

УДК 539.3

А. Г. НИКОЛАЕВ, Е. А. ТАНЧИК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*В работе предложен эффективный метод определения напряжений в упругом пространстве с двумя параллельно расположенными сферическими включениями при одноосном и двuosном растяжении. Метод позволяет точно удовлетворить граничным условиям на бесконечности и условиям идеального контакта на границе включений. Метод редукции, применяемый при численном решении разрешающих систем, обладает высокой скоростью сходимости, что обусловлено экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов. Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между включениями.*

**Ключевые слова:** сферическое включение, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, зернистый композит.

### Введение

Современный уровень развития техники и технологии в высокотехнологических областях накладывает повышенные требования на точность и эффективность моделей материалов, которые широко используются в авиации и ракетостроении. Одной из наиболее важных характеристик материалов, которые здесь применяются, является такая комплексная характеристика, как малая масса и одновременно высокая прочность материала. Такой характеристикой обладают материалы типа композитов, в которых присутствуют конструктивно заложенные неоднородности. При современном уровне моделирования появляется возможность конструирования материалов с заранее заданными свойствами вначале на уровне модели, определяя оптимальную структуру, геометрические размеры и механические характеристики неоднородностей. И только после этого, полученные в результате моделирования данные, можно воплощать в реальном материале.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализова-

но только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2–4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и сфероидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В статье [6] для моделирования механизма

формирования реологических свойств наполненного эластомера использована структурная ячейка в виде эластомерного цилиндра с жестким сферическим включением в центре цилиндра.

В работах [7] методом обобщенных аналитических функций построены решения осесимметричных задач для шара со сферической полостью и пространства с двумя сферическими полостями.

В работе [8] методами теории гармонических функций исследовано напряженное состояние в упругом пространстве с двумя осесимметрично расположенными сферическими включениями.

В работе [9] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри вытянутых сфероидальных пор.

В статьях [10, 11] исследовано напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных пор и включений в упругом материале обобщенным методом Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе развита локальная неосесимметричная модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Включения имеют сферическую форму. Рассматривается случай параллельного расположения включений в упругом пространстве, которое находится под действием одноосного и двуосного растяжения.

### Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство  $\Omega$  с двумя непересекающимися сферическими включениями  $\Omega_j$ , сдвинутыми друг относительно друга на  $a$  вдоль оси  $\rho$ , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  и сферические системы координат  $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ , начала которых отнесены к центрам включений  $O_j$ ,  $j=1,2$ . Материалы матрицы и включений имеют упругие характеристики  $(G_0, \sigma_0)$ ,  $(G_j, \sigma_j)$  соответственно (индекс 0 для характеристик матрицы может быть опущен).

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия  $\sigma_z^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$  (одноосное растяжение) или  $\sigma_\rho^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$  (двухосное растяжение), а включения

находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

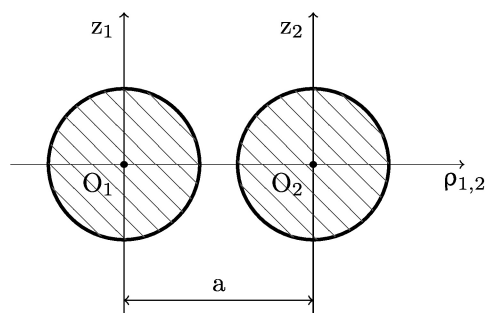


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

и условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = \mathbf{FU}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь  $\mathbf{U}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{FU}$  – отвечающий  $\mathbf{U}$  вектор усилий на соответствующей граничной поверхности;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона. Условие (2), (3) отражает идеальный контакт между матрицей и включениями.

### Решение задачи

Решение задачи в упругом пространстве  $\Omega$  ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (5)$$

при  $x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j$ ,

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} b_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (6)$$

при  $x \in \Omega_j$ ,

где  $a_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $b_{s,n,m}^{(j)}$  – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение  $\mathbf{U}_0$  соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (7)$$

$$U_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (8)$$

где  $T$  – усилие на бесконечности;  $G$  – модуль сдвига;  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  – орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сферы [12]:

$$U_{l,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \nabla u_{n\pm l,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (9)$$

$$U_{2,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \left[ z_j \nabla + (4\sigma - 3) \mathbf{e}_z \right] u_{n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) - \frac{R_j^2}{2(n\pm 1) + 1} \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (10)$$

$$U_{3,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \text{irot} \left[ u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_z \right]; \quad (11)$$

$$u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = (n-m)! \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi};$$

$$u_{n,m}^{- (4)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{(n+m)!} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  – функция Лежандра 1-го рода, символам «+» («-») в вектор-функциях (9) – (11) отвечают внешние (внутренние) решения для шара.

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (12)$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфероидов. Для решений (9) – (11) справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$U_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} f_{nm}^{(44)kl} \times U_{s,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2); \quad (13)$$

$$U_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l} \left\{ f_{nm}^{(44)kl} U_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \left[ \left( \frac{R_2^2}{2k+3} + \frac{R_1^2}{2n+3} \right) f_{nm}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{nm}^{(44)k+1,l} \right] \times U_{1,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right\}; \quad (14)$$

$$U_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+l+1} f_{nm}^{(44)kl} U_{s,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1); \quad (15)$$

$$U_{2,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+l} \left\{ f_{nm}^{(44)kl} U_{2,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \left[ \left( \frac{R_1^2}{2k+3} + \frac{R_2^2}{2n+3} \right) f_{nm}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{nm}^{(44)k+1,l} \right] \times U_{1,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right\}; \quad (16)$$

$$f_{nm}^{(44)kl} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}).$$

Для расположения полостей, представленного на рис. 1,  $z_{12} = 0$ ,  $\theta_{12} = \pi/2$ ,  $r_{12} = a$  и для сдвига вдоль оси  $x$   $\varphi_{12} = 0$ .

### Разрешающая система уравнений

Используя теоремы сложения (13) – (16), представим вектор перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  в системе координат с началом в точке  $O_1$ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ A_{s,n,m}^{(1)} U_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + U_{s,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+s} A_{s,k,l}^{(2)} f_{kl}^{(44)nm} + U_{1,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{s,n,m}^{(2)} \delta_{s2} (-1)^{k+m} \times \left[ \left( \frac{R_1^2}{2n+3} + \frac{R_2^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] \right\} \quad (17)$$

и с началом в точке  $O_2$ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ A_{s,n,m}^{(2)} U_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + U_{s,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+s} A_{s,k,l}^{(1)} f_{kl}^{(44)nm} + U_{1,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{s,n,m}^{(1)} \delta_{s2} (-1)^{n+m} \times \left[ \left( \frac{R_2^2}{2n+3} + \frac{R_1^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] \right\}. \quad (18)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $b_{s,n,m}^{(j)}$ :

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(1)} E_{s,n,m}^{+(k)0}(R_1) + E_{1,n,m}^{-(k)0}(R_1) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \left[ a_{1,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} - a_{2,k,l}^{(2)} \tilde{f}_{k,l}^{-(44)n,m} \right] + \\
 & + E_{2,n,m}^{-(k)0}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + E_{3,n,m}^{-(k)0}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + U_{0nm}^{(k)}(R_1) = \sum_{s=1}^3 E_{s,n,m}^{-(k)l}(R_1) b_{s,n,m}^{(1)}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(2)} E_{s,n,m}^{+(k)0}(R_2) + E_{1,n,m}^{-(k)0}(R_2) \times \\
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+1} \left[ a_{1,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} - a_{2,k,l}^{(1)} \tilde{f}_{k,l}^{+(44)n,m} \right] + \\
 & + E_{2,n,m}^{-(k)0}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m} a_{2,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + E_{3,n,m}^{-(k)0}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+1} a_{3,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + U_{0nm}^{(k)}(R_2) = \sum_{s=1}^3 E_{s,n,m}^{-(k)2}(R_2) b_{s,n,m}^{(2)}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(1)} F_{s,n,m}^{+(k)0}(R_1) + F_{1,n,m}^{-(k)0}(R_1) \times \\
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} \left[ a_{1,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} - a_{2,k,l}^{(2)} \tilde{f}_{k,l}^{-(44)n,m} \right] + \\
 & + F_{2,n,m}^{-(k)0}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} a_{2,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + F_{3,n,m}^{-(k)0}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+1} a_{3,k,l}^{(2)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + F_{0nm}^{(k)}(R_1) = \sum_{s=1}^3 F_{s,n,m}^{-(k)l}(R_1) b_{s,n,m}^{(1)}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(2)} F_{s,n,m}^{+(k)0}(R_2) + F_{1,n,m}^{-(k)0}(R_2) \times \\
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+1} \left[ a_{1,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} - a_{2,k,l}^{(1)} \tilde{f}_{k,l}^{+(44)n,m} \right] + \\
 & + F_{2,n,m}^{-(k)0}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m} a_{2,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + F_{3,n,m}^{-(k)0}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+1} a_{3,k,l}^{(1)} f_{k,l}^{(44)n,m} + \\
 & + F_{0nm}^{(k)}(R_2) = \sum_{s=1}^3 F_{s,n,m}^{-(k)2}(R_2) b_{s,n,m}^{(2)}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E_{1,n,m}^{\pm(-1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R), \\
 & E_{1,n,m}^{\pm(1)r}(R) = \tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R), \quad E_{1,n,m}^{\pm(0)r}(R) = \mp \tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R);
 \end{aligned}$$

$$E_{2,n,m}^{+(-1)r}(R) = -\frac{(n-m+2)(n+m)}{2n+3} \tilde{u}_{n,m-1}^{+(4)}(R),$$

$$E_{2,n,m}^{+(1)r}(R) = \frac{(n-m)(n+m+2)}{2n+3} \tilde{u}_{n,m+1}^{+(4)}(R),$$

$$E_{2,n,m}^{\pm(0)r}(R) = -\left[ \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} + \chi_r \right] \tilde{u}_{n,m}^{\pm(4)}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{-(-1)r}(R) = -\frac{(n-m+1)(n+m-1)}{2n-1} \tilde{u}_{n,m-1}^{-(4)}(R),$$

$$E_{2,n,m}^{-(1)r}(R) = \frac{(n-m-1)(n+m+1)}{2n-1} \tilde{u}_{n,m+1}^{-(4)}(R),$$

$$E_{2,n,m}^{-(0)r}(R) = \left[ \frac{(n-m)(n+m)}{2n-1} - \chi_r \right] \tilde{u}_{n,m}^{-(4)}(R);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(-1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m-1}^{\pm(4)}(R),$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(1)r}(R) = -\tilde{u}_{n,m+1}^{\pm(4)}(R), \quad E_{3,n,m}^{\pm(0)r}(R) = 0;$$

$$F_{1,n,m}^{+(1)r}(R) = \frac{2G_r}{R^{n+2}} (n+1)(n-m+1)!,$$

$$F_{1,n,m}^{+(1)r}(R) = -\frac{2G_r}{R^{n+2}} (n+1)(n-m-1)!,$$

$$F_{1,n,m}^{+(0)r}(R) = \frac{2G_r}{R^{n+2}} (n+1)(n-m)!,$$

$$F_{1,n,m}^{+(-1)r}(R) = \frac{2G_r}{R^{n+2}} (n+1) \times$$

$$\times \left[ \frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma_r \right] (n-m+1)!,$$

$$F_{2,n,m}^{+(1)r}(R) = -\frac{2G_r}{R^{n+2}} (n-m) \times$$

$$\times \left[ \frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma_r \right] (n-m-1)!,$$

$$F_{2,n,m}^{+(0)r} = \frac{2G_r}{R^{n+2}} \left[ \frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma_r - 1) \right] (n-m)!;$$

$$F_{3,n,m}^{+(-1)r}(R) = -\frac{G_r}{R^{n+2}} (n-m+2)(n-m+1)!,$$

$$F_{3,n,m}^{+(0)r}(R) = \frac{G_r}{R} m(n-m)!;$$

$$F_{3,n,m}^{+(1)r}(R) = -\frac{2G_r}{R^{n+2}} (n+m+2)(n-m-1)!,$$

$$F_{1,n,m}^{(-1)r}(R) = -2G_r R^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!},$$

$$F_{1,n,m}^{-(1)r}(R) = 2G_r R^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!},$$

$$F_{1,n,m}^{-(0)r}(R) = 2G_r R^{n-1} \frac{n}{(n+m)!};$$

$$F_{2,n,m}^{(-1)r}(R) = -2G_r R^{n-1} (n-m+1) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma_r \right] \frac{1}{(n+m-1)!}, \\ & F_{2,n,m}^{-(1)r}(R) = 2G_r R^{n-1} (n+m+1) \times \\ & \times \left[ \frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma_r \right] \frac{1}{(n+m+1)!}, \\ & F_{2,n,m}^{-(0)r}(R) = 2G_r R^{n-1} \left[ \frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + \right. \\ & \left. + n(2\sigma_r - 1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \end{aligned}$$

Для случая одноосного растяжения

$$\begin{aligned} U_{0nm}^{(k)}(R) &= \frac{TR}{2G} \times \\ & \times \left( \frac{-2\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,1} + \frac{1}{1+\sigma} \delta_{k,0} \right) \delta_{n,1} \delta_{m,0}; \\ F_{0nm}^{(k)}(R) &= \frac{T}{2G} \delta_{k,0} \delta_{n,1} \delta_{m,0}. \end{aligned}$$

Для случая двуосного растяжения

$$\begin{aligned} U_{0nm}^{(k)}(R) &= \frac{TR}{G} \times \\ & \times \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,-1} - \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} \delta_{k,1} - \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{k,0} \right) \delta_{n,1} \delta_{m,0}; \\ F_{0nm}^{(k)}(R) &= \frac{T}{G} \left( \delta_{k,-1} - \frac{1}{2} \delta_{k,1} \right) \delta_{n,1} \delta_{m,0}. \end{aligned}$$

Оператор системы уравнений (19) – (22) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [13].

### Анализ результатов

Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и включений приняты равными соответственно  $\sigma_0 = 0,38$  и  $\sigma_j = 0,21$ .

Система уравнений (19) – (22) численно решается методом редукции. На основании полученных решений находятся нормальные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям.

На рис. 2 – 4 приведены распределения напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния  $a/R$  между ними для низко-модульных зерен  $G_j/G = 25$  при одноосном растяжении. Напряжения  $\sigma_x/T$  при приближении включений растут по абсолютной величине, оставаясь отрицательными, и вносят наибольший вклад в напряженное состояние. Аналогично ведут себя напряжения  $\sigma_y/T$ , однако, при удалении включений

в средней точке отрезка они практически равны нулю. Напряжения  $\sigma_z/T$  при приближении включений меняют знак в средней точке отрезка и становятся сжимающими.

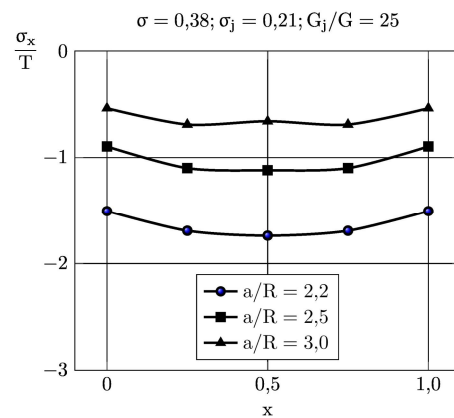


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

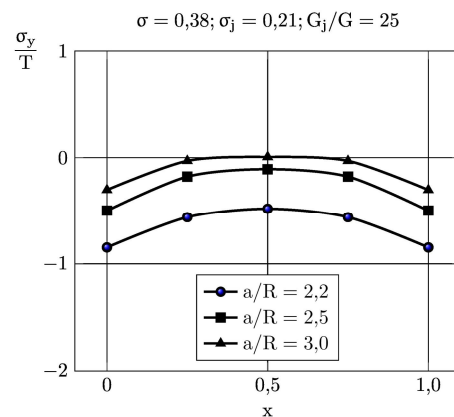


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

На рис. 5 – 7 приведены распределения напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния  $a/R$  между ними для низко-модульных зерен  $G_j/G = 25$  при двуосном растяжении. В тензоре напряжений определяющими являются нормальные напряжения  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$ , которые растут с приближением включений друг к другу. Наибольшее значение напряжения  $\sigma_x/T$  наблюдается в средней точке линии, соединяющей центры включений, в то время как для  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$  их концентрация наблюдается на границе включений.

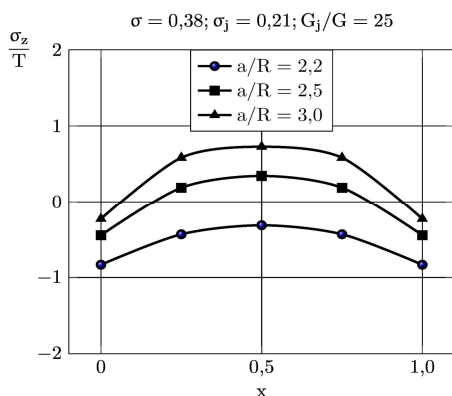


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

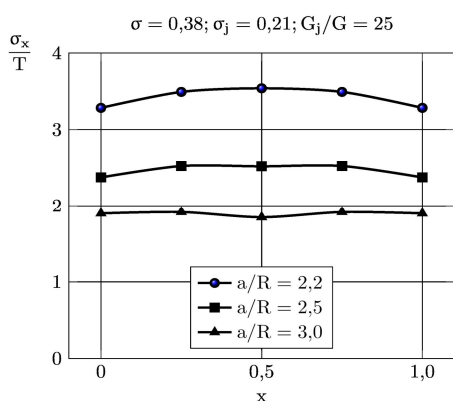


Рис. 5. Напряжения  $\sigma_x / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двуосном растяжении

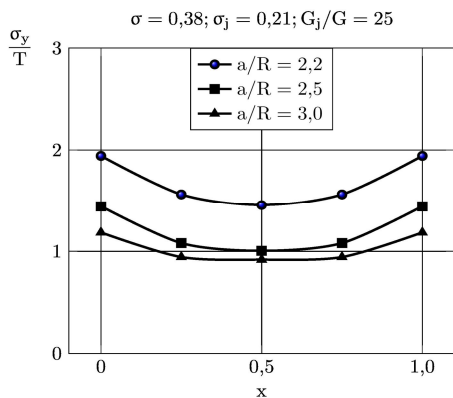


Рис. 6. Напряжения  $\sigma_y / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двуосном растяжении

### Заключение

В работе предложен эффективный метод определения напряжений в упругом пространстве с двумя параллельно расположенными сферическими включениями при одноосном и двуосном растяжении. Метод позволяет точно удовлетворить граничным условиям на бесконечности и условиям идеаль-

ного контакта на границе включений. Метод редукции, применяемый при численном решении разрешающих систем, обладает высокой скоростью сходимости, что обусловлено экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов. Для получения гарантированной точности в 0,1% достаточно удерживать в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (19) – (22) число уравнений, отвечающее  $n_{\max} = 6$  при относительном расстоянии между включениями  $a/R = 2,5$ .

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования локального напряженно-деформированного состояния зернистого композита со сферическими зёрнами.

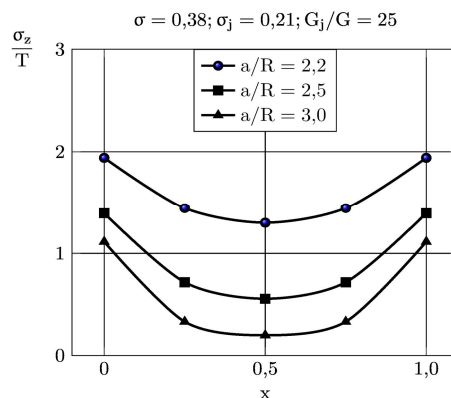


Рис. 7. Напряжения  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двуосном растяжении

### Литература

1. Khoroshun, L. P. *Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text]* / L. P. Khoroshun // *International Applied Mechanics*. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284–1316.
2. Вольперт, В. С. *Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст]* / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // *Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта*. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ. №3266–77.
3. Олегин, И. П. *Осесимметричное напряжённое состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями [Текст]* / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2002. – Т. V, № 1(9). – С. 127–132.
4. Олегин, И. П. *Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей [Текст]* / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 1999. – Т. II, № 1. – С. 117–122.
5. Гаришин, О. К. *Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимо-*

сти от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.

6. Голотина, Л. А. Численное моделирование реологических свойств зернистого композита с использованием структурного подхода [Текст] / Л. А. Голотина, Л. Л. Кожжевникова, Т. Б. Кошкина // *Механика композитных материалов*. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 895–906.

7. Капишевский, А. А. Осесимметричное напряженное состояние шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / А. А. Капишевский, Н. П. Копыстра, Л. Н. Ломонос // *Докл. АН УССР. Сер. А*. – 1980. – №9. – С. 50–55.

8. Tsuchida, E. On the asymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions [Text] / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1980. – V. 23, № 181. – P. 1072–1080.

9. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства кон-*

*струкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48–58.

10. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 1(98). – С. 14–18.

11. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика*. – 2010. – Т. 922. – С. 4–19.

12. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А. Г. Николаев. – X. : Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

13. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // *Доповіди НАН України*. – 1998. – Т. 2. – С. 78–83.

Поступила в редакцию 17.03.2014, рассмотрена на редколлегии 20.05.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В. А. Ванин, ИПМаш НАН Украины, Харьков.

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ОКОЛІ ДВОХ СФЕРИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ В ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ

*О. Г. Николаев, Е. А. Танчик*

У роботі запропоновано ефективний метод визначення напружень у пружному просторі з двома паралельно розташованими сферичними включеннями при одноосному і двоосному розтягуванні. Метод дозволяє точно задовольнити граничним умовам на нескінченності та умовам ідеального контакту на поверхнях включень. Метод редукції, який застосовано при чисельному вирішенні розв'язної системи, має високу швидкість збіжності, що обумовлено експоненціальним спаданням матричних коефіцієнтів. Проведено чисельний і якісний аналіз напруженого стану на лінії, що з'єднує центри включень, залежно від відносної відстані між включеннями.

**Ключові слова:** сферичне включення, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, зернистий композит.

## ANALYSIS OF THE STRESS STATE IN THE NEIGHBORHOOD OF TWO SPHERICAL INCLUSIONS IN ELASTIC SPACE

*A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik*

An effective method for determining the stresses in the elastic space with two parallel spherical inclusions under uniaxial and biaxial tension is proposed. Method enables to satisfy exactly the boundary conditions at infinity and perfect contact conditions at the boundary of inclusions. Reduction method, which is used in the numerical solution of resolving system, has a high rate of convergence, due to the exponential decrease of the matrix coefficients. The numerical and qualitative analysis of the stress state on the line connecting the centers of the inclusions depending on the relative distance between the inclusions are carried out.

**Key words:** spherical inclusion, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier method, method of reduction, granular composite.

**Николаев Алексей Георгиевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

**Танчик Евгений Андреевич** – ассистент каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.