УДК 581.50

В.А. ПОПОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

КОМБИНАТОРНО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ТИПОВЫХ СТРУКТУР СИСТЕМ

Проведен комбинаторно-групповой анализ структур (древовидных, итеративных, радиально-кольцевых), являющихся моделями сложных систем на макро- или микроуровне. Получены цикловые индексы соответствующих групп графов, на основе которых можно найти число и перечень классов эквивалентности в виде перечисляющего многочлена, что является базой построения каталогов и выбора рациональных структур в альтернативном проектировании аэрокосмических комплексов.

структуры системы, группа подставок, композиция группы, классы эквивалентности, перечисляемый многочлен

1. Постановка задачи

Проблема анализа и аналитического проектирования сложных аэрокосмических комплексов тесно связана с необходимостью изучения структур процессов и реализующих их средств. Одним из подходов для решения указанных задач является использование методов альтернативного проектирования и создания каталогов типовых структур. На основе такого подхода можно находить оптимальных представителей по некоторым заданным критериям, оценивающим их качество, что требует построения процедур генерации таких представителей каталога. В связи с этим в данной работе разрабатываются комбинаторно-групповые модели для ряда типовых графовых структур, с помощью которых можно находить число классов эквивалентности и соответствующие перечисляющие многочлены, что дает возможность построить каталоги представителей соответствующих структур.

Каждая структура имеет соответствующий граф $G(N,L)$ и группу графа H_G, которая является группой постановок и изображается в общем случае с применением некоторой композиции групп [1].

Так, например, особенности построения древовидной структуры могут быть выражены с помощью целого ряда пояснений (структура бинарная, симметричная, несимметричная, без петель и контуров, иерархическая, многоуровневая и т.д.). Существенное значение имеет группа графа H_G, которая соподчиняет между собой элементы множества – вершины графа $G(N,L)$ [2 – 3].

Пусть $H_G = S_m$ (симметричная группа), $m = N$. Тогда получаем задачу анализа отображения $S_m \to H_R$, где H_R – это E_n, S_n или их композиции. В этом случае вершины графа имеют как бы «отношения безразличия» между собой. В случае $H_G = E_m$ получаем противоположную картину, где вершины графа имеют строго выраженную индивидуальность, самостоятельность. Следующим шагом при усложнении задачи может быть использование композиции групп S и E, формализующих отношения вершин графа $G(N,L)$. Подобным образом можно проводить рассуждения и для элементов множества R, отношения между которыми также можно представить с помощью некоторой группы подстановок или композиции групп $H_R(E,S)$.

Таким образом, в общем виде можно сформулировать цель данной работы как задачу комбинаторно-группового анализа структуры системы: при заданном графе $G(N,L)$ структуры системы и соответствующей композиции групп $H_G(E,S)$ на этом графе, а также композиции групп на множестве R в виде $H_R(E,S)$, найти классы эквивалентности отображения $H_G \to H_R$ с помощью определения их числа $K_{КЭ}$ и перечня $П_{КЭ}$, на основе которых можно построить каталог структур, имеющий практическую полезность.

Сложность решения такой задачи зависит от мощностей множеств D и R и особенностей композиции групп H_G и H_R, которые выражают с некоторой адекватностью специфику структуры системы и способ ее построения из заданной номенклатуры элементов с определенными на них ограничениями. Так, в случае однозначных отображений, где используется первая и четвертая модель перечисления [1, 2], элементы из множества R для построения структуры системы могут использоваться без ограничений на их количество при заданной номенклатуре. В случае же применения второй и третьей моделей перечисления, когда используются взаимно однозначные отображения, число элементов множества R является ограниченным.

Пусть H – группа, элементами которой являются подстановки множеств D или R, причем групповой операцией является операция обобщенного умножения. Тогда цикловой индекс группы – многочлен от $x_i, i = \overline{1,m}$ для H_G (или $j = \overline{1,n}$, для H_R):

$$Z(x_i) = |H_G|^{-1} \sum_{h \in H_G} \prod x_i^{c_i},$$

где c_i – число циклов длины i.

Данное выражение представляет собой цикловой индекс группы H, который имеет ровно столько одночленов, сколько элементов имеет группа подстановок H (т.е. порядок группы – $|H|$). Так, например, для симметрической группы S_n степени n порядок группы $|S_n| = n!$. Для тождественной группы E_n степени n порядок группы равен 1, так как существует только одна тождественная подстановка, дающая цикловой индекс x_1^n, что означает n циклов единичной длины.

Теперь рассмотрим некоторые примеры комбинаторно-группового анализа типовых структур сложных систем.

2. Древовидная иерархическая структура

Рассмотрим обобщенную древовидную иерархическую структуру сложной системы (рис. 1) .

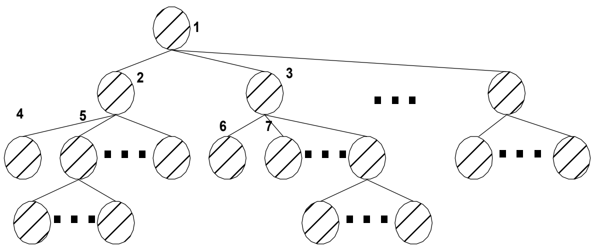


Рис. 1. Обобщенная иерархическая структура системы

Конкретные структуры будут различаться соответствующими подграфами графа G, а задачи комбинаторно-группового анализа – множествами D, R и группами H_G и H_R подстановок соответственно на подграфе G и множестве R.

1. *Группа графа*

$$H_G = S_1(1) + S_1(2) + S_1(3) + S_1(6) + S_2(4,5).$$

В этом случае на рис. 1 берутся во внимание только вершины 1 – 6, а остальные не учитываются. Для указанной группы графа H_G, которая представляется в виде композиции групп S_1 и S_2, относящихся к соответствующим вершинам, запишем цикловой индекс

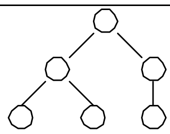
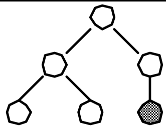
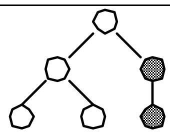
$$Z(H_Г) = x_1(1)x_1(2)x_1(x_3)x_1(6)\frac{1}{2}(x_1^2(4,5) + x_2(4,5).$$

Принимаем равнозначными переменные x_1 для вершин 1, 2, 3, 6 с группами S_1, что дает цикловой индекс

$$Z(H_G) = x_1(1)x_1(2)x_1(3)x_1(6)\frac{1}{2}(x_1^2(4,5) + x_2(4,5)) =$$
$$= x_1^4 \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_1^4 x_2).$$

Таблица 1

Каталог структур

<table>
<tr><th>Ранг структуры</th><th>Число классов эквивалент-ности</th><th>Графическое изображение представителей классов эквивалентности</th><th>Аналитическая запись одночленов</th><th>Количество представителей данного класса</th><th>Количество всех представителей данного ранга</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td><td>$x^6 \cdot y^0$</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">5</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">$5x^5y$</td><td>1</td><td rowspan="5">6</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="11">2</td><td rowspan="11">11</td><td rowspan="11"></td><td rowspan="11">$11x^4y^2$</td><td>1</td><td rowspan="11">15</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
</table>

В рассматриваемом отображении $D \to R$ имеем $|D| = 6$ (рис. 1) и полагаем $|R| = 2$. Тогда число классов эквивалентности однозначных отображений $K_{КЭ}$ в соответствии с первой моделью равно

$$K_{КЭ} = Z(H_G, x_i = |R|) = \frac{1}{2}(2^4 + 2^4 \cdot 2) = 48 .$$

Всего отображений в данном случае будет

$$|R^D| = |R|^{|D|} = 2^6 = 64 .$$

Для получения перечня классов эквивалентности построим перечисляющий многочлен $П_{КЭ}$ при условии $R = (x, y)$:

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i) = \frac{1}{2}\left[(x+y)^6 + (x+y)^4(x^2+y^2)\right],$$

что дает после соответствующих преобразований

$$П_{КЭ} = x^6 + 5x^5y + 11x^4y^2 + 14x^3y^3 + 11x^2y^4 + 5xy^5 + y^6 .$$

В случае $|R| = 2$ удобно ввести запись многочлена в виде

$$П_{КЭ} = \sum_{i=0}^{6} K_i x^{6-i} y^i ,$$

где $\sum_{i=0}^{6} K_i = K_{КЭ} = 48$, K_i – коэффициент при y^i.

Для подобных случаев можно записать общую формулу многочлена

$$П_{КЭ} = \sum_{i=0}^{m} K_i x^{m-i} y^i ,$$

где $m = |D|$.

На основе полученного перечисляющего многочлена $П_{КЭ}$ можно построить каталоги структур с указанием ранга, равного степени при символе y^i, числа классов заданного ранга, графического изображения, аналитической записи одночленов $П_{КЭ}$, числа представителей данного ранга для конкретного класса эквивалентности (табл. 1).

Для подсчета количества представителей всех классов j-го ранга K_i можно использовать следующие формулы:

$$K_0 = C_6^0 = \binom{6}{0} = 1; K_1 = \binom{6}{1} = 6; K_2 = \binom{6}{2} = 15;$$

$$K_3 = \binom{6}{3} = 20; K_4 = K_2 = 15; K_5 = K_1 = 6; K_6 = K_0 = 1;$$

Сумма представителей всех рангов для всех классов $\sum_{j=0}^{6} K_j = 64$.

В общем случае при $|R| = 2$ можно использовать формулу

$$\sum_{j=0}^{m} K_j = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m,$$

что дает при $m = 6$ результат 2^6, который можно получить прямым суммированием всех k_j.

2. *Группа графа*

$$H_Г = S_1(1) + S_1(2) + S_1(3) + S_2(4,5) + S_2(6,7).$$

В данном случае используется уже 7 вершин (рис. 1). Цикловой индекс группы графа

$$Z(H_G) = x_1 x_1 x_1 \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) =$$
$$= \frac{1}{4}(x_1^7 + 2x_1^5 x_2 + x_1^3 x_2^2).$$

Как и в предыдущем случае принимаем $|R| = 2,\ \ R = (x, y)$ и для однозначных отображений с применением первой модели перечисления получим:

$$K_{КЭ} = Z(H_G, x_i = |R| = 2) = \frac{1}{4}(2^7 + 2 \cdot 2^5 \cdot 2 + 2^5 \cdot 2^2) = 72.$$

Всего отображений в данном случае будет $|R^D| = |R|^{|D|} = 2^7 = 128$. Разобьем 128 отображений на 72 класса эквивалентности, для чего построим перечисляемый многочлен

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i) =$$
$$= \frac{1}{4}((x+y)^7 + 2(x+y)^5 \cdot (x^2 + y^2) + (x+y)^3 \cdot (x^2 + y^2)),$$

что после преобразований дает

$$П_{КЭ} = x^7 + 5x^6 y + 12x^5 y^2 + 18x^4 y^3 + 18x^3 y^4 + 12x^2 y^5 +$$
$$+ 5xy^6 + x^7.$$

Так как $П_{КЭ} = \sum_{i=0}^{m} K_i x^{m-i} y^i$, то при $m = 7$ получаем

$$П_{КЭ} = \sum_{i=1}^{7} K_i x^{7-i} y^i .$$

Сумма представителей всех рангов и классов $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} = 2^m = 128$, где $\binom{7}{i}$ – число представителей i-го ранга.

Число классов эквивалентности $K_{КЭ}$ равно сумме коэффициентов K_i, т.е. $K_{КЭ} = \sum_{i=0}^{7} K_i = 72$.

Аналогично предыдущему можно построить каталог представителей структур, соответствующих группе графа

$$H_G = S_1(1) + S_1(2) + S_1(3) + S_2(4,5) + S_2(6,7),$$

являющегося подграфом графа обобщенной иерархической структуры (рис. 1). Подобным образом можно проводить расчеты и каталоги для других разновидностей (фрагментов обобщенной структуры) иерархической структуры (рис. 1).

3. Итеративная структура

Рассмотрим итеративную структуру (рис. 2).

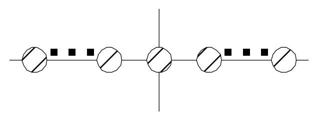


Рис. 2. Обобщенная итеративная структура системы

Здесь группа графа $H_G = E_1 + S_2[R(S, E)]$, где $K(S, E)$ – композиция групп S и E, отражающая особенности взаимосвязи элементов правой (левой) ветви системы. Пусть $R=(x,y,z)$, $|R|=3$, В целях получения циклового индекса H_G используем группу Кранца, что требует замены переменной $x_i = y_1$ в выражении для $Z(S_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2)$, после чего получим $Z(S_2)=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2)$. Теперь вместо y_1, y_2 подставим цикловой индекс $Z(E_3)=x_1^3$, что дает $H_G=\frac{1}{2}(x_1^6+x_2^3)$. Заметим, что в данном случае задача эквивалентна следующей: найти число классовой эквивалентности отображения вида $H_G \to E_n$ для однозначных отображений с применением четвертой модели перечисления. На самом деле

$$K_{КЭ}=\frac{1}{|H_R|}\cdot\sum_{h\in H_R} Z(H_G,c_1,c_1+2c_2,c_1+3c_3,c_1+2c_2+4c_4,...),$$

где единственная подстановка

$$h=(c_1=n,c_2=0,c_3=0,c_4=0,...).$$

Но так как переменные циклового индекса $Z(H_G)$ принимают значения $x_i=c_1+\Delta c_i$, где $\Delta c_i=0$, то получаем $K_{КЭ}=Z(H_G,x_i=|R|=n)$.

При получении перечисляющего многочлена $П_{КЭ}=Z(H_G,x_i=x^i+y^i+z^i+...)$ возникают трудности в силу большого числа одночленов в данном многочлене. Для контроля и проверки правильности выводов конечных выражений $П_{КЭ}$ можно использовать комбинаторные свойства разложения целых чисел на сумму целых слагаемых. Так, например, при $|R|=n=3$ многочлен $П_{КЭ}$ должен в своем составе иметь одночлены x^6, y^6, z^6, которые являются единственным представлением числа 6 с помощью одного слагаемого.

Представление числа 6 из двух слагаемых дает три разложения: 5,1; 4,2; 3,3. Первое разложение дает 6 разных одночленов вида:

$$x^5y;\ x^5z;\ xy^5;\ yz^5;\ zy^5.$$

Второе разложение дает также 6 одночленов вида

$$x^4y^2;\ x^4z^2;\ y^4x^2;\ y^4z^2;\ z^4x^2;\ z^4y^2.$$

Третье разложение дает 3 одночлена:

$$x^3y^3;\ x^3z^3;\ y^3z^3.$$

Представление числа 6 из трех слагаемых дает три разложения: 4, 1, 1; 3, 2, 1; 2, 2, 2.

Первое разложение дает три одночлена:

$$x^4yz;\ xy^4z;\ xyz^4.$$

Второе разложение дает шесть одночленов:

$$x^3y^2z;\ x^3yz;\ x^2y^3z;\ xy^3z^2;\ xy^2z^3.$$

Третье разложение дает единственный одночлен

$$x^2y^2z^2.$$

Всего в данном примере получаем 28 слагаемых (одночленов) в перечисляющем многочлене

$$П_{КЭ}=\sum_{i,j,k} K_{ijk}\cdot x^i y^j z^k,$$

где $i,j,k=\overline{0,6}, i+j+k=6$; K_{ijk} – коэффициент при соответствующем одночлене. Заметим, что $\sum_{i,j,k} K_{ijk}=K_{КЭ}$, т.е. для вышеизложенного примера

$$K_{КЭ}=Z(H_G,x_i=|R|=n=3)=378.$$

Зная коэффициенты K_{ijk} при соответствующих одночленах $x^i y^j z^k$, можно построить каталог итеративных структур с учетом следующих параметров:

– ранга структуры (например, ранг может быть равен 0, 1, 2, 3 для одного элемента из трех в рассматриваемом примере, подобно можно ввести ранги структуры для двух других типов элементов из R);

– числа классов структуры заданного ранга, что определяется коэффициентами K_{ijk};

– числа представителей данного класса эквивалентности;

– числа всех представителей структур заданного ранга, которые включают в себя сумму представителей всех классов эквивалентности данного ранга.

В последнем случае расчет можно проводить по формуле числа сочетаний из заданного множества.

В нашем примере получаем следующие расчетные выражения и результаты:

$$C_6^i,\ i=\overline{1,6};\ C_6^0=1;\ C_6^1=6;\ C_6^2=15;\ C_6^3=20.$$

4. Радиально-кольцевые структуры

Радиально-кольцевая структура системы представляет собой геометрическую фигуру с центром (или без центра) с m ветвями $(m\ge 2)$, в каждой ветви несколько элементов $(n\ge 2)$. Для фигуры с центром (или несколькими центрами) группа соответствующего графа $G(N,L)$ может быть представлена следующим образом:

$$H_G=E_g+S_m[H(S,E)],$$

где $H(S,E)$ – композиция из групп S и E; S_m – символ симметрической группы степени m и порядка $m!$; g – число центров.

Сложность комбинаторно-группового анализа таких структур зависит не только от g, m и композиции $H(S,E)$, но и от мощности множества R в отображении $D\to R$, где D – множество вершин графа. Так как число всевозможных однозначных отображений $K=|R|^{|D|}$ быстро растет, то создаются большие трудности вычислительного характера, особенно при генерации представителей структур. Рассмотрим ряд примеров радиальных кольцевых структур.

1. *Группа графа* $H_G=E_1+S_4[E_2];\ R=(x,y).$

Так как

$$Z(E_1)=x_1,Z(E_2)=x_1^2,Z(S_4)=$$
$$=\frac{1}{4!}(x_1^4+6x_1^2x_2+8x_1x_3+3x_2^2+6x_4),$$

то после использования группы Кранца получим

$$Z(H_Г)=x_1Z(S_4,y_i=x_1^2)=$$
$$=\frac{1}{4!}(x^9+6x_1^5x_2^2+8x_1^3x_3^2+3x_1x_2^4+6x_1x_4^2),$$

что дает в условиях первой модели перечисления

$$K_{КЭ}=Z(H_Г,x_i=|R|=2)=70.$$

Перечисляющий многочлен

$$П_{КЭ}=Z(H_Г,x_i=x^i+y^i)=x^9+3x^8y+6x^7y^2+10x^6y^3+$$
$$+15x^5y^4+15x^4y^5+10x^3y^6+6x^2y^7+3xy^8+y^4=$$
$$=\sum_{i=0}^{9}K_ix^{9-i}y^i,$$

где $\sum_{i=0}^{9}K_i=70=K_{КЭ}$; $\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}=2^9=512$; $\binom{9}{i}$ – число всех представителей структур i-го ранга (последнее означает количество в структуре элементов типа “ y ”).

Для применения второй, третьей и четвертой моделей необходимо ввести группу на множестве R. Пусть $H_R=E_n$, тогда при использовании четвертой модели имеем только единственную подстановку $n=(c_1=n,\ c_i=0,\ i>1)$, что дает

$$K_{КЭ}^4=Z(H_Г,x_i=n)=K_{КЭ}^1.$$

Применение третьей модели приводит к следующему результату при $n=9$:

$$K_{КЭ}^3=-\ K_{КЭ}^3=\frac{\partial^9}{\partial_1^9}(Z_1^9)=9!,$$

или в общем случае по второй модели

$$\frac{\partial^9}{\partial Z_1^9}(1+z_1)^n;\ n=9;\ K_{КЭ}^2=\frac{n!}{(n-9)!}$$

Очевидно, что число классов эквивалентности $K_{КЭ}^2,K_{КЭ}^3$ оказываются весьма большой величиной из-за того, что $|R|=n$ существенно больше 2.

2. *Группа графа* $H_G=S_3[S_1+S_2];\ R=(x,y).$

Применяя и раскрывая группу Кранца, получим цикловой индекс и перечисляющий многочлен:

$$Z(H_G)=\frac{1}{48}(x_1^9+3x_1^7x_2+3x_1^5x_2^2+x_1^3x_2^3+6x_1^3x_2^3+x_1^3x_2x_4+$$
$$+6x_1x_2^4+6x_1x_2^2x_4+8x_3^3+8x_3x_6);$$

$$П_{КЭ}=Z(H_G,x_i=x^i+y^i)=x^9+2x^8y+5x^7y^2+9x^6y^3+$$
$$+11x^5y^4+11x^4y^5+9x^3y^6+5x^2y^7+2xy^8+y^9;$$

$$K_{КЭ}^1=Z(H_G,x_i=|R|=2)=56;$$

$$П_{КЭ}=\sum_{i=0}^{9}K_i\cdot x^{9-i}y^i,\sum_{i=0}^{9}K_i=56=K_{КЭ}^1.$$

Заметим, что все одночлены двухбуквенные с соответствующими степенями и коэффициентами, сумма степеней равна 9 $(x^{9-i}, y^i, 9-i+i=9)$. Полученный многочлен $П_{КЭ}$ дает возможность построить каталог представителей всех классов по всем рангам. В последнем случае следует учитывать специфику группы графа H_G для генерации всех представителей классов эквивалентности. Полезным при построении каталога оказывается вычисление всех представителей заданного ранга, что позволяет в данном случае найти общее число всех представителей структур систем, равное

$$\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i} = 2^9 = 512 .$$

Если $R=(x,\,y,\,z);\,|R|=3$, то $Z(H_Г)$ будет таким же, как и при $R=(x,y)$, но

$$K^1_{КЭ} = Z(H_Г, x_i = |R| = 3) = 1140 ,$$

$$|R|^{|D|} = 3^9 = 1968 .$$

Перечисляющий многочлен

$$П_{КЭ} = Z(H_G,\, x_i = x^i + y^i + z^i) = \sum_{i,j,k} k_{ijk} \cdot x^i y^i z^k ,$$

$$i+j+k=9.$$

Для проверки правильности полученного многочлена следует использовать разложение числа 9 на целые части различными способами, что дает возможность получить все суммы вида

$$i+j+k=9, \quad i,j,k=\overline{0,9} .$$

Построение каталога существенно усложняется, так как при построении структуры используется три различных элемента из множества $R=(x,y,z)$. Здесь полезно ввести понятие типа структуры, обобщающего понятия класса. Так, для ранга, равного нулю, число классов будет равно 1 (т.е. равно коэффициенту при максимальной степени переменной, например, $1\cdot x^9$). Но подобно получается цепочка $1\cdot y^9, 1\cdot z^9$, поэтому можно говорить о типе нулевого ранга, включающем три класса: x^9, y^9, z^9.

Применение второй модели дает при $|D|<|R|$ $n=10\,(m<n)$, $H_R=E_{10}$ следующий результат:

$$K^2_{КЭ} = \frac{1}{48}\frac{\partial^9}{\partial z_1^9}(1+z_1)^{10} = \frac{10!}{(n-m)!\cdot 48} = \frac{10!}{48} \text{ при } z_z = 0 .$$

При условии $n>m$ получим

$$\frac{1}{48}\frac{\partial^9}{\partial z_1^9}(1+z_1)^n = \frac{n!}{(n-9)!\cdot 48} .$$

В данном случае можно построить эквивалентную задачу отыскания числа классов эквивалентности вида $E_m \to E_n$, так как существует только одна тождественная подстановка x_1^m, а остальные имеют вид $x_1^{c_1} x_j^p \ldots$, где $c_1 < m$ или $x_i^g x_e^p$, где $i,e \neq 1$. Поэтому от этих одночленов дифференцирующие операторы буду давать нулевые результаты. Применение третьей модели дает

$$(m=n)\frac{1}{48}\frac{\partial^9}{\partial Z_1^9}(Z_1)^9 = \frac{96}{48} = 7560 .$$

Четвертая модель при $H_R = E_n$ дает единственную подстановку

$$n = (c_1 = n, c_j = 0, i > 1) ,$$

поэтому $K^4_{КЭ} = K^1_{КЭ} = Z(H_Г, x_i = |R| = n)$.

При $n=2$ $(H_R = E_2)$ получим $Z(H_Г, x_i = 2) = 56$.

3. *Группа графа* $H_G = E_1 + S_2[E_1 + S_2];\, R=(x,\,y,\,z).$

Применяя группу Кранца, получим

$$Z(H_G) = \frac{1}{8}(x_1^7 + 2x_1^5x_2 + x_1^3x_2^2 + 2x_1x_2^3 + 2x_1x_2x_4);$$

$$K^1_{КЭ} = Z(H_G,\, x_i = |R| = 31 = 513;$$

$$П_{КЭ} = \sum_{i,j,k} K_{i,j,k} x^i y^i z^k, i+j+k=7,\; i,j,K=\overline{0,7} .$$

Индексы (i,j,k) получаются как элементы разложения числа 7 на три целые части. На основе $П_{КЭ}$ можно построить каталог представителей структур, представляемый графом и его группой H_G.

Существенно проще анализ при $R(x,y)$, где $Z(H_G)$ остается прежним:

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i) = x^7 + 3x^6y + 7x^5y^2 + 10x^4y^3 +$$
$$+ 10x^3y^4 + 7x^2y^5 + 3x^2y^4 + y^7 = \sum_{i=0}^{7} K_i x^{7-i} y^i;$$
$$\sum_{i=0}^{7} K_i = 42; \quad K_{КЭ} = Z(H_G, x_i = 2).$$

Число представителей всех рангов равно

$$|R|^{|D|} = 2^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} = 128.$$

В этом случае каталог структур можно построить намного проще, чем при $|R| = 3$. Пусть

$$H_G = E_1 + S_6[E_1].$$

Тогда при $R = (x, y)$:

$$Z(H_G) = x_1 Z(S_6);$$
$$K^1_{КЭ} = Z\left(H_G, x_i = 2\right) = 128.$$

Получаем простейший каталог, так как

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i) = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 +$$
$$+ 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + 4^7,$$

т.е. $\sum_{i=0}^{7} K_i = 128$ (каждый класс состоит из одного представителя). Данная задача эквивалентна случайному отображению вида $E_7 \to E_2$, где $K^1_{КЭ} = 2^7 = 128$, $П_{КЭ} = Z(H_Г, x_i = x^i + y^i) = (x+y)^7 =$
$= \sum_{i=0}^{7} x^{7-i} y^i K_i, K_i = \binom{7}{i}$.

4. *Группа графа* $H_G = E_1 + S_2 + S_2$; $R = (x, y)$.

Цикловой индекс равен

$$Z(H_G) = \frac{x_1^2}{4}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2), K^1_{кэ} = Z(H_Г, x_i = |R| =$$
$$= 21 = 36; \quad |R|^{|D|} = 2^6 = 64.$$

Перечисляющий многочлен равен

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i) = x^6 + 4x^5y + 8x^4y + 10x^3y^3 +$$
$$+ 8x^2y^4 + 4xy^5 + y^6 = \sum_{i=0}^{6} K_i x^{6-i} y^i, \; K_i = \binom{6}{i}.$$
$$K^1_{КЭ} = \sum_{i=6}^{6} K_i = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} = 36.$$

При $|R| = 3$ $K^1_{КЭ} = Z(H_G, x_i = 3) = 324$ $|R|^{|D|} = 3^6 = 729$.

Для построения каталога следует построить

$$П_{КЭ} = Z(H_G, x_i = x^i + y^i + z^i) =$$
$$= \sum_{i,j,k} K_{ijk} x^i y^i z^k, \; i + j + k = 6,$$
$$i, j, k = \overline{0,6}; \; \sum_{i,j,k} K_{ijk} = 234.$$

В данном случае для контроля правильности коэффициентов k_{ijk} необходимо использовать разложение числа 6 на целые слагаемые.

Заключение

Проведенный комбинаторно-групповой анализ позволяет сделать некоторые выводы относительно возможности построения каталогов представителей для типовых структур систем. При малой мощности множеств $|R| = 2$ и $|D| \le 10$ возможно получение числовых данных, дающих полезную информацию для основных параметров каталога. Однако при увеличении $|R|$ и $|D|$ получаемые цикловые индексы $Z(H_G)$ и перечисляющие многочлены $П_{КЭ}$ имеют громоздкую форму, которую следует проверять другими методами комбинаторики. Использование разработанных компьютерных программ позволяет пользователю сократить сроки получения технических решений с применением созданного каталога, что позволяет ему по запросу анализировать только определенные ранги и классы структур систем, удовлетворяющие заданным техническим требованиям и условиям.

Литература

1. Де Брейн Н. Дж. Теория перечисления Пойа // Прикладная комбинаторная математика / Под ред. Э. Беккенбаха. – М.: Мир, 1968. – С. 61 – 106.

2. Харари Ф., Пальмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977. — 387 с.

3. Попов В.А. Модели структур сложных систем и их комбинаторно-групповой анализ // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “ХАИ”. – 2003. – Вып. 43. – С. 149 – 153.

Поступила в редакцию 17.03.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.