УДК 681.50

В.А. ПОПОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТИПОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрена задача определения классов эквивалентности отображений при заданных на них группах подстановок. Сформулированы и доказаны утверждения для ряда отображений в условиях их произвольной конечной мощности. Полученные результаты могут быть использованы при разработке алгоритмов генерации и выбора в альтернативном проектировании модульных аэрокосмических систем.

сложная система, структура, группа подстановок, отображения, перечисление классов эквивалентности

1. Постановка задачи

При проведении системного анализа аэрокосмических и производственных сложных систем возникают непростые задачи первичной их формализации, одной из которых является построение теоретико-множественной или графовой модели. В последнем случае полезным оказывается разработка моделей перечислительного характера, которые позволяют выполнить комбинаторно-групповой анализ в целях нахождения классов эквивалентности отображений при заданных на них группах подстановок [1 - 3].

Целью статьи является формулирование и доказательство утверждений для ряда типовых отображений множеств в условиях их произвольной конечной мощности при заданных на них группах подстановок.

2. Модели перечисления для однозначных отображений

Сформулируем основные модели перечисления для целей их дальнейшего использования при решении конкретных задач поиска классов эквивалентности при заданных группах подстановок на соответствующих множествах.

Пусть имеются множества D и R. Будем рассматривать в данной работе и взаимооднозначные отображения из D в R. В каждом частном случае следует оговаривать соотношение мощностей $|D|$ и $|R|$. Первая модель [2] позволяет находить число классов эквивалентности $K_{КЭ}$ отображений D в R при условии произвольного соотношения мощностей $|D|$ и $|R|$ (т.е. $|D| \Gamma |R|$) при заданной группе подстановок H_D на множестве D:

$$K_{КЭ} = Z(H_D, x_i = |R|), \qquad (1)$$

где Z – цикловой индекс группы H_D; x_i – переменная циклового индекса группы H_D, $i = \overline{1, n}$, где n – степень группы.

Следует указать, что в (1) принято условие равенства весов классов эквивалентности. Из выражения (1) видно, что число классов эквивалентности $K_{КЭ}$ множества однозначных отображений из D в R при заданной группе H_D зависит только от циклового индекса $Z(H_D)$ и мощности множества $|R|$.

В некоторых случаях можно найти простые комбинаторные формулы для $K_{КЭ}$. Например, если H_D – тождественная группа E_m степени и порядка m, то цикловой индекс $Z(E_m) = x_1^m$ (что означает m циклов длины 1). Тогда в соответствии с (1) получаем $K_{КЭ} = Z(E_m, x_1 = |R|)$, где $|R| = n$ – число элементов множества R, что даёт при $x_1 = n$ выражение для числа классов эквивалентности $K_{КЭ} = n^m$.

Заметим, что $n^m = \left|R^D\right| = |R|^{|D|}$, где R^D – множество всех однозначных отображений из *D* в *R*.

Рассмотрим примеры. Если $H_D = S_2$ – симметричная группа степени 2 и порядка 2, то её цикловой индекс $Z(S_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$, что даёт $K_{КЭ} = \frac{n^2+n}{2}$. При n = 2 получим $K_{КЭ} = 3$.

Если $H_D = S_3$, то

$Z(S_3) = \frac{1}{3!}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$, что даёт

$K_{КЭ} = \frac{1}{6}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right)$. При n = 2 получим

$K_{КЭ} = \frac{1}{6}\left(8 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) = \frac{24}{6} = 4$.

Введем веса элементов множества R. Пусть $R = (x, y)$, тогда для $n = |R| = 2$ получим перечень классов эквивалентности из общей формулы:

$$П_{КЭ} = Z(H_D, x_i = x^i + y^i). \qquad (2)$$

В случае $H_D = E_2$ находим

$$П_{КЭ} = x_1^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

что дает очевидную интерпретацию числа классов эквивалентности, вычисленного по формуле (1), а

$$K_{КЭ} = n^m = 2^2 = 4.$$

В случаях $H_D = S_2, S_3$ можно получить соответственно:

$$П_{КЭ}(S_2) = \frac{1}{2}((x+y)^2 + x^2 + y^2) =$$
$$= x^2 + y^2 + xy;$$

$$П_{КЭ}(S_3) = \frac{1}{6}((x+y)^3 + 3(x+y)(x^2 +$$
$$+ y^2) + 2(x^3 + y^3)) =$$
$$= \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^3 +$$
$$+ 3xy^2 + 3y^3 + 3yx^2 + 2x^3 + 2y^3) =$$
$$= x^3 + y^3 + x^2y + xy^2.$$

Таким образом, получение перечисляющего многочлена $П_{КЭ}$ вместе с найденным числом классов эквивалентности $K_{КЭ}$ являются основой для построения каталога для классификации заданных отображений.

3. Класс эквивалентности взаимнооднозначных отображений

В данном случае рассматривается эквивалентность отображений $D \to R$ при помощи группы подстановок H_D и H_R, действующих соответственно на множествах D и R. Два отображения $f_1 \in R^D$ и $f_2 \in R^D$ называются эквивалентными, если существуют элементы $g \in H_D$ и $h \in H_R$, такие, что $f_1 g = hf_2$, т.е. $f_1(gd) = hf_2(d)$ для всех $d \in D$, где f_1 и f_2 – некоторые преобразования.

Вторая модель перечисления позволяет найти число классов эквивалентности для взаимно однозначных отображений в соответствии со следующим выражением:

$$K_{КЭ} = Z\left(H_D, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \ldots\right); \qquad (3)$$

$$Z(H_R, x_i = 1 + iz_i) \text{ при } z_i = 0.$$

Первая часть расчётного выражения представляет собой специально построенный оператор дифференцирования, вторая часть – дифференцируемую функцию. Третья модель перечисления является частным случаем второй при условии $|D| = |R|$, что даёт формулу для $K_{КЭ}$ вида

$$K_{КЭ} = Z\left(H_D, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) Z\left(H_R, x_i = iz_i \right), \qquad (4)$$

т.е. разница только во второй части выражения (3), где вместо $x_i = 1 + iz_i$ теперь следует брать $x_i = iz_i$. Покажем, что в некоторых случаях можно получить $K_{КЭ}$ для целого ряда типовых отображений в виде простых комбинаторных формул.

Утверждение 1. *Для взаимно однозначных отображений вида $E_m \to S_n$ число классов эквивалентности $K_{КЭ} = 1$ при $m \le n$.*

Рассмотрим сначала случай $m = n$.

Так как $Z(E_m) = x_1^m$, то

$$K_{КЭ} = \frac{\partial^m}{\partial z_1^m} Z(S_m, x_i = iz_i).$$

Представим $Z(S_m)$ в виде

$$Z(S_m) = \frac{1}{|S_m|} \sum_{s \in |S_m|} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \ldots x_m^{c_n},$$

где $s = \overline{1, |S_m|}$, $|S_m|$ – порядок группы S_m, $|S_m| = m!$, $m = |R| = |D|$ – степени группы. Так как в многочлене $Z(S_m)$ всегда есть одночлен вида x_1^m, то

$$Z(S_m) = \frac{1}{|S_m|} \left(x_1^m + \sum_{s \in |S_m'|} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \ldots x_m^{c_n} \right), \qquad (5)$$

где $|S_m'|$ – множество всех подстановок, кроме одной тождественной, дающей одночлен x_1^m.

Очевидно, что в многочлене имеем соотношение $\sum\limits_{S \in S_m} x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_m}$, $c_1 < m$ для каждого одночлена. Тогда в силу существования только одного тождественного отображения $Z(S_m)$ получаем

$$K_{КЭ} = \frac{\partial^m}{\partial z_1^m} Z(S_m, x_1 = 1Z_1) =$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial z_1^m} (z_1^m) \frac{1}{m!} = \frac{m!}{m!} = 1.$$

Таким образом, при $|D| = |R|$ получаем для $H_D = E_m, H_R = S_m$ число классов эквивалентных $K_{КЭ} = 1$, что интуитивно можно объяснить безразличием элементов справа $r \in R$, заполняющим места $d \in D$ слева.

Теперь покажем, что $K_{КЭ} = 1$ и при условии $|D| < |R|$ (для отображения $E_m \to S_n$) $m < n$.

Приведем пример. Найдём для отображения $E_2 \to S_3$ число классов эквивалентности, для чего используем выражение (3):

$$K_{КЭ} = Z(H_{D,} \frac{\partial}{\partial z_i}) Z(H_R, x_i = 1 + iz_i) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z_i} (\frac{1}{3!}((1+z_1)^3 + 3(1+z_1)(1+2z_2) +$$

$$+2(1+3z_3))) = \frac{1}{6}(3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6) = \frac{6}{6} = 1.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть имеется отображение $E_2 \to S_4$, тогда

$$K_{КЭ} = \frac{\partial^2}{\partial z_1} \frac{1}{4!}((1+z_1)^4 + 6(1+z_1)^2(1+2z_2) +$$

$$+8(1+z_1)(1+3z_3) + 3(1+2z_2)^2 + 6(1+4z_4)^4) =$$

$$= \frac{1}{24}(4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 0 + 0 + 0) = \frac{24}{24} = 1.$$

К подобному результату можно прийти путём анализа других примеров отображений $E_m \to S_n$ при условии $m < n$.

Утверждение 2. *Для взаимно однозначных отображений $K_{КЭ}$ вида $E_m \to E_n$ число классов эквивалентности равно $m!$*

Используем третью модель перечисления (m = n), что даёт

$$K_{КЭ} = \frac{\partial^m}{\partial Z^m}\big(Z(E_m)\big) = \frac{\partial^m}{\partial Z^m}(z_i^m) = m!, \qquad (6)$$

то есть число всех размещений из m элементов.

Утверждение 3. *Для взаимно однозначных отображений вида* $E_m \to E_n$ *(* $m < n$ *) число классов эквивалентности* $K_{КЭ} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Применим вторую модель и получим

$$K_{КЭ} = \frac{\partial^n}{\partial Z_1^m}\left(1+Z_1\right)^n =$$
$$= n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Утверждение 4. *Для однозначных отображений вида* $E_m \to E_n$ *при* m § n, $K_{КЭ} = n^m$.

В соответствии с четвертой моделью получим

$$K_{kэ} = \frac{1}{|H_R|}\sum_{h \in H_R}(H_D,\ c_1,\ c_1+2c_2,\ c_1+3c_3,...).$$

Здесь имеем одну подстановку $h = (c_1 = m,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0...)$, что дает $K_{КЭ} = (z_1^m,\ c_1 = n) = n^m$ при любых m и n.

В данном случае $K_{КЭ}$ совпадает с $K_{КЭ}$ для отображения $E_m \to R$, где справа нет действия группы H_R, т.е. с результатом по первой модели перечисления для однозначных отображений.

Утверждение 5. *Для взаимно однозначных отображений* $S_m \to E_n$ $m = n$, $K_{КЭ} = 1$.

В соответствии с третьей моделью

$$\frac{1}{|H_D|}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\frac{1}{|H_R|}\left(Z(H_R)\right) =$$
$$= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}(z_1^m) = \frac{m!}{m!} = 1.$$

В случае второй модели ($m < n$) получим для $S_m \to E_n$

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m}{\partial Z_1^m},...\right)(1+Z_1)^n =$$
$$= \frac{1}{m!}\frac{n(n-1)...(n-m+1)\cdot(n-m)!}{(n-m)!} =$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m = \binom{n}{m}. \qquad (7)$$

В случае четвертой модели и $S_m \to E_n$

$$K_{кэ} = \frac{1}{|H_R|}\sum_{h \in H_n}(Z(H_D, c_1, c_1+2c_2, c_1+3c_3,...)$$

и имеем единственную подстановку

$$h_1 = (c_1 = n,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0),$$

что дает

$$K_{КЭ} = \frac{1}{m!}(z_1 = c_1,\ z_2 = c_1,\ z_i \equiv c_1 = n) =$$
$$= \frac{1}{m!}\big(Z(S_m),\ z_i = n\big).$$

Заметим, что данный результат сходится с полученным раннее результатом с применением первой модели $K_{КЭ}^1 = Z(S_m,\ x_i = n)$.

Анализ выполненных примеров показывает, что в данном случае $K_{КЭ} = c_{m+n-1}^m$ для однозначных отображений $S_m \to E_n$ и $S_m \to S_n$.

В заключение составим сводную таблицу результатов (табл. 1)

Таблица 1

Таблица числа классов эквивалентности

	E_n	S_n	Модель
E_m	$\dfrac{n!}{(n-m)!}$	1	2
	$m!$	1	3
	n^m		4
S_m	$\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	1	2
	1	1	3
	$Z(S_m, x_i = n)$		4

4. Многозначное отображение и перечисление графов

Выше мы рассматривали однозначные и взаимно однозначные отображения. Более общим случаем является случай многозначных отображений, когда элементы множества D отображается в элементы множества R неоднозначно. Допускается, что получаем неполное отображение элементов из множества D. При этом соотношение мощностей $|D|$ и $|R|$ может быть произвольным $|D| ♣ |R|$.

Для графического изображения таких отображений удобно использовать граф *Г(N, L),* вершинами которого являются элементы D и R, т.е. $N = D \cup R$. Множество L в данном случае представляет собой множество конкретных отображений вершин N в себя.

В целях аналитического представления графа будем использовать матрицу инциденций *М(Г)*, элемент которой $\lambda_{ij} = 1$ означает наличие связи от *i*-й вершины в *j*-ю вершину.

Заметим, что с помощью матрицы $M(\Gamma)$ можно представить любое отображение, включая и всевозможные многозначные отображения из D в R при условии $N = D \cup R$. Более того, в такой матрице можно изобразить и нечеткие отображения из D в элементы множества R с некоторым коэффициентом нечеткости k: $0 \le k \le 1$, $0 < \lambda_{ij} < 1$.

Нетрудно заметить, что общее число всевозможных отображений или графов в примере $|N| = 4$, $|L| = 16$ будет равно $k = 2^{N^2}$, при $N = 5$ $k = 2^{25}$. Таким образом, наблюдается очень быстрый рост числа графов при незначительном росте числа вершин. Отсюда возникает достаточно сложная задача классификации по классам эквивалентности [4]. Практическое применение результатов решения такой задачи будет значительным, так как многие задачи проектирования сложных систем сводятся к поиску оптимального варианта из ряда возможных, а сами варианты изображаются в виде графов с достаточно большим числом вершин ($N > 10$).

Заключение

Получены расчётные выражения в общем виде для числа классов эквивалентности в случае одно- и взаимооднозначных отображений вида $H_D \to H_R$, где H_D, $H_R = E_m$, S_n, которые существенно сокращают время при проведении комбинаторно-группового анализа структур сложных систем. Полученные результаты могут быть использованы при разработке алгоритмов генерации и выбора в альтернативном проектировании модульных аэрокосмических систем.

Дальнейшее исследование в данном направлении можно вести в двух основных аспектах.

1. Использовать в качестве H_D, H_R знакопеременные A_n, циклические C_n, диэдральные D_m и другие группы.

2. В качестве групп H_D, H_R использовать композиции групп E, S, C, A, D

Литература

1. Месарович М., Мако Д., Такахара. Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. – 375 с.
2. Де Брейн Н.Дж. Теория перечисления Пойа / Под. ред. Э. Беккенбаха // Прикладная комбинаторная математика. – М.: Мир, 1968. – С. 61 – 106.
3. Харари Ф. Комбинаторные задачи перечисления графов / Под. ред. Э. Беккенбаха // Прикладная комбинаторная математика – М.: Мир, 1968. – С. 107 – 140.
4. Харари Ф., Пальмер Э. Перечисление графов. – М., 1977. – 387 с.

Поступила в редакцию 17.03.04

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков