}{1 - n d_s},\ d_s = \frac{i_s}{1 + n i_s}.$$

2. Еквівалентність простої і складеної відсоткових ставок:

$$1 + ni_s = (1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{1 + ni_s} - 1,\ i_s = \frac{1}{n}\left((1+i)^n - 1\right).$$

3. Еквівалентність складених ставок i та j:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1,\ j = m\left(\sqrt[m]{i+1} - 1\right).$$

4. Еквівалентність i та d:

$$i = \frac{d}{1-d},\ d = \frac{i}{1+i}.$$

Зазначимо, що в третьому й четвертому випадках, на відміну від першого й другого, термін не має значення.

Фінансова еквівалентність зобов'язань. Задача зміни умов контракту. Еквівалентними вважаються такі платежі, які після зведеня до однієї дати (базової, focal date) виявляються однаковими.

Розв'язання загальної задачі зміни умов контракту базується на принципі еквівалентності платежів. Метод полягає у виведенні відповідного рівняння та його розв'язанні.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Клієнт зробив внесок у банк у сумі 2,5 тис. грн під 9,5 % річних. Через два роки і 270 днів він вилучив внесок. Визначити суму, яку він отримав із застосуванням: а) складених відсотків; б) мішаного методу.

Розв'язання:

а) $S = 2{,}5 \cdot 1{,}095^{\frac{1000}{365}} = 3{,}2057$ тис. грн;

б) $S = 2{,}5(1{,}095)^2\left(1+\frac{270}{365}0{,}095\right) = 3{,}2082$ тис. грн.

Приклад 2.2. Якою сумою стане через шість років борг, який дорівнює 10 тис. грн, при збільшенні за складеною ставкою 5,5 %? Чому дорівнюють відсоткові гроші?

Розв'язання:

$S = 10000(1+0{,}055)^5 = 13070,\ I = 3070.$

Приклад 2.3. Визначити, яке розміщення грошей на термін шість місяців є вигіднішим: а) під просту ставку 30 % річних; б) під складену ставку 29 % річних при щоквартальному нарахуванні.

Розв'язання:

а) $S = P\left(1+0{,}3\frac{1}{2}\right) = 1{,}15\,P;$

б) $S = P\left(1+\frac{0{,}29}{4}\right)^{4\cdot 0{,}5} = 1{,}15026\,P.$

Отже, спосіб *б* є вигіднішим.

Приклад 2.4. Два платежі 1 і 0,5 млн грн з термінами сплати відповідно 150 і 180 днів об'єднуються в один з терміном 200 днів. Сторони погодилися на застосування простої ставки 20 %. Знайти розмір консолідованого платежу.

Розв'язання. Консолідований платіж

$$S_0 = \left(1+\frac{50}{365}0{,}2\right) + 0{,}5\left(1+\frac{20}{365}0{,}2\right) = 1{,}53287 \text{ млн грн.}$$

Приклад 2.5. Платежі 1 і 2 млн грн з термінами сплати через два і три роки відповідно об'єднуються в один з терміном 2,5 року. При консолідації

використовується складена ставка 20 %. Знайти розмір консолідованого платежу.

Розв'язання. Консолідований платіж

$$S_0 = \sqrt{(1+0,2)} + \frac{2}{\sqrt{(1+0,2)}} = 2,921187 \text{ млн грн.}$$

Приклад 2.6. Суми 10, 15 і 20 млн грн мають бути виплачені через 50, 80 і 150 днів відповідно. Сторони погодилися замінити їх одним платежем 50 млн грн за простою ставкою 10 %. Визначити термін виплати.

Розв'язання. З рівняння еквівалентності

$$50(1+0,1n_0)^{-1} = 10\left(1+0,1\frac{50}{365}\right)^{-1} + 15\left(1+0,1\frac{80}{365}\right)^{-1} + 20\left(1+0,1\frac{150}{365}\right)^{-1}$$

отримаємо $n_0 = 1,4276$ року, тобто 521 день.

Приклад 2.7. Дві суми 10 і 5 млн грн мають бути виплачені 1 листопада поточного і 1 січня наступного року. Сторони погодилися переглянути порядок виплат: боржник 1 грудня виплачує 6 млн грн, а залишок гаситься 1 березня. Знайти суму залишку за умови, що перерахунок здійснюється за ставкою простих відсотків 20 %. Розглянути два випадки: а) базова дата 1 січня; б) базова дата 1 березня.

Розв'язання:

а) у випадку базової дати 1 січня рівняння має вигляд

$$5 + 10\left(1+\frac{61}{365}0,2\right) = 6\left(1+\frac{31}{365}0,2\right) + S_0\left(1+\frac{59}{365}0,2\right)^{-1},$$

розв'язавши яке, одержимо $S_0 = 9,531$ млн грн;

б) у випадку базової дати 1 березня залишок дорівнює 9,523 млн грн.

Видно, що у випадку зведення за ставкою простих відсотків вибір базової дати впливає на результат.

Приклад 2.8. Існує зобов'язання сплатити 100 тис. грн через п'ять років. Сторони погодилися змінити умови погашення таким чином: через два роки сплачується 30 тис. грн, а борг, що залишився, – за чотири роки після першої сплати. Знайти суму боргу, який залишився після першої сплати, якщо розрахунок виконується за ставкою складених відсотків 10 %.

Розв'язання. Зведемо все на дату невідомого платежу:

$$S_0 + 30 \cdot 1,1^4 = 100 \cdot 1,1,$$

звідки $S_0 = 66,077$ тис. грн.

Зазначимо, що в цьому прикладі вибір базової дати не впливає на результати розрахунку, оскільки застосовуються складені відсотки.

Задачі для самостійного розв’язання

2.1. Кредит у сумі 100 000 грн видано на два роки, відсотки нараховуються за річною номінальною ставкою 18 %. Визначити остаточну суму боргу, якщо:

а) відсотки нараховуються один раз на рік;

б) відсотки нараховуються наприкінці кожного півріччя;

в) відсотки нараховуються щоквартально;

г) відсотки нараховуються щомісячно.

Результати порівняти й зробити висновки.

2.2. За скільки років подвоїться сума боргу, якщо нараховується складена щоквартальна ставка 15 %?

2.3. Номінальна ставка складених відсотків (нараховується щоквартально) дорівнює 17 %. Знайти ефективну відсоткову ставку.

2.4. Фермер купує товари вартістю 10 млн грн. Він сплатив 2 млн грн одразу і сплатить на 5 млн грн більше за три місяці. Якщо на суму несплаченого балансу нараховується номінальна ставка 6 % щомісячно, то якою має бути остаточна сплата через шість місяців?

2.5. Відсотки нараховуються за номінальною ставкою 4 % чотири рази на рік. Підписано боргове зобов’язання сплатити 12 млн грн через чотири роки і 15 млн грн через вісім років. Яка одноразова сплата через п’ять років ліквідує всю заборгованість?

2.6. Визначити, яке розміщення грошей на термін дев’ять місяців є вигіднішим:

а) під 20 % простих річних;

б) під складену ставку 19 % річних при щоквартальному нарахуванні відсотків.

2.7. Фірма дала в кредит дочірній фірмі 500 000 грн терміном на три роки з щорічним нарахуванням відсотків. Під який відсоток потрібно дати кредит, щоб повернути 600 000 грн?

2.8. Банк пропонує кредити на три роки із щоквартальним нарахуванням відсотків і на два роки із щомісячним нарахуванням відсотків. В обох випадках річна відсоткова ставка становить 20 %. Який кредит є вигіднішим для фірми? Порівняйте ефективні ставки в обох випадках.

2.9. Річна відсоткова ставка комерційного банку – 24 %. Нарахування відсотків – щомісячне. На який мінімальний термін клієнт має розмістити вклад 30 тис. грн, щоб нарощена сума становила не менше 35 тис. грн?

2.10. Розрахувати коефіцієнт нарощення вкладу під 15 % річних через один, два, три роки при щоквартальному й щомісячному нарахуванні відсотків.

2.11. Вексель номінальною вартістю 7 000 грн і терміном обігу два роки обліковано за чотири місяці до закінчення терміну його обігу за

складеною дисконтною ставкою 8 % річних. Знайти вартість векселя на момент його обліку.

3. ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ

Потоком платежів називають сукупність розподілених у часі сплат і надходжень [4].

Нарощеною сумою S потоку платежів називають зважену суму всіх платежів, де вагами є множники нарощення на кінцеву дату (повний термін дії платежів).

Сучасна величина A потоку платежів – сума всіх платежів потоку, дисконтованих на певний момент у минулому.

Ще однією характеристикою потоку платежів є **внутрішня норма прибутковості** (ВНП) q – таке значення ставки відсотка, при якому нарощена сума потоку надходжень дорівнює нарощеній сумі потоку видатків.

Фінансова рента, або **ануїтет,** – це потік платежів, усі елементи якого – додатні величини, а часові інтервали між послідовними платежами є сталими.

Загальна стала рента – послідовність p однакових платежів на рік (протягом усього терміну ренти) з m-разовим щорічним нарахуванням відсотків за однією й тією ж річною ставкою i.

Рента постнумерандо – рента, при якій сплати здійснюються наприкінці відповідного періоду.

Нарощена сума загальної сталої ренти постнумерандо (R – арифметична сума всіх платежів за рік):

$$S = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (3.1)$$

Сучасна вартість такої ренти визначається формулою

$$A = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} = \frac{R}{p}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (3.2)$$

Варіюючи m і p, отримаємо S і A для декількох окремих випадків.

1. Річна рента, нарахування один раз на рік ($p = m = 1$):

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \tag{3.3}$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.4}$$

2. Річна рента, нарахування m разів на рік ($p = 1$):

$$S = R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}; \tag{3.5}$$

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}. \tag{3.6}$$

3. Рента p-термінова, нарахування один раз на рік:

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}; \tag{3.7}$$

$$A = \frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}. \tag{3.8}$$

4. Рента p-термінова, $p = m$ (найчастіший на практиці випадок):

$$S = R\frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{pn} - 1}{i}; \tag{3.9}$$

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-pn}}{i}. \tag{3.10}$$

Для випадку неперервних відсотків (p-термінова рента)

$$S = \frac{R}{p}\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}; \tag{3.11}$$

$$A = \frac{R}{p}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}, \tag{3.12}$$

де δ – сила зростання ренти.

У разі використання **ренти пренумерандо** платежі здійснюються на початку кожного періоду, отже, кожний елемент ренти «працює» на один період більше. Для отримання S і A для ренти пренумерандо відповідні формули, які стосуються ренти постнумерандо, необхідно множити на $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$.

Вічна рента (perpetuity) – платежі, кількість яких є нескінченною. Теоретично ця рента сплачується протягом нескінченної кількості років.

Нарощена сума вічної ренти (як границя S коли $n \to \infty$) є нескінченно великою величиною. Проте **сучасна вартість вічної ренти** – скінченна величина:

$$A_{\infty} = \frac{R}{p} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \qquad (3.13)$$

Зокрема, для річної ренти у випадку нарахування один раз на рік маємо

$$A_{\infty} = \frac{R}{i}.$$

Змінна рента – рента, елементи якої змінюються відповідно до заданого правила.

1. **Рента зі сталим абсолютним приростом.** У цьому випадку послідовність платежів утворює арифметичну прогресію з різницею α:

$$R_1, R_1 + \alpha, R_1 + 2\alpha, \ldots.$$

Сучасна вартість і нарощена сума річної ренти постнумерандо ($p = 1, m = 1$) зі сталим абсолютним приростом α:

$$A = \frac{1-\gamma^n}{i}\left(R_1 + \frac{\alpha}{i}\right) - \frac{n\alpha\gamma^n}{i}, \qquad (3.14)$$

$$S = (1+i)^n A = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(R_1 + \frac{\alpha}{i}\right) - \frac{n\alpha}{i}, \qquad (3.15)$$

де γ – дисконтний множник, $\gamma = \frac{1}{1+i}$.

2. **Рента зі сталим відносним приростом.** Нехай задано p-термінову ренту постнумерандо з нарахуванням один раз на рік і k – темп зростання платежів за період, тобто

$$\frac{R_i - R_{i-1}}{R_{i-1}} = k.$$

Тоді сучасна вартість

$$A = R_1 \frac{1 - \frac{(1+k)^{np}}{(1+i)^n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - (1+k)},$$

а нарощена сума

$$S = R_1 \frac{(1+i)^n - (1+k)^{np}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - (1+k)}.$$

Стала неперервна рента – рента, у якій надходження платежів розглядається як неперервний процес. Для неперервної ренти з річною ставкою i $(m = 1)$ сучасна вартість і нарощена сума визначаються формулами

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{\ln(1+i)}, \tag{3.16}$$

$$S = \frac{R((1+i)^n - 1)}{\ln(1+i)}. \tag{3.17}$$

Якщо вважати, що відсотки також нараховуються неперервно з силою зростання δ, то, ураховуючи, що $1+i = e^{\delta}$, одержані формули можна переписати в такому вигляді:

$$A = \frac{R(1-e^{-n\delta})}{\delta}, \tag{3.18}$$

$$S = \frac{R(e^{n\delta} - 1)}{\delta}. \tag{3.20}$$

Неперервні змінні потоки платежів. Нехай потік платежів є неперервним та описується функцією

$$R_t = f(t).$$

Тоді нарощена сума

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt,$$

де δ – сила зростання (відсоткова ставка).

Аналогічно

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt.$$

Зокрема, при $R_t = R_0 + at$ (потік платежів, що змінюється лінійно)

$$A = (R_0 + \frac{a}{\delta})\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} - \frac{ane^{-\delta n}}{\delta}, \quad (3.21)$$

$$S = Ae^{\delta n}. \quad (3.22)$$

Для $R_t = f(t) = R_0 e^{qt}$ (**експоненціальне зростання платежів**, q – неперервний темп приросту платежів) маємо

$$A = \frac{R_0}{q-\delta}(e^{n(q-\delta)} - 1), \quad (3.23)$$

$$S = \frac{R_0}{q-\delta}(e^{nq} - e^{n\delta}). \quad (3.24)$$

Зауваження. У задачах зазвичай указано дискретний темп приросту k (в одиницю часу). Тоді $e^{nq} = (1+k)^n$, отже, $q = \ln(1+k)$.

Для **потоків платежів у схемі простих відсотків** існує поняття **стандартних узагальнювальних характеристик наступної й поточної вартостей потоку**. Це поняття базується на підсумовуванні наступних і поточних окремих платежів потоку. Для потоку $CF = \{(t_k, R_k), k = 1,...,n\}$ стандартні характеристики мають такий вигляд:

$$S_{ст} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1 + i(t - t_k)), \quad t \geq t_k,$$

де t – момент у майбутньому для всіх платежів;

$$A_{ст} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{1 + i(t_k - t_0)}, \quad t_0 \leq t_k,$$

де t_0 – момент у минулому.

Але в загальному випадку поняття фінансової еквівалентності у схемі простих процентів визначається особливостями вибраної схеми (моделі) нарахувань і вилучень.

1. **Модель мультипідрахунку**. У цій моделі потік

$$CF = \{(t_k, R_k), k = 1,...,n\}$$

розглядається як відкриття n накопичувальних рахунків у моменти часу t_k, і відповідно до цього наступна вартість потоку обчислюється як сума наступних вартостей цих рахунків:

$$S_{\text{мульт}} = S_{\text{ст}} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i(t-t_k)), \quad t \ge t_k$$

(у цьому випадку від'ємні елементи потоку вважаються кредитами).

2. **Комерційна модель**. Усі вкладення (надходження) і вилучення відносять до основного рахунку.

3. **Актуарна модель (правило США – US rule)**. Усі вилучення починають з відсоткового рахунку.

Величина A є **поточною вартістю** в момент $t \le t_k$ потоку $CF = \{(t_k, R_k), k = 1,...,n\}$ відносно ставки i, якщо майбутня вартість на момент t_n розширеного потоку $\overline{CF} = \{(t, -A), (t_k, R_k)\}$, обчислена відповідно до заданої моделі (актуарної, комерційної, моделі мультипідрахунку), дорівнює нулю.

Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1. Який термін потребується для накопичення 100 млн грн за умови, що внесок становить 1 млн грн щомісяця, а на накопичення нараховуються відсотки за ставкою 25 % річних?

Розв'язання. За умовою задачі

$$S = 100,\ p = 12,\ R = 12,\ i = 0,25,\ m = 1.$$

При $p \ne 1$ формула для терміну ренти набуває вигляду

$$n = \frac{\ln\left(\frac{Sp}{R}\left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)+1\right)}{m\ln(1+\frac{i}{m})} = \frac{\ln\left(100\left((1+0,25)^{\frac{1}{12}}-1\right)+1\right)}{\ln 1,25} = 4,7356 \text{ роки.}$$

Округливши термін до $n_1 = 5$ років, зменшимо відповідним чином R:

$$R = \frac{Sp\left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn_1}} = 10,977.$$

Отже, щомісячний внесок буде таким:

$$\frac{R}{p} = 0,914789 \text{ млн грн.}$$

Приклад 3.2. Планується протягом трьох років збільшувати випуск продукції на 1 млн грн щорічно. Базовий рівень випуску – 10 млн грн.

Необхідно визначити сумарний обсяг випуску з нарахованими відсотками. Сила зростання $\delta = 8\%$.

Розв'язання. Знаходимо $R_t = f(t) = 10 + t$, звідки $R_0 = 10,\ a = 1$.

Тоді

$$A = \left(10 + \frac{1}{0,08}\right)\frac{1 - e^{-0,24}}{0,08} - \frac{3e^{-0,24}}{0,08} = 30,5;$$

$$S = 30,5e^{0,24} = 38,773 \text{ млн грн.}$$

Приклад 3.3. Очікується, що приріст прибутків дорівнюватиме 5 % на рік. Якими є сучасна вартість і нарощена сума потоку прибутків, якщо $R_0 = 100$, $i = 0,07$, $n = 3$ роки?

Розв'язання. Підставимо дані задачі у формули (3.23), (3.24) для A і S. З урахуванням зауваження до цих формул і того, що $k = 0,05$, маємо

$$A = 291,5;\ S = 357,1.$$

Приклад 3.4. Нехай вкладник відкриває рахунок у сумі 1 000 грош. од. під 10 % простих річних. Якщо через рік він вносить додатково 1000 грош. од., то якою буде сума на рахунку через два роки?

Розв'язання. Тут можна застосувати модель мультипідрахунку:

$$S = 1000(1 + 2 \cdot 0,1) + 1000(1 + 0,1) = 2300.$$

Можна розглядати й один рахунок, розбивши його на основний і відсотковий:

Моменти часу	Основний рахунок	Відсотковий рахунок
0	1000	0
1	1000 + 1000	100
2	2000	100 + 200

Нарощена сума і в цьому випадку дорівнює 2300.

Приклад 3.5. Змінимо потік з попередньої задачі таким чином:

$$CF = \{(0, 1000), (1, -200)\}.$$

Знайти стан рахунку на кінець другого року, використовуючи комерційну й актуарну моделі.

Розв'язання:

1. Комерційна модель:

Моменти часу	Основний рахунок	Відсотковий рахунок
0	1000	0
1	1000 – 200	100
2	800	100 + 80

Сума на рахунку на кінець другого року дорівнює 980.

2. Актуарна модель:

Моменти часу	Основний рахунок	Відсотковий рахунок
0	1000	0
1	1000 – 100	100 – 100
2	900	90

У цьому випадку сума на рахунку на кінець другого року дорівнює 990.

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Батьки вирішили накопичити за 18 років на освіту дитини 50 000 грн. Банк забезпечує 6 % річних за вкладом. Скільки грошей треба вносити наприкінці кожного місяця?

3.2. Фірма має сплатити борг 300 млн грн щорічними платежами по 111,52 млн грн. Відсоткова ставка згідно з угодою між кредитором і фірмою становить 12 % річних. Визначити термін платежів.

3.3. Акціонерне товариство вирішило створити резервний фонд у сумі 600 млн грн. Внески в сумі 66,834 млн грн здійснюються наприкінці кожного року під річну відсоткову ставку 16 %. Протягом якого часу буде формуватися фонд?

3.4. На рахунок у банк вноситься щорічно постнумерандо сума 5 000 дол. під 5 % річних. Якою буде сума на рахунку через 10 років?

3.5. Розглядаються дві схеми вкладення грошей на п'ять років: на початку кожного року під 14 % річних або наприкінці кожного року під 18 % річних. Яка схема є вигіднішою?

3.6. Розглядаються два варіанти покупки помешкання: заплатити одразу 250 тис. грн або платити щомісячно по 800 грн протягом 10 років за ставкою 8 % річних. Яка схема є вигіднішою?

3.7. Яку суму треба покласти в банк сьогодні, щоб при щомісячних внесках по 500 грн і відсотковій ставці 12 % на рік через п'ять років накопичити суму 50 000 грн?

3.8. Ви вирішили накопичити в банку 300 000 грн на помешкання. Спочатку Ви внесли 50 000 грн і можете вкладати в банк щомісяця по

8 000 грн. Банк має річну відсоткову ставку 11 %. Протягом якого часу Вам доведеться накопичувати ці гроші? Протягом якого часу Ви накопичували б ці гроші вдома?

3.9. Платежі в сумі 300 тис. грн здійснюються наприкінці кожного року протягом чотирьох років. Ставка складених відсотків – 6 % річних. Знайти суму інвестицій на кінець терміну.

3.10. Створюється фонд, кошти до якого надходять у вигляді річної сталої ренти протягом шести років наприкінці року. Сума разового річного платежу – 30 тис. грн. На внески нараховуються 20 % річних. Знайти величину фонду в кінці терміну.

3.11. Знайти сучасну вартість річної ренти, якщо відсотки нараховуються за номінальною ставкою 12 % щомісячно, елемент ренти – 10 тис. грн, термін ренти – три роки. Сума боргу дорівнює 100 тис. грн. Уважається, що борг виплачується щорічно по 40 тис. грн. Визначити термін виплати боргу за складеною відсотковою ставкою 28 % річних.

3.12. За страховим договором виплачується допомога 5 млн грн готівкою або щоквартальний ануїтет терміном десять років, еквівалентний цій сумі за номінальною ставкою 4 % (нарахування чотири рази на рік). Знайти щоквартальні платежі ануїтету.

3.13. Наприкінці кожного кварталу в банк на депозит здійснюють внески по 30 тис. грн. Банк нараховує 8 % річних щоквартально. Якою буде сума на рахунку через сім років, якщо в початковий момент на рахунку було 80 тис. грн?

3.14. Визначити розмір щорічних внесків у фонд підприємства, які роблять протягом восьми років наприкінці року, якщо відомо, що на ці внески будуть нараховуватися складені відсотки за ставкою 12 % річних і необхідно накопичити 1 млн грн.

3.15. Визначити розмір однакових щорічних внесків, які необхідно робити для погашення за три роки боргу в сумі 300 тис. грн, якщо ставка за складеними відсотками 16% річних.

3.16. Визначити розмір щорічних внесків, які роблять наприкінці кожного року для погашення через три роки поточної заборгованості 450 тис. грн, якщо відсотки нараховуються неперервно при силі зростання 10 %.

3.17. Об’єднуються три звичайні річні ренти з термінами сім, чотири і дев’ять років. Члени рент є однаковими, і їх величина дорівнює 1 000 грн. Відсоткові ставки також є однаковими (i = 8 %). Член консолідованої ренти встановлено в розмірі 3 000 грн, відсоткова ставка зберігається. Визначити термін нової ренти.

4. КРЕДИТНІ РОЗРАХУНКИ

Нехай D – величина займу; n – термін погашення; i – відсоткова ставка; $\{y_k\}$ – потік платежів з погашення кредиту. Нехай виплати y_k здійснюються наприкінці k-го року. Подамо їх у вигляді

$$y_k = D_k + I_k,\ \sum_{k=1}^{n} D_k = D.$$

Тоді при будь-якому виборі D_k

$$I_k = i\left(D - \sum_{l=1}^{k-1} D_l\right),$$

тобто I_k – відсоток на непогашений залишок на початок k-го року.

Найбільш поширені схеми погашення кредиту:

1. **Однакові відсоткові виплати:** борг погашається разово (наприкінці терміну), а відсотки – у розстрочку.

При цьому

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_{n-1} = 0;\quad D_n = D,$$

отже,

$$I_k = i(D - 0) = iD.$$

2. **Погашення боргу однаковими сумами:** сума боргу ділиться порівну між усіма щорічними платежами, тобто

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_n = \frac{D}{n},$$

отже,

$$I_k = i\left(D - \frac{D}{n}(k-1)\right) = iD\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

3. **Однакові термінові виплати:**

$$y_k = y,\quad k = 1,\ldots,n.$$

У цьому випадку

$$y = \frac{iD}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Звідси, знаючи $I_1 = iD$, отримаємо

$$D_1 = y - I_1 = iD\left(\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right),$$

потім $I_2 = I(D - D_1) = ...$, і т. д.

У **споживчому кредиті** відсотки (прості) зазвичай нараховуються на всю суму боргу й приєднуються до основного боргу; при цьому сума всіх виплат з погашення боржника має дорівнювати цій величині.

Погашається споживчий кредит зазвичай однаковими сумами. Якщо виплати здійснюються p разів на рік протягом n років, то разова виплата

$$Y = \frac{D(1+ni)}{np}.$$

Питання, як поділити Y на погашення відсотків та основного боргу, розв'язується із застосуванням правила ділення певного числа на частини пропорційно заданим числам. Як початкові дані, що дають змогу отримати необхідне співвідношення пропорційності, початку кожного періоду ставиться у відповідність число, яке дорівнює кількості виплат, що залишилися:

$$(1,\ pn),\ (2,\ pn-1),...,(k,\ pn-(k-1)),...,(pn,\ 1).$$

Тоді правило визначення послідовних відсоткових погашень $I_1, I_2, ..., I_n$ зводиться до поділу всієї суми відсотків $I = Dni$ пропорційно кількості термінових виплат, що залишилися на початок кожного періоду:

$$I_k = \frac{pn-k+1}{1+2+...+pn} Dni = \frac{pn-k+1}{pn(pn+1)/2} Dni, \quad k = 1,2,...,pn.$$

Таким чином, сума погашення боргу $D_k = Y - I_k$.

Реальна ціна споживчого кредиту для покупця вимірюється ставкою складених відсотків, при якій сума всіх сучасних вартостей виплат за кредитом дорівнює сумі основного боргу D.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Борг у сумі 100 млн грн видано на п'ять років під 20 % річних. Для його погашення створюється погашувальний фонд. На кошти, які інвестуються, нараховуються відсотки за ставкою 22 %. Знайти розміри термінових сплат у фонд (однаковими сумами), якщо фонд формується протягом п'яти років. Скласти план погашення кредиту.

Розв'язання. Нехай на рахунок у банку (у погашувальний фонд) щорічно наприкінці року вноситься сума R. Тоді на кінець терміну накопичиться сума S (рента постнумерандо), яка має дорівнювати D:

$$S = R\frac{(1+j)^n - 1}{j} = D.$$

Звідси

$$R = \frac{Dj}{(1+j)^n - 1},$$

отже, щороку потрібно виплачувати суму

$$Y = \frac{Dj}{(1+j)^n - 1} + iD$$

(перший доданок надходить у погашувальний фонд, а другий – кредитору). За умовою задачі

$$R = \frac{Dj}{(1+j)^n - 1} = \frac{100 \cdot 0,22}{1,22^5 - 1} = 12,92059,$$

$$Y = 0,2 \cdot 100 + 12,92059 = 32,92059.$$

Приклад 4.2. Борг у сумі 1 млн грн потрібно погасити за п'ять років однаковими сумами, які виплачують наприкінці року. За позику нараховують відсотки за річною ставкою 10 %. Скласти план погашення кредиту.

Розв'язання:

$D_k = \frac{D}{5} = 200000;$

$I_1 = iD = 0,1 \cdot 1000000 = 100000;$

$I_2 = i(D - D_1) = 0,1 \cdot 800000 = 80000;$

$I_3 = i(D - (D_1 + D_2)) = 0,1 \cdot 600000 = 60000$ і т. д.

Отже, план погашення можна подати у вигляді такої таблиці:

Роки	L_k, грн	D_k, грн	I_k, грн	$y_k = D_k + I_k$, грн
1-й	1 000 000	200 000	100 000	300 000
2-й	800 000	200 000	80 000	280 000
3-й	600 000	200 000	60 000	260 000
4-й	400 000	200 000	40 000	240 000
5-й	200 000	200 000	20 000	220 000

Тут $L_k = D - \sum_{l=1}^{k-1} D_l$ – борг на початок k-го року.

Приклад 4.3. Відповідно до кредитної угоди необхідно сплатити кредит у сумі 120 000 грн і нараховані відсотки (5 % складених річних) платежами наприкінці кожного року протягом шести років. Сума першого платежу з виплати основного боргу дорівнює 10 000 грн. Основний борг погашається платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею, яку необхідно визначити. Скласти план погашення кредиту.

Розв'язання. Визначимо різницю прогресії. Сума n членів арифметичної прогресії

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n,$$

де d – різниця прогресії.

Звідси

$$d = \frac{1}{n-1}\left(\frac{2S}{n} - 2a_1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{240\,000}{6} - 20\,000\right) = 4\,000.$$

Отже, послідовні платежі зі сплати основного боргу є такими: 10 000, 14 000, 18 000, 22 000, 26 000 і 30 000.

Відповідні виплати відсотків знаходимо так, як у прикладі 4.1 (як відсоток на непогашений борг на початок відповідного року).

Здійснивши розрахунки, отримаємо таку таблицю:

Роки	L_k, грн	D_k, грн	I_k, грн	$y_k = D_k + I_k$, грн
1-й	120 000	10 000	6 000	16 000
2-й	110 000	14 000	5 500	19 500
3-й	96 000	18 000	4 800	22 800
4-й	78 000	22 000	3 900	25 900
5-й	56 000	26 000	2 800	28 800
6-й	30 000	30 000	1 500	31 500

Тут, як і в прикладі 4.1, $L_k = D - \sum_{l=1}^{k-1} D_l$ – борг на початок k-го року.

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Нехай борг, який дорівнює 200 тис. грн, необхідно погасити однаковими сумами за п'ять років, платежі – наприкінці року. За позику сплачуються відсотки за ставкою 5 %. Скласти план погашення боргу.

4.2. Позику 500 000 грн узято на 10 років під 8 % річних. Погашення буде здійснюватися починаючи з кінця шостого року щорічними однаковими виплатами. Знайти розмір цієї виплати.

4.3. Фірмі надано кредит на таких умовах:

– сума кредиту – 5 млн грн;

– термін кредиту – п'ять років;

– сплата: раз на півріччя (наприкінці півріччя), причому погашення основного боргу здійснюється однаковими платежами в розмірі 0,5 млн грн;

– відсоткова ставка дорівнює 10 % річних.

Скласти план погашення кредиту.

4.4. Скласти план погашення кредиту в сумі 1 млн грн. Відсотки нараховують раз на півріччя (16 % річних). Основний борг погашається однаковими сумами раз на півріччя. Термін такої кредитної угоди – п’ять років.

4.5. У момент надання кредиту на 30 днів під 15 % річних за простою ставкою кредитор утримав відсотки, що йому належать. Номінальна сума кредиту становить 600 тис. грн. Якими є реальна сума позики й прибутковість кредитної операції?

4.6. Під час надання позики на 90 днів під 8 % річних за простою ставкою кредитор утримав комісійні у розмірі 0,5 % суми кредиту. Якою є ефективність позикової операції у вигляді річної ставки складених відсотків за умови, що рік дорівнює 360 днів?

4.7. За умовою контракту прибутковість кредиту має становити 12 % річних. Яким має бути розмір номінальної ставки під час нарахування відсотків:

а) щомісячно;

б) щоквартально?

4.8. За контрактом вироблена продукція вартістю 4 млн грн виплачується в розстрочку щоквартально протягом п’яти років з нарахуванням складених відсотків на суму боргу, яка залишилася за річною відсотковою ставкою 0,1. Визначити величини однакових платежів, якщо початок оплати продукції:

а) перенесено на півроку після підписання контракту;

б) відкладено на два роки;

в) у п. *а* змінюється кількість платежів на рік, а саме вони проводяться щопівроку;

г) у п. *б* відтермінування супроводжується скороченням терміну виплат до чотирьох років.

4.9. Борг у сумі 300 тис. грн видано під 10 % річних на п’ять років. Для його погашення одноразовим платежем одночасно з отриманням позики створюється фонд. На розміщувані в ньому кошти нараховуються відсотки (11 % річних), причому у фонд погашення щорічно вносяться однакові суми. Визначити термінові витрати боржника протягом п’яти років для двох варіантів погашення відсотків:

а) щорічно;

б) одноразовим платежем наприкінці терміну.

4.10. Кредит 60 тис. грн узято на чотири роки під 20 % річних, які нараховуються на непогашений залишок щоквартально. Повертати треба однаковими сумами наприкінці кожного року. Скласти план погашення кредиту.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИРОБНИЧИХ ІНВЕСТИЦІЙ

Інвестиційний процес – послідовність взаємозв'язаних інвестицій (вкладень грошей), розтягнутих у часі, віддача (прибутки) від яких також розтягнута в часі [5].

Основні показники ефективності інвестиційного процесу:

– чиста теперішня вартість (NPV – net present value);

– внутрішня норма прибутку (IRR – internal rate of return);

– період окупності дисконту (discount payback period);

– індекс прибутковості (PI – profitability index).

Чиста теперішня вартість (NPV) – різниця дисконтованих прибутків і інвестиційних витрат.

Внутрішня норма прибутку (IRR) – показник, числове значення якого дорівнює тій відсотковій ставці, при якій чиста теперішня вартість проєкту дорівнює нулю. Іншими словами, IRR – ставка зведення, при якій нарахування відсотків на суму інвестицій дає розподілені в часі прибутки від них.

Розрахунок IRR часто застосовують як перший крок аналізу інвестицій – відбирають тільки проєкти з IRR > i, де i – мінімальний допустимий рівень прибутковості.

Період окупності дисконту ($n_{ок}$) – кількість років, необхідних для повної компенсації інвестованих коштів прибутками, що надходять, з дисконтуванням обох потоків за взятою ставкою зведення i.

Бухгалтерський термін окупності (m) – це кількість років, необхідних для повної компенсації інвестицій прибутками без урахування фактора часу.

Індекс прибутковості PI. За означенням

$$PI = \frac{\sum_t R_t (1+i)^{-t}}{\sum_t K_t (1+i)^{-t}},$$

де R_t – потік прибутків; K_t – потік інвестицій; i – ставка зведення.

Той же показник, знайдений за бухгалтерським методом (без урахування фактора часу), має вигляд

$$u = \frac{\sum_j R_j}{K} \text{ або } u = \frac{\sum_j R_j - K}{K},$$

де R_j – прибутки; K – сума всіх інвестицій.

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Порівнюються за фінансовою ефективністю два варіанти інвестицій. Потоки платежів характеризуються такими даними наприкінці відповідних років:

A	-100	-150	50	150	200	200	---
B	-200	-50	50	100	100	200	200

Ставка порівняння $i = 10\,\%$. Потрібно: а) порівняти варіанти за показником NPV; б) порівняти їх за показником NPV, якщо з якихось причин момент початку віддач проєкту А зміщено вперед на один рік.

Розв'язання:

а) $NPV_A = -100 \cdot 1{,}1^{-1} - 150 \cdot 1{,}1^{-2} + 50 \cdot 1{,}1^{-3} + 150 \cdot 1{,}1^{-4} +$

$+200 \cdot 1{,}1^{-5} + 200 \cdot 1{,}1^{-6} = 162{,}220;$

$NPV_B = -200 \cdot 1{,}1^{-1} - 50 \cdot 1{,}1^{-2} + 50 \cdot 1{,}1^{-3} + 100 \cdot 1{,}1^{-4} +$

$+100 \cdot 1{,}1^{-5} + 200 \cdot 1{,}1^{-6} + 200 \cdot 1{,}1^{-7} = 160{,}345,$

тобто за показником NPV виграє проєкт А;

б) $NPV_A = 127{,}939$, тобто зміщення на один рік уперед періоду віддач принципово змінив ситуацію, і тепер проєкт В перевершує проєкт А за показником NPV.

Приклад 5.2. Знайти дисконтний і бухгалтерський терміни окупності для прикладу 5.1 проєкту А при ставці $i = 10\,\%$.

Розв'язання. Для проєкту А шукаємо m.

Інвестиції становлять 250 грош. од.

Бачимо, що за два роки проєкт не окупиться, а трьох років для цього багато.

З рівняння

$$250 = 50 + 150 + 200\ x$$

знаходимо $x = \frac{1}{4}$, отже, термін окупності становить 2,25 року.

Визначаємо дисконтний термін окупності $n_{ок}$.

Інвестиції, зведені на кінець другого року:

$$S = 100(1+i) + 150 = 260.$$

Прибутки на ту ж дату:

– $S_2 = 50(1+i)^{-1} + 150(1+i)^{-2} = \frac{50}{1{,}1} + \frac{150}{1{,}21} = 169{,}4 < S$ – за два роки проєкт не окупиться;

– $S_з = \frac{50}{1{,}1} + \frac{150}{1{,}21} + \frac{200}{1{,}1^3} = 319{,}7 > S$ – термін окупності знаходиться між двома й трьома роками.

Отже, $n_{ок} = 2 + x$, а x знаходимо з рівняння

$$\frac{50}{1{,}1} + \frac{150}{1{,}21} + \frac{200x}{1{,}1^3} = 260.$$

Таким чином, $n_{ок} = 2{,}62$.

Приклад 5.3. Компанія вважає прийнятною річну прибутковість i. Припустимо, що щорічні надходження від придбання деякого обладнання є однаковими. Яким має бути максимальний прийнятний простий («недисконтований») термін окупності обладнання з життєвим циклом n років? Яким буде максимальний прийнятний простий термін окупності обладнання з нескінченно довгим життєвим циклом?

Розв'язання. Нехай витрати на придбання обладнання дорівнюють P, а щорічні надходження становлять R. Той факт, що недисконтований термін окупності дорівнює m років, має означати, що P = mR. З іншого боку, прибутковість за ставкою i означає, що витрати P мають давати сучасну вартість загальної сталої ренти з членом R:

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

тобто, термін окупності $m = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

У випадку нескінченного життєвого циклу йдеться про вічну ренту, тобто

$$P = \frac{R}{i} \text{ і } m = \frac{1}{i}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Фірма планує вкласти кошти в придбання нового обладнання, вартість якого разом з доставкою й установленням дорівнює 120 000 грн. Очікується, що впровадження обладнання забезпечить отримання протягом шести років чистих прибутків 35 000, 40 000, 45 000, 50 000, 55 000 і 60 000 грн відповідно. Узята норма дисконту дорівнює 10 %. Визначити чисту теперішню вартість (NPV) та оцінити економічну ефективність проєкту.

5.2. У проєкті, що потребує інвестицій у сумі 160 000 грош. од., передбачається отримання річного прибутку 30 000 грош. од. протягом

15 років. Визначити NPV та оцінити доцільність такої інвестиції, якщо коефіцієнт дисконтування дорівнює 15 %.

5.3. Кредит видано на два роки під 40 річних складених відсотків. Передбачається разове погашення боргу. Під час видачі кредиту утримано комісійні в розмірі 0,1 % від суми кредиту. Визначити IRR для кредитора.

5.4. Позику видано на квартал під 36 річних простих відсотків. Під час видачі позики утримано комісійні в розмірі 5 % від суми позики. Визначити внутрішню норму прибутковості для кредитора у вигляді річної ставки складених відсотків, якщо позика погашається разовим платежем.

5.5. Проєкт, що потребує 700 грош. од. початкових інвестицій, дає прибуток 1 000 грош. од. через два роки. Річна банківська відсоткова ставка дорівнює 12 %. Визначити:

а) поточну цінність проєкту;

б) внутрішню норму прибутку.

5.6. На будівництво магазину необхідно витратити протягом місяця близько 10 000 дол., а потім він необмежено довго буде давати дохід 2 000 дол. на рік. Знайти характеристики цього проєкту, якщо відсоткова ставка – 8 % на рік.

5.7. Маємо два альтернативні проєкти:

1) А – (50; –50; 140);

2) Б – (–50; 10; 90).

Порівняти проєкти за перевагою залежно від числового значення альтернативної ставки.

5.8. Верстат буде працювати три роки, даючи щорічний прибуток 2 тис. дол., і може бути проданий наприкінці терміну за залишковою вартістю. Придбання й монтаж верстата оцінюються в 10 тис. дол. Його залишкова вартість на кінець третього року – 7 тис. дол. Чи окупляться вкладення фірми за передбачуваний термін експлуатації агрегата, якщо:

а) відсоткова ставка 8 %;

б) відсоткова ставка 15 %;

в) відсоткова ставка 8 %, але можлива інфляція може становити 10 % на рік?

5.9. Акціонери погодилися з тривалістю проєкту чотири роки і з необхідним розміром інвестицій I = 10 тис. грош. од., але вимагають забезпечити більшу дохідність (j = 10 %) від інвестування, ніж загальноприйнята ставка I = 8 %. Який при цьому має бути мінімальний щорічний дохід R?

5.10. Знайти бухгалтерський і дисконтний терміни окупності проєкту:

А – (–300; 50; 100; 150; 100; 200; 200).

Відсоткова ставка дорівнює 10 %.

6. ЦІННІ ПАПЕРИ

Термін «**цінні папери**» означає законодавчо визнане свідоцтво права на отримання в майбутньому прибутків при конкретних умовах.

Найбільш поширеним видом цінних паперів з фіксованим доходом (fixed income securities) є **облігації (bonds)** [1].

Облігація – цінний папір, який свідчить про те, що її утримувач надав позику емітенту цього папера. Облігація забезпечує її власнику певний дохід – у більшості випадків він регулярно отримує відсотки за купонами і викупну ціну наприкінці терміну.

Основні параметри облігації:

– номінальна ціна, або номінал (face value);

– викупна ціна (redemption value) або правило її визначення (якщо вона відрізняється від номіналу);

– дата погашення (date of maturity);

– норма дохідності, або купонна відсоткова ставка (coupon rate);

– дати виплат відсотків.

За методом виплати доходу існують такі види облігацій:

– з виплатою тільки відсотків, термін викупу не обумовлюється;

– без виплати відсотків (облігації з нульовим купоном);

– з виплатою відсотків разом з номіналом наприкінці терміну;

– з періодичною виплатою відсотків і погашенням наприкінці терміну номіналу або викупної ціни.

Останній вид облігацій є найбільш поширеним.

Під **курсом облігації** розуміють ринкову ціну однієї облігації у відсотках від номіналу:

$$K = \frac{P}{N} 100,$$

де P – ринкова ціна; N – номінал.

Види дохідностей облігації:

- **купонна дохідність** g, що визначається під час випуску облігації і підрахунку не потребує;

- **поточна дохідність** i_t, що характеризується відношенням надходжень за купонами за рік до ціни придбання облігації без урахування отримання номіналу наприкінці терміну;

- **повна дохідність** i (ставка розміщення) – це реальна ефективність інвестицій в облігацію у вигляді річної ставки складених відсотків.

Наведемо формули для розрахунку дохідності різних видів облігацій.

1. **Облігації без обов'язкового погашення з періодичною виплатою відсотків (вічні).** Поточна прибутковість (дохідність)

$$i_t = \frac{gN}{P} = \frac{g}{K}100, \qquad (6.1)$$

де g – купонна ставка; N – номінал; P – ринкова ціна; K – курс облігації; i_t – поточна прибутковість (дохідність).

Повна прибутковість (дохідність)

$$i = i_t,$$

якщо відсотки за купонами виплачуються раз на рік за ставкою g. Якщо ж відсотки за купонами виплачують p разів на рік за ставкою $\frac{g}{p}$, то

$$i = \left(1 + \frac{gN}{pP}\right)^p - 1 = \left(1 + \frac{g}{Kp}100\right)^p - 1.$$

2. **Облігації без виплати відсотків.** Поточна прибутковість таких облігацій дорівнює нулю.

Повна прибутковість (дохідність)

$$i = \sqrt[n]{\frac{N}{P}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{100}{K}} - 1,$$

де n – термін до викупу облігації.

3. **Облігації з виплатою відсотків і номіналу наприкінці терміну.** Поточна прибутковість (дохідність) дорівнює нулю.

Повна прибутковість (дохідність)

$$i = (1+g)\sqrt[n]{\frac{N}{P}} - 1 = (1+g)\sqrt[n]{\frac{100}{K}} - 1.$$

4. **Облігації з періодичною виплатою відсотків і погашенням номіналу наприкінці терміну.** Поточну прибутковість (дохідність) розраховують за формулою (6.1).

Повну прибутковість i (дохідність) у випадку виплат за купонами раз на рік знаходять зі співвідношення

$$P = (1+i)^{-n}\left(N + Ng\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

або

$$\frac{K}{100} = (1+i)^{-n} + g\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (6.2)$$

Якщо відсотки за купонами виплачують p разів на рік за ставкою $\frac{g}{p}$, то повну прибутковість i (дохідність) визначають зі співвідношення

$$P = (1+i)^{-n}\left(N + \frac{Ng}{p}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}\right)$$

або

$$\frac{K}{100} = (1+i)^{-n} + \frac{g}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}. \qquad (6.3)$$

Розрахунок невідомого значення повної прибутковості (дохідності) за допомогою формул (6.2), (6.3) виконують методами наближення – за допомогою інтерполяції або ітераційним методом.

Курсова вартість (ринкова ціна) цінного папера – це та ціна, за якою він продається й купується на ринку цінних паперів.

Як теоретично правильну **оцінку курсової вартості** цінного папера беруть величину поточної вартості потоку доходів, що дає цінний папір $\{Y_k, k = 1,...,n\}$ за весь термін його дії:

$$P = \frac{Y_1}{1+i} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}. \qquad (6.4)$$

Тут ставка порівняння i визначається прибутковістю (дохідністю) альтернативного вкладення з тими ж характеристиками надійності, що й цінний папір.

Залежно від виду облігації формула (6.4) набуває вигляду:

1. **Облігації без обов'язкового погашення з періодичною виплатою відсотків (безстрокові):**

$$P = \frac{gN}{i},$$

якщо відсотки виплачуються раз на рік, та

$$P = \frac{gN}{p\left((1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right)},$$

якщо відсотки виплачуються p разів на рік.

2. **Облігації без виплати відсотків (з нульовим купоном):**

$$P = N(1+i)^{-n}.$$

3. **Облігації з виплатою відсотків і номіналу наприкінці терміну:**

$$P = N\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n.$$

4. **Облігації з періодичною виплатою відсотків і погашенням номіналу наприкінці терміну:**

$$P = N(1+i)^{-n} + gN\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} = N(1+i)^{-n} + gN\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Акції, за винятком привілейованих, не належать до цінних паперів з фіксованим прибутком. Тому ефективність операцій з акціями може бути прогнозованою лише умовно.

Дохід за акціями визначається доходом від дивідендів і різницею в ціні купівлі й продажу.

Розрізняють прості й привілейовані акції.

Привілейовані акції є формою облігацій. Власник має право отримувати фіксовану суму кожного року, наприклад 9 % від номіналу.

У разі досить тривалого терміну володіння цінним папером найбільш адекватним показником його прибутковості (дохідності) є показник внутрішньої норми прибутку (IRR) потоку платежів, що складається з витрат (I) на придбання цінного папера й отриманих за час володіння цим папером прибутків $\{E_t, t = 1,...,n\}$:

$$I = \sum_{t=1}^{n} E_t(1+IRR)^{-t}.$$

Проте в практичних розрахунках, а тим більш для невеликих n, використовують показники, що базуються на прямому (без дисконтування) порівнянні можливого прибутку й витрат.

Поточна прибутковість акції (без дисконтування)

$$i_t = \frac{D}{P}\cdot 100\,\%,$$

де D – дивіденди за рік; P – ринкова ціна (ціна придбання).

Повна прибутковість (річна)

$$i = \frac{(D_0 + (P_1 - P))/n}{P}\cdot 100\,\%,$$

де D_0 – дивіденди за весь термін; P – ціна купівлі; P_1 – ціна продажу; n – термін володіння акцією (у роках).

Під **опціоном** (options) розуміють право, але не зобов'язання, купити (продати) деякі фінансові інструменти, акції або валюту за обумовленою ціною при настанні певного терміну або до нього [1–3].

Опціони належать до так званих похідних фінансових інструментів (derivative securities). Термін «похідні» пов'язаний із тим, що вартість такого інструменту як би прив'язується до вартості того або іншого базового фінансового інструменту (underlying securities).

Розрізняють два типи опціонів. **Опціон кол (call)** надає одній зі сторін контракту – утримувачу опціону (holder) – право **купити** базовий актив у вказаний термін у майбутньому за фіксованою ціною – ціною виконання опціону, яку називають також страйковою ціною, або просто страйком (strike).

Опціон пут (put) надає право утримувачу опціону **продати** базовий актив у вказаний термін у майбутньому за страйковою ціною.

За отримання відповідного права на купівлю (продаж) покупець опціону (buyer, holder) під час укладання контракту виплачує продавцю (seller, writer) **премію (premium)**, яка являє собою ринкову ціну опціону. Таким чином, власне право в цій операції стає товаром.

Опціон, який може бути реалізований тільки в обумовлений у контракті день (expiration day, day of maturity), називають європейським. Якщо передбачається можливість виконання опціону в будь-який день до цього дня, то опціон називають американським.

Опціони поширюються на акції, різні боргові зобов'язання (облігації, казначейські векселі), курси валют тощо, а також на право купівлі (продажу) деяких товарів (палива, металів).

Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. Вічну ренту, яка дає 4,5 % доходу, куплено за курсом 90. Чому дорівнює фінансова ефективність інвестиції за умови, що відсотки виплачуються: а) раз на рік; б) щоквартально?

Розв'язання:

а) $i = \dfrac{0{,}045 \cdot 100}{90} = 0{,}05;$

б) $i = \left(1 + \dfrac{0{,}045 \cdot 100}{90 \cdot 4}\right)^4 - 1 = 0{,}0509.$

Приклад 6.2. Корпорація випустила облігації з нульовим купоном з погашенням через п'ять років. Курс реалізації – 45. Знайти прибутковість (дохідність) облігації на дату погашення (повну прибутковість (дохідність)).

Розв'язання:

$$i = \sqrt[5]{\frac{100}{45}} - 1 = 0{,}17316,$$

тобто облігація забезпечує інвестору 17,316 % річного доходу.

Приклад 6.3. Облігацію, яка дає прибуток 10 % річних відносно номіналу, куплено за курсом 65, термін до погашення – три роки. У випадку, якщо номінал і відсотки виплачуються наприкінці терміну, знайти повну дохідність для інвестора.

Розв'язання. Повна дохідність

$$i = 1{,}1\sqrt[3]{\frac{100}{65}} - 1 = 0{,}26956 \ (26{,}956\ \%).$$

Приклад 6.4. Визначити ціну акції нульового зростання за умови, що дивіденди в розмірі 500 грош. од. з року в рік не будуть змінюватися, а потрібний рівень прибутковості (дохідності) становить 10 %.

Розв'язання. Фактично йдеться про сучасну вартість вічної ренти з членом R = 50:

$$P = \frac{R}{i} = \frac{500}{0{,}1} = 5000.$$

Приклад 6.5. Під час виконання операції обліку векселя з власника утримуються комісійні в розмірі 0,5 % від номінальної вартості векселя. Обчислити прибутковість (дохідність) цієї фінансової операції, якщо облік векселя здійснюється за простою ставкою d = 30 % за три місяці до погашення.

Розв'язання. Нехай N – номінал. Тоді витрати інвестора на придбання векселя будуть такими:

$$N(1 - nd) - 0{,}005\,N = N\left(1 - \frac{3}{12}0{,}3 - 0{,}005\right) = 0{,}92\,N\ .$$

Через три місяці інвестор отримає номінал N. Отже, прибутковість (дохідність) (у вигляді простої річної ставки i), отримана зі співвідношення

$$0{,}92\,N\left(1 + \frac{1}{4}i\right) = N\ ,$$

дорівнюватиме 34,78 %.

Приклад 6.6. Поточний курс акцій становить 30 дол. Інвестор погоджується купити опціон за 200 дол. на купівлю 100 акцій по 35 дол. через два місяці. Припустимо, що до цього терміну курс акцій збільшиться до 50 дол. Чому дорівнює річна ставка відсотка на вкладені в купівлю опціону 200 дол.?

Розв'язання. Витрати інвестора сьогодні дорівнюють 200 дол. При вказаному збільшенні цін через два місяці інвестор зможе отримати прибуток за рахунок покупки 100 акцій по 35 дол. (реалізації опціону) і негайного продажу по 50 дол., тобто прибуток буде таким:

$$100 \cdot 50 - 100 \cdot 35 = 1\,500 \text{ дол.}$$

Тоді річна ставка простого відсотка, отримана зі співвідношення

$$200\left(1+\frac{1}{6}i\right)=1500,$$

дорівнюватиме 39, тобто 3 900 %!

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Чи варто купувати за курсом 94,24 облігації за п'ять років до їх погашення з купонними платежами наприкінці кожного півріччя за річною ставкою 8 % і з погашенням за номіналом, якщо є можливість помістити ці кошти в банк під 9 % річних? Якою є реальна ефективність інвестування коштів у цей вид облігацій у вигляді річної ставки складених відсотків?

6.2. Облігацію без обов'язкового погашення з періодичною виплатою відсотків наприкінці кожного року за річною ставкою 4,5 % куплено за курсом 96. На купонний дохід накладається податок за ставкою 20 %. Підрахувати реальну ефективність інвестування коштів у цю облігацію у вигляді річної ставки складених відсотків з урахуванням оподаткування.

6.3. Реалізується облігація за курсом 95, відсотки й номінал погашаються наприкінці терміну. Відсотки нараховуються за ставкою 6,2 % річних. Визначити дохідність цієї облігації для інвестора, якщо термін становить:

– 8 років;
– 12 років.

6.4. Оцінити поточну вартість облігації з номіналом 200 тис. грн, купонною ставкою 10 % річних і терміном погашення через чотири роки, якщо ринкова норма доходу дорівнює:

– 8 %;
– 12 %.

Купони за облігацією виплачують два рази на рік.

6.5. Початковий капітал інвестора дорівнює 200 дол. Припустимо, що інвестор може купити на ці гроші одну акцію компанії А за курсом 200 дол. або придбати, виходячи з премії у два долари за акцію, місячний опціон на купівлю 100 акцій цієї компанії за ціною 210 дол. Порівняти за дохідністю вкладення в акцію з купівлею опціону для двох випадків:

а) за місяць курс акцій збільшиться до 220 дол.;

б) за місяць курс акцій зменшиться до 180 дол.

6.6. Облігація з номіналом 10 млн грош. од. і річною купонною ставкою 5 %, яку виплачують двічі на рік, буде викупатися за ціною 10,5 млн грош. од. через 15 років. Якою має бути ціна продажу, щоб інвестору гарантувалася річна дохідність 4 %?

6.7. Оцінити поточну вартість облігації з нульовим купоном номінальною вартістю 5 тис. грн і терміном погашення через три роки. Ставка дисконту і = 12 %.

6.8. Оцінити поточну вартість безстрокової облігації, якщо за нею щорічно виплачується дохід у сумі 300 000 грн. Ставка дисконту I = 10 %.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Іваненко, Т. В. Основи фінансової математики : підручник / Т. В. Іваненко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 267 с.

2. Капустян, В. О. Фінансова математика : навч. посіб. / В. О. Капустян, Ю. А. Пасенченко. – Київ : Принт-Сервіс, 2013. – 226 с.

3. Збірник задач з фінансової математики / О. Д. Борисенко, Ю. С. Мишура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко. – Київ : Техніка, 2007. – 254 с.

4. Гадецька, С. В. Фінансова математика : навч. посіб. / С. В. Гадецька, Г. О. Савченко. – Львів : Новий Світ – 2000, 2014. – 214 с.

5. Buchanan, J. R. An undergraduate introduction to financial mathematics / J. R. Buchanan. – World Scientific Publishing, 2008. – 355 p.

ЗМІСТ

1. Прості відсотки. 3
2. Складені відсотки 6
3. Потоки платежів 12
4. Кредитні розрахунки 21
5. Характеристики ефективності виробничих інвестицій 26
6. Цінні папери 30
Бібліографічний список 37

Навчальне видання

Тетяна Володимирівна Рвачова

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2026
Підписано до видання 23.10.2026
Ум. друк. арк. 2,2. Обл.-вид. арк. 2,44. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Вадима Манька, 17
http://www.khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001