

УДК 539.3:534.1:629.7.02:539.4

В.Б. МИНТЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПЛОСКОГО ИЗГИБА БАЛКИ

Методом Рэлея-Ритца с использованием аналитического базиса получены численные решения ряда геометрически нелинейных задач плоского изгиба балки с учетом деформирования оси. Показана быстрая сходимость и высокая точность приближенных решений. В основу разрешающих уравнений положены теории с различным "уровнем" нелинейности: полностью нелинейная, учет малости деформаций, эластича Эйлера, гибкая нить, учет малости деформаций и квадрата угла поворота и линейная. Рассмотрены задачи чистого изгиба балки, изгиба двухопорной балки, когда опоры могут сближаться, и без сближения опор, а также продольно поперечный изгиб с рассмотрением закритического поведения. Проведен сравнительный анализ результатов.

Ключевые слова: балка, плоский изгиб, геометрически нелинейная задача, деформация оси, численное решение.

Введение

Заключения о прочности силовых конструкций, в том числе и аэрокосмической техники, основываются, прежде всего, на анализе полей напряжений и критических нагрузок. Напряженно-деформированное состояние, критические нагрузки и формы потери устойчивости определяются в результате решения, как правило, линейных краевых задач. Задачи в линейной постановке представляют собой частный случай более сложных, но более точных нелинейных задач, и приводят к результатам с инженерной точностью, если расчетная модель удовлетворяет ряду требований. Одним из таких требований является малость перемещений и деформаций (геометрическая линейность). Асимптотические оценки погрешностей, вносимых данным предположением, безотносительно к вопросу о возможности их получения, являются достаточно сложными и весьма грубыми. В данной работе на ряде примеров изгиба балок, претерпевающих значительные перемещения и деформации, выполнен численный анализ напряженно-деформированных состояний, доставляемых различными теориями. Рассмотрены задачи плоского изгиба балок при разных условиях опирания и внешних нагрузках. Немало известных на сегодня результатов можно найти в работах [1 – 6], но большинство из них получено в предположении недеформируемости оси балки.

1. Постановка задач

Результаты, приведенные ниже, опираются на теорию, изложенную в работе [7], где на основании принципа виртуальной работы с использованием

тензора деформаций Коши и тензора напряжений Био поставлено шесть краевых задач, описывающих изгиб балки. Эти задачи различаются упрощающими предположениями, положенными в их основу. Выпишем основные результаты работы [7], приведем путем изменения системы координат $x = x_p / a$ область, занимаемую балкой $\Omega_p = \{(x_p) : -a < x_p < a\}$ к безразмерному интервалу $\Omega = \{(x) : -1 < x < 1\}$, где $2a$ – длина балки. При этом будут использоваться следующие безразмерные величины (индекс "p" указывает на размерные величины):

– перемещения точек осевой линии вдоль оси x и z соответственно

$$u = \frac{u_p}{a}, \quad w = \frac{w_p}{a};$$

– производная угла поворота касательной к осевой линии

$$\frac{d\varphi}{dx} = a \frac{d\varphi_p}{dx_p}, \quad (\text{далее } \frac{df}{dx} \equiv f');$$

– внутренние изгибающий момент, продольная и поперечная силы

$$M = \frac{M_p a}{EI}, \quad N = \frac{N_p a^2}{EI}, \quad Q = \frac{Q_p a^2}{EI}; \quad (1)$$

– полная потенциальная энергия

$$U \equiv \frac{U_p a}{EI} = U_\varepsilon - \int_{-1}^1 [p_z w + p_x u] dx; \quad (2)$$

– уравнения равновесия

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - M' \sin \varphi)' = -p_x; \\ (N \sin \varphi + M' \cos \varphi)' = -p_z; \end{cases} \quad (3)$$

– краевые условия
 $[N \cos \varphi - M' \sin \varphi]_{x=-1,1} = 0$ или $u = \bar{u}$;
 $[N \sin \varphi - M' \cos \varphi]_{x=-1,1} = 0$ или $w = \bar{w}$; (4)
 $M|_{x=-1,1} = 0$ или $\varphi = \bar{\varphi}$;

– внешние распределенные усилия, сосредоточенные силы и моменты:

$$q = \frac{q_p a^3}{EI}, P = \frac{P_p a^2}{EI}, M_y = \frac{M_{yp} a}{EI}, \quad (5)$$

где EI – изгибная жесткость балки; U_ε – потенциальная энергия деформирования;

$P_x = \frac{P_{xp} a^3}{EI}, P_z = \frac{P_{zp} a^3}{EI}$ – проекции консервативных распределенных внешних сил на соответствующие оси; они могут представлять собой суммы обобщенных функций с коэффициентами (5);

$\bar{u}, \bar{w}, \bar{\varphi}$ – известные значения соответствующих перемещений и угла поворота на границе.

Далее перемещения u, w , угол поворота φ , деформация оси ε , внутренние силы и момент (1), полная потенциальная энергия (2) будут при необходимости снабжаться индексом, соответствующим теории, по которой они определяются (см. [7]):

"I" – полностью геометрически нелинейная задача;

"II" – учет малости деформаций оси ($\varepsilon \ll 1$);

"III" – отсутствие деформации оси ($\varepsilon = 0$, эластика Эйлера);

"IV" – гибкая нить;

"V" – квадратичное приближение;

"VI" – линейное приближение.

Выражения необходимых для дальнейших вычислений безразмерных величин приведены в табл. 1, где $\alpha = \frac{Fa^2}{I}$ – относительная жесткость на растяжение-сжатие, F – площадь поперечного сечения.

Таблица 1

Исходные соотношения

Номер теории	φ'	ε	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	U_ε	M	N	Q
I	$\frac{(1+u')w'' - w'u''}{(1+u')^2 + (w')^2}$	$\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2} - 1$	$\frac{w'}{1+\varepsilon}$	$\frac{1+u'}{1+\varepsilon}$	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{(\varphi')^2 + \alpha \varepsilon^2\} dx$	$-\varphi'$	$\alpha \varepsilon$	$\frac{-\varphi''}{1+\varepsilon}$
II	$(1+u')w'' - w'u''$	$u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2$	w'	$1+u'$	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{(\varphi')^2 + \alpha \varepsilon^2\} dx$	$-\varphi'$	$\alpha \varepsilon$	$-\varphi''$
III	$\frac{w''}{\sqrt{1-(w')^2}}$	0	w'	$\sqrt{1-(w')^2}$	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\varphi')^2 dx$	$-\varphi'$	0	$-\varphi''$
	$\frac{u''}{\sqrt{-u'(2+u')}}}$		$\sqrt{-u'(2+u')}$	$1+u'$				
IV	$\frac{(1+u')w'' - w'u''}{(1+u')^2 + (w')^2}$	$\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2} - 1$	$\frac{w'}{1+\varepsilon}$	$\frac{1+u'}{1+\varepsilon}$	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \alpha \varepsilon^2 dx$	0	$\alpha \varepsilon$	0
V	w''	$u' + \frac{1}{2}(w')^2$	w'	1	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{(\varphi')^2 + \alpha \varepsilon^2\} dx$	$-\varphi'$	$\alpha \varepsilon$	$-\varphi''$
VI	w''	u'	w'	1	$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{(\varphi')^2 + \alpha \varepsilon^2\} dx$	$-\varphi'$	$\alpha \varepsilon$	$-\varphi''$

2. Построение решений

Решение задачи изгиба балки по линейной теории (VI) не составляет труда и здесь не рассматривается. Решения нелинейных задач получены методом Рэлея-Ритца. Для этого неизвестные функции перемещений разыскиваются в виде разложений

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n v_n; \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \omega_n, \quad (6)$$

где U_n, W_n – коэффициенты, подлежащие определению; v_n, ω_n – известные базисные функции, удовлетворяющие, как минимум, главным граничным условиям из условий (4).


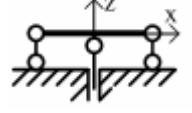

В табл. 2 приведены используемые в дальнейшем базисные функции, которые выбраны по соображениям, изложенным в работах [8 – 10].

Процедура минимизации полной потенциальной энергии (2) с учетом выражений энергии де-

формации U_ε , производной угла поворота φ' и деформации ε , приведенных в табл. 1, и разложения функций u и w (6) приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $U_1, W_1, U_2, W_2, \dots$. Система этих уравнений решается классическим методом Ньютона. При необходимости используется метод Ньютона с выбором направления и величины шага или метод Ньютона в сочетании с методом пошагового нагружения. В процессе реализации метода значение полной потенциальной энергии, компоненты вектора градиента и матрицы Гессе определяются путем численного интегрирования методом Гаусса десятого порядка.

Таблица 2

Базисные функции
(P_n – полиномы Лежандра)

Условия опирания	Граничные условия	Базисные функции
 Консоль	$u _{x=-1} = 0;$ $w _{x=-1} = 0;$ $w' _{x=-1} = 0$	$v_n = P_n + P_{n-1};$ $\omega_n = P_{n+1} + \frac{1+2n}{n}P_n + \frac{1+n}{n}P_{n-1}$
 Симметричные	$u _{x=0} = 0;$ $w _{x=\pm 1} = 0$	$v_n = P_{2n-1};$ $\omega_n = P_{2n} - P_{2n-2}$
 Симметричные	$u _{x=\pm 1} = 0;$ $w _{x=\pm 1} = 0$	$v_n = P_{n+1} - P_{n-1};$ $\omega_n = P_{2n} - P_{2n-2}$

3. Точность и сходимость приближенных решений

На точность получаемых приближенных решений влияет, прежде всего, количество функций, удерживаемых в рядах (6). Вид базисных функций в этих рядах сказывается на сходимости решения и устойчивости численных процедур. Последнее, как показано в работах [9, 10], обеспечено, здесь же исследуется точность и сходимость получаемых приближенных решений на примерах двух задач: чистого изгиба (задача допускает точное решение) и изгиба двухопорной балки распределенной нагрузкой (точное решение неизвестно).

Точное решение задачи чистого изгиба внешним моментом M_y , например, консольной балки имеет вид

$$\varphi_a = M_y(x+1); \quad u_a = \frac{\sin \varphi_a}{M_y} - x - 1; \tag{7}$$

$$w_a = \frac{1 - \cos \varphi_a}{M_y}; \quad M_a = M_y; \quad N_a = Q_a = 0.$$

При значении внешнего момента $M_y = \pi$ балка изгибается в кольцо, т.е. $u_a|_1 = -2, w_a|_1 = 0, \varphi_a|_1 = 2\pi$.

Приближенные решения получены по полностью нелинейным соотношениям (строка 1 в табл. 1) с использованием соответствующего базиса (первая строка табл. 2). В суммах (6) удерживается одинаковое количество слагаемых для обеих функций, равное S . Относительная жесткость α на результат практически не влияет.

Сходимость решений можно оценить по стабилизации коэффициентов в разложении перемещений (6). В табл. 3 приведена стабилизация первых (верные цифры подчеркнуты) и значения модуля последних коэффициентов в суммах (6) в зависимости от количества удерживаемых функций. Как видно из табл. 3, первые 9 значащих цифр становятся верными при $S=14$, последние коэффициенты в разложениях (6) уменьшаются примерно на один порядок с добавлением одной функции. Это свидетельствует о достаточно быстрой сходимости приближенных решений.

Таблица 3

Стабилизация коэффициентов приближенных решений задачи чистого изгиба

S	$-U_1$	$-W_1$	$ U_C $	$ W_C $
2	<u>1,432596548</u>	0,341270216	$3,55 \cdot 10^{-1}$	$1,15 \cdot 10^{-1}$
4	<u>1,251343227</u>	0,310818748	$5,05 \cdot 10^{-2}$	$7,80 \cdot 10^{-3}$
6	<u>0,951335183</u>	0,190032257	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$1,97 \cdot 10^{-4}$
8	<u>0,996298669</u>	0,159059753	$1,37 \cdot 10^{-6}$	$7,08 \cdot 10^{-8}$
10	<u>0,999963130</u>	0,159144935	$1,10 \cdot 10^{-10}$	$5,48 \cdot 10^{-12}$
12	<u>0,999999886</u>	0,159154854	$2,01 \cdot 10^{-13}$	$1,03 \cdot 10^{-14}$
14	<u>1,000000000</u>	0,159154908	$3,11 \cdot 10^{-15}$	$1,26 \cdot 10^{-16}$
20	1,000000000	0,159154908	$2,24 \cdot 10^{-17}$	$1,06 \cdot 10^{-17}$

Погрешность в определении перемещений, угла поворота и изгибающего момента, составляющая менее одного процента, достигается уже при $S=8$.

Аналогичные результаты получаются и при решении задачи изгиба двухопорной балки (третья строка табл. 2) с относительной жесткостью $\alpha = 4 \cdot 10^5$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q_z = -10$. Расчет выполнялся также по полностью нелинейным соотношениям, приве-

денным в строке I, табл. 1. Эпюры распределения перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента на половине длины балки показаны на рис. 1. Функции N, M и w на вторую половину балки необходимо продлить четным образом, а Q, φ и u – нечетным.

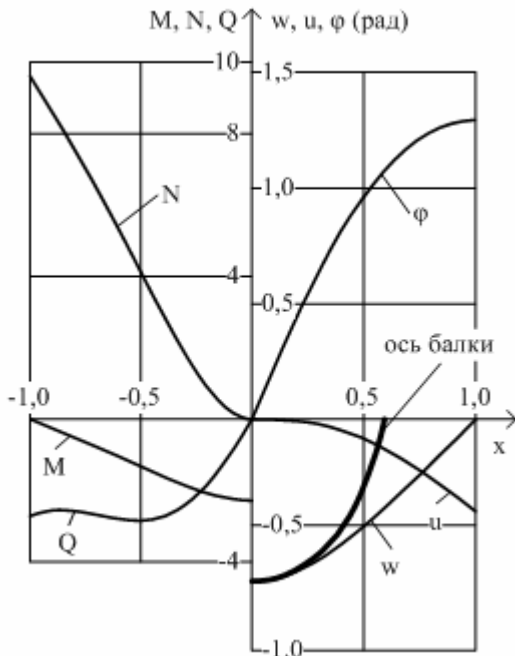


Рис. 1. Эпюры перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента при изгибе двухопорной балки ($q_z = -10$, $\alpha = 4 \cdot 10^5$)

В табл. 4 представлена стабилизация первых коэффициентов в суммах (6) и значение полной потенциальной энергии в зависимости от количества удерживаемых функций C. Как видно, первые 12 значащих цифр для указанных величин становятся верными при $C = 14$.

Ниже относительная погрешность определения какой-либо функции f_C , для вычисления которой в суммах (6) удерживается C слагаемых, будет рассчитываться как наибольшая относительная разность между значениями данной функции на отрезке [-1;1] и значения функции с удержанием значительно большего числа слагаемых ($A \gg C$)

$$\Delta_{f_A} = \frac{|f_C - f_A|}{|f_A|} 100\%.$$

Такая оценка точности приближенных решений с учетом сходимости, представленной в табл. 3, 4, достаточно объективна.

Точность определения перемещений и угла поворота соответствует точности определения коэффициентов, приведенных в табл. 4. Так, инженерная точность (погрешность менее пяти процентов) опре-

деления этих величин достигается уже на решениях, в которых удерживается всего по четыре функции (см. табл. 5).

Таблица 4
Стабилизация коэффициентов приближенных решений и полной потенциальной энергии

C	$-U_1$	W_1	$-U$
2	0,138722264965	0,348680545341	5,27866335537
4	0,278339477648	0,422708590882	6,29880481372
6	0,290230872397	0,426066506002	6,32434979783
8	0,290432289376	0,426125483874	6,32458469141
10	0,290433268191	0,426125777343	6,32458552524
12	0,290433271713	0,426125778414	6,32458552764
14	0,290433271724	0,426125778417	6,32458552765
30	0,290433271724	0,426125778417	6,32458552765

Таблица 5
Сходимость функций перемещений и угла поворота

C	$u _{-1} (\Delta_{u_{30}}, \%)$	$w _0 (\Delta_{w_{30}}, \%)$	$\varphi^o _{-1} (\Delta_{\varphi_{30}}, \%)$
2	0,23081 (41,9)	0,53463 (23,8)	72,054 (2,87)
3	0,36873 (7,23)	0,65974 (6,00)	78,304 (5,56)
4	0,38985 (1,92)	0,68821 (1,94)	74,174 (0,01)
5	0,39620 (0,32)	0,69878 (0,43)	74,191 (6,01)
6	0,39735 (0,03)	0,70136 (0,07)	74,182 (0,00)
8	0,39748 (0,00)	0,70181 (0,00)	74,181 (0,00)
10	0,39748 (0,00)	0,70182 (0,00)	74,181 (0,00)
30	0,39748	0,70182	74,181

Для достижения такой же точности при определении внутренних сил и момента необходимо удержать не менее восьми функций (табл. 6). Это объясняется тем, что выражение момента содержит вторые производные от функций перемещений, а поперечная сила – третьи. Выражение же продольной силы (деформации оси) хотя и содержит только первые производные, но представляет собой малую разность больших величин. Так, если значение

$$u'|_1 \approx -0,727, (w')^2|_1 \approx 0,926,$$

$$\text{то } \varepsilon|_1 = \left[\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2} - 1 \right]_1 \approx 2,41 \cdot 10^{-5}.$$

Определение с достаточной точностью невязки в уравнениях равновесия (3), естественно, требует удержания еще большего количества слагаемых в решениях (6). Величина невязки при небольшом количестве функций показана на рис. 2. Погрешность, составляющая менее пяти процентов по отношению к внешней нагрузке $q_z = -10$, здесь достигается при 14 слагаемых в решениях (6), а при 20 слагаемых она не превышает 0,0004%.

Заметим, что правая часть в уравнениях равновесия (3) здесь представляет собой достаточно гладкую в области функцию, поэтому наблюдается достаточно быстрое стремление невязки к нулю. При действии, например, сосредоточенной силы, это стремление будет гораздо медленнее.

Таблица 6
Сходимость функций внутренних сил момента

C	$-M _0 (\Delta_{M_{30}}, \%)$	$N _1 (\Delta_{N_{30}}, \%)$	$Q _1 (\Delta_{Q_{30}}, \%)$
2	1,1860 (48,0)	774,27 (7947)	0,76659 (71,9)
3	1,7692 (22,5)	646,32 (6617)	6,0163 (121)
4	2,0433 (10,5)	260,57 (2608)	1,6941 (37,9)
5	2,1979 (3,68)	127,07 (1220)	2,9618 (8,65)
6	2,2600 (0,96)	28,281 (193)	2,3681 (13,1)
8	2,2806 (0,05)	10,010 (4,04)	2,6070 (4,36)
10	2,2817 (0,00)	9,4727 (1,54)	2,7083 (0,65)
11	2,2818 (0,00)	9,6555 (0,36)	2,7318 (0,22)
12	2,2818 (0,00)	9,6135 (0,08)	2,7241 (0,07)
30	2,2818	9,6213	2,7259

Отметим также, что для достижения точности решения, соответствующей удержанию 10 аналитических функций (20 неизвестных), методом конечного элемента (МКЭ), понадобилось введения около 120 узлов (около 360 неизвестных).

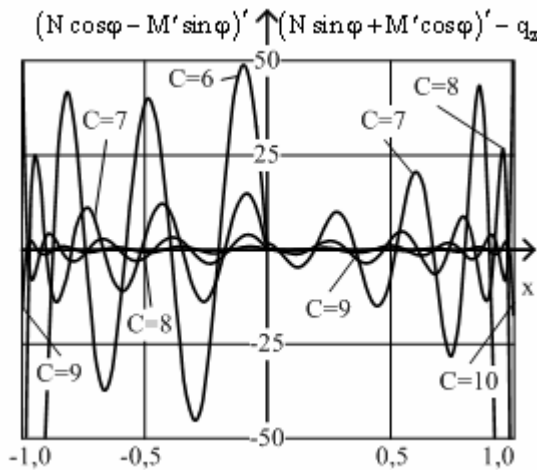


Рис. 2. Невязки в уравнениях равновесия

Таким образом, заканчивая рассмотрение этих двух примеров, можно отметить быструю сходимость приближенных решений и устойчивость процедуры их получения, что позволяет находить решения с практически любой наперед заданной точностью.

4. Исследование точности нелинейных теорий

В качестве критериальной принимается общая нелинейная теория (I, табл. 1). Приведенные ниже

решения получены с таким количеством функций в рядах (6), что погрешности, связанные с численной процедурой их получения, ничтожно малы.

Точность исследуется в зависимости, во-первых, от величин внешних нагрузок и, во-вторых, если это целесообразно, от величины относительной продольной жесткости α .

Так, в уже рассмотренной задаче чистого изгиба консольной балки решения от параметра α не зависят, поэтому исследуется зависимость перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента только от величины внешнего момента. Эти зависимости показана на рис. 3.

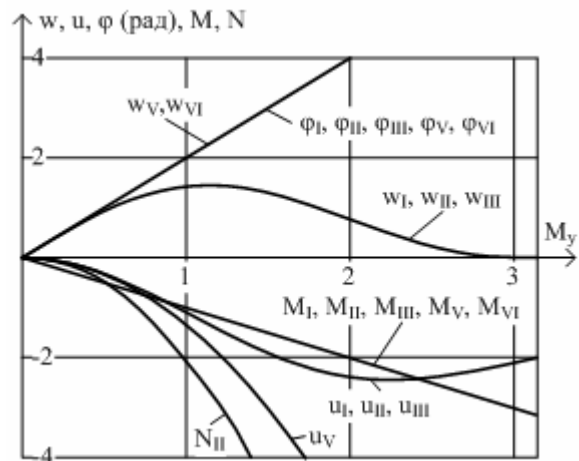


Рис. 3. Зависимость перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента от величины внешнего момента при чистом изгибе консольной балки

Поскольку при чистом изгибе балки угол поворота и внутренний момент линейно зависят от нагрузки, а деформация оси отсутствует, то все теории приводят к точному результату при определении этих величин. Исключение составляет наличие продольной силы (деформации оси) при расчете по теории малости деформаций (II).

Прогиб и продольные перемещения, рассчитанные по первым трем теориям, полностью совпадают с точным решением (7).

Отличие квадратичного приближения (V) от линейного (VI) заключается лишь в том, что квадратичное приближение позволяет аппроксимировать продольные перемещения при малых значениях нагрузки (рис. 3). В остальном все результаты, полученные с использованием этих двух теорий, совпадают. Погрешность в рассчитанных по квадратичной теории величинах прогиба и продольного перемещения не превышает 5% при значении действующего момента $M_y < 0,4$, т.е. до величины прогиба $w \approx 0,76$ и угла поворота $\varphi \approx 45^\circ$.

Другой, уже рассмотренный, пример – это изгиб двухопорной балки равномерно распределенной

нагрузкой. Результаты, показанные на рис. 1, получены при $\alpha = 4 \cdot 10^5$ и $q_z = -10$, что соответствует сильному изгибу полосы, т.е. гибкой и достаточно жесткой на растяжение-сжатие балки.

Зависимости максимальных перемещений и угла поворота от величины внешней нагрузки изображены на рис. 4, а внутренних сил и моментов – на рис. 5.

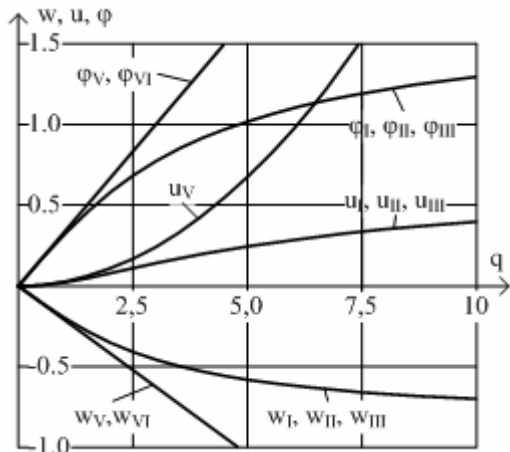


Рис. 4. Зависимость максимальных перемещений и угла поворота от внешней нагрузки

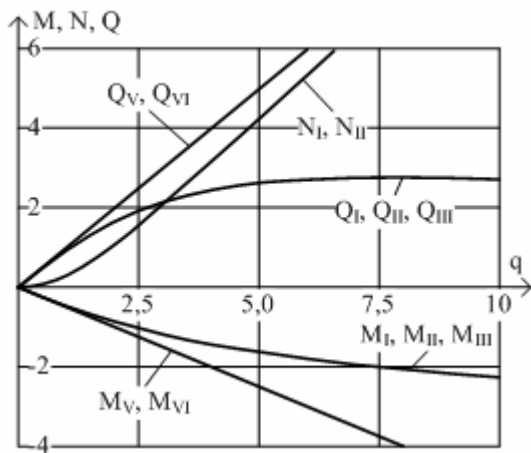


Рис. 5. Зависимость максимальных внутренних сил и моментов от внешней нагрузки

Как уже отмечалось, в данной задаче максимальное значение деформации оси достигает значения $\epsilon|_{x=1, q=10} \approx 2,41 \cdot 10^{-5}$, поэтому первые три нелинейные теории здесь приводят к результатам, совпадающим до сотых долей процента. Исключение составляют эlastика Эйлера (III), которая не позволяет вычислить продольную силу, так как в основу положено $\epsilon = 0$, и теория малости деформаций (II), которая при вычислении продольной силы в центре балки приводит к отличному от нуля значению.

Как и в предыдущей задаче, квадратичное (V) и линейное (VI) приближения приводят к одному и

тому же результату, только квадратичное приближение позволяет при малых значениях нагрузки достаточно точно вычислять функцию u . Здесь использование этих теорий приводит к значительным погрешностям (более пяти процентов) до величины нагрузки $|q_z| < 2$, т.е. до величины прогиба $w \approx 0,20$ и угла поворота $\phi \approx 18^\circ$.

Незначительное изменение параметра α практически не влияет на результаты решения этой задачи. Увеличение параметра α приводит только к уменьшению и без того малой величины деформации оси, оставляя при этом неизменной величину продольной силы $N = \alpha \epsilon$.

С уменьшением относительной жесткости на растяжение-сжатие деформация оси соответственно увеличивается: при $\alpha \approx 300$ наибольшее значение деформации оси $\epsilon \approx 0,3\%$, и погрешность эlastики Эйлера (III) при определении продольного перемещения достигает 5%. Такая же точность определения перемещений по теории малых деформаций (II) сохраняется с уменьшением параметра α до значения 100 ($\epsilon \approx 1,0\%$).

Дальнейшее уменьшение параметра α приводит к таким значениям деформаций, при которых сказывается способ их определения, т.е. мера деформации. Различия результатов, полученных по теории I (мера деформации Коши) и с помощью МКЭ (мера деформации Грина), при уменьшении параметра α от 30 до 1 показаны на рис. 6.

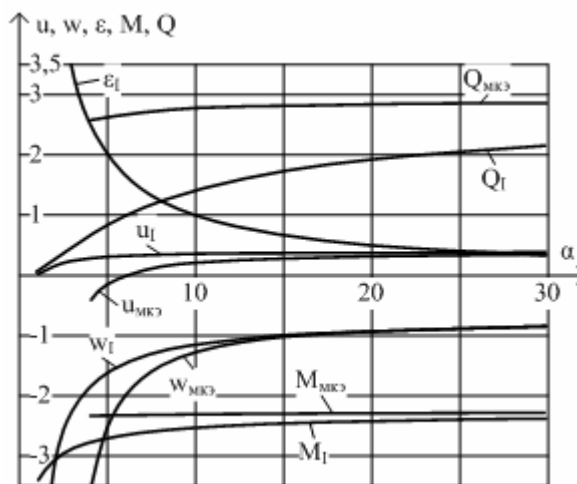


Рис. 6. Зависимость перемещений, деформации, поперечной силы и момента от относительной продольной жесткости α при $q_z = -10$

Как можно видеть, использование меры деформации Грина приводит к тому, что продольные перемещения на краях $x = \pm 1$ при $\alpha < 6$ становятся отрицательными, что противоречит физике процесса деформирования данной балки. На рис. 6 не показана

ны продольная сила и угол поворота, значения которых стремятся соответственно к 10 и 90°.

Эпюры искоемых функций при изгибе балки с жесткостью $\alpha = 1$ и внешней распределенной нагрузкой $q_z = -10$, изображенные на рис. 7, качественно отличаются от эпюр этих же величин при $\alpha = 4 \cdot 10^5$ (см. рис. 1). Здесь сближение опор практически отсутствует, прогиб значительно больше, наблюдается увеличение максимального значения момента в 1,5 раза при несущественном увеличении внутренних сил.

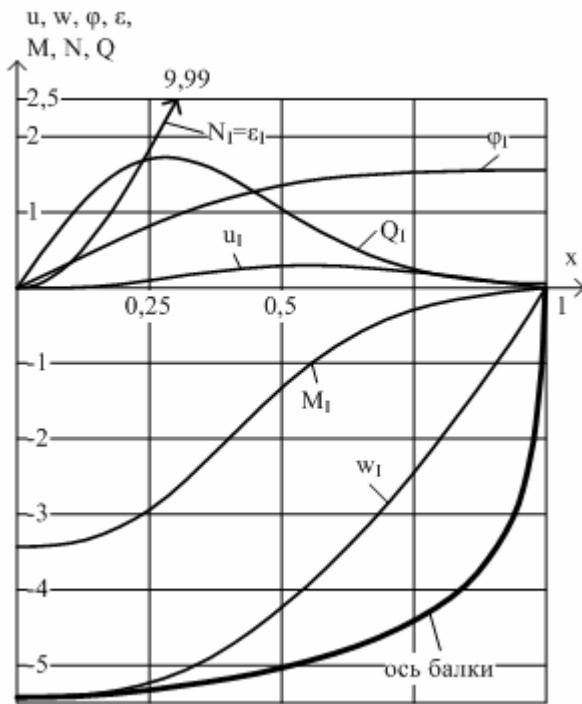


Рис. 7. Эпюры перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента при изгибе двухопорной балки ($q_z = -10$ и $\alpha = 1$)

Следующий пример – это изгиб сосредоточенной силой балки, зафиксированной неподвижными шарнирными опорами (рис. 8, третья строка табл. 5).

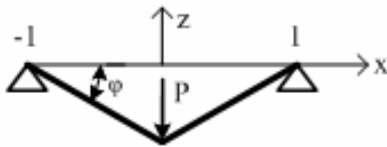


Рис. 8. Балка на неподвижных шарнирных опорах

Эта задача имеет точное решение в приближении "IV" – гибкая нить:

$$\begin{aligned} w &= -|(1-x) \operatorname{tg} \varphi|; & u &\equiv 0; \\ \epsilon &= \cos^{-1} \varphi - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где угол φ можно найти из тригонометрического уравнения $P \cos \varphi - 2\alpha \sin \varphi (1 - \cos \varphi) = 0$.

Этот результат полностью во всем диапазоне изменения величины внешней нагрузки совпадает с решением, полученным по теории "I" (рис. 9). Исключение составляет незначительное расхождение результатов при малых прогибах: здесь еще сказывается наличие изгибной жесткости балки, значением которой в теории гибких нитей пренебрегают.

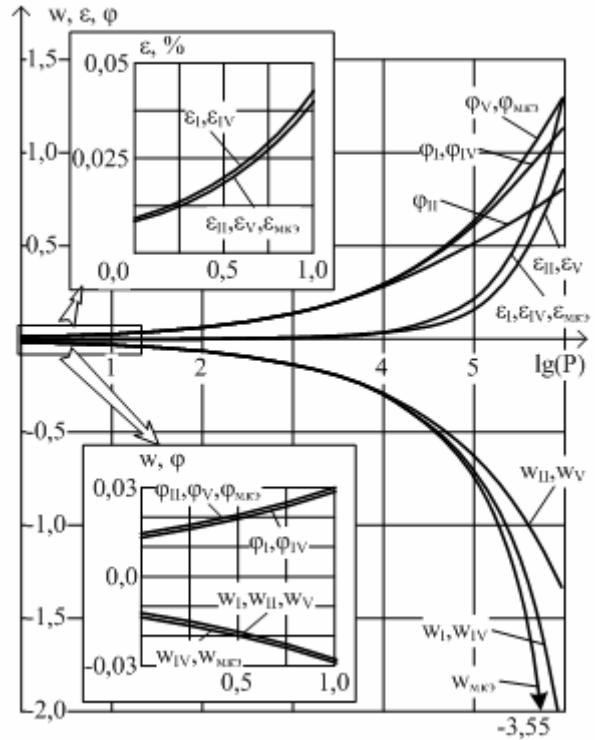


Рис. 9. Зависимость максимального прогиба, угла поворота и деформации двухопорной балки без смещения опор от величины сосредоточенной силы

Остальные теории и МКЭ вплоть до значения силы $P = 10^4$ приводят к мало различающимся результатам. С дальнейшим увеличением внешней силы, величины деформаций резко увеличиваются, что приводит к значительному разбросу результатов. Заметим, что поскольку в этой задаче продольные перемещения практически отсутствуют, то теория малости деформаций (II) и квадратичное приближение (V) приводят к одному и тому же выражению деформации.

Различный вид имеют только формулы определения углов поворота: если в первом случае $\varphi = \operatorname{tg} w'$, то во втором $\varphi = w'$. Поскольку зависящая от него величина энергии изгиба здесь незначительна, то эти теории приводят к одинаковому значению функции прогиба.

Наибольшие расхождения при значении силы $P > 10^4$ наблюдаются в определении величины максимального прогиба.

Так при $P = 10^6$ деформация достигает значения 0,92...1,35 (в зависимости от теории), а значение максимального прогиба составляет:

-1,34 – по теории малости деформаций и квадратичному приближению,

-2,15 – по полностью нелинейным соотношениям и теории гибкой нити;

-3,55 – по МКЭ.

Наиболее востребованы нелинейные теории упругости в задачах закритического поведения конструкций. К таким задачам относится, например, задача продольно-поперечного изгиба двухопорной балки (рис.10).

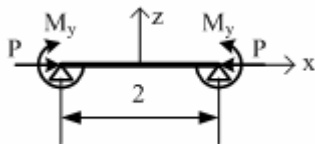


Рис. 10. Продольно-поперечный изгиб двухопорной балки

Относительная критическая эйлера сила для нее составляет $P_{cr} = \frac{\pi^2}{4}$. Линейное решение имеет вид

$$w^{VI} = \frac{M_y}{2}(x^2 - 1); \quad u^{VI} = -\frac{P}{\alpha}x.$$

Более точное решение можно получить исходя из уравнения упругой линии

$$w'' + Pw = M_y.$$

Здесь $P > 0$. Прогиб в этом случае принимает вид

$$w_{lt} = \frac{M_y}{P} \frac{\cos(\sqrt{P}x)}{\cos\sqrt{P}} \quad (9)$$

Эластика Эйлера при отсутствии изгибающих моментов приводит к точному решению

$$P = K^2 (\sin \theta); \quad w_{III} = \frac{2 \sin \theta}{K(\sin \theta)}; \quad (10)$$

$$u_{III} = 2 \left[1 - \frac{E(\sin \theta)}{K(\sin \theta)} \right],$$

где K, E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно $\left(\theta = \frac{\Phi}{2} \right)$.

На рис. 11 показано изменение максимального прогиба и смещения опоры в зависимости от величины внешней силы при сжатии и при совместном действии сжатия и изгиба моментом, равным

$M_y = 0,02P$ (соответствующие величины снабжены верхним индексом "М"). Вычисления проведены для гибкой полосы, параметр $\alpha = 4 \cdot 10^5$.

В этом примере погрешность определения прогиба, вычисленного по линейной теории, не превышает 5% до значения внешней силы $P = 0,12$ ($w_{VI} = -0,0012$).

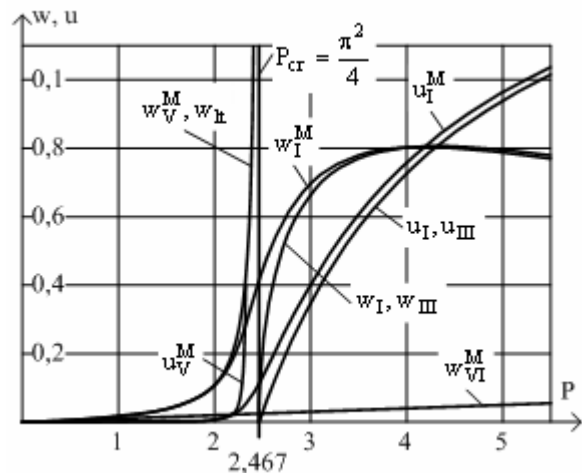


Рис. 11. Продольные перемещения и прогиб только сжатой балки и при совместном действии сжатия и изгиба ($M = 0,02P$)

Прогиб, рассчитанный по формуле (9), остается в пределах допустимой точности до значения внешней силы $P = 2,1$ ($w_{VI} = -0,139$), т.е. до значения, составляющего 85% от величины критической силы. С дальнейшим приближением нагрузки к критическому значению прогиб, рассчитанный по формуле (9), неограниченно растет. С этим решением практически совпадает решение, полученное по квадратичному приближению (V).

Решения, полученные по соотношениям эластичности Эйлера (III), в том числе и по точному решению (10), полностью совпадают с решением, полученным по нелинейной теории I во всем приведенном диапазоне изменения силы. Рассчитанные по полностью нелинейным соотношениям угол поворота концевого сечения, внутренние силы при $x = 1$ и максимальный изгибающий момент сжатой балки и при совместном действии сжатия и изгиба показаны на рис. 12.

Результаты на рис. 11 и 12 соответствуют классическим диаграммам равновесных состояний сжатой идеальной балки и балки с начальными несовершенствами.

Эпюры распределения вдоль оси балки перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента при значении внешней силы $P = 5$ показаны на рис. 13.

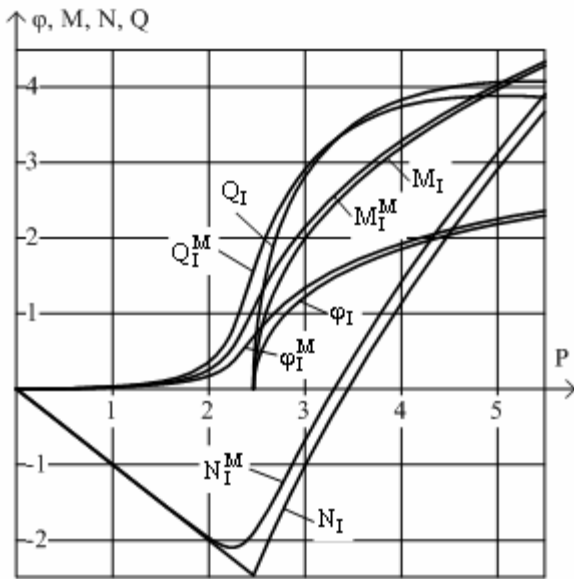


Рис. 12. Углы поворота концевое сечения, внутренние силы и моменты сжатой балки и при совместном действии сжатия и изгиба ($M = 0,02P$)

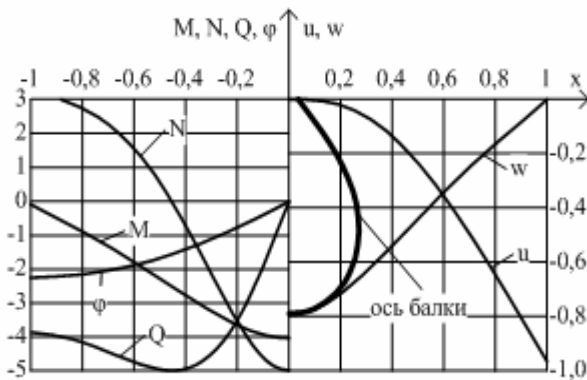


Рис. 13. Эпюры перемещений, угла поворота, внутренних сил и момента

Влияние укорочения оси балки на величину критической силы становится существенным при значении параметра $\alpha < 100$ (рис. 14). При $\alpha < 30$ значение критической силы значительно увеличивается и при $\alpha = 16,65$ достигает значения $P = 5,55$, тогда как эйлера $P_{cr} = 2,47$. При меньших значениях параметра стержень устойчивость не теряет. Отметим, что значение параметра $\alpha = 16,65$ соответствует отношению $\frac{2a}{D} = 2,04$, где D – диаметр круглого поперечного сечения. Это же отношение, рассчитанное для винтовых пружин, составляет [11] $\frac{2a}{D} = 2,47$. Больше значение этого отношения объясняется тем, что в работе [11] учитывались сдвиговые деформации и изменения изгибной и сдвиговой жесткостей эквивалентного бруса при его обжатии.

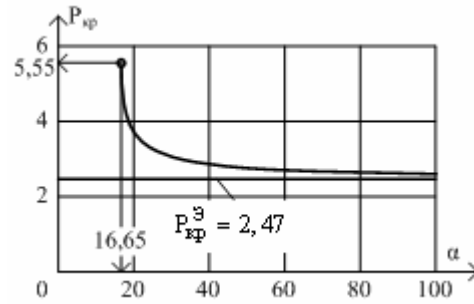


Рис. 14. Зависимость критической силы от относительной жесткости на растяжение-сжатие

Заключение

1. Показано, что приближенные решения, полученные методом Рэлея-Ритца с использованием аналитических функций при аппроксимации перемещений, обладают высокой точностью, быстрой сходимостью и устойчивостью процедуры их получения.

2. Теория малых деформаций приводит, как и следовало ожидать, к верным результатам, если деформация оси не превышает 1%. Эта погрешность согласуется с погрешностью разложения малой деформации оси в ряд Тейлора [7]. Полученное таким образом более простое выражение деформации (сравнить строки I и II табл. 1) при использовании его в вариационных методах приводит в некоторых случаях к некорректным значениям продольной силы (первые два примера), но возможность аналитического вычисления потенциальной энергии и компонентов вектора градиента и матрицы Гессе является бесспорным преимуществом этой теории.

3. Результаты, полученные по теории отсутствия деформации оси и теории гибкой нити, верны для своих специфичных классов задач. Основное преимущество этих теорий в том, что упрощенные уравнения равновесия позволяют в некоторых случаях получить точное решение. Недостатком является невозможность их использования для расчета балок, как элементов составных конструкций, где важен учет и изгибной жесткости и жесткости на растяжение-сжатие.

4. Затруднительно указать единый критерий применимости линейной теории. Точность результатов, полученных по этой теории, во многом зависит от вида внешних нагрузок и условий опирания балки. Так, при чистом изгибе эта теория приводит точным значениям изгибающего момента и угла поворота во всем диапазоне изменения нагрузки. Погрешность определения прогиба до значения $w = 0,76$ не превышает пяти процентов. При этом в задаче продольно-поперечного изгиба результаты, полученные по линейной теории, практически не

пригодны. Теория квадратичного приближения в сравнении с линейной теорией позволяет решать более широкий класс задач и в некоторых случаях значительно повысить точность получаемых решений.

В заключении автор считает своим долгом поблагодарить С.А. Халилова за постоянное внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Новожилов, В.В. Теория упругости [Текст] / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
2. Илюхин, А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней [Текст] / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
3. Попов, Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней [Текст] / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
4. Светлицкий, В.А. Механика стержней [Текст]. В 2 ч. Ч. 1. Статика / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
5. Черных, К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах [Текст] / К.Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. – 336 с.
6. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
7. Халилов, С.А. Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений [Текст] / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 1 (78). – С. 39–45.
8. Минтюк, В.Б. Построение одномерного базиса приближенного анализа [Текст] / В.Б. Минтюк // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ"*. – Х., 2007. – Вып. 35. – С. 143–148.
9. Минтюк, В.Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В.Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2007. – № 5 (41). – С. 32–36.
10. Минтюк, В.Б. Точность, сходимость и устойчивость метода Рэлея-Ритца при различных базисах [Текст] / В.Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2008. – № 5 (52). – С. 17–23.
11. Пономарев, С.Д. Расчет упругих элементов машин и приборов [Текст] / С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреев. – М.: Машиностроение. – 1980. – 326 с.

Поступила в редакцию 25.05.2011

Рецензенты: д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой прочности летательных аппаратов П.А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ПЛОСКОГО ВИГІНУ БАЛКИ

В.Б. Минтюк

Методом Рэлея-Ритца з використанням аналітичного базису отримано числові рішення ряду геометрично нелінійних задач плоского вигину балки з урахуванням деформації осі. Показана швидка збіжність і висока точність наближених вирішень. В основу розв'язних рівнянь закладено теорії з різним "рівнем" нелінійності: повністю нелінійна, урахування малості деформацій, пластика Ейлера, гнучка нитка, урахування малості деформацій і квадрату кута повороту та лінійна. Розглянуто задачі чистого вигину балки, балки на двох опорах, коли опори можуть зближуватись, і без зближення опор, а також подовжньо поперечного вигину з розглядом закритичної поведінки. Проведено порівняльний аналіз результатів.

Ключові слова: балка, плоский вигин, геометрично нелінійна задача, деформація осі, числове рішення

RESEARCHING NONLINEAR PLANE BENDING OF A BEAM

V.B. Mintyuk

Numerical solutions of several geometrically nonlinear problems of plane bending of a beam under assumption of deformed axis are developed using Raleigh-Ritz method. Rapid convergence and high accuracy of solutions obtained are shown. Governing equations are obtained basing on theories with different level of nonlinearity: complete nonlinearity, assumption of small deformations, Euler's elastic, flexible wire, assumption of small of small deformation and square of deviation, and linear theory. Following problems are analyzed: pure bending of a beam, bending of simply supported beam with approaching and non-approaching supports, transverse bending with consideration of post-buckling behaviour. Comparative analysis of results is carried out.

Keywords: beam, simple bending, geometrically nonlinear problem, deformation of axis, numerical solution

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.