

УДК 539.3 : 534.1 : 629.7.02

**В.С. КРИВЦОВ, С.А. ХАЛИЛОВ, В.Б. МИНТЮК**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», Украина*

## **УСТОЙЧИВОСТЬ СИЛОВОГО КЕССОНА КРЫЛА. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ**

Методом идентификации краевых условий дано исследование устойчивости тонкостенной пространственной системы типа силового кессона крыла. Рассмотрены вопросы численной реализации названного метода: устойчивость численных процедур, сходимость алгоритмов метода, их оперативность и точность. В работе подведен итог этапа становления метода и намечены пути дальнейших исследований.

**упругая устойчивость, метод идентификации краевых условий, отсек силового кессона крыла**

### **Введение**

Проблема устойчивости деформируемых сред наиболее остро стоит для тонкостенных пространственных систем, состоящих из оболочек, пластин и одномерных подкрепляющих элементов – шпангоутов, бимсов, стрингеров и т.д. Такими системами являются, прежде всего, конструкции летательных аппаратов и судов.

Существующие современные вычислительные технологии, базирующиеся, в основном, на методе конечного элемента (МКЭ), не могут разрешить проблему устойчивости и колебаний с потребной достоверностью и точностью в силу известных недостатков, присущих МКЭ.

Основным вопросом как для теории устойчивости, так и для практики вычислений, основанных на приближенных методах анализа, является вопрос сходимости этих методов и точности получаемых при этом результатов. Как известно, МКЭ как вариационный метод виртуальной работы дает только верхние оценки критических параметров, в то время как для проектировщика более важно располагать их нижними оценками. Получение достоверных нижних оценок – трудно разрешимая задача как с теоретической, так и практической точек зрения, поскольку из-за нелинейности природы задач ус-

тойчивости нельзя сформулировать альтернативный (встречный) вариационный принцип типа принципа дополнительной работы. Это, во-первых.

Во-вторых, проектировщик, как сложилось исторически, мыслит образами проектируемых им объектов – силовых панелей, лонжеронов, шпангоутов, нервюр и т.д. Поэтому главное значение для проектировщика приобретает определение с необходимой точностью и достоверностью критического параметра создаваемых образов-объектов (блоков системы). Но поскольку блок системы сложным образом взаимодействует со всей системой, то для исследования его поведения необходимо, прежде всего, установить (идентифицировать) условия этого взаимодействия по границе выделенного блока. Эта задача для МКЭ является проблематичной.

Здесь необходимо отметить, что до настоящего времени исключительно во всех авиационных конструкторских бюро используется подход, когда граница выделенного блока на основании "правдоподобных" рассуждений наделяется теми или иными жесткостными свойствами, в которых не находят отражение свойства системы в целом. Обычно эти свойства формулируются в виде тех или иных классических условий опирания (заделка, свободное опирание, свободный край и т.п.). Ущербность такого подхода очевидна, поскольку полученные здесь

результаты могут служить лишь весьма и весьма грубыми оценками.

Предметом еще одного подхода являются экспериментальные исследования на очень грубых (не натуральных) моделях блока. Результаты подобных экспериментов не представляется возможным перенести на натурное изделие.

Данный ретроспективный взгляд на состояние проблемы устойчивости конструкции аэрокосмической техники позволяет сделать основной вывод: необходимы альтернативные подходы к решению весьма сложной и важной проблемы устойчивости тонкостенных пространственных систем.

Такой подход был выдвинут в Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского "ХАИ" и развивается небольшим научным коллективом. Метод реализации подхода – метод идентификации краевых условий (МИКУ). В основе подхода лежит ведущая идея системного анализа: какова бы ни была сложная система (необязательно механическая), ее анализ можно выполнить по частям (блокам). Эта идея системного анализа допускает развитие: анализ произвольной сложной системы можно свести (редуцировать) к анализу каково-нибудь наперед выбранного ее блока, если адекватно установлены условия взаимодействия блока и оставшейся части системы.

Немного из истории метода. Годом рождения МИКУ можно считать 1991 год. В этом году в университете по заказу АНТК "Антонов" была поставлена и впервые в отрасли решена актуальная задача об устойчивости типовой нервюры силового кессона крыла с учетом взаимодействия с несущей конструкцией всего крыла\*. Какое-то время затем ушло на осмысление концепции предложенного подхода и формулировку основных положений МИКУ [1 – 3]. Одновременно шла разработка теоретических основ метода, а также ставились и решались нетривиальные задачи устойчивости, возникающие в самолето-

строении [4 – 7]. Определенный итог выполненных исследований был подведен в работах [8 – 10]. Таким образом, к концу 2005 года был завершён этап апробации метода и его становления. Небезынтересно отметить, что на становление МКЭ ушло более полувека. Решению непростой задачи об устойчивости отсека силового кессона крыла посвящена работа [11]. Метод был успешно применен в работах [12, 13], посвященных задачам оптимизации с учетом ограничений по устойчивости. Данная работа является естественным продолжением предыдущей работы [11] авторов и посвящена численному исследованию сходимости и точности метода.

### **1. Анализ сходимости процесса и точности решения задачи определения исходного состояния**

Поля напряжений, которые возникают в нагруженных реальных конструкциях, всегда неоднородны. Точность определения критических значений этих напряжений напрямую зависит от точности определения последних. Определение исходного напряженного состояния нервюры с криволинейными поясами, подкрепленной дискретной системой стоек, дано в работе [6], где задача в зависимости от вида краевых условий решается классическим методом Ритца с привлечением аналитического базиса или методом разделения переменных с последующим получением точного решения в одном направлении. Частными случаями полученного решения (принимая жесткости элементов равными нулю или делая их практически абсолютно жесткими, выбирая необходимый вид внешней нагрузки, меняя соотношения размеров и т.д.) можно описать решения целого ряда задач, в том числе и задач, допускающих точное решение. Анализ сходимости и точности определения исходного состояния проводится путем моделирования условий задачи, допускающей точное решение, с последующим сравнением результатов. В п. 1.1 качестве таковой взята нетривиальная задача о передаче через бесконечную балку

\* Результаты этой работы не опубликованы по сей день.

сосредоточенной силы на полуплоскость. В п. 1.2 и 1.3 сравниваются результаты, полученные с использованием гипотезы плоских сечений (модель балки) и решения плоской задачи теории упругости.

**1.1. Передача сосредоточенной силы на полуплоскость через бесконечную балку**

В результате точного решения этой задачи (рис. 1) значение усилий  $N_y$  по линии  $y=0, x \geq 0$  дается формулой [14]:

$$N_y(x) = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1 + 2\beta^3 k^3} d\beta, \quad (1)$$

где  $k^3 = \frac{E_\sigma I_z}{E_n h}$ ,  $E_\sigma, E_n$  – модули упругости балки и пластины; здесь принято  $E_\sigma = E_n = E$ ,  $I_z$  – момент инерции сечения пояса, относительно главной центральной оси  $Oz$ .

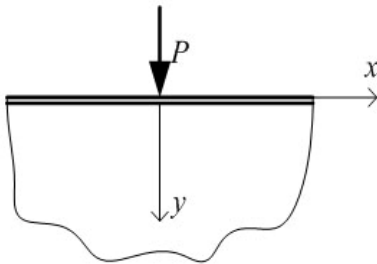


Рис. 1. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость

В приближенном решении [10] жесткость стоек принимается равной нулю. Чтобы исключить влияние на распределение усилий вдоль верхнего пояса граничных уравнивающих усилий, размеры стенки нервюры принимаются достаточно большими (отношение расстояния от точки приложения силы до границы к толщине стенки больше 100).

Если положить  $k = \frac{P\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{9}$ , то графики распределения усилия  $N_y$  в пластине по линии сопряжения с балкой, определенные точно по формуле (1) и рассчитанные приближенно с удержанием в решении 5, 9 и 15 членов ряда будут иметь вид, приведенный на рис. 2. При дальнейшем увеличении чис-

ла членов ряда графики распределения приближенных значений усилий совпадают с точностью до толщины линии в выбранном масштабе, поэтому значения точного решения и приближенного с удержанием 31 и 51 членов ряда приведены в табл. 1.

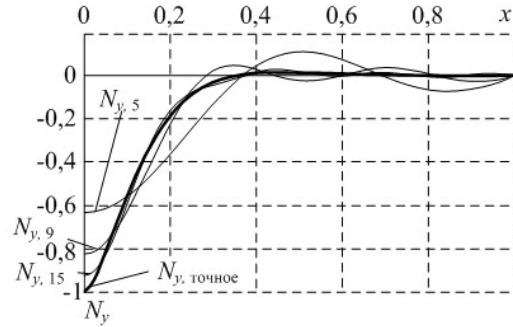


Рис. 2. Сходимость контактного усилия  $N_y$

Как видно из рис. 2 и табл. 1, наибольшее расхождение по абсолютному значению в определении усилий  $N_y$  наблюдается в точке приложения силы. Точное значение максимального усилия  $N_y$  можно принять за параметр, по которому оценивается сходимость и точность приближенного решения.

Таблица 1

Сходимость приближенного значения к точному

$\bar{x}$	0	0,1	0,2	0,4	0,6
$N_{y,точ}$	-1,0	-0,434	-0,085	0,014	0,003
$N_{y,31}$	-0,980	-0,431	-0,083	0,014	0,003
$N_{y,51}$	-0,992	-0,432	-0,085	0,014	0,003

Точную величину усилия  $N_y$  (1) в точке  $x=0$  получим, определив значение интеграла

$$N_y^{\max} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + 2\beta^3 k^3} d\beta.$$

Если ввести новую переменную интегрирования  $2k^3\beta^3 = \alpha^3$  ( $d\beta = \frac{d\alpha}{k\sqrt[3]{2}}$ ), то этот интеграл можно

свести к следующему:  $\frac{P}{\pi} \frac{1}{k\sqrt[3]{2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{1 + \alpha^3}$ , значение

которого согласно [15, с. 295, № 2.2.3.5] можно определить по формуле

$$\int_0^{\infty} (x^{\mu} + z^{\mu})^{-\rho} dx = \mu^{-1} z^{1-\mu\rho} B\left(\frac{1}{\mu}, \rho - \frac{1}{\mu}\right),$$

где для приведенного случая  $\mu = 3$ ;  $z = 1$ ;  $\rho = 1$ ;

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \text{интеграл Эйлера первого рода}$$

(полная бета функция);  $\Gamma$  – интеграл Эйлера второго рода (гамма функция). В нашем случае

$$B\left(\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (\text{здесь использованы известные соотношения: } \Gamma(1) = 1;$$

ваны известные соотношения:  $\Gamma(1) = 1$ ;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}). \text{ Окончательно,}$$

$$N_y^{\max} = \frac{2P}{3\sqrt{3}\sqrt{2k}}. \quad (2)$$

Точное значение максимального усилия, определенное по формуле (2) при  $k = \frac{P\sqrt{3}\sqrt{4}}{9}$ , составляет

$N_{y, \text{точн.}}^{\max} = 1,0$ , значения относительных приближенных значений в зависимости от количества удерживаемых функций ( $N$ ) приведены на рис. 2 и в табл. 1. Наблюдается хорошая поточечная сходимость приближенного значения к точному. Погрешность менее 5% достигается уже при удержании в приближенном решении 25 членов ряда. Дальнейшим увеличением  $N$  можно довольно быстро достичь практически любой точности.

1.2. Исследование сходимости и точности определения напряженного состояния балки с позиций теории упругости

Известно, что балочная теория дает достоверный результат для балок с удлинением (отношением длины к характерному размеру поперечного сечения), большим пяти.

Рассмотрим результаты расчета такой балки (удлинение равно 6), характеристики и расчетная модель которой представлены на рис. 3. Здесь же пока-

зано изменение по длине балки максимальных касательных напряжений (посредине стенки) и касательных напряжений по линии сопряжения пояса и стенки, а также максимальных нормальных напряжений. По графикам этих функций можно сделать заключение о хорошем совпадении результатов расчетов, полученных по теории обобщенного плоского напряженного состояния, с данными элементарной теории изгиба всюду за исключением зон приложения сосредоточенной силы, где имеют место существенные всплески напряжений. Быстрое затухание этих всплесков полностью согласуется с принципом Сен-Венана.

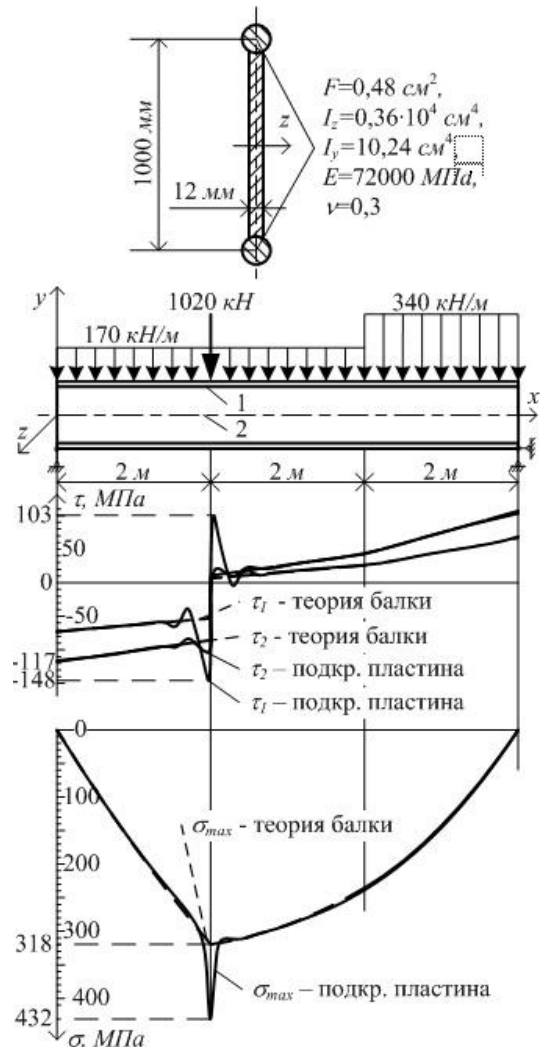


Рис. 3. Расчетная модель балки и эпюры напряжений

Хорошее совпадение результатов, доставляемых балочной моделью, с результатами, полученными по методике работы [10] (модель подкрепленной пла-

стины), наблюдается до тех пор, пока преобладают напряжения от изгиба, чего не наблюдается в реальных конструкциях нервюр и что проиллюстрировано следующим примером.

**1.3. Исследование сходимости и точности определения напряженного состояния нервюры**

На рис. 4 приведена расчетная схема реальной нервюры самолета типа АН.

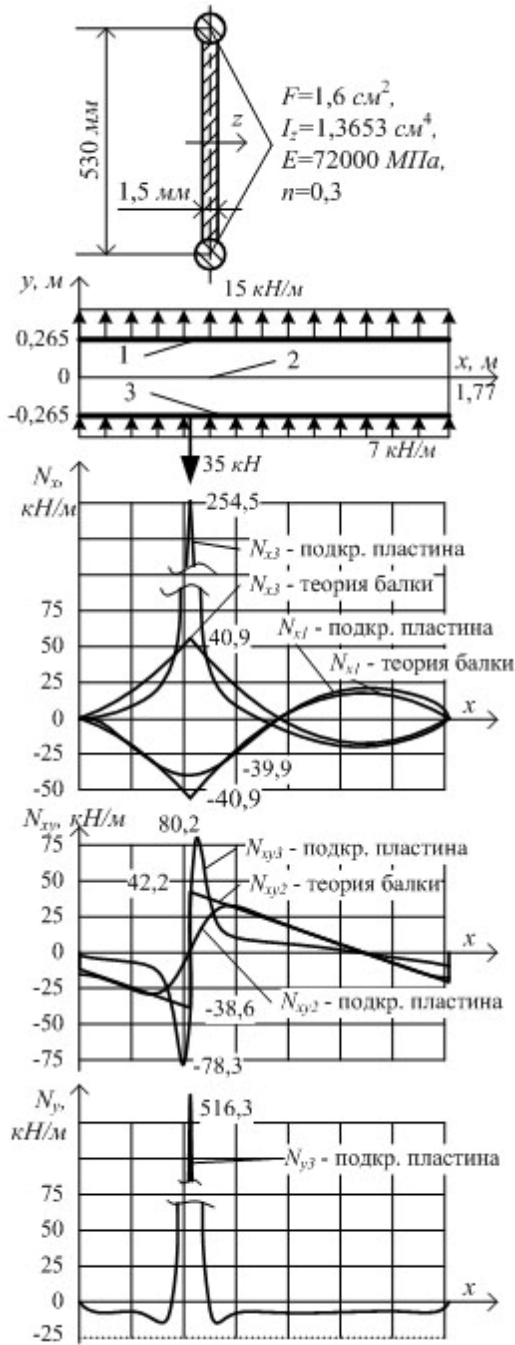


Рис. 4. Расчетная модель нервюры и эпюры погонных усилий

Внешняя нагрузка состоит из равномерно распределенного по длине поперечного усилия (упрощенная воздушная нагрузка) и сосредоточенной силы (реакция от навесного оборудования). Как показано на рис. 4, нагрузки, приложенные к верхнему и нижнему поясам, различны, и при расчете этой нервюры как балки нагрузки складываются и приводятся к центральной оси. Краевые условия на вертикальных сторонах нервюры ( $v = 0, \sigma_x = 0$ ) соответствуют условиям шарнирного опирания балки.

На рис. 4 показаны графики изменения по длине нервюры максимальных усилий в стенке  $N_x$  по линиям продольных сечений стенки 1 и 3, усилий  $N_{xy}$  – по линиям 2 и 3 и усилий  $N_y$  – по линии 3. Как видно из рисунка, теория балки дает значительные погрешности даже в зонах, удаленных от границ и точек приложения сосредоточенных сил. Это можно объяснить, во-первых, значительными величинами напряжений  $\sigma_y$  (в балочной теории, как известно, давлением волокон друг на друга пренебрегается) и, во-вторых, пренебрегать всплесками усилий в зонах Сен-Венана нельзя, так как эти зоны имеют значительную протяженность в сравнении с высотой балки.

Исследование сходимости получаемого в этом примере решения прослеживается по изменению потенциальной энергии  $\Pi^N$  в зависимости от количества членов ряда  $N$ , что проиллюстрировано в табл. 2.

Таблица 2

Изменение потенциальной энергии с увеличением количества членов ряда в разложении приближенного решения

N	1	2	5	8	12	25	40
$\frac{\Pi^N}{\text{кНм}}$	1,3	6,0	8,3	9,5	11,4	12,1	12,2
$\frac{\Pi^N}{\Pi^{40}}$	0,11	0,49	0,68	0,78	0,94	0,99	1,0

Как можно видеть из табл. 2, с увеличением количества удерживаемых функций значение потенциальной энергии увеличивается. Это значение при

удержании 25 функций ( $\Gamma^{25}$ ) отличается от значения  $\Gamma^{40}$  примерно на 1%, т.е. добавление 15 функций незначительно влияет на изменение энергии системы, а различие примерно в 5% достигается при удержании 12 членов ряда. Заметим, что энергия этой нервюры как балки составляет  $\Gamma^6=5,1 \text{ кНм}$  (49% от  $\Gamma^{40}$ ), а энергия, подсчитанная для модели двухпоясной балки (стенка воспринимает только касательные напряжения, а пояса – только нормальные), составляет  $\Gamma^6=7,06 \text{ кНм}$  (58% от  $\Gamma^{40}$ ).

Приведенные в п. 1 исследования показывают хорошую сходимость приближенного решения задачи определения исходного состояния к точному не только в среднем, но и поточечно.

## 2. Анализ сходимости и точности решения задачи устойчивости

Здесь оценивается сходимость и точность полученного в работах [7, 10] приближенного решения задачи устойчивости. Исследования проводятся как на задачах, имеющих точное решение (п. 2.1 – устойчивость балок, п. 2.2 – свободно опертые равномерно нагруженные пластины), так и не имеющих точного решения (п. 2.3 – свободно опертая пластина под действием сосредоточенных сил, п. 2.4 – реальная нервюра).

### 2.1. Анализ сходимости и точности расчета устойчивости двухпоясной балки с тонкой стенкой

Рассматривается балка, приведенная в примере п. 1.3, нагруженная по торцам сжимающими силами. Критическая сила, рассчитанная по формуле Эйлера, для нее составляет  $P_{кр}=1424,1 \text{ кН}$ . Из модели нервюры, описанной в работах [7, 10], можно получить модель данной балки, если задать соответствующие характеристики поясов и стенки, а также принять жесткости остальных элементов равными нулю. Нагрузка задается в виде сосредоточенных сил, приложенных к поясам. Величина

этих сил принимается равной половине эйлеровой ( $P_x=712,05 \text{ кН}$ ).

Изменяя количество функций в разложении функции прогиба (4.13) отдельно по длине нервюры (в данном случае стенки двухпоясной балки) ( $M$ ) и по высоте ( $N$ ), получим ряд значений параметра устойчивости  $\kappa$ , представленный в табл. 3 и на рис. 5.

Таблица 3

Значения параметра устойчивости  $\kappa$  в зависимости от количества функций, удерживаемых в разложении прогиба

$N \backslash M$	1	3	5	7	9
1	1,005	0,934	0,918	0,918	0,918
3	1,005	0,915	0,907	0,907	0,906
5	1,005	0,859	0,738	0,738	0,738
7	1,005	0,859	0,696	0,696	0,696
9	1,005	0,859	0,696	0,696	0,696
11	1,005	0,859	0,696	0,695	0,695
13	1,005	0,859	0,696	0,695	0,695
15	1,005	0,859	0,696	0,695	0,695

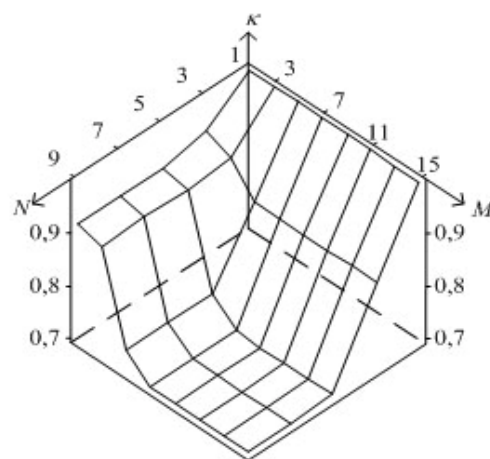


Рис. 5. Сходимость параметра устойчивости  $\kappa$  в зависимости от количества функций, удерживаемых в разложении прогиба ( $M$  – по длине нервюры,  $N$  – по высоте)

Как видно из приведенных данных, если удерживать в функции прогиба по высоте одну функцию (константу), то получим критическую силу, равную

эйлеровой (увеличение критической силы на 0,5% обусловлено неоднородностью исходного напряженного состояния в зонах приложения сил). В этом случае выпучивание по длине нервюры происходит по одной полуволне синусоиды, увеличение количества аппроксимирующих функций в этом направлении оставляет форму потери устойчивости неизменной.

С дальнейшим увеличением количества функций параметр устойчивости резко падает ( $M=7, N=5, k=0,696$ ), а затем практически не меняется. Функция прогиба  $w_{7,5}$  реализует форму потери устойчивости наиболее близкую к функции, которая соответствует минимуму полной потенциальной энергии, а все последующие функции ее незначительно подправляют, что мало сказывается на параметре устойчивости. Увеличение количества функций от  $7 \times 6 = 42$  до  $15 \times 10 = 150$  изменяет параметр устойчивости на  $\frac{0,696 - 0,695}{0,695} 100\% = 0,14\%$ , что говорит о хорошей сходимости получаемого приближенного решения и устойчивости процесса получения этого решения.

Форма потери устойчивости, соответствующая  $M=15, N=9$ , приведена на рис. 6, где видно, что выпучивается только стенка (реализуется местная потеря устойчивости). Таким образом, неадекватность модели реальной конструкции приводит в данном случае к очень большим количественным ошибкам и качественно неверному представлению о форме потери устойчивости.

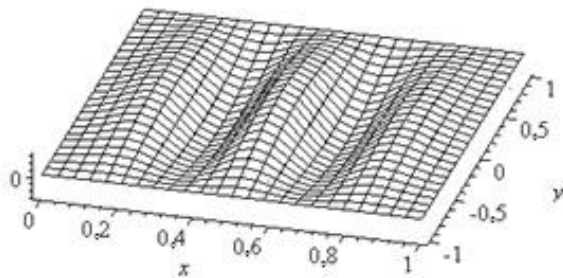


Рис. 6. Форма местной потери устойчивости сжатой двухпоясной балки

### 2.2. Исследование устойчивости шарнирно опертой пластины, нагруженной равномерным сдвигом

Эта задача интересна тем, что даже при однородном поле ( $N_x = N_y = 0, N_{xy} = const$ ) ее точное решение неизвестно. Значения критических напряжений дается формулой, например, в [16]:

$$\tau = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (3)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $b$  – длина короткой стороны;  $h$  – толщина пластины,  $K$  – рассчитанные приближенно коэффициенты. Их значения приведены в табл. 4. Там же приведены значения этих коэффициентов, рассчитанные по МИКУ, МКЭ и по приближенной формуле

$$K = 5,34 + \frac{4}{\lambda^2}, \lambda - \text{удлинение пластины.}$$

Таблица 4

Значение коэффициента  $K$  в формуле (3) для пластины, находящейся в состоянии чистого сдвига

K	$\lambda=L/H$				
	1	1.5	2	5	10
Вольмир А.С.	9,34	7,12	6,47	5,71	5,34
$5,34 + \frac{4}{\lambda^2}$	9,34	7,12	6,34	5,50	5,38
RibStab	9,32	7,07	6,55	5,53	5,35
МКЭ	9,31	7,07	6,55	5,54	5,33

Результаты, полученные по МИКУ и МКЭ, совпадают практически полностью и несколько различаются от результатов, взятых из работы [16], для пластинок с удлинениями 1,5, 2 и 5. Форма потери устойчивости для пластинки с удлинением  $\lambda = 5$  приведена на рис. 7.

Здесь интересно сравнение сходимости приближенных решений, получаемых по МИКУ и МКЭ, что проиллюстрировано на рис. 8. Хорошее приближение по МИКУ получается при введении около



60 неизвестных, по МКЭ – около 1500, т.е. порядок разрешающих матриц более чем 25 раз больше.

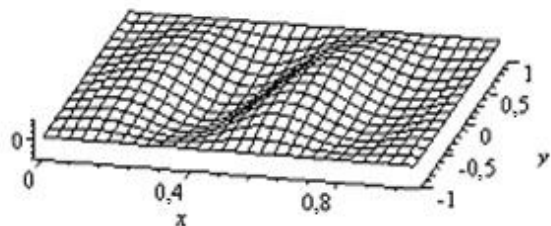


Рис. 7. Форма потери устойчивости при чистом сдвиге пластины с удлинением  $\lambda=5$

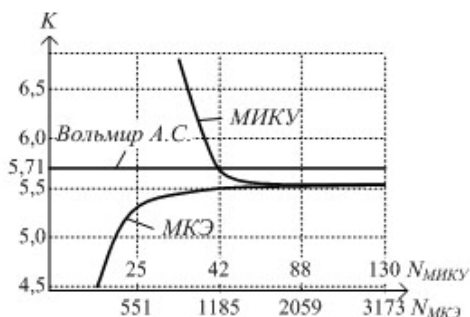


Рис. 8. Сходимость приближенного решения при чистом сдвиге для прямоугольной пластины с удлинением  $\lambda=5$

Расчет по МКЭ проводился с помощью программы типа COSMOS и авторы не смогли найти объяснение тому, что при увеличении количества элементов параметр устойчивости также увеличивается. Как известно, приближение наименьшего положительного собственного значения с увеличением количества неизвестных в методе перемещений, каковым является МКЭ, к точному осуществляется сверху. Можно высказать предположение, что была использована какая-либо модификация принципа минимума полной потенциальной энергии, которая привела к задаче отыскания относительного экстремума. В предоставляемом руководстве пользователя об этом ничего не сказано. Это один из недостатков прикладных пакетов, реализующих МКЭ – их "черный ящик".

### 2.3. Исследование устойчивости пластины, сжатой сосредоточенными силами

Устойчивость прямоугольной шарнирно опертой пластины под действием сосредоточенных сжи-

мающих сил (рис. 9, а), исследовалась многими авторами [14, 17 – 25].

Результаты приводятся в виде приближенных значений коэффициента  $\alpha_c$  в формуле

$$P_{кр} = \alpha_c \frac{\pi D}{H}. \quad (4)$$

С.П. Тимошенко [19], принимая следующее статически возможное напряженное состояние:

$$N_y^0 = -\frac{P_{кр}}{2\varepsilon}, \text{ при } L/2 - \varepsilon/2 < x < L/2 + \varepsilon/2;$$

$$N_y^0 = 0, \text{ при } 0 < x < L/2 - \varepsilon/2 \text{ и } L/2 + \varepsilon/2 < x < L; \quad (5)$$

$$N_x^0 = N_{xy}^0 = 0,$$

где  $\varepsilon$  – ширина полосы вдоль линии действия сил  $P_{кр}$ , получил для данной пластины коэффициент  $\alpha_c=6,0$ .

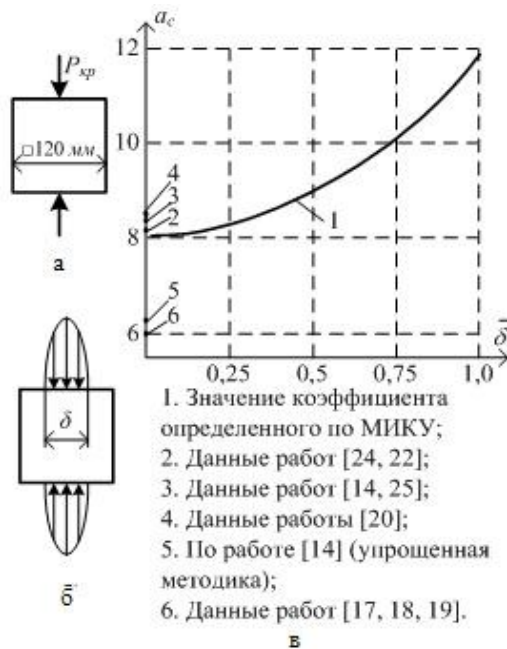


Рис. 9. Свободно опертая пластина под действием сосредоточенных сил

Аналогичное значение получили также А.Р. Филиппов [17] и А.И. Лурье [18], что на рис. 9, в показано точкой 6. С. Лукаевич [14] решая данную задачу, также принимал статически возможное напряженное состояние (5), но использовал метод, описанный Н.А. Алфуговым и Л.И. Балабухом [21]. Данный метод позволяет приближенно



учесть уравнение совместности, нарушенное принятием статически возможного НДС (5). С. Лукасевичем [14] получено значение коэффициента  $\alpha_c = 8,37$  (точка 3 на рис. 9, в). Пользуясь аналогичным подходом, но удерживая при разложении функций большее количество членов, С.В. Кудинов [22] получил  $\alpha_c = 8,17$  (точка 2 на рис. 9, в).

Другими авторами приводятся следующие значения коэффициента:

$\alpha_c = 8,50$  (точка 4 на рис. 9, в) получено Ф.А. Романенко [20];

$\alpha_c = 8,17$  (точка 2 на рис. 9, в) получено Yama-ki N. [24];

$\alpha_c = 8,37$ , (точка 3 на рис. 9, в) получено M.Z. Khan и A.C. Walker [25].

Заметим, что значение  $\alpha_c = 8,17$  получило неплохие экспериментальные подтверждения, представленные в работах [23, 25].

В расчетах устойчивости по МИКУ исходное поле является решением задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии и представляет собой сугубо неоднородное поле. Для его определения сосредоточенная сила аппроксимировалась распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону параболы с максимумом в середине пластины (рис. 9, б). Величина этого максимума выбирается таким образом, чтобы сила, эквивалентная распределенной нагрузке, была неизменной. На рис. 9, в показан график изменения значения коэффициента  $\alpha_c$ , полученного по методу идентификации краевых условий, в зависимости от относительной длины участка  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{L}$ , на котором действует распределенная нагрузка.

Полученное таким образом значение коэффициента при  $\bar{\delta} = 5\%$  составляет  $\alpha_c = 8,053$ , а при  $\bar{\delta} = 2\%$  –  $\alpha_c = 8,051$ , т.е. погрешностью в определении коэффициента  $\alpha_c$ , связанной с заменой сосредоточенной силы на статически эквивалентную распределенную, можно пренебречь ( $\varepsilon = 0,025\%$ ).

При увеличении удлинения, т.е. уменьшении влияния границ и приближении пластины к бесконечной полосе, наблюдается меньшее расхождение значений критической силы.

Например, для пластины с удлинением  $\lambda = 2$  коэффициент в формуле (4), рассчитанный по МИКУ, составляет  $\alpha_c = 4,73$ , а его значения, приводимые другими авторами [14, 19, 21 – 23], изменяются в диапазоне от  $\alpha_c = 4,11$  до  $\alpha_c = 4,73$ .

#### 2.4. Сравнение результатов расчета устойчивости нервюры с криволинейными поясами с результатами, полученными по МКЭ

В последнем примере сравнивались результаты расчетов, полученные по МКЭ и по методике, описанной в работах [7, 10] для нервюры, близкой своими геометрическими параметрам и физическими характеристиками материала к нервюре самолета типа АН. Конфигурация и схема нагружения приведены на рис. 10, координаты осевых линий поясов – в табл. 5. Толщина стенки  $t = 2,5$  мм, шаг регулярного набора стоек  $2c = 177$  мм, геометрические характеристики остальных элементов нервюры приведены в табл. 6.

Все элементы изготовлены из материала с модулем упругости  $E = 72000$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,33$ . Нервюра сжата равномерными погонными усилиями  $p = 150$  Н/мм и сосредоточенными тангенциальными силами  $Q_e = Q_n = 5000$  Н, как показано на рис. 10.

Для упрощения задания исходных данных в МКЭ принимается, что при выпучивании стенка нервюры посредством поясов опирается на абсолютно жесткие в своей плоскости и абсолютно податливые из нее панели. Применение МИКУ для получения таких условий опирания подразумевает отсутствие компенсаторов и нулевую изгибную жесткость силовых панелей.

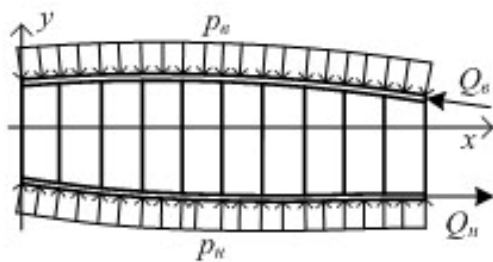


Рис. 10. Конфигурация и схема нагружения нервюры

Таблица 5

Координаты осевых линий криволинейных поясов

$X, мм$	$Y_v, мм$	$Y_n, мм$
0	204	-257
177	214	-281
354	221	-302
531	223	-317
708	221	-331
885	217	-343
1062	209	-351
1239	198	-335
1416	176	-335
1593	156	-335
1770	135	-335

Таблица 6

Характеристики поперечных сечений одномерных элементов нервюры

Элемент нервюры	Площадь сечения $F, мм^2$	Момент инерции $I_z, мм^4$	Момент инерции $I_y$ (для стойки $-I_x$ ), $мм^4$	Момент инерции свободного кручения $I_{кр}, мм^4$
верхний пояс	175	17865	365	1094
нижний пояс	165	14974	344	1031
стойка	90	—	6750	730

Параметр устойчивости, рассчитанный по программе типа Cosmos с использованием 1100 элементов, составил  $\kappa = 2,45$ , с использованием 2720 элементов  $\kappa = 2,22$ . По методике [7, 10] при удержании по длине 9 функций и по высоте 9 функций  $\kappa = 2,05$ , а при удержании по длине 11 и по высоте 9 –

$\kappa = 2,00$ . Форма потери устойчивости одинакова во всех случаях (рис. 11).

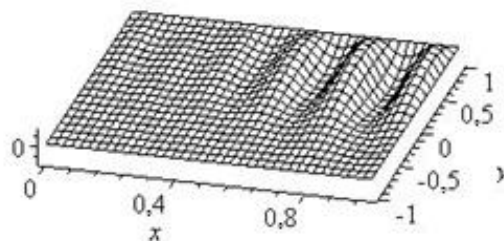


Рис. 11. Форма потери устойчивости нервюры

Приближенные методы, основанные на принципе минимума потенциальной энергии или его модификациях, при увеличении числа функций, как известно, уточняют собственные значения, приближаясь к точному решению сверху. Поэтому можно сделать вывод о том, что полученные результаты говорят о лучшей сходимости и точности приближенного аналитического решения, получаемого с помощью МИКУ, чем решения, доставляемого МКЭ.

### 3. Анализ взаимодействия нервюры и подконструкции

Типовым решением соединения поясов нервюры с силовыми панелями в конструкции кессона крыла является или непрерывное крепление поясов нервюры к панелям, или крепление посредством компенсаторов (книц). Эти элементы для выделенного блока – нервюры, также как лонжероны и панели, являются элементами, определяющими жесткость граничного контура, по которому нервюра взаимодействует со всей системой.

Если условия этого взаимодействия будут установлены (идентифицированы), критический параметр устойчивости нервюры, очевидно, будет являться таковым для всей рассматриваемой системы (одно из основных положений МИКУ).

Идентификация краевых условий в том случае, когда нервюра взаимодействует с панелями по линии их сопряжения, выполнена в работах [3 – 5] для

одно- и двумерных моделей путем решения 2l периодической краевой задачи (l – расстояние между нервюрами).

Ниже рассматривается случай взаимодействия панелей и нервюры посредством компенсаторов.

При расчете жесткости (податливости) компенсатора для него принимается модель одномерного упругого элемента переменной по длине жесткости, работающего на изгиб и кручение (рис. 12). Здесь усилия, отмеченные индексом "0", относятся к сечению компенсатора у панели, индекс "1" относит эти

усилия к сечению компенсатора у нервюры, l – длина компенсатора, величины  $\varphi_0$  и  $w_0$  – угол поворота и прогиб конечного сечения компенсатора у нервюры, обусловленные деформацией панели:  $\varphi_1$  и  $w_1$  – те же величины, обусловленные деформативностью самого компенсатора (при абсолютно жестком компенсаторе эти величины равны нулю). Величины  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  малы в сравнении с единицей, а  $w_0$  и  $w_1$  малы в сравнении с характерным размером поперечного сечения компенсатора.

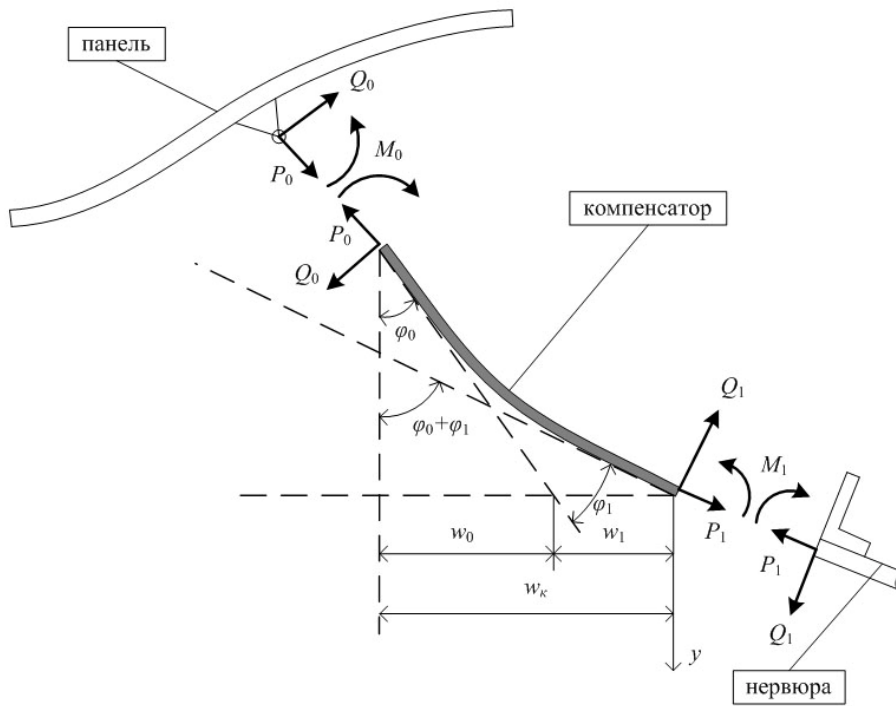


Рис. 12. К определению жесткости компенсатора

Уравнения равновесия компенсатора в деформированном состоянии будут:

$$\begin{aligned} P_1 \cos \varphi_k - Q_1 \sin \varphi_k - P_0 \cos \varphi_0 + Q_0 \sin \varphi_0 &= 0; \\ P_1 \sin \varphi_k + Q_1 \cos \varphi_k - P_0 \sin \varphi_0 - Q_0 \cos \varphi_0 &= 0; \\ M_1 - M_0 - P_1 w_k \cos \varphi_k + Q_1 w_k \sin \varphi_k + P_1 l_k \sin \varphi_k + \\ + Q_1 l_k \cos \varphi_k &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где (рис. 12):

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_0 + \varphi_1; \\ w_k &= w_0 + w_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая деформации малыми, можно принять  $\cos \varphi_k = 1$ ,  $\cos \varphi_0 = 1$ ,  $\sin \varphi_k = \varphi_k$ ,  $\sin \varphi_0 = \varphi_0$ , тогда система (6) запишется так:

$$\begin{aligned} P_1 - Q_1 \varphi_k - P_0 + Q_0 \varphi_0 &= 0; \\ P_1 \varphi_k + Q_1 - P_0 \varphi_0 - Q_0 &= 0; \\ M_1 - M_0 - P_1 w_k + Q_1 w_k \varphi_k + P_1 l_k \varphi_k + Q_1 l_k &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В приведенных уравнениях конечными являются величины  $P_0$  и  $P_1$ , а величины,  $Q_0$ ,  $Q_1$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_k$  и  $w_k$  представляют собой возмущения. Поэтому

слагаемые, подчеркнутые один раз, являются малыми второго порядка, дважды – малыми третьего порядка малости, в связи с чем уравнения (8) можно упростить:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0; \\ Q_0 &= Q_1 + P_0 \varphi_1; \\ M_0 &= M_1 + P_0 (l_k \varphi_1 - w_1) + Q_1 l_k. \end{aligned} \quad (9)$$

В работах [3 – 5] были установлены зависимости, связывающие угол поворота сечений панелей с действующими моментами в виде:

$$\varphi_0 = \overline{\varphi_0} M_0,$$

где  $\overline{\varphi_0} = \frac{1}{C_i}$  – податливость нагруженной растяжением-сжатием панели ( $i = 1$  для верхней панели,  $i = 2$  – для нижней).

Если в силу незначительности усилия  $P_0 = P_1$  и податливости компенсатора на изгиб пренебречь работой исходного напряженного состояния компенсатора на перемещениях возмущенного, то с учетом соотношений (9):

$$\begin{aligned} w_0 &= l_k \sin \varphi_0 \approx l_k \varphi_0 = l_k \overline{\varphi_0} M_0 \approx l_k \overline{\varphi_0} (M_1 + Q_1 l_k); \\ \varphi_0 &= \overline{\varphi_0} M_0 \approx \overline{\varphi_0} (M_1 + Q_1 l_k). \end{aligned} \quad (10)$$

Связь угла поворота  $\varphi_1$  и прогиба  $w_1$  концевого сечения компенсатора, вызванные действием момента  $M_1$  и перерезывающей силы  $Q_1$ , можно определить по формуле

$$\begin{aligned} w_1 &= w_Q + w_M = \overline{w_Q} Q_1 + \overline{w_M} M_1; \\ \varphi_1 &= \varphi_Q + \varphi_M = \overline{\varphi_Q} Q_1 + \overline{\varphi_M} M_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\overline{w_Q}$ ,  $\overline{\varphi_Q}$  и  $\overline{w_M}$ ,  $\overline{\varphi_M}$  – прогиб и угол поворота концевого сечения компенсатора при действии на него как на консольный стержень переменного сечения единичных усилий  $Q_1=1$  и  $M_1=1$  соответственно. Причем, в силу теоремы Бетти о взаимности работ, имеет место равенство  $\overline{\varphi_Q} = \overline{w_M}$ .

Подставляя в (7) соотношения (10) и (11), получим:

$$\begin{aligned} (\overline{w_Q} + l_k^2 \overline{\varphi_0}) Q_1 + (\overline{w_M} + l_k \overline{\varphi_0}) M_1 &= w_k; \\ (\overline{\varphi_Q} + l_k \overline{\varphi_0}) Q_1 + (\overline{\varphi_M} + \overline{\varphi_0}) M_1 &= \varphi_k. \end{aligned}$$

Решая данную систему относительно  $Q_1$  и  $M_1$ , приходим к окончательному результату:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_\theta w_k - C_{\theta w} \varphi_k; \\ M_1 &= C_w \varphi_k - C_{\theta w} w_k, \end{aligned} \quad (12)$$

где приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} C_w &= \frac{\delta_{11}}{\Delta}; C_{\theta w} = \frac{\delta_{12}}{\Delta}; C_\theta = \frac{\delta_{22}}{\Delta}; \\ \delta_{11} &= \overline{w_Q} + l_k^2 \overline{\varphi_0}; \\ \delta_{22} &= \overline{\varphi_M} + \overline{\varphi_0}; \\ \delta_{12} &= \overline{w_M} + l_k \overline{\varphi_0} = \overline{\varphi_Q} + l_k \overline{\varphi_0}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta = \varphi_0 (\overline{w_Q} + l_k^2 \overline{\varphi_M} - 2l_k \overline{\varphi_Q}) + \overline{w_Q} \overline{\varphi_M} - \overline{\varphi_Q}^2.$$

Для вычисления параметров  $\overline{\varphi_M}$ ,  $\overline{\varphi_Q} = \overline{w_M}$ ,  $\overline{w_Q}$  рассматривается деформирование типового компенсатора (рис. 13) под действием приложенных на его конце единичного изгибающего момента и единичной перерезывающей силы (на рис. 13 длина компенсатора обозначена буквой "a", то есть  $a=l_k$ ).

Геометрические характеристики компенсатора таковы:

$$\begin{aligned} h_1(x) &\equiv h_{1x} = h_{1a} [x(1-\alpha) + \alpha], \quad 0 \leq x \leq 1; \\ h_2(x) &\equiv h_{2x} = \frac{h_{2a}}{1-\alpha_1} (x-\alpha_1) H(x-\alpha_1), \quad 0 \leq x \leq 1; \\ \alpha &= \frac{h_{10}}{h_{1a}}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{a}; \end{aligned}$$

$$F(x) = f F_0(x),$$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{для одинарного компенсатора;} \\ 2 & \text{для двойного компенсатора,} \end{cases}$$

$$F_0(x) = a^2 \overline{F_0}(x);$$

$$\overline{F_0}(x) = (\overline{h_{1x}} + \overline{h_{2x}} + \overline{\delta_2}) \overline{\delta_1} + \overline{H_1} \overline{\delta_2} + \overline{H_2} \overline{\delta_3};$$

$$S_y(x) = f S_{y0}(x) = f a^3 \overline{S_{y0}}(x);$$

$$\overline{S}_{y0}(x) = \frac{\overline{\delta}_1}{2} \left[ \left( \overline{h}_{1x} + \frac{\overline{\delta}_2}{2} \right)^2 - \left( \overline{h}_{2x} + \frac{\overline{\delta}_2}{2} \right)^2 \right];$$

$$z_0 = az_0; \overline{z}_0 = \frac{\overline{S}_{y0}}{F_0};$$

$$I_y(x) = fI_{0y}(x) = fa^4 \overline{I}_{0y}(x);$$

$$\overline{I}_{0y}(x) = F_0 z_0^2 + \frac{\overline{H}_1 \overline{\delta}_2^3}{12} + \frac{\overline{H}_2 \overline{\delta}_3^3}{12} + \frac{\overline{\delta}_1}{3} \left[ \left( \overline{h}_{1x} + \frac{\overline{\delta}_2}{2} \right)^3 + \left( \overline{h}_{2x} + \frac{\overline{\delta}_2}{2} \right)^3 \right] H(x - \overline{a}_1).$$

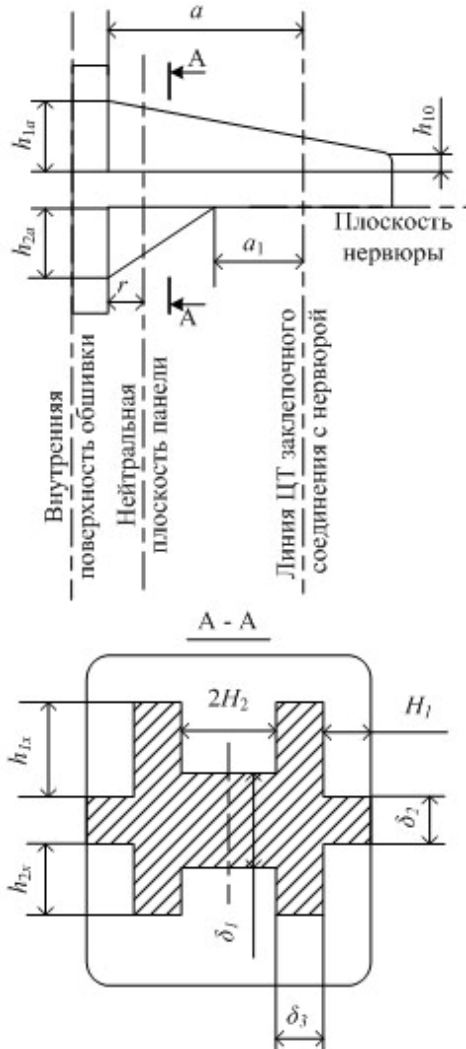


Рис. 13. Геометрия типового компенсатора

В приведенных зависимостях знак черты над величинами, имеющими размерность длин, относит их

к длине компенсатора ( $a$ );  $F$ ,  $S_y$ ,  $I_y$ ,  $z_0$  – площадь, статический момент, момент инерции и координата центра тяжести поперечного сечения компенсатора,  $H(x)$  – функция Хевисайда.

Вычисляя искомые перемещения от действия единичного момента и единичной перерезывающей силы, получим:

$$\begin{aligned} \overline{w}_Q &= \frac{1}{faE} \int_0^1 \left( \frac{x^2}{I_0(x)} + \frac{2(1+\mu)}{\rho F_0(x)} \right) dx, \left[ \frac{\text{длина}}{\text{сила}} \right]; \\ \overline{\varphi}_Q &= \overline{w}_M = \frac{1}{fa^2 E} \int_0^1 \frac{xdx}{I_0(x)}, \left[ \frac{1}{\text{сила}} \right]; \\ \overline{\varphi}_M &= \frac{1}{fa^3 E} \int_0^1 \frac{dx}{I_0(x)}, \left[ \frac{1}{\text{момент}} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $E$ ,  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала компенсатора;  $\rho$  – коэффициент, учитывающий неравномерность касательных напряжений по высоте сечения компенсатора (для прямоугольного сечения  $\rho = \frac{5}{6}$ ).

Крутильная жесткость компенсатора определяется в предположении, что он работает на свободное кручение как консольная балка переменного сечения. Угол закручивания компенсатора в сечении, связанном с панелями, в силу большой мембранной жесткости последних можно принять равным нулю. Связь между крутящим моментом и углом закручивания в рассматриваемом случае дается формулой:

$$M_{кр} = C_{кр} \theta_{кр}. \quad (15)$$

Тогда угол закручивания концевое сечения компенсатора определится так:

$$\theta_{кр} = \int_0^a \frac{M_{кр} \overline{M}}{GI_{кр}} dx,$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент, действующий в концевом сечении компенсатора;  $\overline{M}$  – единичный крутящий момент, приложенный в том же сечении;  $G$  – модуль сдвига материала компенсатора;  $I_{кр}$  – момент инерции свободного кручения.

По теории кручения Сен-Венана для сечений, составленных из вытянутых прямоугольников, величину  $I_{кр}$  можно определить по формуле

$$I_{кр}(x) = \sum k_i(x) b_i(x) \delta_i^3,$$

где  $b_i, \delta_i$  – длина и толщина пластинчатых элементов в поперечном сечении компенсатора;  $k_i$  – коэффициент, зависящий от отношения  $\frac{b_i}{\delta_i}$ . Значения этих коэффициентов подробно протабулированы.

Переходя к безразмерным величинам, получим:

$$\theta_{кр} = \frac{M_{кр}}{f a^3 G} a \int_0^a \frac{dx}{I_{кр}(x)},$$

где

$$\overline{I_{кр}}(x) = \left[ k_1(x) \delta_1^3 (\overline{h_{1x}} + \overline{h_{2x}} + \overline{\delta_2}) + k_2 \overline{H_1} \delta_2^3 + k_3 \overline{H_2} \delta_3^3 \right].$$

Постоянные  $k_2$  и  $k_3$  вычисляются по табличным данным путем линейной интерполяции, а переменный коэффициент  $k_2(x)$  – путем линейной интерполяции в сочетании с аппроксимацией по длине компенсатора с помощью интерполяционных формул Лагранжа.

Определяя далее  $C_{кр}$  как

$$C_{кр} = \frac{M_{кр}}{\theta_{кр}} = \frac{1}{\theta_{кр}|_{M_{кр}=1}},$$

получим:

$$C_{кр} = \frac{f a^3 G}{1 \int_0^a \frac{dx}{\overline{I_{кр}}(x)}}. \quad (16)$$

Из результатов данного пункта четко видно, что геометрические и жесткостные параметры панелей и компенсатора входят в коэффициенты жесткости в (12), а в некоторые из них входит и критический параметр нагрузки.

Ниже исследуется влияние на устойчивость нервюры жесткости и количества компенсаторов (п.3.1), жесткости поясов (п.3.2), количества и жесткости стоек (п.3.3). В п.3.4. приведен анализ приме-

нимости конструктивно-ортотропной модели для исследования устойчивости подкрепленной пластины.

### 3.1. Исследование влияния жесткости и количества компенсаторов на параметр устойчивости нервюры

Чтобы выделить влияние жесткости и количества компенсаторов на устойчивость нервюры, исследование проводится в предположении, что панели абсолютно жесткие ( $\varphi_0 = 0$  и  $w_0 = 0$  в соотношениях (8), (13)). Коэффициенты жесткости компенсаторов, определяемые по формулам (13), (16) при таких исходных данных  $a = 75$  мм,  $a_1 = 25$  мм,  $h_{1a} = 18$  мм,  $h_{2a} = 12$  мм,  $h_{10} = 2$  мм,  $H_2 = 5$  мм,  $H_1 = 5$  мм,  $\delta_1 = 5$  мм,  $\delta_2 = \delta_3 = 4$  мм, приводятся к безразмерному виду и изменяются пропорционально одному параметру  $\gamma$ , т.е.

$$\overline{C_w} = \frac{C_w h^2}{D} \gamma; \quad \overline{C_{\text{вф}}} = \frac{C_{\text{вф}} h}{D} \gamma;$$

$$\overline{C_\varphi} = \frac{C_\varphi}{D} \gamma; \quad \overline{C_\theta} = \frac{C_\theta}{D} \gamma,$$

где  $h$  – толщина стенки нервюры,  $D$  – ее цилиндрическая жесткость.

Для исследования брались следующие данные: длина прямоугольной нервюры  $L=1,6$  м; высота –  $H=0,52$  м; толщина стенки  $h=2,5$  мм; модуль Юнга материала  $E=72000$  МПа; коэффициент Пуассона –  $\mu=0,33$ . За параметр устойчивости принято отношение критической нагрузки нервюры к критической нагрузке при свободном опирании ее границы.

Если установить по одному компенсатору по середине верхнего и нижнего поясов и постепенно увеличивать их жесткости, то полученная таким образом кривая изменения параметра устойчивости характеризуется резким ростом вначале, а затем плавным приближением к предельной прямой (рис. 14).

На рисунке приведены также формы потери устойчивости при сдвиге и сжатии. С увеличением жесткости компенсаторов смена форм потери ус-

тойчивости происходит как плавно, так и с изломами (на рис. 14 они отмечены вертикальными пунктирными прямыми). Изломы указывают на качественное изменение формы потери устойчивости.

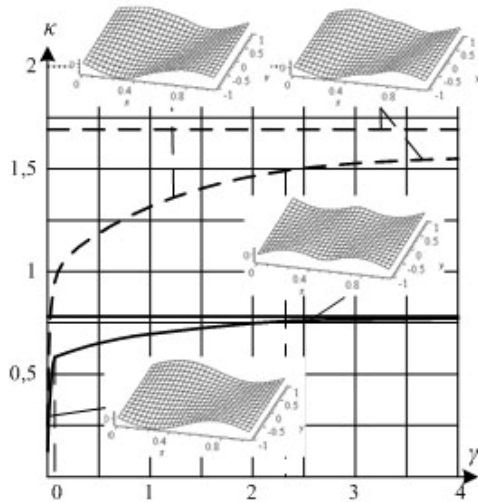


Рис. 14. Влияние жесткости компенсатора на параметр и форму потери устойчивости при сжатии (сплошной график) и сдвиге (пунктирный график)

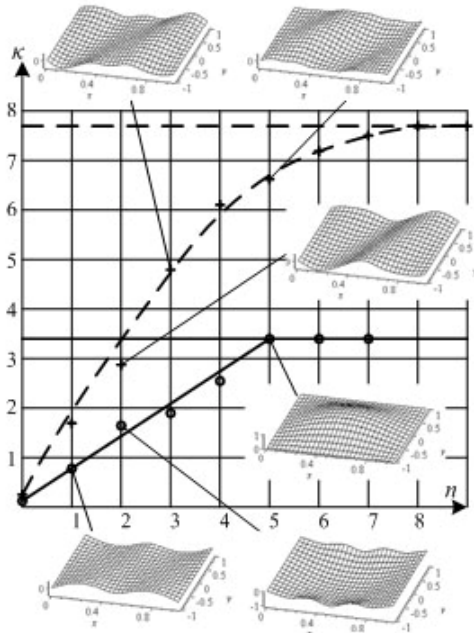


Рис. 15. Влияние количества компенсаторов на параметр и форму потери устойчивости при сжатии (сплошной график) и сдвиге (пунктирный график)

Исследование влияния количества компенсаторов проводилось для компенсатора, используемого

на самолетах типа АН, т.е. при  $\gamma=1$   $\overline{C}_w=1$ ,  $\overline{C}_{\text{мф}}=10$ ,  $\overline{C}_\varphi=80$ ,  $\overline{C}_\theta=8$ . Такой компенсатор для данной конструкции считается жестким. Зависимость параметра устойчивости от количества равномерно расположенных таких компенсаторов приведена на рис. 15.

С увеличением количества компенсаторов форма потери устойчивости вначале изменяется скачкообразно, чем и обусловлен разброс значений параметра устойчивости. Пояса нервюры, когда они оперты на три компенсатора при сжатии и на пять – при сдвиге, практически не выпучиваются. С дальнейшим увеличением количества компенсаторов форма потери устойчивости качественно не меняется, и точки ложатся на одну прямую. Когда пояса нервюры опираются на пять и более компенсаторов при сжатии и соответственно восемь и более при сдвиге, параметр устойчивости не увеличивается – условия опирания соответствуют условиям жесткой заделки.

По приведенным результатам можно сделать вывод о том, что при расчете реальных конструкций компенсаторы можно считать абсолютно жесткими.

### 3.2. Исследование влияния жесткости поясов на устойчивость нервюры

Влияние жесткостей поясов на устойчивость нервюры исследуется для двух случаев нагружения: под действием равномерного сжимающего (рис. 16) и сдвигового (рис. 17) усилий.

За величину прикладываемых нагрузок принимаются значения критических усилий для свободно опертой нервюры.

Для исследования взята нервюра со следующими характеристиками: длина  $L = 1600$  мм; высота  $H = 520$  мм; толщина стенки  $t = 2,5$  мм. Элементы нервюры выполнены из одного материала с модулем Юнга  $E = 72000$  МПа, коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,33$ .

Влияние изгибной и крутильной жесткости поясов рассматривается отдельно. Значения этих жест-



костей характеризуются параметрами  $\alpha = EI_z/DH$  – относительная изгибная жесткость и  $\beta = EI_{кр}/DH$  – относительная жесткость свободного кручения, где  $D$  – цилиндрическая жесткость стенки,  $H$  – ее высота,  $I_z$ ,  $I_{кр}$  – моменты инерции сечения пояса относительно оси  $OZ$  и свободного кручения соответственно.

Зависимость параметра устойчивости при равномерном сжатии от относительной изгибной жесткости поясов  $\kappa(\alpha)$ , полученная при постоянной крутильной жесткости  $\beta=0$  и  $\beta=\infty$ , представлена на рис. 16 сплошными графиками. Аналогичная зависимость параметра устойчивости от относительной крутильной жесткости поясов  $\kappa(\beta)$  при постоянной изгибной жесткости  $\alpha=0$  и  $\alpha=\infty$  представлена пунктирными графиками на том же рисунке.

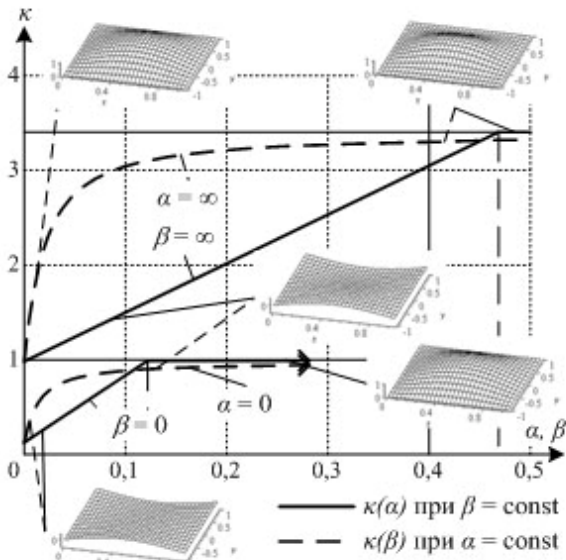


Рис. 16. Влияние относительной изгибной  $\alpha = EI_z/DH$  и крутильной  $\beta = EI_{кр}/DH$  жесткостей поясов на параметр устойчивости при равномерном сжатии

Верхние два графика с увеличением жесткости стремятся к предельному значению, которое соответствует параметру устойчивости для пластины с жесткой заделкой, нижние графики стремятся к параметру устойчивости, который соответствует критическому усилию свободно опертой пластины.

С изменением крутильной жесткости поясов зависимости параметра устойчивости носят плавный

характер (без изломов). При изменении изгибной жесткости – зависимость  $\kappa(\alpha)$  линейная.

С увеличением жесткости  $\alpha$  в возмущенном состоянии выпучивание поясов уменьшается, а при достижении некоторого значения – пояса вообще не выпучиваются – эта точка соответствует единственному излому на кривых  $\kappa(\alpha)$  и дальнейшее увеличение жесткости не приводит к изменению параметра  $\kappa$ .

Графики зависимости параметра устойчивости той же системы от изгибной жесткости поясов (для двух предельных значений крутильной жесткости), нагруженной сдвиговыми усилиями, приведены на рис. 17.

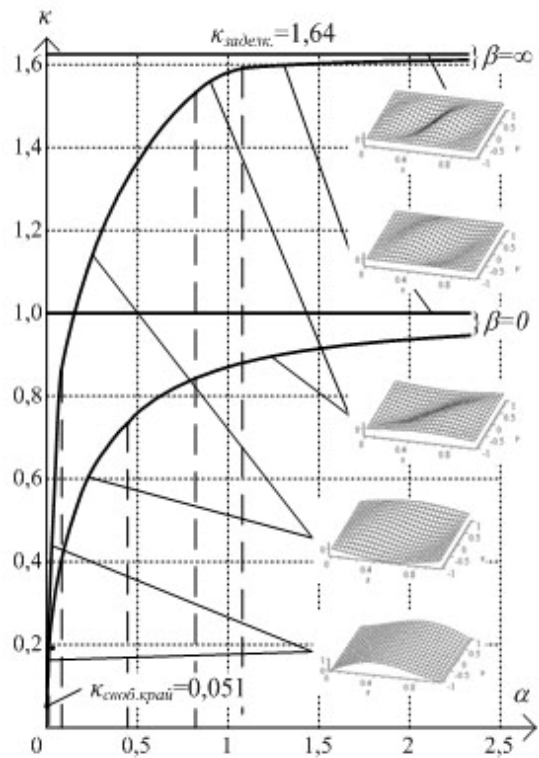


Рис. 17. Влияние относительной изгибной жесткости поясов  $\alpha = EI_z/DH$  на параметр устойчивости при равномерном сдвиге

На графиках наблюдается несколько точек излома кривых  $\kappa(\alpha)$ , например, при  $\beta = \infty$  их четыре, и соответствуют они образованию новой полуволны (окончательно, при условиях жесткой заделки, их четыре).

**3.3. Исследование зависимости параметра устойчивости нервюры от количества и жесткости стоек**

Исследования влияния жесткости стоек на параметр и форму потери устойчивости проводится на модели нервюры, описанной в п.3.2. По границам  $y = \pm H/2$  стенка нервюры считается свободно опертой. Величина равномерной сжимающей и равномерной сдвиговой нагрузки во всех исследованиях принимаются равной критическому усилию нервюры без стоек.

При исследовании рассматривается одна расположенная посередине стенки стойка с относительной изгибной жесткостью

$$\eta_x = \frac{I_x E}{DH}$$

и относительной жесткостью свободного кручения

$$\eta_{кр} = \frac{I_{кр} G}{DH},$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость стенки;  $H$  – ее высота (длина стойки);  $I_x$  – момент инерции сечения стойки относительно оси  $OX$ ;  $I_{кр}$  – момент инерции свободного кручения стойки;  $E$  – модуль Юнга;  $G$  – модуль сдвига материала стойки.

Зависимость параметра устойчивости от относительных жесткостей стойки при равномерном сжатии приведена на рис 18, при сдвиге – на рис. 19.

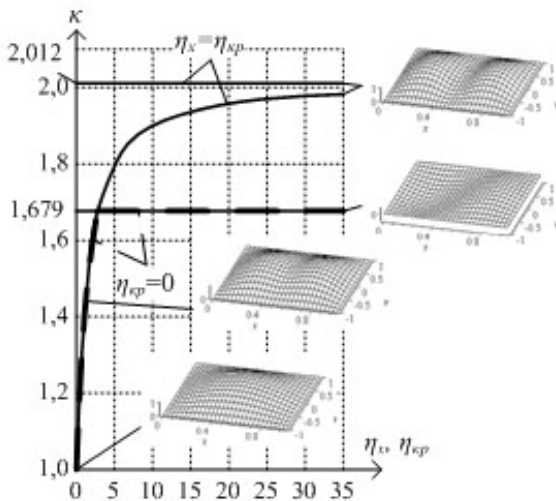


Рис. 18. Влияние жесткостей стойки на параметр и форму потери устойчивости при сжатии

На рис. 18 приведены два графика и две предельные прямые. Пунктиром отмечена зависимость параметра устойчивости от относительной изгибной жесткости  $\eta_x$  при нулевой крутильной ( $I_{кр} = \eta_{кр} = 0$ ). Если жесткость  $\eta_x$  равна нулю, то форма потери устойчивости соответствует форме потери устойчивости свободно опертой пластины с образованием одной полуволны в обоих направлениях. С увеличением изгибной жесткости стойки прогиб пластины в месте расположения стойки уменьшается, а при достижении  $\eta_x = 2,75$  вообще исчезает. Форма потери устойчивости меняется качественно и соответствует форме потери устойчивости двух свободно опертых пластин (слева и справа от стойки). Дальнейшее увеличение изгибной жесткости стойки не влияет на параметр устойчивости системы.

Если крутильная жесткость имеет конечное значение (на рис. 18 сплошной график построен при одновременном изменении относительной изгибной и крутильной жесткостей), то при достижении  $\eta_x = \eta_{кр} = 2,75$  форма потери устойчивости качественно не меняется, и параметр устойчивости с увеличением жесткостей продолжает увеличиваться до предельного значения, которое равно параметру устойчивости равномерно сжатой пластины, свободно опертой по трем сторонам и жестко заделанной на осевой линии стойки.

Заметим, что изменение крутильной жесткости расположенной посередине стойки никак не влияет на устойчивость равномерно сжатой нервюры при нулевой изгибной жесткости. Это связано с симметрией формы потери устойчивости. Но если нервюра нагружена равномерным сдвигом, то на устойчивость нервюры будет влиять как одновременное изменение изгибной и крутильной жесткостей, так и их раздельное изменение.

На рис. 19 приведены три графика зависимости параметра устойчивости  $k$  от относительных жесткостей  $\eta_x, \eta_{кр}$ : зависимость  $k$  от  $\eta_x$  при  $\eta_{кр} = 0$ , зави-

симось к от  $\eta_{кр}$  при  $\eta_x=0$  и зависимость к от  $\eta_x$  (или  $\eta_{кр}$ ) при  $\eta_x=\eta_{кр}$ .

По приведенным графикам можно сделать вывод о том, что крутильная жесткость стойки мало влияет на величину параметра устойчивости, влияние изгибной жесткости – значительно. На том же рисунке приведены: форма потери устойчивости для нервюры без стойки; три формы, соответствующие предельным значениям жесткостей в трех вышеописанных вариантах; две формы потери устойчивости, имеющие место при значении  $\eta_x=\eta_{кр}=2,5$  и  $\eta_x=2$  ( $\eta_{кр}=0$ ).

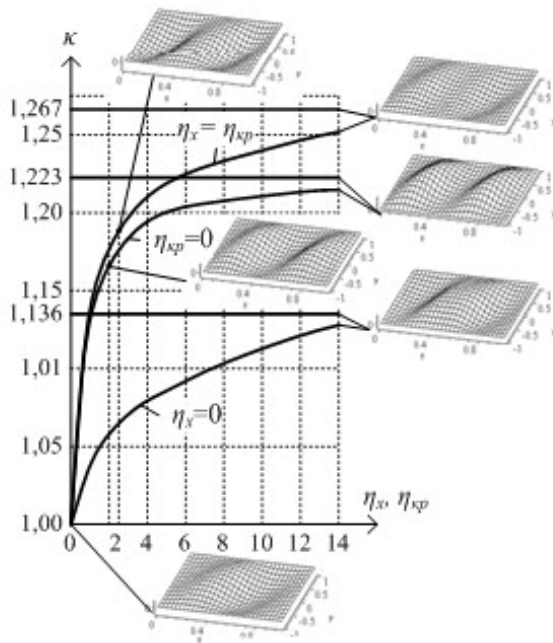


Рис. 19. Влияние жесткостей стойки на параметр и форму потери устойчивости при сдвиге

### 3.4. Анализ применимости конструктивно-ортотропной модели для исследования устойчивости подкрепленной пластины

При расчете пластин, подкрепленных системой дискретно расположенных ребер, считается, что при достаточно малом шаге их расположения и их малой жесткости можно применять конструктивно-ортотропную модель. Так, например, в работе [26] в результате использования такой модели получена формула критических напряжений при равномерном сжатии свободно опертой пластины:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E f_1^2 r}{12(1-\mu^2)}, \quad (17)$$

где

$$r = 1 + \frac{E^* I_y}{2cD} \left( 1 - \frac{S_y^2}{\gamma F I_y} \right);$$

$$\gamma = 1 + \frac{E}{E^*} \frac{2ch}{F(1-\mu^2)};$$

$$f_1 = \frac{h}{a};$$

$E^*$ ,  $F$ ,  $S_y$ ,  $I_y$  – соответственно модуль Юнга материала стрингера, площадь, статический момент и осевой момент инерции поперечного сечения стрингера относительно оси, лежащей в срединной плоскости пластины;  $2c$  – шаг равномерно расположенных стоек;  $E$ ,  $\mu$ ,  $D$ ,  $h$ ,  $a$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, цилиндрическая жесткость, толщина и высота пластины (длина стрингера).

Критическое напряжение пластины без эксцентриситета стоек, приведенное в работе [27], после некоторых преобразований и с использованием введенных выше обозначений дается формулой:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E^* \lambda^2 h^3}{12(1-\mu^2) L (F_1 + Lh)} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{E^* I_y}{DL} k_1 \right] \quad (18)$$

где  $\lambda = \frac{L}{a}$ ;  $L$  – длина пластины;  $F_1$ ,  $k_1$  – площадь поперечного сечения стоек и их количество.

Использование конструктивно-ортотропной модели подразумевает осреднение жесткостных характеристик системы "стенка-стойки", что позволяет не учитывать работу дискретно расположенных стоек, а жесткость изотропной пластины записывается как жесткость ортотропной пластины с цилиндрическими жесткостями

$$D_1 = D; \quad D_2 = D \left( 1 + \frac{E I_y}{D 2c} \right);$$

$$D_3 = D \left( 1 + \frac{G I_\kappa}{D 2c} \right).$$

Можно рассчитать устойчивость нервюры с использованием такой модели, если из выражения потенциальной энергии всей системы [10] исключить работу стоек, а выражение энергии пластины заменить выражением:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{стен} = & \frac{1}{2} \int_0^{\Phi_0} \int_0^L \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2(1-\mu) D_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \mu (D_1 + D_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \lambda \int_0^{\Phi_0} \int_0^L \left[ N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В табл. 7 и на рис. 20 приведены зависимости параметра устойчивости от количества стоек, полученные с помощью:

- изложенной в работе [10] методики и с учетом дискретного расположения стоек;
- формулы (17);
- формулы (17) и в предположении, что стойки имеют эксцентриситет, равный половине высоты поперечного сечения стойки (во всех остальных расчетах считается, что осевые линии стоек лежат в срединной плоскости пластины);
- формулы (18);
- изложенной в работах [10] методики, но без учета дискретного расположения стоек (стойки учитываются в выражении потенциальной энергии пластины (19)).

Исследования приведены для пластины со следующими характеристиками: длина  $L=1000$  мм; высота  $H=200$  мм ( $\lambda = \frac{L}{H} = 5$ ); толщина стенки  $t=5$  мм. Пластина и стойки выполнены из одного материала с модулем Юнга  $E=72000$  МПа, коэффи-

циентом Пуассона  $\mu=0,33$ . Стойки имеют прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон  $\frac{1}{3}$  (большая сторона перпендикулярна срединной плоскости пластины). Размеры поперечного сечения стоек выбираются из условия  $\alpha \equiv \frac{E * F}{Eh2c} = const$ , т.е. с увеличением количества стоек суммарная площадь поперечных сечений остается неизменной. Параметр устойчивости пластины  $k$  без стоек равен единице.

Таблица 7

Сходимость приближенного значения к точному

Количество стоек	Дискретное расположение стоек	Конструктивно-ортогогральная модель с учетом (19)	По формуле (17) без учета эксцентриситета	По формуле (17) с учетом эксцентриситета	По формуле (18) без учета эксцентриситета
1	1,315	62,48	77,58	211,08	27,98
2	2,030	26,74	29,50	85,46	16,62
3	3,364	16,80	17,75	52,27	11,94
4	5,466	12,28	12,68	37,45	9,389
5	7,003	9,718	9,889	29,16	7,782
6	6,894	8,077	8,137	23,88	6,678
7	6,350	6,938	6,938	20,24	5,872
8	5,744	6,103	6,068	17,58	5,258
9	5,256	5,464	5,408	15,55	4,774
10	4,770	4,961	4,890	13,95	4,384
15	3,402	3,490	3,395	9,304	3,193
20	2,708	2,777	2,679	7,061	2,585
30	2,029	2,079	1,985	4,872	1,970
50	1,496	1,532	1,445	3,161	1,471

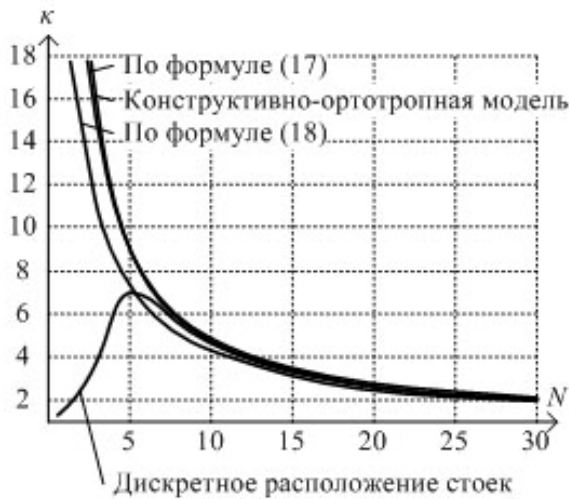


Рис. 20. Зависимость параметра устойчивости от количества стоек

На рис. 21 представлены формы потери устойчивости при наличии одной и двух стоек. При большем количестве стоек представлены графики функции прогиба по линии  $y = 0$ .

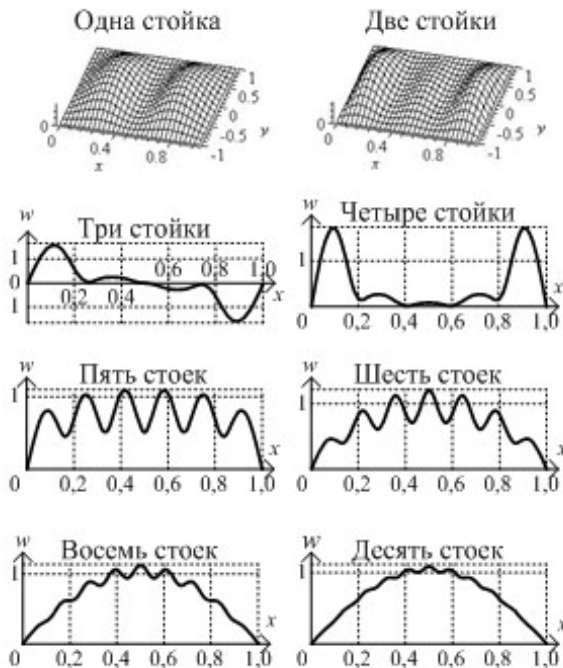


Рис. 21. Формы потери устойчивости нервюры при различном количестве подкрепляющих стоек

Как можно видеть из приведенных результатов, применение конструктивно-ортотропной модели оправдано в данном случае при наличии более 10 стоек. При иных соотношениях геометрических и

жесткостных параметров стенки и стоек требуемое количество стоек для применимости конструктивно-ортотропной модели будет иным. Если установлена одна стойка, то при потере устойчивости выпучивается только стенка, стойка — не выпучивается (рис. 21).

Форма потери устойчивости, получаемая при использовании конструктивно-ортотропной модели, схожа с формой потери устойчивости неподкрепленной пластины. Значительное отличие параметров устойчивости при малом числе ребер (рис. 20) объясняется качественно различными формами потери устойчивости. С увеличением количества стоек и одновременным уменьшением их жесткостей местная форма потери устойчивости сказывается все меньше, все больше превалирует общая форма потери устойчивости (рис. 21). Когда форма потери устойчивости дискретно подкрепленной пластины практически совпадает с формой потери устойчивости пластины с конструктивной ортотропией, значения параметров устойчивости различаются мало.

При учете расположения ребер с эксцентриситетом критические усилия значительно возрастают.

В данном примере учет дискретного расположения ребер позволяет получить оптимальное с точки зрения устойчивости распределение массы, т.е. при одной и той же массе всех стоек конструкция будет наиболее устойчива, когда их количество равно пяти.

## Заключение

Ниже приводятся направления дальнейших исследований в плане развития метода идентификации краевых условий:

1. Продолжение теоретического обоснования метода.
2. Постановка и решение нестандартных краевых задач теории пластин и оболочек при произвольных краевых условиях в перемещениях (задачи типа



Дирихле), усилиях (задачи типа Неймана), а также смешанных краевых условиях (задачи типа Ньютона) с целью установления (идентификации) краевых условий, когда операторы краевых задач содержат неизвестный параметр (расширение арсенала уже решенных подобных задач).

3. Перенесение идей метода на задачи собственных и (особенно) параметрических колебаний тонкостенных пространственных систем.

4. Моделирование эксперимента.

5. Регулярные (нестандартные) итерационные методы (процедуры) двусторонних оценок краевых параметров.

6. Расширение каталога стандартных задач устойчивости комплекса "Устойчивость и колебания". Дальнейшее развитие комплекса.

7. Развитие метода сопряжения конструктивных элементов, положенного в основу МИКУ для анализа тонкостенных пространственных систем.

8. Построение приближенных общих решений краевых задач теории пластин и оболочек для неканонических областей методом расширения области до канонической.

9. Постановка и решение конкретных нетривиальных задач устойчивости и колебаний силовой конструкции аэрокосмической техники.

## Литература

1. Халилов С.А. Проблема исследования устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов // Авиационно-космическая техника и технология: Труды ХАИ 1993 года. – Х.: ХАИ, 1994. – С. 358-369.

2. Халилов С.А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета // Авиационно-космическая техника и технология: Труды ХАИ 1994 года. – Х.: ХАИ, 1995. – С. 223-227.

3. Халилов С.А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея ме-

тода // Авиационно-космическая техника и технология: Сб. научн. тр. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2003. – Вып. 1 (36). – С. 15-21.

4. Халилов С.А., Минтюк В.Б. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели // Авиационно-космическая техника и технология: Сб. научн. тр. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2003. – Вып. 2 (37). – С. 6-10.

5. Халилов С.А., Минтюк В.Б. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе двумерной упрощенной модели // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 1 (9). – С. 24-28.

6. Минтюк В.Б. Устойчивость типовой нервюры с криволинейными поясами. Определение исходного состояния // Авиационно-космическая техника и технология: Труды Харьковского авиационного института им. Н.Е.Жуковского за 1997 г. – Х.: ХАИ, 1998. – С. 339-345.

7. Минтюк В.Б. Исследование устойчивости нервюры с криволинейными поясами при произвольных нагрузках с учетом влияния панелей посредством компенсаторов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. научн. тр. нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Х.: ХАИ, 2000. – Вып.19 (2). – С. 82-87.

8. Теоретические основы математического моделирования устойчивости несущих конструкций авиационно-космической техники: отчет о НИР (заключительный) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е.Жуковского «ХАИ»; № ГР 0100U003434; Инв. № 0203U008196. – Х.: ХАИ, 2002. – 140 с.

9. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники: отчет о НИР (заключительный) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е.Жуковского «ХАИ»;

№ ГР 0103U005070; Инв. № 0206U002451. – Х.: ХАИ, 2005. – 173 с.

10. Минтюк В.Б. Устойчивость подкрепленной в области и на криволинейной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы: Дис. канд.техн.наук: 01.02.04. – Х., 2004. – 147 с.

11. Кривцов В.С., Халилов С.А., Минтюк В.Б. Устойчивость силового кессона крыла. Численный анализ // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2006. – № 8 (45). – С. 5-29.

12. Халилов С.А., Яровой М.А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2004. – № 2 (10). – С. 33-38.

13. Яровой М.А. Проектирование рациональных силовых конструкций многостенных крыльев малого удлинения беспилотных летательных аппаратов: Дис. канд. тех. наук.: 05.07.02. – Х., 2006. – 142 с.

14. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 344 с.

15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марищев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 798 с.

16. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

17. Филиппов А.П. Устойчивость прямоугольных пластинок, сжатых сосредоточенными силами // *Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук.* – 1933. – № 7, сер.7. – С. 943-950.

18. Лурье А.И. Устойчивость пластинки сжатой сосредоточенными силами // *Тр. Ленингр. индустр. ин-та.* – Л., 1939. – №3, вып. 1. – С. 113-149.

19. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 568 с.

20. Романенко Ф.А. Устойчивость плоской фор-

мы равновесия неоднородных пластин под действием сосредоточенных сил // *Прикладная механика.* – 1966. – Т. 2, № 1. – С. 143-149.

21. Алфутов В.А., Балабух Л.И. О возможности решения задач устойчивости пластин без предварительного определения начального напряженного состояния // *Прикладная математика и механика.* – 1967. – Т. 31, вып.4. – С. 716-722.

22. Кудинов С.В. Устойчивость прямоугольных пластин при локальной нагрузке // *Расчеты на прочность.* – 1980. – № 21. – С. 182-188.

23. Кудинов С.В. Экспериментальное исследование потери устойчивости прямоугольных пластин, сжатых локальной краевой нагрузкой в своей плоскости // *Расчеты на прочность.* – 1981. – № 22. – С. 215-220.

24. Yamaki N., Rep. Inst. High. Speed. Mech. Tohoku Univ. – 1954. – V.4.

25. Khan M.Z., Walker A.C. Buckling of plates subjected to localized edge loading // *The structural engineer.* – 1972. – No. 6, vol. 50. – P. 225-232.

26. Халилов С.А. Устойчивость эксцентрично подкрепленных прямоугольных пластин // *Расчет и проектирование конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. науч. тр.* – Х.: Харьковский авиационный ин-т им. Н.Е. Жуковского, 1989. – Вып.3. – С. 57-66.

27. Заруцкий В.А. К расчету на устойчивость прямоугольных пластин, усиленных ребрами в одном направлении // *Прикладная механика.* – 2000. – Том 36, № 4. – С. 132-136.

*Поступила в редакцию 27.03.2007*

**Рецензенты:** д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков; канд. физ.-мат. наук, доцент М.И. Несвит, кафедра высшей математики ХГТУСА, Харьков.