

УДК 629.76.015

А. Г. САХНО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

*Представлены результаты качественного анализа системы дифференциальных уравнений произвольного движения летательного аппарата в широком диапазоне изменения параметров подобия, а также траекторных характеристик и внешних воздействий на базе наглядного графического изображения правых частей дифференциальных уравнений в виде так называемых характеристических поверхностей. Такой подход существенно упрощает решение некоторых практических задач без ухудшения качества исследований и делает более наглядными результаты, что облегчает изучение динамических характеристик полёта летательного аппарата. Приведены исследования динамических возможностей летательного аппарата для изменения его скорости по величине и направлению*

**Ключевые слова:** летательный аппарат, уравнения движения, качественный анализ, фазовый портрет движения, траектория, скорость, угол атаки, угол наклона траектории к горизонту.

### Введение

Для анализа движения летательных аппаратов (ЛА) и других тел применяется много методов. Чаще всего для этого используется численное интегрирование уравнений движения. Современные математические методы и вычислительная техника позволяют выполнить с достаточной точностью и за необходимое время численный расчёт любой траектории ЛА. При этом можно получить необходимую информацию, но для принятия обобщающих выводов обычно приходится выполнять очень большой объём вычислений. При ряде допущений удастся получить решение уравнений движения и в аналитической форме.

Особое место среди этих методов занимает качественный анализ уравнений движения. Необходимую информацию при этом можно получить, не решая уравнений движения, а только анализируя их правые части. Это можно применить как к отдельному уравнению, так и ко всей системе уравнений.

Очень наглядным является графическое изображение правых частей дифференциальных уравнений в виде так называемых характеристических поверхностей. Геометрическая интерпретация этих поверхностей выглядит очень наглядной, если количество исследуемых переменных не более трёх.

Идею качественного анализа дифференциальных уравнений с применением геометрического подхода разработал Анри Пуанкаре (1854-1912). Он считал, что перед численным решением дифференциальных уравнений, необходимо выполнить качественное (геометрическое) изучение функций (кри-

вых), определяемых этими уравнениями. Это значительно расширяет сведения о процессах, описываемых исследуемыми уравнениями, и позволяет значительно сократить объём последующих вычислений. Он изучил характеристики этих кривых на плоскости, классифицировал их особые точки, а также рассмотрел некоторые свойства этих кривых в  $n$ -мерном пространстве.

В качестве первого примера выполнен анализ простейшего движения математического маятника. Остальные задачи были решены, рассматривая так называемое продольное движение ЛА (рис. 1). Сис-

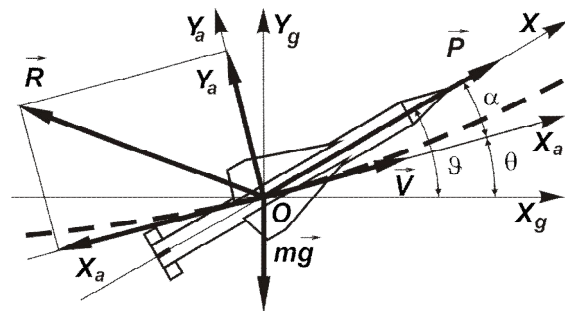


Рис. 1. Силы, действующие на ЛА  
в вертикальной плоскости

тема уравнений движения ЛА в неизменной вертикальной плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{V} = g((P \cos \alpha - X_a)/(mg) - \sin \theta); \\ \dot{\theta} = g((P \sin \alpha + Y_a)/(mg) - \cos \theta)/V; \\ I_z \dot{\omega}_z = M_z; \\ \dot{\vartheta} = \omega_z = \dot{\theta} + \dot{\alpha}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  – угол атаки;

$\theta$  – угол наклона траектории (угол наклона вектора скорости) к местному горизонту;

$\vartheta$  – угол тангажа:  $\vartheta = \theta + \alpha$ ;

$X_a$  – сила лобового сопротивления;

$Y_a$  – аэродинамическая подъёмная сила;

$mg$  – вес ЛА;

$P$  – тяга (направлена вдоль продольной оси ЛА).

В приведенных уравнениях точка над символом обозначает дифференцирование по времени.

## 1. Анализ движения математического маятника

В качестве примера рассмотрим хорошо известное движение математического маятника. Это движение интересно тем, что для его анализа можно показать применение различных методов.

Простейший маятник (рис. 2) состоит из небольшого груза массой  $m$ , подвешенного на абсолютно жёстком стержне длиной  $l$ . Груз под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  движется по дуге окружности. Угол  $\varphi$  отсчитывается от нижнего расположения груза против часовой стрелки. Скорость движения груза по окружности равна  $l\dot{\varphi}$ , а тангенциальная составляющая ускорения –  $l\ddot{\varphi}$ . Соппротивлением среды и трением в точке подвески пренебрегаем. Проекцию второго закона Ньютона для груза на касательную к окружности можно записать в виде  $ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$ , или окончательно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ .

Это уравнение описывает все возможные движения маятника. Для выделения какого-то конкретного движения необходимо добавить дополнительные условия. Например, задать положение груза и величину его скорости в какой-то момент времени.

Общее аналитическое решение этого уравнения выражается через эллиптические функции Якоби. Для анализа движения маятника можно также использовать численные методы интегрирования этого уравнения. Для этого удобно его представить в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Необходимую информацию можно получить, выполнив колоссальное количество вы-

числений для различных начальных условий. Этот материал необходимо обработать и проанализировать. Конечно, выполнив предварительный анализ этой задачи, можно значительно уменьшить объём предполагаемых вычислений.

Одним из самых распространённых методов приближённого решения таких задач заключается в линеаризации уравнений. Если ограничиться малыми колебаниями маятника, когда угол  $\varphi$  настолько мал, что можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то уравнение

(2) приобретает вид  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ . Это линейное уравнение описывает т. н. гармонические колебания; его решение:  $\varphi = \varphi_{\max} \sin(\omega_0 t + a)$ . Значения

$\varphi_{\max}$  – угла максимального отклонения маятника и  $a$  определяются из начальных условий. Например, если принять, что при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0$  и  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ , то

$$\varphi_{\max} = \sqrt{\varphi_0^2 + (\dot{\varphi}_0/\omega_0)^2}, \quad \sin a = \varphi_0/\varphi_{\max} \quad \text{и} \\ \cos a = \dot{\varphi}_0/(\omega_0 \varphi_{\max}).$$

Используя метод малых возмущений, полученный результат можно значительно уточнить. Решение этой задачи, распространяемое на сколь угодно большой интервал времени, получил таким методом известный математик и механик М.В. Остроградский.

Полную картину движения маятника можно получить, анализируя его фазовые траектории. Для этого удобнее использовать уравнение, выведенное на основе закона сохранения энергии:

$$(\dot{\varphi}/\omega_0)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2 = \bar{E}. \quad (3)$$

Слагаемые этого уравнения, характеризующие кинетическую, потенциальную и полную энергию, отнесены к кинетической энергии точки массой  $m$ , равномерно вращающейся по окружности с угловой скоростью  $\omega_0$ , т. е. они отнесены к  $m(\omega_0 l)^2/2$ .

Легко убедиться, что уравнение (3) после дифференцирования по времени переходит в уравнение (2). Поэтому это выражение называют так же промежуточным интегралом уравнения (2).

Проанализируем движение маятника, не решая это дифференциальное уравнение. Для этого при различных фиксированных значениях относительной энергии  $\bar{E}$  вычислим значения  $\dot{\varphi}/\omega_0 = \pm \sqrt{\bar{E} - (2 \sin(\varphi/2))^2}$ . Полученные результаты представим графически на плоскости (рис. 3) в виде кривых  $\dot{\varphi}/\omega_0 = f(\varphi)$  при постоянных значениях энергии, т. е. при  $\bar{E} = \text{const}$ . Эти кривые называются фазовыми траекториями.

Этот геометрический образ – пространство, заполненное фазовыми траекториями, которые соот-

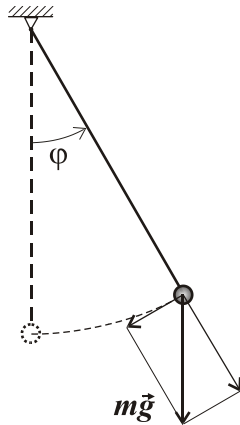


Рис. 2. К анализу движения маятника

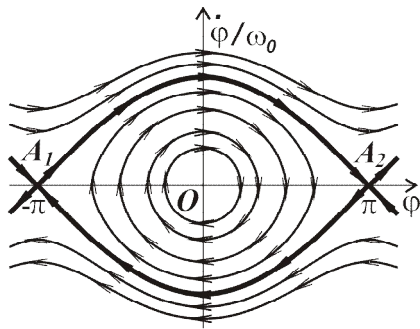


Рис. 3. Фазовый портрет движения маятника

ветствуют всем возможным вариантам движения, называется фазовой диаграммой, или фазовым портретом движения. В общем, через каждую точку фазового пространства проходит только одна фазовая траектория. Пересечения фазовых траекторий являются особыми точками, обычно требующими более подробного анализа.

Каждая фазовая траектория соответствует какому-то значению энергии маятника. Если энергия маятника равна нулю, чему соответствует точка  $O$ , то он будет покоиться (точка устойчивого равновесия). Если относительная энергия меньше четырёх ( $\bar{E} < 4$ ), то маятник будет колебаться между значениями  $-\phi_{\max}$  и  $+\phi_{\max}$ . Такое движение является периодическим и ему соответствуют замкнутые овалы. При стремлении амплитуды к нулю оно приближается к гармоническому движению, и овал переходит в окружность.

При достаточно большой энергии, т. е. при  $\bar{E} > 4$ , маятник совершает вращательные движения. В нижней точке траектории достигается максимальное значение скорости  $(\dot{\phi}/\omega_0)_{\max} = \sqrt{\bar{E}}$ , а в её верхней части – минимальное  $(\dot{\phi}/\omega_0)_{\min} = \sqrt{\bar{E} - 4}$ . Фазовая траектория, разделяющая колебательные и вращательные движения, называется сепаратрисой. В данном случае ей соответствует значение относительной энергии  $\bar{E} = 4$ , а на диаграмме она проходит через точки  $A_1$  и  $A_2$ . Они являются точками неустойчивого равновесия (шарик «замирает» в верхней точке). Анализ движения в их окрестности обычно требует дополнительного исследования.

Фазовая диаграмма является очень наглядной и имеет глубокий физический смысл. Для понимания движения маятника вовсе не нужно знать его положение и скорость в каждый момент времени. Гораздо важнее представлять общий характер этого движения, который и даётся фазовой диаграммой. Любое конкретное движение восстанавливается по диаграмме.

Необходимо отметить, что качественный анализ дифференциальных уравнений хорошо разработан для уравнений не более второго порядка. По-

этому для уравнений более высокого порядка он используется значительно реже. Частично это связано с практической невозможностью графического изображения пространств, порядок которых больше трёх. Поэтому происходит некоторая потеря в наглядности результатов.

Чтобы понять трудности, возрастающие хотя бы при увеличении количества переменных, рассмотрим движение того же маятника с учётом сопротивления среды. В этом случае появятся новые параметры, влияющие на фазовый портрет движения: масса груза, его форма и, возможно, размеры, закон сопротивления, время движения и т. п. Всё это коренным образом изменит фазовый портрет движения.

При наличии сопротивления энергия маятника с течением времени будет уменьшаться. Когда его энергия упадёт до нуля, маятник остановится. Поэтому с полной уверенностью можно сказать, что все фазовые траектории «разорвутся» и на конечном участке превратятся в спирали, «накручивающиеся» на точки  $O$  (рис. 4), т. е. они останутся устойчивыми фокусами. От конкретных условий движения маятника будет зависеть вид этих спиралей, как быстро это движение будет затухать и т. п.

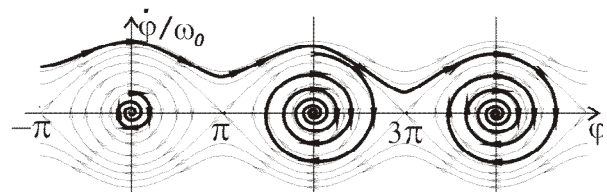


Рис. 4. Фазовый портрет маятника, движущегося в сопротивляющейся среде

## 2. Анализ возможностей летательного аппарата для изменения скорости по величине

Применим качественный анализ первого уравнения системы (1) для какого-либо конкретного ЛА, находящегося в исследуемой точке фазового пространства. На рис. 5 для нескольких значений углов наклона траектории к горизонту изображена зависимость от угла атаки параметра  $\dot{V}$ , характеризующего возможности ЛА по изменению скорости по величине.

В качестве границы здесь приведено максимально допустимое значение угла атаки.

Так как

$$\dot{V} = g((P \cos \alpha - X_a) / (mg) - \sin \theta) = g(n_{xa} - \sin \theta),$$

где  $n_{xa} = (P \cos \alpha - X_a) / (mg)$  – тангенциальная перегрузка, то при  $\theta = 0$   $\dot{V} = g n_{xa}$ . При других значе-

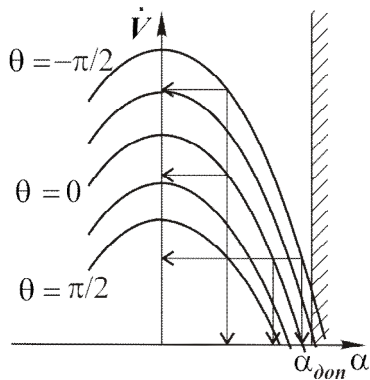


Рис. 5. Зависимость параметра  $\dot{V}$  от угла атаки

ниях угла  $\theta$  график зависимости  $\dot{V}(\alpha)$  будет эквидистантно перемещаться вверх или вниз на величину  $g \sin \theta$ .

Равномерному движению, т. е.  $V = \text{const}$ , соответствует участок на оси абсцисс, т. е. при  $\dot{V} = 0$ .

Следует отметить, что любому значению параметра  $\dot{V}$  соответствуют два угла атаки: один является положительным, другой — отрицательным. Здесь, как и при любой многозначности решения, для выбора конкретного варианта необходимы дополнительные условия. В дальнейшем для упрощения анализа будем рассматривать только положительные значения углов атаки.

Каждый ЛА при выбранном угле наклона траектории к горизонту характеризуется вполне определённым значением параметра  $\dot{V}$ . Максимальное значение параметра  $\dot{V}$  обеспечивается при минимальном сопротивлении ЛА. Для ЛА, симметричного относительно плоскости  $OXZ$ , максимальное значение параметра  $\dot{V}$  обеспечивается при  $\alpha = 0$ , а его минимальное значение обычно ограничено значением максимально допустимого угла атаки ( $\alpha_{\text{доп}}$ ). Если требуемое значение параметра  $\dot{V}$  оказывается в этом диапазоне, то заданный режим реализуется, а если нет, то этот ЛА не в состоянии выполнить поставленную задачу. В этом случае он может продолжать движение, но располагаемое значение параметра  $\dot{V}$  будет соответствовать условию на границе и уже не будет равно требуемому.

При одном и том же угле атаки обеспечивается вполне определённый диапазон изменения параметра  $\dot{V}$ . Максимальное его значение  $\dot{V}_{\text{max}} = g(n_{\text{xa}} + 1)$ , так как максимальный разгон осуществляется при вертикальном снижении ЛА ( $\theta = -\pi/2$ ). А минимальное его значение  $\dot{V}_{\text{min}} = g(n_{\text{xa}} - 1)$  получают при вертикальном на-

боре высоты ( $\theta = \pi/2$ ). Разность между этими значениями

$$\dot{V}_{\text{max}} - \dot{V}_{\text{min}} = 2g \quad (4)$$

не зависит от свойств ЛА или среды.

Приведенный результат является общим, т. е. он верный для любого движущегося тела и при любых условиях.

Рассмотрим влияние на параметр  $\dot{V}$  угла наклона траектории к горизонту. Уменьшение параметра  $\dot{V}$ , связанное с увеличением этого угла от  $\theta = -\pi/2$  до  $\theta = \pi/2$ , вызвано влиянием составляющей силы веса  $mg \sin \theta$ . При наборе высоты ЛА ( $\sin \theta > 0$ ) составляющая тяги двигателя  $P \cos \alpha$  преодолевает не только силу лобового сопротивления  $X_a$ , но и эту составляющую силы веса. При снижении ЛА, т. е. при  $\sin \theta < 0$ , эта составляющая силы веса изменяет знак и является уже тягой, что и приводит к увеличению параметра  $\dot{V}$ . Максимальный разгон ЛА обеспечивается при вертикальном спуске, т. е. при  $\theta = -\pi/2$ , и при угле атаки, равном нулю, так как при этом сопротивление рассматриваемых ЛА минимально.

При отсутствии тяги, т. е. при  $P = 0$ , тангенциальная перегрузка всегда отрицательна:  $n_{\text{xa}} = -X_a / (mg)$ . Однако и в этом случае можно обеспечить разгон ЛА ( $\dot{V} > 0$ ), если выполнить условие  $X_a < -mg \sin \theta$ , т. е. необходимо, чтобы составляющая силы веса  $mg \sin \theta$  превышала сопротивление ЛА.

При разных углах наклона траектории к горизонту одно и то же значение параметра  $\dot{V}$  обеспечивается при различных углах атаки. Здесь основное влияние оказывает составляющая силы веса  $mg \sin \theta$ . При наборе высоты  $\sin \theta > 0$  она играет роль сопротивления. Следовательно, для сохранения заданной величины параметра  $\dot{V}$  на эту же величину следует уменьшить сопротивление ЛА. Этого можно достичь, уменьшив по модулю угол атаки. При спуске ЛА  $\sin \theta < 0$  и составляющая силы веса  $mg \sin \theta$  играет уже роль тяги. Поэтому для сохранения заданного значения  $\dot{V}$  это увеличение тяги необходимо компенсировать таким же увеличением сопротивления, для чего увеличивают угол атаки (по модулю). Поэтому для выдерживания заданного значения параметра  $\dot{V}$  при уменьшении по модулю угла  $\theta$  необходимо увеличивать угол атаки. Если при вертикальном спуске и наборе высоты ЛА способен обеспечить одинаковые значения параметра  $\dot{V}$  при различных углах атаки, то разница между



значениями тангенциальной перегрузки будет равна 2, так как  $n_{\text{ха вверх}} - n_{\text{ха вниз}} = \sin \theta_{\text{вверх}} - \sin \theta_{\text{вниз}} = 2$ , при прочих равных условиях.

Зная закон изменения скорости по времени, можно определить соответствующий ему закон изменения угла атаки. Можно решить и обратную задачу: задав закон изменения угла атаки, получить соответствующее ему изменение скорости.

### 3. Анализ возможностей летательного аппарата для изменения скорости по направлению

Для этого выполним качественный анализ второго уравнения системы (1) для какого-либо конкретного ЛА, находящегося в исследуемой точке фазового пространства.

На рис. 6 для нескольких значений углов наклона траектории к горизонту изображена зависимость от угла атаки параметра  $\dot{\theta}$ , характеризующего возможности ЛА по изменению скорости по направлению.

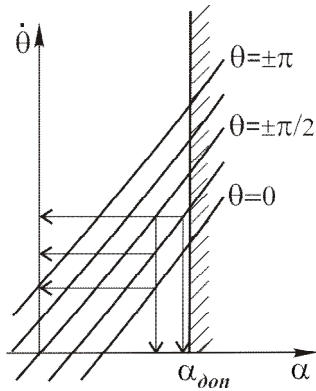


Рис. 6. Зависимость параметра  $\dot{\theta}$  от угла атаки

Здесь так же показана граница, соответствующая максимально допустимому углу атаки. Так как  $\dot{\theta} = g((P \sin \alpha + Y_a)/(mg) - \cos \theta)/V = g(n_{\text{ya}} - \cos \theta)/V$ ,  $n_{\text{ya}} = (P \sin \alpha + Y_a)/(mg)$  – нормальная скоростная перегрузка, то при вертикальном спуске или подъёме  $\theta = \pm\pi/2$  и поэтому  $\dot{\theta} = g n_{\text{ya}}/V$ . При других значениях угла  $\theta$  график  $\dot{\theta}(\alpha)$  эквидистантно перемещается вверх или вниз на величину  $g \cos \theta/V$ . Вследствие чётности функции косинуса величина параметра  $\dot{\theta}$  не зависит от знака угла  $\theta$ .

При решении этой задачи обычно вводят ещё одну границу (здесь она не показана), связанную с максимально допустимым значением нормальной перегрузки.

Анализ приведенных данных показывает, что для получения значительных положительных величин параметра  $\dot{\theta}$  необходимы большие положи-

тельные углы атаки, а для создания значительных отрицательных величин параметра  $\dot{\theta}$  требуются большие отрицательные значения угла атаки. Однако следует учитывать, что вследствие влияния составляющей силы веса  $mg \cos \theta$  посередине имеется область, где знак параметра  $\dot{\theta}$  не совпадает со знаком угла атаки.

Область возможных значений параметра  $\dot{\theta}$  имеет форму полосы. Две вертикальные границы этой области соответствуют допустимым значениям углов атаки (правая – положительным значениям, а левая – отрицательным). Нижняя граница этой области соответствует манёврам, начинающимся с горизонтального участка траектории, т. е. при  $\theta = 0$ , и на ней  $\dot{\theta} = g(n_{\text{ya}} - 1)/V$ . Верхняя граница также соответствует манёврам, которые начинаются с горизонтального участка траектории, но уже для перевёрнутого положения ЛА, т. е. при  $\theta = \pi$ . Здесь  $\dot{\theta} = g(n_{\text{ya}} + 1)/V$ .

Если потребные значения  $\dot{\theta}$  находятся в этом диапазоне, то заданный манёвр выполним. Если они выходят из него, то ЛА вынужден перейти на режим движения с допустимыми для него значениями угла атаки или нормальной скоростной перегрузки.

Верхняя граница этой области соответствует максимальному значению параметра  $\dot{\theta}$ , а нижняя – минимальному. Их разность значений при любом угле атаки равна одной и той же величине:

$$\dot{\theta}_{\text{max}} - \dot{\theta}_{\text{min}} = g(n_{\text{ya}} + 1)/V - g(n_{\text{ya}} - 1)/V = 2g/V.$$

Удобнее эту формулу представить следующим образом:

$$V(\dot{\theta}_{\text{max}} - \dot{\theta}_{\text{min}}) = (V\dot{\theta})_{\text{max}} - (V\dot{\theta})_{\text{min}} = 2g. \quad (5)$$

Значения параметра  $\dot{\theta}$  на границе области, как и в любой другой её точке, зависят от свойств ЛА, угла атаки, среды, в которой происходит движение ЛА, и т. п. Несмотря на это, разность параметров  $V\dot{\theta}$ , определённая при одном и том же угле атаки на верхней и нижней границах этой области, равна  $2g$  и не связана со свойствами ЛА.

Проанализируем влияние угла наклона траектории к горизонту на параметр  $\dot{\theta}$ , зафиксировав все другие переменные. Этот анализ удобнее было бы выполнить, сравнив характеристики ЛА в соответствующих положениях. Для этого рассмотрим движение ЛА по криволинейной траектории с постоянной скоростью и постоянным углом атаки без учёта условий, обеспечивающих этот манёвр.

Изменение направления вектора скорости, т. е.

параметра  $\dot{\theta} = g(n_{ya} - \cos\theta)/V$ , определяется силами, направленными по нормали к траектории, т. е.  $N = P \sin \alpha + Y_a - mg \cos \theta$ . При изменении только угла  $\theta$  будет изменяться лишь третье слагаемое, которое является проекцией силы веса ЛА на нормаль к траектории.

Рассмотрим движение ЛА с положительным углом атаки, который должен быть настолько большим, чтобы обеспечить непрерывный рост угла наклона траектории к горизонту (рис. 7). На началь-

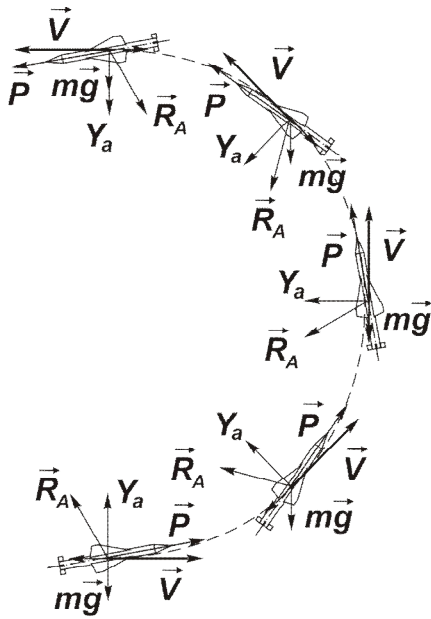


Рис. 7. Траектория ЛА при положительном угле атаки

ном горизонтальном участке траектории, т. е. при  $\theta = 0$ , составляющая силы веса ЛА равна  $mg$ , направлена вниз и будет препятствовать увеличению угла  $\theta$ . Здесь  $\dot{\theta} = g(n_{ya} - 1)/V$ . Однако при дальнейшем увеличении угла  $\theta$  величина проекции силы веса будет уменьшаться и на вертикальном участке, т. е. при  $\theta = \pi/2$ , она станет равной нулю, а  $\dot{\theta} = gn_{ya}/V$ . При дальнейшем увеличении угла  $\theta$  знак проекции силы веса ЛА  $mg \cos \theta$  изменится, и она будет способствовать увеличению угла  $\theta$  (по модулю). Своего максимального значения эта проекция достигнет при  $\theta = \pi$ , что и будет соответствовать максимальной величине параметра  $\dot{\theta}$  при данном угле атаки, т. е. значению  $\dot{\theta} = g(n_{ya} + 1)/V$ .

При дальнейшем возрастании угла  $\theta$  эта составляющая силы веса также будет способствовать увеличению угла атаки. Однако её влияние будет непрерывно уменьшаться и при пересечении верти-

кали, т. е. при  $\theta = 3\pi/2$ , эта проекция силы веса станет равной нулю. При последующем увеличении угла  $\theta$  она опять начнёт препятствовать увеличению угла атаки. Максимального значения эта проекция силы веса достигнет при выходе на горизонтальный участок траектории, т. е. при  $\theta = 2\pi$  ( $\theta = 0$ ).

Для аналогичного манёвра, но направленного вниз, т. е. при отрицательном угле атаки, можно отметить следующее. Если на каком-то участке траектории составляющая силы веса  $mg \cos \theta$  при положительном угле атаки препятствует росту угла  $\theta$ , то при отрицательном угле атаки она будет уже способствовать его росту, и наоборот.

Исходя из этого анализа, можно сделать следующий вывод. В первой и четвёртых областях, т. е. при  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , проекция силы веса  $mg \cos \theta$  препятствует увеличению угла  $\theta$ , но способствует его уменьшению. Во второй и третьей областях, т. е. при  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ , картина обратная: эта составляющая силы веса способствует увеличению угла  $\theta$ , но препятствует его уменьшению.

В зависимости от угла наклона траектории к горизонту одно и то же значение параметра  $\dot{\theta}$  можно обеспечить при различных углах атаки. Здесь опять сказывается влияние составляющей веса ЛА  $mg \cos \theta$ , которая при  $\theta = 0$  имеет наибольшую величину, препятствующую увеличению угла  $\theta$ . При росте угла  $\theta$  это слагаемое уменьшается и при  $\theta/2$  становится равным нулю. При дальнейшем увеличении угла  $\theta$  эта составляющая становится отрицательной и начинает способствовать дальнейшему его росту. Поэтому для обеспечения заданного значения параметра  $\dot{\theta}$  с увеличением угла  $\theta$  от нуля до  $\pi$  потребный угол атаки должен соответствующим образом уменьшаться (для компенсации увеличивающегося влияния проекции  $mg \cos \theta$ ). Из  $\dot{\theta} = g(n_{ya}(\alpha_1) - \cos \theta_1)/V = g(n_{ya}(\alpha_2) - \cos \theta_2)/V$  следует, что  $n_{ya}(\alpha_2) = n_{ya}(\alpha_1) - \cos \theta_1 + \cos \theta_2$ . Между прочим, разность этих двух значений нормальных скоростных перегрузок на границах области, т. е. при  $\theta_1 = \pi$  и  $\theta_2 = 0$ , равна 2.

Из-за того, что косинус является чётной функцией, результат вычислений  $\dot{\theta}$  не зависит от знака угла  $\theta$ . Это является справедливым и для прямолинейных полётов, т. е. при  $\dot{\theta} = 0$ . Этому режиму соответствует отрезок на оси абсцисс. Отсюда видно, что наибольший угол атаки необходим для реализации прямолинейного горизонтального полёта. В наклонном прямолинейном полёте значение потребного угла атаки будет меньше. Причём величина этого

угла не зависит от того, совершает ЛА набор высоты или снижается. Это связано с тем, что в наклонном прямолинейном полёте подъёмная сила должна компенсировать только составляющую силы веса, т.е.  $mg \cos \theta$ . Максимальное значение этой составляющей достигается в горизонтальном полёте.

Следует отметить, что при отключении тяги ( $P = 0$ ) потребное значение перегрузки можно обеспечить, увеличив угол атаки. Это выполнимо, если его величина при этом не выйдет за пределы допустимых значений.

При решении задачи в такой постановке оказалось, что для обеспечения заданного значения  $\dot{V}$  необходим один угол атаки, а для  $\dot{\theta}$  – совсем другой (их совпадение возможно только в редчайшем случае). Поэтому оба условия при такой постановке задачи выполнить уже не удаётся. Необходимо выбрать параметр, который считается важнейшим для конкретной траектории, и реализовывать только это условие. Для рассматриваемых ЛА чаще всего более важным считается выдерживание закона изменения  $\dot{\theta}$ . Для выполнения обоих условий необходим ещё один управляющий фактор.

### Заключение

Рассмотренные примеры позволяют подчеркнуть эффективность применения качественного анализа дифференциальных уравнений при решении многих задач динамики ЛА.

При анализе продольного движения ЛА довольно часто (особенно для манёвренных самолётов) используется построение характеристических поверхностей угловых ускорений  $\dot{\omega}_z$  (рис. 8) в зависимости от угла атаки  $\alpha$  и скорости его изменения  $\dot{\alpha}$ , а также от отклонения  $\delta$  управляющих поверхностей:  $\dot{\omega}_z = f(\alpha, \dot{\alpha}, \delta)$ . При этом используются последние три уравнения системы (1). Подстановкой заданных значений  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\dot{\alpha}$  во второе уравнение определяется  $\dot{\theta}$ . Из четвёртого уравнения находится угловая скорость ЛА  $\omega_z$ , а из третьего уравнения –  $\dot{\omega}_z$ .

При построении поверхностей угловых ускорений удобно в качестве параметра выбрать скорость изменения угла атаки, т.е.  $\dot{\alpha}$ . В этом случае взаимосвязь между углом атаки  $\alpha$  и углом отклонения управляющей поверхности  $\delta$  будет очень наглядной. Например, при пересечении поверхности  $\dot{\alpha} = 0$  с горизонтальной плоскостью  $\dot{\omega}_z = 0$  получается линия, определяющая отклонение  $\delta$  рулевой поверхности в зависимости от угла атаки  $\alpha$  в устано-

вившемся полёте. Это так называемая балансирующая кривая  $\delta = f(\alpha)$  при  $\omega_z = \text{const}$ . Такой подход делает анализ более наглядным и облегчает исследование задач динамики ЛА.

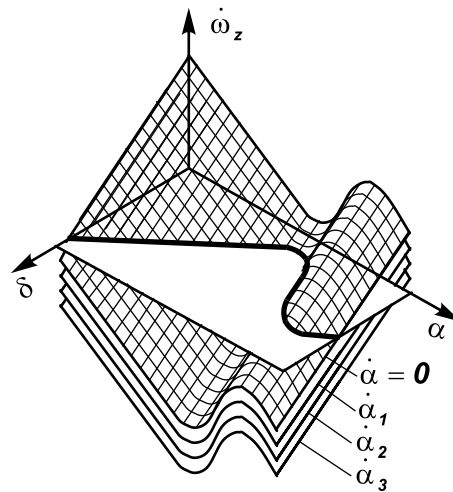


Рис. 8. Характеристические поверхности угловых ускорений [1]

Иногда для анализа более удобным может оказаться другой набор переменных.

Качественный анализ уравнений движения с использованием фазовых диаграмм является современным, но систематически его применять в динамике летательных аппаратов начали сравнительно недавно. Использование этой методики для анализа некоторых движений и решения задач динамики ЛА изложено в работе [2]. Конечно, речь пока не идёт об исследовании уравнений динамики ЛА в наиболее общей постановке. Пока делаются попытки решения более скромных задач – исследовать качественные особенности движения ЛА только относительно ц. м. в предположении, что за это время основные параметры движения ц. м. ЛА не успевают измениться. Используя эти и ряд других допущений, авторам этой работы удалось решить целый комплекс важнейших задач. Например, на рис. 9 показаны фазовые траектории нелинейных уравнений, описывающих боковое движение ЛА при нулевом демпфировании [2]. Следует отметить, что эти траектории имеют много общего с рассмотренными ранее фазовыми траекториями математического маятника.

Анализ уравнений движения ЛА с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений обычно разделяют на несколько этапов. Сначала исходная система уравнений значительно упрощается. Затем для этой системы уравнений находят все возможные состояния равновесия, т.е. координаты особых точек и уравнения сепаратрис. После этого исследуется движение в окрестности каждой особой точки. При этом стараются найти области устойчивости и

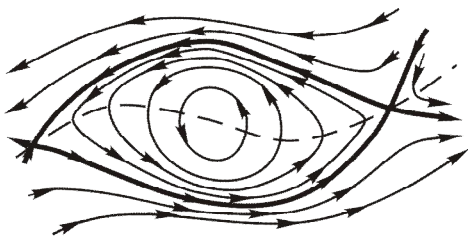


Рис. 9. Фазовые траектории бокового движения ЛА при нулевом демпфировании [2]

неустойчивости, а также области периодических и аperiodических движений.

Для этого исследуемые дифференциальные уравнения линеаризуются в окрестности каждой особой точки. Информация о поведении решения дифференциальных уравнений в окрестности особых точек значительно облегчает анализ движения и вдали от них. Поэтому после анализа особых точек исследование продолжается вдали от них. Этот анализ уже приходится выполнять численно.

Интерес к методам, позволяющим получить качественную картину движения (процесса) хотя бы приближённо, всё время возрастает. Они существенно упрощают решение многих задач, позволяют предсказать качественный характер результатов и сокращают количество машинного времени, необходимого для численного анализа движения ЛА.

## Литература

1. Снешко, Ю.И. Исследование в полёте устойчивости и управляемости самолёта [Текст] / Ю.И. Снешко. – М.: Машиностроение, 1971. – 328 с.
2. Бюшгенс, Г.С. Динамика самолёта. Пространственное движение [Текст] / Г.С. Бюшгенс, Р.В. Студнев. – М.: Машиностроение, 1983. – 320 с.
3. Сахно, А.Г. Влияние веса летательного аппарата на его манёвренные свойства. / А.Г. Сахно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. научн. тр. Нац. аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(41). – Харьков, 2005. – С. 59-65.
4. Сахно, А.Г. Введение в динамику летательных аппаратов (движение в вертикальной плоскости) [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А.Г. Сахно. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – Ч.1. – 186 с.
5. Сахно, А.Г. Введение в динамику летательных аппаратов (движение в вертикальной плоскости) [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А.Г. Сахно. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2012. – Ч.2. – 76 с.

Поступила в редакцию 31.07.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры ракетных двигателей и энергетических установок летательных аппаратов А.В. Амброжевич, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

## ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ РУХУ ЛІТАТЕЛЬНОГО АПАРАТУ

*А.Г. Сахно*

Представлені результати якісного аналізу диференціальних рівнянь руху літального апарату. Такий підхід істотно спрощує вирішення деяких задач і робить його більш наочним, що полегшує дослідження динаміки польоту. Наведено дослідження можливостей літального апарату для зміни його швидкості за величиною і за напрямком.

**Ключові слова:** літальний апарат, рівняння руху, якісний аналіз, фазовий портрет руху, траєкторія, швидкість, кут атаки, кут нахилу траєкторії до горизонту

## QUALITATIVE ANALYSIS EQUATIONS OF MOTION OF AIRCRAFT

*A. G. Sakhno*

The results of the qualitative analysis of differential equations of motion of the first flying machine. This approach greatly simplifies the solution of some problems and makes it more obvious, which facilitates the study of the dynamics of flight. Research opportunities presented flying apparatus that to change its velocity magnitude and direction.

**Key words:** aircraft equations of motion, qualitative analysis, the phase portrait of the movement trajectory, velocity, angle of attack, angle of trajectory to the horizon.

**Сахно Аркадій Григорьевич** – доцент кафедры аэрогидродинамики и акустики Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского, «ХАИ», Харьков, Украина