

УДК 621.822.5

**В. И. НАЗИН**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

**О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА-РАФСОНА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ В КАМЕРАХ ГИДРОСТАТОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА СДВОЕННОГО ТИПА**

*Рассмотрена возможность применения метода Ньютона-Рафсона для систем уравнений баланса расходов, описывающих течение рабочей жидкости в гидростатодинамических подшипниках сдвоенного типа. Получены математические зависимости, позволяющие определять давления в камерах гидростатодинамических подшипников сдвоенного типа с помощью метода Ньютона-Рафсона. Приведены математические зависимости, позволяющие определять давления в камерах рассматриваемого подшипника с помощью метода простых итераций. Выполнен сравнительный анализ метода простых итераций и метода Ньютона-Рафсона при определении давлений в камерах подшипника сдвоенного типа. Приведены результаты расчета давлений в камерах с использованием обеих методов и даны рекомендации об их применении.*

**Ключевые слова:** метод расчета, гидростатодинамический подшипник, сдвоенный тип, давления в камерах, математические зависимости, простые итерации, результаты расчета, рекомендации по применению.

**Введение**

Гидростатодинамический подшипник сдвоенного типа имеет более сложную конструкцию в сравнении с обычным одинарным гидростатодинамическим подшипником. Математический аппарат, используемый для определения основных характеристик, также более сложный у подшипника сдвоенного типа по сравнению с одинарным подшипником. Для уменьшения трудоемкости вычислений и уменьшения числа итераций возникает необходимость поиска новых численных методов при определении основных характеристик подшипника. В данной работе рассмотрена возможность применения метода Ньютона-Рафсона для определения давлений в камерах гидростатодинамического подшипника сдвоенного типа. Давления в камерах определяются из уравнений баланса расходов. Запишем баланс расходов из условия равенства расходов по контуру *i*-й камеры для наружной и внутренней рабочих поверхностей подшипника, схема которого приведена в работе [1].

$$Q_{\text{вх1}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_{\text{в1}}, \quad (1)$$

$$Q_{\text{вх2}} = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} + Q_{\text{в2}}, \quad (2)$$

где  $Q_{\text{вх1}}$  и  $Q_{\text{вх2}}$  – расходы через входные компенсирующие устройства, соответственно, для камер на

наружной и внутренней рабочих поверхностей подшипника. Для жиклеров эти расходы записываются в следующем виде:

$$Q_{\text{вх1}} = \psi_{\text{вх}} \cdot \pi \cdot r_{\text{ж1}}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{\text{вх}} - P_{\text{k1,i}})}, \quad (3)$$

$$Q_{\text{вх2}} = \psi_{\text{вх}} \cdot \pi \cdot r_{\text{ж2}}^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{\text{вх}} - P_{\text{k2,i}})}, \quad (4)$$

где  $\psi_{\text{вх}}$  – коэффициент входа, равный 0,62...0,82;

$r_{\text{ж1}}$  и  $r_{\text{ж2}}$  – радиусы жиклеров;

$\rho$  – плотность рабочей жидкости;

$P_{\text{вх}}$  – давление питания от насоса;

$P_{\text{k1,i}}$  и  $P_{\text{k2,i}}$  – давления в *i*-х камерах, расположенных на наружной и внутренней рабочих поверхностях подшипника.

Расходы по контуру *i*-й камеры с учетом переносного и градиентного течения рабочей жидкости для наружной и внутренней рабочих поверхностей подшипника запишем в следующем виде:

$$Q_1 = -\frac{\omega \cdot R_1 \cdot h_{1,i} \cdot l_{\text{k1}}}{2} + \frac{h_{1,i}^3 (P_{\text{k1,i}} - P_{\text{k1,i-1}}) \cdot l_{\text{k1}}}{12\mu \cdot l_{\text{mk1}}},$$

$$Q_2 = \frac{\omega \cdot R_1 \cdot h_{1,i+2} \cdot l_{\text{k1}}}{2} + \frac{h_{1,i+2}^3 (P_{\text{k1,i}} - P_{\text{k1,i+1}}) \cdot l_{\text{k1}}}{12\mu \cdot l_{\text{r1}}},$$

$$Q_3 = Q_4 = \frac{h_{1,i+1}^3 (P_{k1,i} - P_{сл}) \cdot b_{k1}}{12\mu \cdot l_{mk1}}, \quad (5)$$

$$Q_{V1} = b_{k1} \cdot l_{k1} \cdot V_m,$$

$$Q_{11} = -\frac{\omega \cdot R_2 \cdot h_{2,i} \cdot l_{k2}}{2} + \frac{h_{2,i}^3 (P_{k2,i} - P_{k2,i-1}) \cdot l_{k2}}{12\mu \cdot l_{mk2}},$$

$$Q_{12} = \frac{\omega \cdot R_2 \cdot h_{2,i+2} \cdot l_{k2}}{2} + \frac{h_{2,i+2}^3 (P_{k2,i} - P_{k2,i+1}) \cdot l_{k2}}{12\mu \cdot l_{mk2}}, \quad (6)$$

$$Q_{13} = Q_{14} = \frac{h_{2,i+1}^3 (P_{k2,i} - P_{сл}) \cdot b_{k2}}{12\mu \cdot l_{п2}},$$

$$Q_{V2} = b_{k2} \cdot l_{k2} \cdot V_m,$$

где  $h_{1,i}$  и  $h_{2,i}$  – зазоры в подшипнике, соответственно, на наружной и внутренней рабочих поверхностях;

$\mu$  – динамическая вязкость рабочей жидкости;

$\omega$  – угловая скорость вращения диска с валом;

$R_1$  и  $R_2$  – радиусы наружной и внутренней рабочих поверхностей подшипника;

$l_{k1}$  и  $l_{k2}$  – длины камер наружной и внутренней поверхностей подшипника;

$l_{п1}$  и  $l_{п2}$  – длины торцевых перемычек камер;

$l_{mk1}$  и  $l_{mk2}$  – длины межкамерных перемычек подшипника;

$P_{сл}$  – давление рабочей жидкости на сливе;

$b_{k1}$  и  $b_{k2}$  – ширины камер;

$Q_{V1}$  и  $Q_{V2}$  – расходы рабочей жидкости, обусловленные движением вала с диском;

$V_m$  – скорость движения вала вдоль линии центров диска и подшипника.

Из уравнений баланса расходов (1) и (2), после подстановки выражений (3), (4) и (5) и соответствующих преобразований, можно записать выражения для определения давлений в камерах:

$$(P_{k1,i})_{n+1} = a_{9,i} \cdot \sqrt{P_{вх} - (P_{k1,i})_n} + a_{11,i} (P_{k1,i-1})_n + a_{12,i} (P_{k1,i+1})_n + a_{10,i}, \quad (7)$$

$$(P_{k2,i})_{n+1} = b_{9,i} \cdot \sqrt{P_{вх} - (P_{k2,i})_n} + b_{11,i} (P_{k2,i-1})_n + b_{12,i} (P_{k1,i+1})_n + b_{10,i}. \quad (8)$$

Коэффициенты  $a_{9,i}$ ;  $a_{11,i}$ ;  $a_{12,i}$ ;  $a_{10,i}$ ;  $b_{9,i}$ ;  $b_{11,i}$ ;  $b_{12,i}$ ;  $b_{10,i}$  в процессе итерации остаются постоянными.

Записанные выражения (7) и (8) представляют собой реализацию обычного итерационного метода итераций. Однако в процессе вычисления давлений в камерах обычным итерационным методом при некоторых параметрах подшипника под корнем получается отрицательное число и оказывается невозможным получить давления в камерах этим методом. Поэтому рассмотрим возможность применения метода Ньютона-Рафсона для определения давлений в камерах. Этот метод решения является обобщением на случай нескольких неизвестных метода касательных [2].

Считая заданными начальные приближения  $(P_{k1,i})_1$  и  $(P_{k2,i})_1$  корней этих уравнений, будем искать поправки к этим приближенным значениям.

Если обозначить через  $\Delta K_i$  и  $\Delta B_i$  требуемые поправки к двум системам уравнений (7) и (8), то точное значение корней можно записать в виде

$$P_{k1,i} = (P_{k1,i})_1 + \Delta K_i; \quad P_{k2,i} = (P_{k2,i})_1 + \Delta B_i.$$

Подставив начальные значения давлений в камерах для наружной части подшипника  $(P_{k1,i})_1$  в выражение (7), получим текущие значения функций  $f_i$ :

$$f_1 = (P_{k1,1})_1 - a_{9,1} \sqrt{P_{вх} - (P_{k1,1})_1} -$$

$$-a_{11,1} (P_{k1,4})_1 - a_{12,1} (P_{k1,2})_1 - a_{10,1},$$

$$f_2 = (P_{k1,2})_1 - a_{9,2} \sqrt{P_{вх} - (P_{k1,2})_1} -$$

$$-a_{11,2} (P_{k1,1})_1 - a_{12,2} (P_{k1,3})_1 - a_{10,2},$$

$$f_3 = (P_{k1,3})_1 - a_{9,3} \sqrt{P_{вх} - (P_{k1,3})_1} -$$

$$-a_{11,3} (P_{k1,2})_1 - a_{12,3} (P_{k1,4})_1 - a_{10,3},$$

$$f_4 = (P_{k1,4})_1 - a_{9,4} \sqrt{P_{вх} - (P_{k1,4})_1} -$$

$$-a_{11,4} (P_{k1,3})_1 - a_{12,4} (P_{k1,1})_1 - a_{10,4}.$$

Подставив начальные значения давлений в камерах для внутренней части подшипника  $(P_{k2,i})_1$  в выражение (8), получим текущие значения функций  $\varphi_i$ :

$$\varphi_1 = (P_{k2,1})_1 - b_{9,1} \sqrt{P_{вх} - (P_{k2,1})_1} -$$

$$-b_{11,1} (P_{k2,4})_1 - b_{12,1} (P_{k2,2})_1 - b_{10,1},$$

$$\varphi_2 = (P_{k2,2})_1 - b_{9,2} \sqrt{P_{вх} - (P_{k2,2})_1} -$$

$$-b_{11,2} (P_{k2,1})_1 - b_{12,2} (P_{k2,3})_1 - b_{10,2},$$

$$\varphi_3 = (P_{k2,3})_1 - b_{9,3} \sqrt{P_{вх} - (P_{k2,3})_1} -$$

$$-b_{11,3} (P_{k2,2})_1 - b_{12,3} (P_{k2,4})_1 - b_{10,3},$$

$$\varphi_4 = (P_{k2,4})_1 - b_{9,4} \sqrt{P_{вх} - (P_{k2,4})_1} - b_{11,4}(P_{k2,3})_1 - b_{12,4}(P_{k2,1})_1 - b_{10,4}.$$

Заменяя приращения функций  $f_i$  и  $\varphi_i$  их полными дифференциалами по давлениям в камерах, получим системы линейных уравнений для определения приближенных значений поправок:

$$\begin{aligned} f_1 + AK_1 \left(1 + \frac{a_{9,1}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k1,1})_1}}\right) - AK_4 \cdot a_{11,1} - AK_2 \cdot a_{12,1} &= 0, \\ f_2 + AK_2 \left(1 + \frac{a_{9,2}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k1,2})_1}}\right) - AK_1 \cdot a_{11,2} - AK_3 \cdot a_{12,2} &= 0, \\ f_3 + AK_3 \left(1 + \frac{a_{9,3}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k1,3})_1}}\right) - AK_2 \cdot a_{11,3} - AK_4 \cdot a_{12,3} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f_4 + AK_4 \left(1 + \frac{a_{9,4}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k1,4})_1}}\right) - AK_3 \cdot a_{11,4} - AK_1 \cdot a_{12,4} &= 0, \\ \varphi_1 + AB_1 \left(1 + \frac{b_{9,1}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k2,1})_1}}\right) - AB_4 \cdot b_{11,1} - AB_2 \cdot b_{12,1} &= 0, \\ \varphi_2 + AB_2 \left(1 + \frac{b_{9,2}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k2,2})_1}}\right) - AB_1 \cdot b_{11,2} - AB_3 \cdot b_{12,2} &= 0, \\ \varphi_3 + AB_3 \left(1 + \frac{b_{9,3}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k2,3})_1}}\right) - AB_2 \cdot b_{11,3} - AB_4 \cdot b_{12,3} &= 0, \\ \varphi_4 + AB_4 \left(1 + \frac{b_{9,4}}{2\sqrt{P_{вх} - (P_{k2,4})_1}}\right) - AB_3 \cdot b_{11,4} - AB_1 \cdot b_{12,4} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из решения систем уравнений (9) и (10) запишем выражения для определения поправок  $AK_i$  и  $AB_i$ :

$$\begin{aligned} AK_4 &= \frac{ATR1 \cdot ATT10 - ATT9 \cdot ATR4}{ATT11 \cdot ATR4 - ATR3 \cdot ATT10}, \\ AK_3 &= \frac{-AK_4 \cdot ATR3 \cdot ATR1}{ATR4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AK_2 &= \frac{f_3 + AK_3 \cdot AZI3 - AK_4 \cdot a_{12,3}}{a_{11,3}}, \\ AK_1 &= \frac{AK_4 \cdot a_{11,1} + AK_2 \cdot a_{12,1} - f_1}{AZI1}, \\ AB_4 &= \frac{ATS1 \cdot ATB10 - ATB9 \cdot ATS4}{ATB11 \cdot ATS4 - ATS3 \cdot ATB10}, \\ AB_3 &= \frac{AB_4 \cdot ATS3 \cdot ATS1}{ATS4}, \\ AB_2 &= \frac{\varphi_3 + AB_3 \cdot ABI3 - AB_4 \cdot b_{12,3}}{b_{11,3}}, \\ AB_1 &= \frac{AB_4 \cdot b_{11,1} + AB_2 \cdot b_{12,1} - \varphi_1}{ABI1}. \end{aligned}$$

Выражения для параметров, входящих в формулы для  $AK_i$  и  $AB_i$ , в виду громоздкости решения не приводятся.

Более точные, чем  $(P_{k1,i})_1$  и  $(P_{k2,i})_1$  значения корней уравнений получаем, как

$$\begin{aligned} (P_{k1,i})_2 &= (P_{k1,i})_1 + AK_i, \\ (P_{k2,i})_2 &= (P_{k2,i})_1 + AB_i. \end{aligned}$$

Дальнейшие поправки можно получить тем же путем, отправляясь от точек  $(P_{k1,i})_2$  и  $(P_{k2,i})_2$ . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока предыдущее и последующее значения давлений в камерах будут меньше заданной точности решения  $E_1$ , т.е.

$$\begin{aligned} (P_{k1,i})_{n+1} - (P_{k1,i})_n &\leq E_1, \\ (P_{k2,i})_{n+1} - (P_{k2,i})_n &\leq E_1. \end{aligned}$$

Расчет давлений в камерах по двум рассмотренным методам проводился для двоярного гидростатодинамического подшипника, имеющего следующие геометрические и рабочие параметры:

1. Давление питания  $P_{вх} = 2$  МПа.
2. Условия скорости  $\omega = 319$  с<sup>-1</sup>.
3. Диаметр подшипника наружной части  $D_1 = 120$  мм.
4. Диаметр подшипника внутренней части  $D_1 = 100$  мм.
5. Диаметр диска наружный  $D_{д1} = 119,86$  мм.
6. Диаметр диска внутренний  $D_{д2} = 100,14$  мм.
7. Наружный и внутренний радиальные зазоры  $\delta_{01} = \delta_{02} = 907$  мкм.
8. Диаметр жиклеров  $d_{ж1} = d_{ж2} = 2$  мм.

9. Длина камер  $l_{k1} = l_{k2} = 15$  мм.
10. Длина переемычек торцов камер  $l_{п1} = l_{п2} = 5$  мм.
11. Ширина камер  $b_{k1} = b_{k2} = 5$  мм.
12. Длина межкамерных переемычек наружной части  $l_{mk1} = 89,247$  мм.
13. Длина межкамерных перемычек внутренней части  $l_{mk2} = 73,54$  мм.
14. Рабочая жидкость входа, при  $t = 47^\circ \text{C}$  .:
- а) плотность  $\rho = 9989 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup> ,
- б) динамическая вязкость  
 $\mu = 5,817 \cdot 10^{-10}$  Н·с/мм<sup>2</sup> ,
- в) кинематическая вязкость  
 $\nu = 5,882 \cdot 10^{-4}$  мм<sup>2</sup>/с.

Результаты расчета приведены на рис. 1 и 2.

Из приведенных графиков видно, что обеими методами получен одинаковый результат конечного давления в камерах. Число итераций до получения конечного результата по методу Ньютона-Рафсона

меньше, чем по методу простых итераций. Если по методу Ньютона-Рафсона сходимость имела место уже после 4 итераций, то по методу простых итераций – после 6 или 7 итераций.

Полученные результаты показывают, что метод Ньютона-Рафсона можно применять для определения давлений в камерах гидростатодинамических подшипников и, несмотря на более громоздкий математический аппарат, можно получить выигрыш по числу итераций.

## Литература

1. Назин, В. И. Радиальный гидростатодинамический подшипник повышенной несущей способности [Текст] / В. И. Назин // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 8(95). – С. 94-100.

2. Гутер, Р. С. Программирование и вычислительная математика [Текст] / Р. С. Гутер, П. Т. Резниковский. – М. : Наука, 1971. – 262 с.

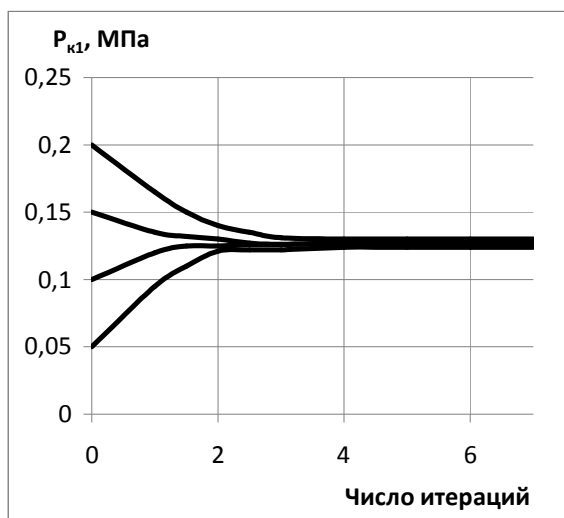


Рис. 1. График сходимости значений давлений в первой камере, полученных методом простых итераций при различных начальных значениях

$$P_{k1,1} = 0,2 \text{ МПа}, P_{k1,1} = 0,15 \text{ МПа},$$

$$P_{k1,1} = 0,1 \text{ МПа}, P_{k1,1} = 0,05 \text{ МПа}$$

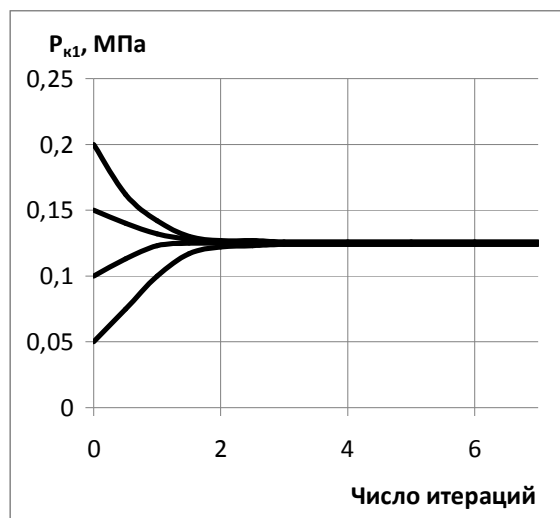


Рис. 2. График сходимости значений давлений в первой камере, полученных методом Ньютона-Рафсона при различных начальных значениях

$$P_{k1,1} = 0,2 \text{ МПа}, P_{k1,1} = 0,15 \text{ МПа},$$

$$P_{k1,1} = 0,1 \text{ МПа}, P_{k1,1} = 0,05 \text{ МПа}$$

Поступила в редакцию 1.06.2014, рассмотрена на редколлегии 16.06.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедры Л. Г. Бойко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

**ПРО ЗАСТОСОВНІСТЬ МЕТОДУ НЬЮТОНА-РАФСОНА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ  
В КАМЕРАХ ГІДРОСТАТОДІНАМІЧНОГО ПІДШИПНИКА ЗДВОЄНОГО ТИПУ***V. I. Nazin*

Розглянута потужність застосування методу Ньютона-Рафсона для систем рівнянь балансу витрат, що описують перебіг робочої рідини в гідростатодінамічних підшипниках здвоєного типу. Отримано математичні залежності, що дозволяють визначати тиск у камерах гідростатодінамічних підшипників здвоєного типу за допомогою методу Ньютона-Рафсона. Приведено математичні залежності, що дозволяють визначати тиск у камерах даного підшипника за допомогою методу простих ітерацій. Виконано порівняльний аналіз методу простих ітерацій і методу Ньютона-Рафсона при визначенні тиску в камерах підшипника здвоєного типу. Приведено результати розрахунку тиску в камерах з використанням обох методів й дано рекомендації про їх застосування.

**Ключові слова:** метод розрахунку, гідростатодінамічний підшипник, здвоєний тип, тиск у камерах, математичні залежності, прості ітерації, результати розрахунку, рекомендації щодо вживання.

**ABOUT APPLICABILITY OF METHOD N'YUTONA-RAFSONA FOR DETERMINATION  
OF PRESSURES IN CHAMBERS OF HYDROSTATODYNAMIC BEARING  
OF THE DOUBLED TYPE***V. I. Nazin*

Power of application of method N'yutona-Rafsona is considered for the systems of equalizations balance of charges, describing the flow of working liquid in the hydrostatodynamic bearings of the doubled type. Mathematical dependences, allowing to determine pressure in the chambers of the hydrostatodynamic bearings of the doubled type by the method N'yutona-Rafsona, are got. Mathematical dependences, allowing to determine pressure in the chambers of the examined bearing by the method of simple iterations, are resulted. The comparative analysis of method of simple iterations and method N'yutona-Rafsona is executed at determination of pressures in the chambers of bearing of the doubled type. The results of calculation of pressures in chambers with the use of both methods are resulted and recommendation about their application is given.

**Keywords:** method of calculation, hydrostatodynamic bearing, doubled type, pressures in chambers, mathematical dependences, simple iterations, results of calculation, recommendations on application.

**Назін Владимир Иосифович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: dekanat@d2.khai.edu.