

УДК 539.3:534.1:629.7.02

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТСЕКА КРЫЛА МЕТОДОМ ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

С.А. Халилов, В.Б. Минтюк

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Демонстрируется эффективность и простота применения метода идентификации краевых условий при нахождении приближенного решения в задаче устойчивости отсека крыла. На реальных примерах показана хорошая сходимость получаемых решений и важность правильного учета действительных краевых условий.

\* \* \*

Продемонстровано ефективність і легкість застосування методу ідентифікації крайових умов при знаходженні наближеного розв'язку в задачі стійкості відсіку крила. На реальних прикладах показано добру збіжність отриманих розв'язків і важливість правильного врахування крайових умов.

\* \* \*

Efficiency and simplicity of application of method of boundary conditions identification at finding of approximate solution in the problem of wing section buckling. Good convergence of found solutions and importance of proper taking into consideration of real boundary conditions were shown on real examples.

Авиация и космонавтика являются той областью человеческой деятельности, в которой ошибка может привести к катастрофе. В этой области с научно-технической точки зрения наиболее остро стоит проблема устойчивости, которая еще весьма далека от разрешения. Метод идентификации краевых условий [1,2,3], разработанный авторами, призван способствовать рациональному решению существующей общемировой проблемы.

Идея метода изложена в работе [3], где для рассмотренных задач получены точные решения. Однако наибольший интерес представляют задачи, не допускающие точных решений. Таковыми являются все задачи устойчивости несущих элементов аэрокосмической техники.

Целью данной работы является:

– методическое проведение метода идентификации краевых условий в том случае, когда не удается как точно идентифицировать краевые условия, так и точно решить собственно задачу устойчивости для элемента системы;

– исследовать сходимость приближенных решений к точному;

– выполнить анализ влияния параметров системы, являющейся одномерным аналогом отсека крыла, на ее устойчивость для установления ведущих параметров.

Упрощенная модель отсека крыла представляет собой бесконечную периодическую стержневую систему, изображенную на рис.1. Панели и нервюры рассматриваются как широкие стойки (горизонтальные – это панели, вертикальные – нервюры). Верхние панели сжаты силой  $P$ , нижние растянуты силой  $kP$ .

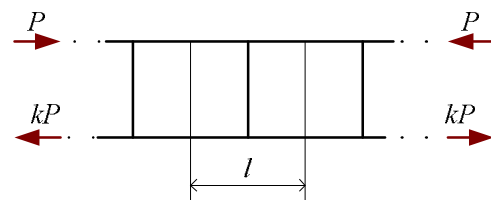


Рис.1. Упрощенная модель отсека крыла

Задача в такой постановке была решена в работе [1]. Было показано, что в силу периодичности для исследования устойчивости всей системы достаточно рассмотреть один отсек (рис.2). Кроме того, с помощью предложенного в работах [1–3] метода, устойчивость всего отсека (рис.2) можно свести к

устойчивости только нервюры, что описывается краевой задачей (параметр устойчивости входит в краевые условия):

$$\begin{aligned} w_5^{IV} &= 0, \quad -1 < x < 1; \quad w_5 = 0, \quad x = -1, x = 1; \\ w_5'' - \rho_1 w_5' &= -1, \quad x = -1; \quad w_5'' + \rho_2 w_5' = 0, \quad x = 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{C_1 l}{2D_1 \gamma}, \quad \rho_2 = \frac{\mu C_2 l}{2D_3 \gamma}, \quad \gamma = \frac{D_3 l_1}{D_1 H}; \\ D_i &= (EI)_i, \quad i = 1 \dots 5; \quad D_1 = D_2; \quad D_3 = D_4; \\ C_1 l &= 4D_1 \alpha \text{ctg} \alpha, \quad C_2 l = 4D_3 \beta \text{cth} \beta, \quad l = 2l_1; \\ \alpha^2 &= \frac{Pl_1^2}{D_1}, \quad \beta^2 = \frac{kPl_1^2}{D_3} = \frac{k\alpha^2}{\mu}, \quad \mu = \frac{D_3}{D_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В [2] показано, что для задач, допускающих точный анализ, метод приводит к точному решению. Для данной задачи – это наименьший положительный корень трансцендентного уравнения

$$(\alpha \text{ctg} \alpha + 2\gamma)(\mu \beta \text{cth} \beta + 2\gamma) - \gamma^2 = 0. \quad (3)$$

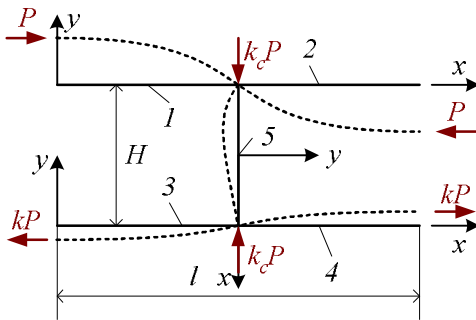


Рис. 2. Представительный элемент системы

Предположим, что получить решение в замкнутом виде невозможно. Для нахождения приближенного решения воспользуемся методом Рунге. Восстанавливая из краевой задачи (1) функционал энергии, получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8H^2} \left[ \int_{-1}^1 \frac{2D_5}{H} (w'')^2 dx + C_1 (w')^2 \Big|_{x=-1} - C_2 (w')^2 \Big|_{x=1} \right]. \quad (4)$$

Решение будем искать в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n X_n(x), \quad (5)$$

где  $X(x)$  – базисные функции.

Главные граничные условия будут удовлетворены, если в качестве базисных функций принять

$\sin(\frac{n\pi x}{2})$  или  $(1-x^2)P_n$ , где  $P_n$  – полиномы Лежандра.

Условие минимума потенциальной энергии приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $W_n$ . В коэффициенты этой системы критическая сила  $P$  входит трансцендентным образом. Удерживая в ряду (5)  $N$  членов, получим

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_N \end{Bmatrix} \equiv RW = 0, \quad (6)$$

здесь

$$R_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{2D_5}{H} X_i'' X_j'' dx + C_1 X_i' X_j' \Big|_{x=-1} - C_2 X_i' X_j' \Big|_{x=1}.$$

Критическая сила  $P$  находится из условия равенства нулю определителя системы (6):

$$\det R = 0. \quad (7)$$

Заметим, что если в качестве базисных функций выбрать  $(1-x^2)P_n$  и взять не менее двух членов суммы (5), то после раскрытия определителя получим трансцендентное уравнение (3). Это объясняется тем, что точным решением для функции прогиба стойки является полином третьей степени (см.[3]).

Основное достоинство (имеются и другие) данного метода очевидно: решается только задача устойчивости нервюры, а ее взаимодействие с соседними элементами учитывается путем идентификации краевых условий для рассматриваемого элемента системы. В том случае, когда удастся точно установить краевые условия, получается точное решение задачи для всей системы (в задаче (1) краевые условия точные).

Как отмечалось выше, критический параметр входит в уравнение (7) трансцендентным образом. Это обстоятельство может быть расценено как недостаток метода, поскольку не удается получить обобщенную задачу на собственные значения для

матриц. Однако этот недостаток – лишь кажущийся в силу следующих причин:

– известен интервал  $A = (P_1, P_2)$ , которому принадлежит решение уравнения (7);

– могут быть использованы эффективные численные методы отыскания корней уравнения (7) (метод половинного деления на практике дает решение с точностью до 0.1% за 6–10 итераций);

– вычисление определителя требует меньшего числа операций, чем решение обобщенной задачи на собственные значения;

– отпадают ограничения на такие свойства матрицы  $R$ , как симметричность и положительная определенность;

– во многих случаях интервал  $A$  можно сузить.

В рассматриваемой задаче можно принять

$$A = \left( \frac{\pi^2 D_1}{4l^2}, \frac{\pi^2 D_1}{l^2} \right).$$

Если сама стойка нагружена силой  $k_c P$ , то в функционале энергии (4) добавится слагаемое

$$-\frac{k_c P}{H} \int_{-1}^1 (w')^2 dx, \text{ коэффициенты } R_{ij} \text{ примут вид}$$

$$R_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{2D_5}{H} X_i'' X_j'' dx - 8k_c P H \int_{-1}^1 X_i' X_j' dx + C_1 X_i' X_j' \Big|_{x=-1} - C_2 X_i' X_j' \Big|_{x=1},$$

а границы интервала  $A$ , в котором находится искомое решение, определяются как

$$P_1 = \min\left(\frac{\pi^2 D_1}{4l^2}, \frac{\pi^2 D_5}{H^2}\right), P_2 = \max\left(\frac{\pi^2 D_1}{l^2}, \frac{4\pi^2 D_5}{H^2}\right).$$

В приведенном выше решении были использованы точные значения коэффициентов жесткости  $C_i$  (2), полученные в работе [3]. Если предположить невозможность точного определения этих коэффициентов (например, стойка переменной жесткости), то их приближенное значение можно найти, воспользовавшись методом Рунге. Рассмотрим стержни 1, 2 как один с жесткостью  $D_1$ . Функционал энергии для него имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2l} \left[ \int_0^1 \frac{D_1}{l^2} (w'')^2 dx - P \int_0^1 (w')^2 dx - 2\bar{M} w' \Big|_{x=\frac{1}{2}} \right], \quad (8)$$

где  $\bar{M}$  – единичный момент, действующий в узле крепления нервюры.

Решение ищется в виде (3), где в качестве базисной системы выбирается система  $X(x) = \cos((2n-1)\pi x)$ , полная в энергетической норме оператора, выводимого из функционала (8)

$$\text{при главных краевых условиях } \begin{cases} w'|_{x=0} = w'|_{x=1} = 0; \\ w|_{x=\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

Минимизируя функционал энергии (8) по коэффициентам  $W_n$ , приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $W_n$ . Удерживая в ряде (5)  $N$  членов и решая систему  $N$  уравнений, можно определить такие приближенные значения коэффициентов жесткости, как

$$C_1 = \frac{1}{w'|_{x=\frac{1}{2}}} = \frac{l}{\pi \sum_{n=1}^N (-1)^n (2n-1) W_n}.$$

В частном случае при  $D_1 = const$  имеем:

$$W_n = \frac{2(-1)^n l^2}{(2n-1)\pi((2n-1)^2 \pi^2 E_1 I_1 - Pl^2)},$$

$$C_1 = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{(2n-1)^2 \pi^2 E_1 I_1 - Pl^2}}. \quad (9)$$

Ряд в равенстве (9) суммируется и имеет значение коэффициента  $C_1$  в формуле (2), что и следовало ожидать. Аналогично определяется значение коэффициента  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{(2n-1)^2 \pi^2 E_2 I_2 + Pl^2}}.$$

Ниже приводятся некоторые численные результаты. На рис.3 показана зависимость относительной погрешности определения критической силы  $\varepsilon_p = 100\% \frac{P_N - P}{P}$  от  $N$ , где  $P_N$  – приближенное значение критической силы при удержании  $N$  чле-

нов ряда в (5), а  $P$  – точное значение из (3). Можно видеть, что при количестве членов ряда, большем десяти, погрешность определения критической силы не превышает 2%. Для расчета брались точные значения коэффициентов  $C_i$  (2).

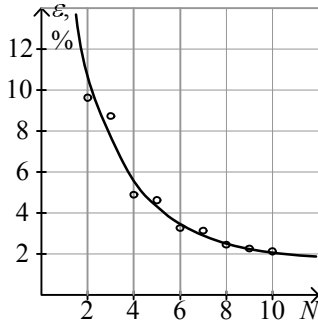


Рис.3. Сходимость приближенного значения критической силы

Аналогичный график для коэффициента  $C_1$  (9), изображенный на рис. 4, также показывает хорошую сходимость приближенных значений коэффициента жесткости к точному.

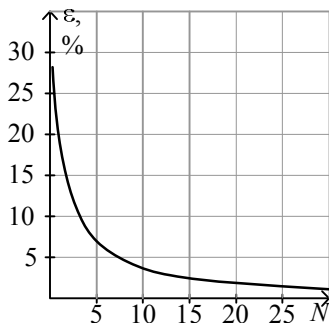


Рис. 4. Сходимость коэффициентов жесткости

Рассмотрим систему с жесткостями  $D_i = D$  для  $i = 1...5$ , нагруженную силами  $P = \frac{\pi^2 D}{4l^2}$ ,  $k = 1$ ,  $k_c = \frac{H^2}{4l^2}$  (стержни нагружены соответствующими эйлеровыми критическими силами для случая шарнирного соединения элементов). Полученные реальные критические силы в 1,6 раза больше эйлеровых. Аналогично для жесткой заделки узлов ( $P = \frac{\pi^2 D}{l^2}$ ,

$k = 1$ ,  $k_c = \frac{H^2}{4l^2}$ ) реальная критическая сила меньше в 2,5 раза. Таким образом, при подмене реальных граничных условий критическая сила занижается в 1,6 раза или завышается в 2,5 раза!

В качестве параметрических исследований приводится зависимость относительной критической силы ( $\lambda = P \frac{4l^2}{\pi^2 D}$ ,  $k = 1$ ,  $k_c = 0$ ) от относительных жесткостей нижней панели  $\mu$  и нервюры  $\gamma$  (рис.5), а также зависимость относительной критической силы ( $\gamma = 1$ ,  $k_c = 0$ ) от относительной жесткости нижней панели  $\mu$  и коэффициента  $k$  (рис.6).

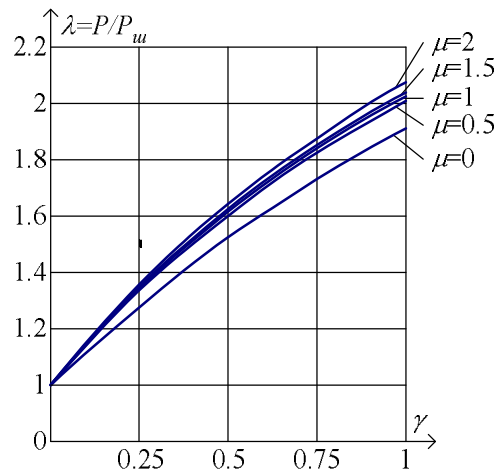


Рис.5. Зависимость критической нагрузки от жесткости нервюры

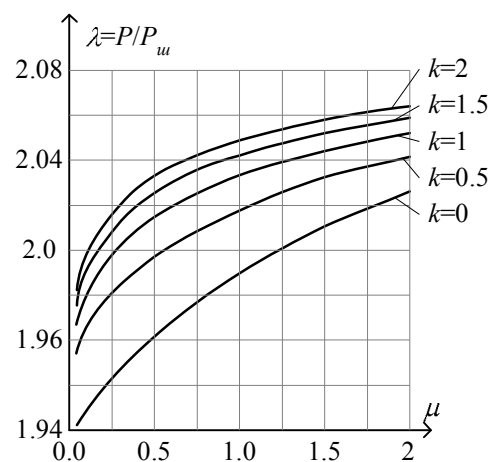


Рис.6. Зависимость критической нагрузки от жесткости нижней панели

Как видно из рис. 5, влияние изгибной жесткости нервюры на критическую нагрузку весьма значительно во всем диапазоне изменения параметра  $\gamma$ . При неограниченном возрастании параметра  $\gamma$  кривые асимптотически приближаются к  $\lambda = 4$  вне зависимости от жесткости нижней панели.

Влияние последней на устойчивость хотя и менее значительно, но также существенно (рис.6) и имеет примерно такой же порядок, как и влияние растягивающего усилия в нижней панели (параметр  $k$ ).

Попытка учета влияния жесткости нервюры на устойчивость панели была предпринята в работе [4], которая, несомненно, ошибочна, поскольку:

- совершенно не учтено влияние нижней панели;
- жесткости нервюры определяются принципиально неверно.

Следствием ошибочности работы [4] является неверный вывод авторов о возможности использования расчетной модели верхней панели в виде неразрезной шарнирно опертой на жесткие опоры пластины. Авторы работы [4] позаимствовали неверные зависимости для жесткостей нервюры из статьи [5], в которой есть ссылка на еще более раннюю работу\*.

### Заключение

Метод идентификации краевых условий является эффективным и простым средством решения задач упругой устойчивости сложных конструкций, не допускающих точный анализ. Применение метода позволило свести задачу устойчивости сложной конструкции к одному элементу, тем самым сделать более качественное ее исследование.

### Литература

1. Халилов С.А. Проблема исследования устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов //Авиационно-космическая техника и технология. Труды ХАИ 1993 года. – Харьков, 1994. – С. 358-369.
2. Халилов С.А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета //Авиационно-космическая техника и технология. Труды ХАИ 1994 года. – Харьков, 1995. – С. 223-227.
3. Халилов С.А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода. В этом же сборнике.
4. Белоус А.А., Барба С.П. Устойчивость многопролетной панели при комбинированном нагружении //Расчеты напряженно деформированного состояния и рациональное проектирование авиационных конструкций. Труды ЦАГИ им.проф. Н.Е.Жуковского. Вып. 2495. – М.,1992. – С.40-45.
5. Гришин В.В. Устойчивость и оптимальные параметры сжатых панелей крыла самолета опертых на балочные нервюры //Расчет на прочность авиационных конструкций. Труды ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского. Вып. 2229. – М.,1984. – С.112-121.

*Поступила в редакцию 11.04.03*

**Рецензенты:** д-р физ.-мат. наук, профессор Проценко В.С., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", г. Харьков; канд. физ.-мат. наук, доцент Несвит М.И., ХГТУС, г. Харьков.

\* Белоус А.А., Гришин В.В. Устойчивость и оптимальные параметры многопролетных панелей крыла большого удлинения // Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов. Тезисы докладов МАИ на всесоюзной конференции.– М.: Изд.МАИ, 1983.