УДК 621.41.001.572: 51+ 536.2.072

# АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОНИТОРИНГА ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ДЕТАЛЕЙ ГТД

*Д.В. Крикунов, А.В. Олейник, канд. техн. наук*

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Выполнен анализ эффективности применения методов решения задач мониторинга температурного состояния деталей ГТД. Получены количественные оценки размерности и вычислительной трудоёмкости методов мониторинга. Сделаны выводы о перспективах использования рассмотренных методов для решения различных типов задач мониторинга температурного состояния.

* * *

Виконано аналіз ефективності використання методів вирішення задач моніторингу температурного стану деталей ГТД. Отримані кількісні показники розмірності і обчислювальної трудомісткості методів моніторингу. Зроблено висновки щодо перспектив використання методів, що були розглянуті, для вирішення різних типів задач моніторингу температурного стану.

* * *

The calculation efficacy of various mathimatical methods used to solve heat transfer monitoring problems in gas turbine engine parts is analyzed. The number of dimension and ordinary arithmetical operation number of this methods are estimated. The analysis results allow to determine field of application and possibility of this methods to solve heat transfer monitoring problems in future trends.

**Общая постановка проблемы и её связь с научно-практическими задачами**. Для повышения эффективности и безопасности эксплуатации ГТД и дорогостоящего теплоэнергетического оборудования большое значение приобрели автоматизированные системы (АС) контроля и диагностики. В алгоритмах этих систем используются специализированные математические модели (диагностические модели, модели мониторинга), целью которых является решение задач мониторинга, заключающихся в непрерывном вычислении параметров состояния контролируемых объектов. Характерной задачей мониторинга для АС контроля и диагностики ГТД и теплоэнергетического оборудования является задача мониторинга температурного состояния (ТС) в опасных точках их деталей.

**Обзор публикаций и анализ проблемы.** Можно выделить три группы методов, используемых для решения задач мониторинга ТС: 1) регрессионные модели [1, 2 и др.]; 2) сеточные (дискретные) модели малой размерности [3, 4 и др.]; 3), методы использующие математический аппарат интегральных уравнений [5, 6 и др.]. Ограниченный набор методов объясняется противоречивыми требованиями, предъявляемыми к моделям мониторинга ТС. С одной стороны, в модели должен быть реализован метод, позволяющий решать задачи теплопроводности довольно общей формулировки; с другой стороны – удовлетворять требованиям, обусловленным работой в составе алгоритмов АС контроля и диагностики. Они должны иметь возможность работать в масштабе реального времени, следовательно, обладать достаточной точностью, быстросчётностью и требовать малых ресурсов памяти ЭВМ.

Вследствие увеличения вычислительных возможностей ЭВМ, используемых в АС контроля и диагностики, происходит постоянное развитие методов решения задач мониторинга температурного состояния по пути учёта большего числа факторов и, следовательно, усложнения моделей. Повышение точности решения задач мониторинга температурного состояния требует создания и развития методов, позволяющих решать стационарные и нестационарные задачи теплопроводности, учитывать сложность геометрии, температурные нелинейности (зависимости теплофизических свойств материала и параметров граничных условий от температуры), различные типы граничных условий (ГУ) теплообмена и пр. Кроме того, в рамках предложенного метода желательно иметь возможность решения задачи определения температурных напряжений в опасной точке детали. Таким образом, развитие методов решения задач мониторинга температурного состояния требует проведения анализа вычислительной эффективности и возможностей методов решения задач теплопроводности.

**Цель исследований**. Целью исследований являлся анализ эффективности методов решения задач теплопроводности с точки зрения их применения для решения задач мониторинга ТС деталей ГТД и теплоэнергетического оборудования.

**Содержание исследований.** Для оценки эффективности методов решения задач мониторинга ТС рассмотрим следующие их качества: 1) возможность решения задач теплопроводности различной сложности (стационарных и нестационарных, с различными типами ГУ и температурных нелинейностей); 2) вычислительная трудоёмкость метода (размерность задачи $N$, число элементарных операций $N_0$, требуемая память) и возможность понижения размерности задачи; 3) трудоёмкость создания модели;.4) надёжность вычислительного алгоритма. Под размерностью задачи будем рассматривать количество связей (уравнений) системы. Элементарными операциями считаются арифметические операции умножения и деления.

Ключевыми числовыми характеристиками при анализе эффективности методов являются размерность задачи $N$ и число элементарных операций $N_0$. Размер требуемой памяти ЭВМ определяется объёмом массивов характеристик системы, промежуточной числовой информации и зависит от размерности задачи и количества операций. Трудоёмкость создания модели пропорциональна размерности задачи. Надёжность отлаженных вычислительных алгоритмов с «фильтруемыми» входными данными в основном зависит от числа вычислительных операций, так как чем больше число операций и время вычислений, тем выше вероятность сбоя.

Модели мониторинга ТС в виде регрессионных зависимостей не отражают физических закономерностей теплопереноса и являются моделями типа «чёрный ящик». Вследствие этого они могут быть использованы для решения задач мониторинга, когда температуры в детали являются функциями ограниченного (обычно небольшого) числа аргументов. Они имеют простую математическую структуру, вследствие чего являются наиболее экономичными с точки зрения привлекаемых ресурсов ЭВМ. Размерность регрессионной модели для одного моделируемого параметра равна единице

$$N = 1, \qquad (1)$$

а число элементарных операций зависит от принятой структуры регрессионной зависимости. Так, для полных полиномов $J$ аргументов степени $s$ может быть вычислено по следующей зависимости:

$$N_0 = \sum_{i=0}^{s} J^{s-i}(s-i). \qquad (2)$$

Трудоёмкость получения исходной информации для построения регрессий связана с необходимостью проведения численных или физических экспериментов с привлечением точных математических моделей (моделей верхнего уровня). Трудоёмкость зависит от количества аргументов модели (влияющих факторов), объёма вычислений при решении задачи с помощью модели верхнего уровня, возможности алгоритмизации процесса вычисления матрицы плана. Вследствие этих причин, даже при современных возможностях ЭВМ для решения модельных задач, в настоящее время регрессионные модели используются для мониторинга установившихся температурных состояний при количестве влияющих факторов менее трех-пяти.

Сеточные методы (метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод прямых) и методы, использующие математический аппарат интегральных уравнений (методы граничных интегральных уравнений, расчётно-аналитические методы), являются более универсальными, чем регрессионные зависимости, так как отражают физические закономерности теплопереноса. Они позволяют решать стационарные и нестационарные задачи теплопроводности с различными типами ГУ теплообмена и наличием температурных нелинейностей. Сеточные методы позволяют учитывать все типы температурных нелинейностей. Методы, использующие математический аппарат интегральных уравнений, применимы тогда, когда может быть обеспечена внутренняя линейность задачи теплопроводности [7].

Вычислительная трудоёмкость, точность и трудоёмкость создания сеточных моделей зависит от степени пространственной дискретизации, которая в свою очередь зависит от сложности геометрии рассматриваемого объекта. От сложности геометрии также зависит принципиальная возможность применения методов прямых и конечных разностей, а также возможность понижения размерности задачи при использовании метода конечных элементов (МКЭ), так как существует стандартный набор форм конечных элементов. Кроме того, МКЭ очень чувствителен к выбору временного шага, что создаёт трудности дискретизации по времени [7, 8].

Таким образом, минимальная размерность сеточных методов лимитируется требуемой точностью и сложностью геометрии. Вследствие этого, несмотря на универсальность, их применение для решения задач мониторинга температурного состояния деталей ГТД в настоящее время ограничено деталями простой геометрической формы, где размерность задачи может быть сильно понижена без существенной потери точности моделирования.

С точки зрения размерности задачи более выгодными по сравнению с сеточными методами являются методы на основе интегральных уравнений. К этой группе методов относятся методы граничных интегральных уравнений и расчётно-аналитические методы решения температурных задач. Под расчётно-аналитическими понимаются методы, в которых записывается замкнутое решение задачи, содержащее аппроксимированные по результатам физического или численного эксперимента функции. Методы на основе интегральных уравнений позволяют при той же точности, что и сеточные методы, понизить пространственную размерность задачи на единицу, так как требуют пространственной дискретизации не всей объёмной области, а только её границы. Эти методы позволяют также уменьшить размерность задачи теплопроводности за счёт более грубой пространственной дискретизации. Методы на основе интегральных уравнений более устойчивы относительно выбора шага временной дискретизации [7], что позволяет, увеличив временной шаг, уменьшить вычислительную трудоёмкость задачи теплопроводности.

Трудоёмкость создания моделей этого типа связана с описанием статических и динамических характеристик тепловой системы. В методах граничных интегральных уравнений они вычисляются в процессе решения посредством численного интегрирования по граничной поверхности. Трудоёмкость их создания заключается в описании модели теплопереноса на границе тела (на граничных элементах). Расчётно-аналитические методы используют структуру решения в виде интегральных граничных уравнений и статические и динамические характеристики тепловых систем, полученные из предварительных расчётов на моделях верхнего уровня. Такой подход позволяет устранить трудоёмкую вычислительную процедуру интегрирования по граничной поверхности, но увеличивает трудоёмкость создания модели, так как требует проведения численных экспериментов на точных математических моделях. Точность и трудоёмкость создания этих моделей зависит от количества статических и динамических характеристик, привлекаемых для описания рассматриваемой тепловой системы.

Выполним количественный анализ вычислительной трудоёмкости и размерности сеточных методов на примере МКЭ и методов на основе интегральных уравнений на примере методов граничных интегральных уравнений (МГИУ). В качестве модельной задачи рассмотрим задачу теплопроводности в кусочно-однородной области без внутренних источников теплоты с различными типами ГУ теплообмена на границе. Для оценки размерностей дискретных моделей в качестве области решения задачи будем рассматривать квадрат (двумерная задача) и куб (трёхмерная задача).

Применение рассматриваемых методов подразумевает пространственную дискретизацию задачи теплопроводности, в МКЭ – по всему объёму, в МГИУ – по граничной поверхности. После дискретизации задача теплопроводности описывается системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A\vec{T} = \vec{B}\,, \tag{3}$$

где $\vec{T}$ – вектор искомых температур, размерностью $(l \times 1)$; $A$ – $(m \times l)$ матрица связей; $\vec{B}$ – $(m \times 1)$ вектор, зависящий от параметров ГУ теплообмена и вектора искомых температур на предыдущем шаге.

Степень дискретизации (максимальный размер конечного или граничного элемента) для МКЭ и МГИУ одинакова и зависит от требуемой точности моделирования [7]. Будем считать, что для достижения некоторого уровня точности количество узлов дискретной модели по каждой из координатных осей равно $n$. Тогда размерность СЛАУ теплового баланса для МКЭ $J_V$ в двух- и трёхмерной задачах соответственно равна $n^2$ и $n^3$. При МГИУ размерность СЛАУ $J_B$ равна соответственно $4(n-1)$ и $6n^2 - 8n + 4$.

Размерности матриц и векторов СЛАУ теплового баланса (3) при использовании МКЭ для всех типов ГУ теплообмена, стационарных и нестационарных задач $m = l = J_V$. При этом матрица связей $A$ является разреженной симметрической ленточной матрицей [8]. Размерность МКЭ

$$N = J_V\,. \tag{4}$$

Размерность МГИУ зависит от типа ГУ теплообмена. При граничных условиях, не зависящих от температуры поверхности (ГУ 1-го и/или 2-го родов), задача формулируется в виде интеграла суперпозиции, следовательно, размерность равна

$$N = 1\,. \tag{5}$$

Если на граничной поверхности имеются участки с заданными ГУ, зависящими от температуры (ГУ 3-го рода, нелинейные ГУ 2-го рода), то размерности матриц и векторов СЛАУ (3) $m$ и $l$ равны количеству этих участков. С добавлением интеграла суперпозиции имеем следующую оценку размерности МГИУ:

$$N \le J_B + 1\,. \tag{6}$$

Выражения (4)-(6) позволяют получить следующие соотношения размерностей МКЭ и МГИУ $\eta = N_{МКЭ} / N_{МГИУ}$. Для стационарных задач $\eta = N_{МКЭ} = J_V$. Для нестационарных двумерной и трёхмерной задач $\eta = 0.2499n + 0.1964$ и $\eta = 0.1666n + 0.2314$ соответственно.

При оценке числа элементарных операций не будем рассматривать операции, связанные с вычислением коэффициентов СЛАУ (3), так как вычислительная трудоёмкость этой процедуры пропорциональна размерности задачи. Число элементарных операций $N_o$ при использовании МКЭ не зависит от типа ГУ и стационарности или нестационарности рассматриваемой задачи, а зависит только от размерности матрицы связей $A$ [8, 9]. Разработаны специальные методы решения СЛАУ с симметрическими разреженными матрицами, имеющими место при решении задач с помощью МКЭ [9]. Будем считать, что для решения рассматриваемой СЛАУ может быть один из экономичных методов – метод параллельных сечений [9]. Количество элементарных операций решения разреженных систем с помощью метода параллельных сечений состоит из операций разложения матрицы связей $A$ и собственно решения системы уравнений [9]:

$$N_0 = \left(\frac{28}{3}\right)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{5}{2}} l + O\left(m^2 l\right) + 4\sqrt{3} m^{\frac{3}{2}} l + O(ml). \quad (7)$$

В системе уравнений МКЭ $m = l = J_V$. Подставив значения $m$ и $l$ в (7), получим оценку числа элементарных операций для МКЭ

$$N_0 = \left(\frac{28}{3}\right)^{\frac{1}{2}} J_V^{\frac{7}{2}} + 4\sqrt{3} J_V^{\frac{5}{2}} + O\left(J_V^3\right). \quad (8)$$

В отличие от МКЭ число элементарных операций $N_0$ при использовании МГИУ зависит как от типа ГУ, так и стационарности или нестационарности рассматриваемой задачи. В зависимости от сочетания указанных факторов можно рассмотреть четыре возможных варианта с различными наборами вычислительных процедур (таблица).

Вычислительные процедуры при решении задач теплопроводности с помощью МГИУ

| ГУ | Стационарные задачи | Нестационарные задачи |
|---|---|---|
| Не зависящие от температуры поверхности. | **1.** Вычисление суммы откликов от каждого граничного участка | **2.** Интегрирование интеграла суперпозиции откликов по времени |
| Зависящие от температуры поверхности | **3.** Решение СЛАУ и вычисление суммы откликов от каждого граничного участка | **4.** Решение СЛАУ и интегрирование интегралов суперпозиции откликов по времени |

В случае **1** (таблица) решение представляет собой сумму произведений интенсивностей граничных условий на соответствующие коэффициенты влияния каждого граничного участка на температуру в искомой точке тела. Количество элементарных операций в этом случае

$$N_0 = J_B. \quad (9)$$

В случае **2** (таблица) решение находят путём численного интегрирования интеграла суперпозиции откликов. Считая, что каждая переходная характеристика тепловой системы численно описывается массивом из $s$ пар чисел (обычно $s \approx O\left(10^2\right)$), а интегрирование выполняется рекуррентно с помощью формулы трапеций, получим следующую оценку количества элементарных операций:

$$N_0 = 3sJ_B. \quad (10)$$

В случае **3** (таблица) вначале решается СЛАУ для нахождения значений ГУ на граничных участках, а затем вычисляется сумма откликов от действия каждого граничного участка на температуру опасной точки. В случае МГИУ матрица связей системы $A$ является плотной и имеет размер $\left(J_B \times J_B\right)$. При этом одним из наиболее эффективных методов решения рассматриваемой СЛАУ является метод квадратного корня [9, 10], количество элементарных операций которого равно $\frac{J_B^3 + 9J_B^2 + 2J_B}{6}$. Таким образом, общее число элементарных операций

$$N_0 = \frac{J_B^3 + 9J_B^2 + 2J_B}{6} + J_B. \quad (11)$$

Наиболее вычислительно трудоёмким является случай **4** (таблица), при которых вначале решается СЛАУ для нахождения параметров ГУ на границе. Затем выполняется интегрирование по времени интегралов суперпозиции откликов граничных температур и температуры в опасной точке. Количество элементарных операций в этом случае

$$N_0 = \frac{J_B^3 + 9J_B^2 + 2J_B}{6} + 3s\left(J_B + 1\right). \quad (12)$$

Соотношение числа элементарных операций $\mu = {N_{0МКЭ}}/{N_{0МГИУ}}$ при использовании МКЭ и

МГИУ для двух- и трёхмерных задач показано на рис. 1 и 2 соответственно.

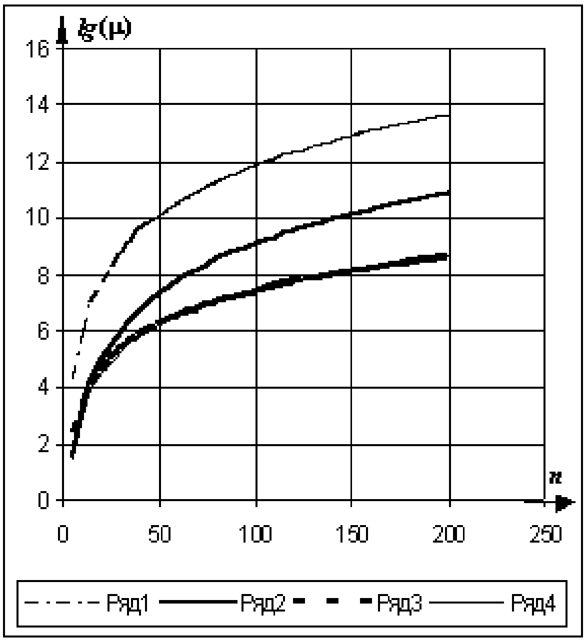


Рис. 1. Соотношение числа элементарных операций МКЭ и МГИУ $\mu = No_{МКЭ}/No_{МГИУ}$ для двумерной задачи теплопроводности.

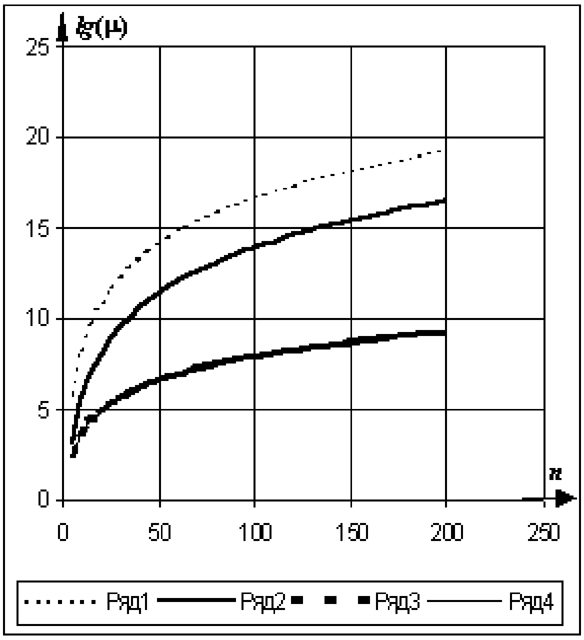


Рис. 2. Отношение числа элементарных операций МКЭ и МГИУ $\mu = No_{МКЭ}/No_{МГИУ}$ для трёхмерной задачи теплопроводности.

**Выводы**. Исследованы возможности и получены оценки размерности N (1), (4)-(6) и количества элементарных операций $N_o$ (2), (8)-(12) методов решения задач мониторинга ТС, которые позволяют сделать следующие выводы об их эффективности.

В силу нефизичности регрессионных зависимостей область из применения ограничена классом задач теплопроводности, где искомая температура является функцией ограниченного числа параметров. В силу большой трудоёмкости получения исходных данных для их построения число параметров этих моделей в настоящее время – не более пяти.

В отличие от регрессионных зависимостей, сеточные (дискретные) модели малой размерности и модели на основе интегральных уравнений отражают физические закономерности теплопереноса и позволяют решать стационарные и нестационарные задачи теплопроводности с различными типами граничных условий теплообмена и наличием температурных нелинейностей.

Эффективной областью применения сеточных (дискретных) методов малой размерности являются стационарные и, особенно, нестационарные задачи теплопроводности с наличием существенных внутренних температурных нелинейностей в телах простой геометрии. Противоречивые требования к точности и быстросчётности, влияющие на выбор размерности этих моделей, не всегда могут быть выполнены, что существенно ограничивает их область применения для тел сложной геометрии. В качестве недостатка применения сеточных методов для решения задач мониторинга ТС можно указать избыточность выходной информации. Они рассчитывают всё поле температур, в то время как в задачах мониторинга достаточно следить за изменением температурного состояния только в одной или нескольких точках контролируемой детали.

Методы на основе граничных интегральных уравнений являются более гибкими с точки зрения понижения размерности задачи теплопроводности, имеют меньшую размерность и вычислительную трудоёмкость (рис. 1, 2), но область их применения ограничена случаями внутренней линейности рассматриваемой задачи. Эффективной областью их использования являются стационарные задачи теплопроводности. С точки зрения вычислительной эффективности решения нестационарных задач в телах сложной геометрии, методы на основе граничных интегральных уравнений также более эффективны по сравнению с сеточными методами, но трудоёмкость их создания, как правило, выше. Трудоёмкость создания моделей мониторинга нестационарных температурных состояний связана с необходимостью идентификации динамических характеристик тепловой системы, количество которых зависит от размерности задачи.

Все рассмотренные методы наряду с решением задачи теплопроводности позволяют теми же подходами решать задачу определения температурных напряжений в опасных точках детали. Это обстоятельство позволяет сделать аналогичные выводы об эффективности применения этих методов для решения задач мониторинга температурных напряжений.

### Литература


1. Регрессионные модели нагружения деталей газотурбинного двигателя в АС контроля выработки его ресурса /А.Н. Ветров, П.В. Королёв, А.В. Тарасенко, А.С. Якушенко // Проблемы управления технической эксплуатацией авиационной техники: Сб. науч. тр. –К.: КМУГА. 1997. –С. 14-16.
2. Моделирование температурного состояния деталей на установившихся режимах для систем учёта выработки ресурса газотурбинных двигателей/ А.В. Олейник, Д.В. Крикунов, Н.А. Шимановская, С.Б. Резник, Е.А. Бандурко // Авіаційно–космічна техніка і технологія: Зб. наук. праць Національного аерокосмічного університету. – Харків: ХАІ, 2002. – Вип. 34. Двигуни та енергоустановки. –С. 133–135.
3. Paquet M.D., Gatlin P.K., Cote S.M. Usage monitoring – a milestone in engine life management. // AIAA-1985. -№1206. -6p.
4. Исследование теплового и термонапряжённого состояния дискового ротора ГТД /Ю.В. Петельгузов, О.Т. Ильченко, Б.А. Левченко, А.А. Шевелёв // Методы и средства машинной диагностики газотурбинных двигателей и их элементов: Тез. докл. Всесоюз. научн. конф.. – Харьков: ХАИ, 1980. –Т. 2. –С. 144–145.
5. Арюткин Ю.И., Курякин В.Ф., Семёнов Ю.К. Расчётно-экспериментальный метод решения температурных задач при переменных по координате и во времени граничных условиях // ИФЖ. –1991. –Т. 61, №3. –С. 479-484.
6. Олейник А.В. Диагностические модели термонапряжённого состояния деталей ГТД на нестационарных режимах // Авиационно–космическая техника и технология: Сб. науч. тр. Национального аэрокосмического ун–та.– Харьков: ХАИ, 2000. – Вып. 19. Тепловые двигатели и энергоустановки. –С. 219–222.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. –524 с.
8. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчётах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.
9. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. –333 с.
10. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1960. –656 с.


*Поступила в редакцию 17.04.03*

**Рецензенты:** канд. техн. наук, ст. преп. Филяев В.А., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", г. Харьков; доктор техн. наук, профессор Ведь В.Е., Национальный технический университет "ХПИ", г. Харьков.