

УДК 532.526

**Ю.А. КРАШАНИЦА, Ф.А. SHALAL***Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛЕСНОГО ПРОФИЛЯ  
ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ**

На базе обобщенных потенциалов для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, соответствующих законам движения сплошных сред, и оригинального аппарата векторно-тензорного анализа показана однозначная разрешимость начально-краевой задачи формирования кинематических и динамических характеристик при обтекании телесного профиля нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости в многосвязной области.

**законы сохранения, система уравнений Озеена, начально-краевая задача, интегральные представления решений, системы интегральных уравнений, завихренность, давление**

**Введение**

Теория крыла в нестационарном потоке – раздел гидродинамики, занимающийся исследованием взаимодействия колеблющегося или движущегося с ускорением крыла с потоком жидкости или газа.

Эта проблема важна при решении широкого комплекса задач аэроупругости, устойчивости и управляемости летательных аппаратов, особенно на режимах взлета – посадки. До настоящего времени не построено точное решение даже плоской задачи о неустановившемся движении крыла с поверхностью разрыва скоростей, сходящей с задней кромки. Задача о точном решении наталкивается на весьма большие математические трудности. По-видимому, эти разрывные неустановившиеся движения жидкости или газа имеют весьма причудливую и вместе с тем мало устойчивую форму, описываемую с помощью сложных функциональных зависимостей.

Изучение неустановившихся движений актуально для различных практических вопросов, так как часто именно в самом неустановившемся характере явления заключается его сущность [1, 2]. Изучение нестационарных движений необходимо для установления методов расчета вибраций крыльев летательных аппаратов – явления, встречающегося на

практике и представляющего большую опасность при полетах.

Наиболее достоверной и апробированной из существующих математических моделей движения сплошной среды является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса.

Однако в настоящее время наиболее перспективной представляется интегрированная компьютерная технология, основанная на идеологии метода граничных интегральных уравнений. Этот метод позволяет сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности и является одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве вопросов существования и единственности решений задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным методом оказался в случаях внутренних и внешних задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами, и позволяет непосредственно определять распределенные аэрогидродинамические характеристики несущих систем, движущихся

щихся также и вблизи поверхности раздела.

Сведение краевой или начально-краевой задачи к интегральному уравнению или к адекватной системе интегральных уравнений позволяет:

- понизить размерность задачи и рассматривать более сложные классы задач, чем те, которые решаются другими методами;

- сразу определять неизвестные величины на границах, не вычисляя их во всем пространстве движения; решения во внутренних точках области иногда находятся интегрированием;

- некоторые гидродинамические нелинейные задачи для дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений привести к системе линейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных краевых значений разрываемых параметров задачи или функций от них.

Все это является безусловными преимуществами метода граничных интегральных уравнений перед конечно-разностными методами и методом конечных элементов. Именно поэтому этот метод с успехом используется для решения сложных инженерных задач – плоских и пространственных, стационарных и неустановившихся. Наконец, течения вязкой жидкости, описываемые уравнениями Навье-Стокса, приводят в большинстве случаев формально к корректным краевым задачам, и решения этих задач являются функциями бесконечно дифференцируемыми.

Актуальность рассматриваемых вопросов определяется тем, что, несмотря на рост парка ЭВМ и увеличение их производительности, сложность и объем задач, выдвигаемых практикой, опережают прогресс в развитии вычислительной техники. Следовательно, возрастают требования, предъявляемые к вычислительным алгоритмам, и, прежде всего, к их экономичности, универсальности и точности. Чтобы найти приемлемый компромисс между этими зачастую противоречивыми требованиями, необходимо рассмотреть некоторые подходы к вопросам

конструирования вычислительных алгоритмов.

Таким образом, значительный практический и теоретический интерес вызывает решение задачи обтекания телесного профиля в ограниченном потоке, включая исследование процесса формирования вихревых структур и явления отрыва потока на начальной стадии движения.

### Основные уравнения

При отсутствии процессов тепло- и массообмена, внутренних моментов математической моделью широкого круга задач аэогидродинамики является известная [3] система законов сохранения:

– массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

– импульса

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla, (\mathbf{V} * \rho \mathbf{V})) = \rho \mathbf{F} + (\nabla, \hat{\mathbf{T}}), \quad (2)$$

где символом «\*» обозначена диада,  $\mathbf{F}$  – вектор плотности массовых сил, тензор напряжений

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{I}}(-p + \lambda(\nabla, \mathbf{V})) + \mu(\nabla \mathbf{V} + \nabla' \mathbf{V}), \quad (3)$$

причем тензор

$$\nabla' \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

является сопряженным тензору

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix},$$

а

$$\lambda = \lambda(p, T); \quad \mu = \mu(p, T) \quad (4)$$

и  $\hat{\mathbf{I}}$  – единичный тензор.

**Неустановившееся движение вязкой, несжимаемой, нетеплопроводной жидкости**

В этом случае уравнение сохранения энергии удовлетворяется, а при отсутствии поля массовых сил  $\mathbf{F} = 0$  система (1, 2) приобретает вид

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0, \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\nabla, (\mathbf{V} * \mathbf{V})) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V}, \tag{6}$$

при выполнении естественных граничных

$$\mathbf{V}|_S = \mathbf{U}_S(\mathbf{r}, t) \tag{7}$$

и начальных условий

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{r}). \tag{8}$$

**Постановка задачи.** Из векторного анализа известно, что для консервативного, в силу (5), вектора скорости  $\mathbf{V}$ :

$$\Delta \mathbf{V} = (\nabla, \nabla \mathbf{V}) = \nabla (\nabla, \mathbf{V}) - [\nabla, [\nabla, \mathbf{V}]] = -[\nabla, \boldsymbol{\Omega}],$$

а в силу незначительности скоростей на начальной стадии движения инерционные слагаемые в уравнении (6),  $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} \approx 0$ , что ни в коей мере не ограничивает развития завихренности течения.

Таким образом, система уравнений (5 – 6) принимает следующий вид:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu [\nabla, \boldsymbol{\Omega}] = 0. \tag{9}$$

Причем на границе раздела и неподвижном профиле скорость течения равна нулю, на границах же движущегося профиля и контрольного объема – скорость – заданный вектор координат и времени. Кроме этого, в некоторый начальный момент времени движение отсутствует.

Применяя операцию ротации к уравнению (9), имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nu [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{\Omega}]] = 0, \tag{10}$$

а в силу опять же консервативности вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  по

определению, окончательная математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$\Delta p = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} = 0. \tag{12}$$

Причем, можно считать, что на входных границах контрольного объема известны как давление  $p$ , так и завихренность  $\boldsymbol{\Omega}$ .

**Возникновение набегающего потока.** Пусть вязкая жидкость заполняет всё пространство внутри контрольного объема между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии  $2h$  друг от друга (рис. 1).

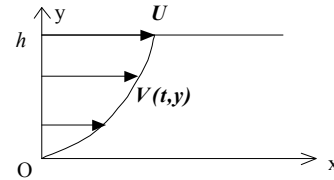


Рис. 1. Профиль поля скоростей невозмущенного потока

Пренебрегая действием силы тяжести, найдём решение системы уравнений (5, 6) при изменении со временем движения жидкости между плоскостями, если

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} e^{\nu t} U(y), p = e^{\nu t} P. \tag{13}$$

При этом использован вытекающий из уравнения неразрывности факт, что в данном случае  $U$  не зависит от  $x$  и (5) выполняется автоматически. Тогда система уравнений движения вязкой жидкости (6) будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dy^2} - U(y) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

при выполнении граничных условий:

$$U(0) = U(2h) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (14) при условиях (15), где необходимо учесть, что, в силу второго уравнения системы (14), первое уравнение этой системы имеет постоян-

ную правую часть  $\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x}$ . Решение такой задачи

можно найти элементарными методами:

$$U(y) = C_1 chy + C_2 shy - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x},$$

где произвольные постоянные определяются граничными условиями (15):

$$C_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x}; C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} thh,$$

и общее решение задачи (14 – 15) записывается в виде

$$U(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} (chy - thhshy - 1). \quad (16)$$

Формула (16) с учетом представлений (13) и даёт закон течения жидкости в контрольном объеме вблизи неподвижной плоской границы  $0 < y < h$ .

Очевидно, что скалярная завихренность течения (13, 16) определяется выражением

$$\Omega(y) = e^{vt} \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} (thhchy - shy), \quad (17)$$

а максимальная скорость

$$U(y) = -\frac{2}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} \left( \frac{sh^2 \frac{h}{2}}{chh} \right) \quad (18)$$

и достигается при  $y = h$  при  $\frac{\Delta P}{\Delta x} < 0$ .

### Интегральное представление решения задачи о движении профиля вблизи поверхности раздела

**Фундаментальные решения.** Очевидно, что решения уравнений (5) и (9) целесообразно искать в классах функций

$$\mathbf{V}(r,t) = e^{vt} \bar{\mathbf{V}}(r), \frac{p}{\rho}(r,t) = e^{vt} \frac{\bar{p}}{\rho}(r), \Omega(r,t) = e^{vt} \bar{\Omega}(r). \quad (19)$$

Тогда

$$v\mathbf{V} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + v[\nabla, \Omega] = 0, \quad (20)$$

$$\Delta \left( \frac{p}{\mu} \right) = 0, \quad (21)$$

и

$$\Delta \Omega - \Omega = 0. \quad (22)$$

Здесь следует отметить, что если для уравнения Лапласа (21) элементарное (фундаментальное) решение для пространств любой размерности широко известно и хорошо изучено, к уравнению Клейна-Гордона (22) это относится в меньшей степени.

Действительно, найдем решение этого уравнения в полярной системе координат, зависящее только от расстояния, с учетом того, что в плоском случае  $\Omega = k\Omega$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - \Omega = 0, \quad (23)$$

что приводит к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$L^*(\Omega) \equiv r^2 \frac{d^2 \Omega}{dr^2} + r \frac{d\Omega}{dr} - r^2 \Omega = 0, \quad (24)$$

решение которого имеет вид [4]:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-r\xi} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (25)$$

где  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ .

В самом деле, имеем

$$L^*(\phi) = \int_1^\infty \frac{e^{-r\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \xi^2 - \frac{\xi}{r} - 1 \right) d\xi = \int_1^\infty e^{-r\xi} \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi - \int_1^\infty \frac{e^{-r\xi} \xi}{r \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi.$$

Интегрируя по частям последний из интегралов правой части этого равенства, убеждаемся, что функция  $\phi(r)$  удовлетворяет уравнению (24). Полагая  $r\xi = \eta$ , имеем

$$\phi(r) = \int_\rho^\infty \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} d\eta = \int_r^A \frac{d\eta}{r \sqrt{\eta^2 - r^2}} + \int_r^A \frac{e^{-\eta} - 1}{r \sqrt{\eta^2 - r^2}} d\eta + \int_A^\infty \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} d\eta,$$

где  $A$  – некоторая постоянная. При  $r \rightarrow 0$  два последних интеграла правой части этого равенства ограничены, а для первого из интегралов имеем следующее выражение:

$$\ln\left(\eta + \sqrt{\eta^2 + r^2}\right)\Big|_r^A = \ln \frac{A + \sqrt{A^2 + r^2}}{r} = \ln \frac{1}{r} + \dots,$$

где точками обозначены величины, остающиеся ограниченными при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\phi(r)$  при  $r = 0$  действительно имеет логарифмическую особенность. Укажем еще поведение функции  $\phi(r)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Полагая в равенстве (25)

$$r(\xi - 1) = \eta^2, \xi = 1 + \frac{\eta^2}{r}, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\eta^2 - r}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\eta^2}{r}\right) - 1}} \frac{2\eta}{r} d\eta = \\ &= e^{-r} \sqrt{\frac{2}{r}} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{2r}}} d\eta = e^{-r} \sqrt{\frac{2}{r}} \left[ \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta + \varepsilon \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right], \end{aligned}$$

и, следовательно, при  $r \rightarrow \infty$ :

$$\phi(r) = e^{-r} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} (1 + \varepsilon), \quad (26)$$

где  $\varepsilon$  – величина, стремящаяся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Таким образом, показано, что функция  $\phi(r)$  (25) в применении к уравнению (22) играет точно такую же роль, как и функция единичного источника  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  в применении к двумерному уравнению Лапласа. Поэтому функцию (25) можно назвать функцией единичного источника в точке  $z_0$  для уравнения (22).

**Интегральное представление решений системы уравнений (21 – 22).** Классическая теория потенциала [4] позволяет выписать интегральные представления решений как уравнения Лапласа (21), так и уравнения Клейна-Гордона (22):

$$p = \frac{1}{2\pi} \iint_L \left( \ln r \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) dl; \quad (27)$$

$$\Omega(\mathbf{r}) = \iint_L \left( \phi(\mathbf{r}, \rho) \frac{\partial \Omega(\rho)}{\partial n} - \Omega(\rho) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \rho)}{\partial n} \right) d\rho l, \quad (28)$$

где фундаментальное решение уравнения (22) модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-r\xi} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

В представлении (27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= (\mathbf{n}, \nabla p) = (\mathbf{n}, \{-\mu \mathbf{V} - \mu [\nabla, \Omega]\}) = \\ &= -\mu V_n - \mu (\mathbf{n}, [\nabla, \Omega]), \end{aligned}$$

и поэтому окончательно

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2\pi} \iint_L (\mu \ln r V_n - \\ &- \mu ([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \Omega) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n}) dl. \quad (29) \end{aligned}$$

В аналогичной ситуации с представлением (28), когда  $\mu [\nabla, \Omega] = -\mu \mathbf{V} - \nabla p$ , известно [5], что

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, [\nabla, \Omega]] &= (\mathbf{n}, \tilde{\nabla} \Omega) - (\mathbf{n}, \nabla \Omega) = \\ &= (\mathbf{n}, [\nabla[\mathbf{I}, \Omega]]) + \mathbf{n}(\nabla, \Omega) - (\mathbf{n}, \nabla \Omega), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial n} &= (\mathbf{n}, \nabla \Omega) = (\mathbf{n}, [\nabla[\mathbf{I}, \Omega]]) + \mathbf{n}(\nabla, \Omega) + \\ &+ \left[ \mathbf{n}, \left\{ \mathbf{V} + \nabla \left( \frac{p}{\mu} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

В плоском случае, когда  $\Omega = \mathbf{k}\Omega = \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, [\nabla, \Omega]] &= -[\mathbf{n}, [\mathbf{k}, \nabla \Omega]] = \\ &= -\mathbf{k}(\mathbf{n}, \nabla \Omega) + \nabla \Omega(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \\ &= -\mathbf{k}(\mathbf{n}, \nabla \Omega) = -\mathbf{k} \frac{\partial \Omega}{\partial n} = -\frac{\partial \Omega}{\partial n} \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[\mathbf{n}, [\nabla, \Omega]] = -\frac{\partial \Omega}{\partial n}. \quad (30)$$

Но по (20)  $\mu [\nabla, \Omega] = -\mu \mathbf{V} - \nabla p$  и

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = -[\mathbf{n}, [\nabla, \Omega]] = [\mathbf{n}, \mathbf{V}] + \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla p].$$

Тогда:

$$\Omega(\mathbf{r}) = \iint_L \left( \phi(\mathbf{r}, \rho) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \rho)] p - \Omega(\rho) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \rho)}{\partial n} \right) d\rho l. \quad (31)$$

Причем в интегральных представлениях (29, 31) ядра  $[\mathbf{n}, \nabla(\ln r)]$  не хуже сингулярных в (29), а абсолютное значение

$$\nabla \phi(r) = -\frac{\mathbf{r}}{2\pi} \int_1^\infty e^{-r\xi} \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi \quad (32)$$

в (31) представляет собой модифицированную функцию Бесселя первого порядка.

Система граничных интегральных уравнений

$$p = \alpha \frac{1}{2\pi} \iint_L (\mu \ln r V_n - \mu ([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \Omega) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n}) dl; \quad (33)$$

$$\Omega(\mathbf{r}) = \beta \iint_L \left( \phi(\mathbf{r}, \rho) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \rho)] p - \Omega(\rho) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \rho)}{\partial n} \right) d\rho l, \quad (34)$$

соответствующих интегральным представлениям, однозначно разрешима при заданных начально-краевых условиях (7 – 8) на границах контрольной области и профиля (рис. 2).

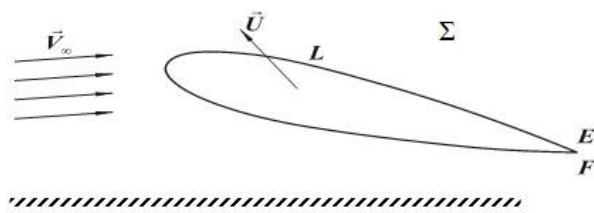


Рис. 2. Телесный профиль в контрольной области вблизи поверхности раздела

Таким образом, в заключение можно утверждать, что уравнение (22) в общем случае почти не отличается от уравнения Лапласа и с точки зрения постановки краевых задач, и с точки зрения методов их

решения. Вся разница здесь по существу сводится к тому, что функция единичного источника в случае уравнения (22) выглядит несколько сложнее по сравнению с функцией единичного источника для уравнения Лапласа.

## Заключение

Представлено развитие нового направления численно-аналитического решения класса прикладных задач аэродинамики несущих систем. Развита новый подход и формализм в построении граничных интегральных уравнений эквивалентных соответствующим начально-краевым задачам. Кроме этого аналитическое интегральное представление решений задачи позволяет ставить и решать важнейшие задачи получения экстремальных параметров характеристик несущих систем.

## Литература

1. Некрасов А.Н. Теория крыла в нестационарном потоке. – М.: изд-во АН СССР, 1947. – 258 с.
2. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. – ГИТТЛ, 1949. – 480 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
5. Крашаница Ю.А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) // Вісник Дніпропетровського університету. - Дніпропетровськ, ДНУ, 2000. – Вип. 3, т. 1. – С. 52-56.

Поступила в редакцию 24.05.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Бастеев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

