

УДК 517.958:539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО, В. В. КОПЫЧКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СПЕКТРЕ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО ОПЕРАТОРА С БИГАРМОНИЧЕСКИМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Дано решение задачи о спектре в прямоугольнике для составного оператора при главных краевых условиях. Ведущим в составном операторе является бигармонический, а подчиненным – оператор второго порядка с переменными коэффициентами, содержащий параметр. Предложенный подход позволяет определить собственные значения и собственные функции с любой наперед заданной точностью. Все вычислительные процедуры метода (а, следовательно, и сам метод) обладают безусловной устойчивостью, быстрой сходимостью и высокой точностью. Предложена процедура упрощения структуры собственных функций путем выявления их компонент типа «белого шума». Дано решение восьми краевых задач о спектре, отличающихся различным сочетанием действующих в плоскости пластины нагрузок и параметром их интенсивности. Анализ характера решения краевой задачи продольно-поперечного изгиба пластины при параметре интенсивности предварительно напряженного поля, приближающемся к своему критическому значению, позволил сделать вывод, что подобные задачи должны решаться в геометрически нелинейной постановке, хотя критическое состояние еще не достигнуто. Вычисления выполнены с привлечением оригинальных программ, составленных авторами.

Ключевые слова: *собственный спектр, составной оператор, параметр интенсивности предварительно напряженного поля, устойчивость, сходимость и точность вычислительных процедур.*

Введение

При создании авиационной техники приходится решать ряд как отдельно взятых, так и взаимосвязанных проблем. Такие проблемы особенно значимы в вопросах проектирования большегрузных самолетов, что связано, прежде всего, с ростом строительных высот (намного повышается роль касательных напряжений). Это, во-первых, а, во-вторых, с повышением роли промежуточных упругих звеньев, работа которых в составе тонкостенной пространственной системы (крыло, оперение, фюзеляж) должна быть непременно учтена на основе адекватных математических моделей механики деформируемого твердого тела и современных методов их анализа.

При разработке подобных моделей и методов их анализа на первый план выступает проблема точности. Адекватность математической модели реальной конструкции или ее конструктивному элементу определяется, прежде всего, минимальным количеством упрощающих предположений (гипотез), а точность метода анализа этих моделей может быть достигнута тогда и только тогда, когда обеспечена устойчивость и сходимость привлекаемых вычислительных процедур.

Отмеченное является прерогативой развиваемой в последние десятилетия так называемой вычислительной механики сплошной среды (ВМСС), в том числе и механики деформируемого твердого

тела. Арсенал методов ВМСС достаточно богат, в их число входит и метод конечного элемента (МКЭ), но он не может занимать лидирующую позицию в развитии ВМСС, поскольку как вычислительный метод не обладает безусловной устойчивостью, сходимостью и точностью, что нами неоднократно подчеркивалось [1 – 6]. Особенно отчетливо данная проблема проявляется в задачах устойчивости и колебаний тонкостенных пространственных систем, какими и являются силовые конструкции летательных аппаратов. Наше мнение не единственно – к такому выводу приходят многие исследователи, занимающиеся подобными проблемами. Иными словами, должны создаваться и развиваться альтернативные подходы и математические методы анализа, обладающие высокой *гарантированной* точностью.

Одним из таких альтернативных методов, по нашему твердому убеждению, является предложенный, достаточно широко апробированный и развиваемый в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ). В отличие от МКЭ основной моделью в МСКЭ является не конечный элемент, а конструктивный, обладающий бесконечной степенью свободы. В качестве конструктивных элементов в зависимости от принятого уровня декомпозиции сложной системы могут выступать пластины, открытые и замкнутые оболочки, одномерные упругие элементы (стрингеры, шпанго-

уты), промежуточные одно- или двумерные упругие звенья (компенсаторы, кницы и др.) либо отсеки, лонжероны, стеночные нервюры и шпангоуты – следующий уровень декомпозиции, а на глобальном уровне декомпозиции – агрегаты (фюзеляж, крыло, оперение, герметическая кабина и т.д.).

При реализации МСКЭ в форме принятого здесь метода перемещений ключевым моментом является построение в алгоритмически замкнутой форме решений для конструктивных элементов, явно выраженных через краевые (кинематические) функции или их параметры. Точные решения указанных задач к настоящему времени не получены. Наиболее рациональным по многим известным причинам представляется разложение искомого решения по собственным функциям рассматриваемой задачи (исходной является краевая задача). Этот путь был принят в предыдущих работах [5, 6]. Другой путь заключается в предварительном построении базиса, ортонормированного по энергии положительно определенного оператора краевой задачи (исходным является вариационный принцип) [4]. Эти два пути требуют примерно одинаковых вычислительных ресурсов. Однако разложение решения по собственным функциям решаемых задач имеет известные преимущества.

Пластина как конструктивный элемент сложной тонкостенной пространственной системы может работать в ее составе при различных условиях взаимодействия с внешней средой. Эти условия во многом определяются предварительным состоянием пластины. Поэтому преднапряженное состояние пластины, несомненно, должно быть учтено. Последнее обстоятельство имеет определяющее значение при исследовании закритического (как статического, так и динамического) поведения пластины в составе системы, что приобретает особую значимость (если не первостепенную) в задачах аэроупругости, в которых обязателен учет взаимодействия двух и более полей.

Решению краевой задачи о собственных значениях и собственных функциях предварительно напряженной в своей плоскости жестко защемленной по контуру прямоугольной пластины («базовой» – по терминологии работ [5, 6] задачи) посвящена данная работа.

1. Постановка и решение краевой задачи

Рассматривается краевая задача на собственные значения

$$(A + kB)w = \mu w \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

где $A \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4};$

$$B \equiv \bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \lambda \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$k = N_0 a^2 / D$ – известный нормированный безразмерный параметр;

N_0 – нормирующий множитель, через который вводятся безразмерные функции нагрузок $\bar{N}_x(x, y)$, $\bar{N}_y(x, y)$, $\bar{N}_{xy}(x, y)$, связанные с размерными параметрами: $N_x = N_0 \bar{N}_x$, $N_{xy} = N_0 \bar{N}_{xy}$, $N_y = N_0 \bar{N}_y$;

D – цилиндрическая жесткость пластины;

$\lambda = a / b$ – параметр удлинения пластины с размерами $2a$ и $2b$;

n – внешняя нормаль к границе Γ ;

$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$;

μ – искомое собственное значение.

Уравнение (1) с точки зрения механики деформируемого твердого тела является уравнением собственных колебаний предварительно напряженной в своей плоскости усилиями N_x , N_y , N_{xy} жестко защемленной по контуру прямоугольной пластины. Знак плюс перед оператором B означает, что нормальные усилия N_x , N_y являются положительными при сжатии, а положительное направление сдвигающего усилия N_{xy} согласовано с принятыми положительными направлениями нормальных усилий уравнениями равновесия. При этом собственные частоты ω , Γ_c , определяются через собственные значения μ формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu D}{\rho h a^4}}, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала пластины;

h – её толщина.

Оператор A при краевых условиях (2) – положительно определенный. Симметричный оператор B с переменными коэффициентами такой, что входящие в него коэффициенты \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} меньше своих критических значений. Тогда можно установить, что оператор $A + kB$ также положительно определен, что обеспечивает полную определенность краевой задачи (1) – (2)¹.

Точное решение краевой задачи (1) – (2) не получено до настоящего времени. Ниже строится аналитико-численное решение. При этом, как будет показано в дальнейшем, собственные значения и собственные функции могут быть определены с любой наперед заданной точностью.

¹ Установление этого факта довольно трудоёмкая процедура и здесь опускается.

Решение поставленной краевой задачи ищется в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N C_{ij} H_i(x) H_j(y), \quad (4)$$

где $H_i(x)H_j(y)$ – координатная система функций, предложенная в работе [7] и подробно исследованная в работах [1 – 7];

C_{ij} – подлежащие определению коэффициенты.

Применение процедуры ортогонализации к уравнению (1) в форме Бубнова – Галеркина приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений. Из равенства нулю определителя этой системы находятся собственные значения μ_n и соответствующие им собственные функции $\varphi_n(x, y)$. Точность определения собственных значений и собственных функций зависит от верхних пределов M и N в сумме (4): чем больше M и N , тем точнее определяются искомые величины.

Главной целью ВМСС является построение решения той или иной задачи с любой наперед заданной точностью. В данной задаче эта точность зависит от точности определения собственных значений μ_n (спектральных параметров) и соответствующих им собственных функций $\varphi_n(x, y)$. Как будет показано ниже, достаточно обеспечить нужную точность в определении спектральных параметров, а точность при определении собственных функций такая же или даже выше. Следует напомнить, что координатные функции $H_i(x)H_j(y)$ в представлении (4) удовлетворяют всем предъявляемым к ним требованиям [8, 9], что было предметом неоднократного обсуждения в работах [1 – 6]. Более того элементы матрицы линейных алгебраических уравнений вычислялись точно (в виде радикалов, неправильных дробей и т.д.), а при переходе к числам с плавающей запятой в мантиссе чисел сохранялось 32 значащие цифры. Такая точность вычислений не является необходимой, однако она принята с целью гарантировать с запасом требуемую точность.

Спектр положительно определённого оператора $A + kB$ дискретный, а получаемые собственные функции обладают следующими свойствами: они ортогональны и полны в исходном пространстве, полны и ортонормированы в энергетическом пространстве оператора $A + kB$.

Данная задача, как отмечалось во введении, имеет многочисленные приложения. Здесь отметим три задачи.

Первая описывает продольно-поперечный изгиб предварительно напряженной в своей плоскости жестко защемленной прямоугольной пластины при произвольном внешнем давлении. Соответствующая краевая задача такова:

$$(A + kB)w = \frac{q(x, y)a^4}{D} \equiv Q(x, y) \text{ в } \Omega; \quad (5)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (6)$$

Как только построены собственные функции $\varphi_n(x, y)$, то решение краевой задачи (5) – (6) выписывается в явном виде

$$w = \sum_{n=1}^S (Q, \varphi_n) \varphi_n, \quad (7)$$

где w представляет собой функцию прогиба;

(f, g) – скалярное произведение функций f и g в $L_2(\Omega)$;

S – максимальное число собственных функций в разложении (7), которое связано с верхними пределами M и N следующей формулой:

$$S = (M + 1)(N + 1). \quad (8)$$

В зависимости от удлинения пластины $\lambda \geq 1$ ($a \geq b$) верхние пределы в представлении (4) рационально выбирать так, чтобы выполнялось неравенство $M > N$. Здесь принято

$$M = \lambda(N + 1) - 1.$$

Вторая задача касается решения полуоднородной краевой проблемы

$$(A + kB)w = 0; \quad (9)$$

$$w = f_1(\gamma), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = f_2(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma. \quad (10)$$

Здесь $f_1(\gamma) \in C^1(\Gamma)$, $f_2(\gamma) \in C(\Gamma)$ – заданные функции.

Решение краевой задачи (9) – (10) при определенных дополнительных условиях, накладываемых на граничные функции, сводится к решению полуоднородной краевой задачи типа (5) – (6) (базовой задачи) с правой частью, зависящей от функций $f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ и их производных до определенного порядка.

Небезынтересно отметить, что решение краевой задачи типа (9) – (10) при $B \equiv 0$ в случае плоской задачи теории упругости было дано в работе [10], а в случае задачи изгиба – в работе [11]. Решение краевой задачи (9) – (10) особенно важно при реализации предложенного одним из авторов данной работы, успешно развиваемого и применяемого при решении конкретных задач в аэрокосмической области метода идентификации краевых условий (МИКУ), не имеющего мировых аналогов. При проведении МИКУ решение краевой задачи (9) – (10) приобретает первостепенное значение.

Третья весьма важная и нерешенная по сей день задача, связанная с рассматриваемой краевой задачей (5) – (6), – это задача построения функции Грина, с помощью которой решению любой неоднородной задачи можно придать интегральную форму.

Это значит, что краевые задачи для дифференциального уравнения можно свести к интегральному или интегро-дифференциальному уравнению типа Фредгольма второго рода.

Ниже будет рассмотрен ряд краевых задач первого типа, а задачи второго и третьего типов пока ожидают своего решения.

2. Некоторые численные результаты

Здесь представлены результаты решения двух краевых задач: задачи (1) – (2) о спектре составного оператора $A + kB$ и задачи (5) – (6) продольно-поперечного изгиба предварительно напряженной прямоугольной жестко защемленной пластины. Основное внимание с позиций вычислительной механики деформируемого твердого тела уделено вопросам устойчивости, сходимости и точности предлагаемых решений. При решении обеих задач предварительно напряженное поле принимается однородным, а учет неоднородности исходного поля вносит трудности лишь технического характера, хотя и требует отдельного рассмотрения.

Переходя к решению краевой (спектральной) задачи (1) – (2), следует отметить, что об устойчивости решений можно судить, во-первых, по стабилизации собственных значений в зависимости от верхних пределов в представлении (4) и, во-вторых, по монотонности этой стабилизации: в соответствии с теоремой Рэлея о дополнительных связях минимальное собственное значение может только убывать. Безусловной устойчивостью как самого метода, так и его вычислительных процедур обеспечивается сходимость и точность получаемых решений, что отражено в табл. 1. Она получена при следующих данных: $\bar{N}_x = \bar{N}_{xy} = \bar{N}_y = 1$ (неблагоприятный случай), $k = 0,95k_{кр}$. Критический параметр $k_{кр}$ был вычислен по методу работы [6] с точностью до 16 знаков (именно такая точность была принята здесь при вычислениях). При параметре удлинения пластины $\lambda = 1$: $k_{кр} = 11,46006343910348$, а при $\lambda = 2$: $k_{кр} = 34,44352915517587$. Величина $k_{кр}$ связана со спектральным параметром μ и соответствующим ему нормированным параметром $\bar{\mu}$ из работы [6] (здесь эти параметры снабжены «*») следующими равенствами:

$$k_{кр} = \mu^* = \frac{\bar{\mu}^* \lambda^2 \pi^2}{4}. \quad (11)$$

Поскольку в таблице приведены все 16 значащих цифр (достижение точности – программная проблема научного коллектива, представителями которого и являются авторы), то и значения $k_{кр}$ здесь приведены с такой же точностью. В практиче-

ских расчетах несущественные цифры мантииссы, разумеется, могут быть удалены по выбору расчетчиков. В таблице приведены как минимальные собственные значения μ_1 , так и значения соответствующей собственной функции $\varphi_1(0;0)$ в центре пластины (как уже отмечалось, собственные функции ортонормированы в энергетическом пространстве оператора $A + kB$).

Таблица 1

Устойчивость, сходимость и точность минимальных собственных значений и собственных функций

| λ | M | N | μ_1 | $\varphi_1(0;0)$ |
|-----------|----|----|-------------------------|--------------------------|
| 1 | 0 | 0 | 15,6776383971101 | 0,310763688019340 |
| | 1 | 1 | 8,3474370016214 | 0,422730897327995 |
| | 2 | 2 | 5,0634377375308 | 0,579124320247706 |
| | 3 | 3 | 5,0423583907044 | 0,580600348878993 |
| | 5 | 5 | 4,9794190270795 | 0,587951179134924 |
| | 7 | 7 | 4,9784226592224 | 0,588041421311190 |
| | 9 | 9 | 4,9783247386683 | 0,588050853104341 |
| | 11 | 11 | 4,9783123144854 | 0,588051660380479 |
| | 13 | 13 | 4,9783105325515 | 0,588051779261684 |
| | 15 | 15 | 4,9783102589608 | 0,588051796946233 |
| | 17 | 17 | 4,9783102144219 | 0,588051799162143 |
| | 19 | 19 | 4,9783102057279 | 0,588051799303279 |
| | 21 | 21 | 4,9783102029030 | 0,588051799262273 |
| | 22 | 22 | 4,9783102013870 | 0,588051799247657 |
| | 23 | 23 | 4,9783102013566 | 0,588051799248986 |
| | 24 | 24 | 4,9783102004755 | 0,588051799250050 |
| 2 | 5 | 2 | 41,4205875432796 | 0,217166314105022 |
| | 9 | 4 | 38,9978978589603 | 0,225074447492501 |
| | 13 | 6 | 38,9851682068711 | 0,225133836007530 |
| | 17 | 8 | 38,9850015188476 | 0,225134618203710 |
| | 21 | 10 | 38,9849851890970 | 0,225134658567757 |
| | 25 | 12 | 38,9849832671675 | 0,225134662408176 |
| | 29 | 14 | 38,9849830450641 | 0,225134662722909 |
| | 33 | 16 | 38,9849830233226 | 0,225134662764160 |
| | 37 | 18 | 38,9849830217486 | 0,225134662760974 |
| | 41 | 20 | 38,9849830210938 | 0,225134662763360 |
| | 45 | 22 | 38,9849830203133 | 0,225134662765514 |
| | 47 | 23 | 38,9849830197256 | 0,225134662767115 |
| | 49 | 24 | 38,9849830196635 | 0,225134662767120 |

Данные таблицы прозрачны, и их подробное обсуждение излишне. Отметим только безусловную и быструю стабилизацию величин собственных значений и собственных функций. Выделенные жирным шрифтом цифры в таблице верны. Кроме того, достаточно высокую точность до десятых и сотых долей процента можно получить при невысоких значениях M и N. Так, для $\lambda = 1$ можно принять $M = N = 3$ и даже $M = N = 2$, это обстоятельство очень важно при анализе работы тонкостенных пространственных систем (крыло, фюзеляж и т.д.) методом сопряжения конструктивных элементов.

Высокая точность собственных значений и досконально исследованная процедура их получения, как и в предыдущих работах авторов [5, 6], дают возможность получить (конструктивно) *верхние* и *нижние* оценки всех собственных значений при любых возможных комбинациях и значениях переменных параметров. Однако здесь в этом необходи-

мости нет, поскольку собственные значения могут быть получены с любой наперед заданной точностью. Например, при $\lambda = 1$ данные табл. 1 гарантируют значение $\mu_1 = 4,97831020$. Нужно ли оценивать эту величину сверху и снизу? Разумеется, нет.

Иначе обстоит дело о возможных упрощениях структуры собственных функций без нарушения точности собственных значений. Иными словами, при «сквозном» построении собственных функций в них могут появиться слагаемые типа «белого шума», которыми, конечно же, можно пренебречь. Это означает, что в структуре собственных функций имеются ведущие слагаемые, наиболее ответственные за точность последних. Таким образом, как и в предыдущих работах [5, 6], структура собственных функций может быть «оптимизирована» (упрощена). Указанное обстоятельство наглядно иллюстрируется данными табл. 2 для первой собственной функции $\varphi_1(x; y)$. Вычисления проводились при тех же исходных данных с $\lambda = 1$. Точное значение $\mu_1 = 4,97831020$, при вычислении этого значения собственная функция содержала 625 слагаемых, что, конечно же, очень много. Но, как видно из табл. 2, для получения собственных значений с погрешностью до десятой доли процента (строка 3) достаточно сохранить в представлении (4) всего одиннадцать слагаемых, а с погрешностью до тысячных долей процента – 27 слагаемых. Разница ощутима. Появляющиеся здесь трудности при проведении подобных оценок несущественны, тем более, что обсуждаемая выборка выполняется программным путем.

Представляет интерес исследовать поведение собственных значений от непрерывно изменяющегося параметра k , характеризующего интенсивность исходного преднапряженного состояния. Эта задача имеет важное значение для реализации МСКЭ в задачах устойчивости и прочности систем, в которых k является искомым (точнее, искомым является его наименьшее значение). Отвлекаясь от рассмотрения систем, будем решать эту задачу для отдельно взятой жестко защемленной и предварительно напряженной прямоугольной пластины. Тогда k лежит в некотором интервале $(-k_1, +k_2)$, где k_1, k_2 – некоторые положительные числа: k_1 определяется из условий прочности, а k_2 – из условий устойчивости. Получить точную аналитическую зависимость $\mu_n(k)$ не представляется возможным, поэтому ниже дается численное решение этой задачи при $n = 1$, а при другом произвольном значении n решения строятся аналогично по единому алгоритму.

На рис. 1 и 2 изображены графики зависимости $\mu_1(k)$ для восьми краевых задач при удлинении пластины $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$. Принятые обозначения на рисунках определяют номер соответствующей комбинации безразмерных нагрузок, данных в табл. 3.

Таблица 2
Оптимизация функции $w(x, y)$

| Номер этапа | «i,j» | μ_1 | $\epsilon, \%$ |
|-------------|---|-----------------|----------------|
| 1 | «0,0» | 15,677638397110 | 214,92 |
| 2 | «0,0», «2,0», «0,2», «1,1» | 5,0683135461421 | 1,8079 |
| 3 | «0,0», «2,0», «0,2», «1,1», «3,1», «1,3», «2,2», «4,0», «0,4», «4,2», «2,4» | 4,9829492788072 | 0,0932 |
| 4 | «0,0», «2,0», «0,2», «1,1», «3,1», «1,3», «4,0», «0,4», «2,2», «4,2», «2,4», «5,1», «1,5», «6,0», «0,6», «3,3», «5,3», «3,5», «6,2», «2,6», «4,4», «6,4», «4,6», «5,5», «7,5», «5,7», «6,6» | 4,9785454275908 | 0,0047 |

Таблица 3
Соответствие комбинации безразмерных нагрузок расчетному случаю

| Номер случая | Комбинации безразмерных нагрузок $\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_{xy}$ |
|--------------|---|
| 1 | 1 : 0 : 0 |
| 2 | 0 : 0 : 1 |
| 3 | 1 : 0 : 1 |
| 4 | 1 : 1 : 0 |
| 5 | 1 : 1 : 1 |
| 6 | 1 : -1 : 0 |
| 7 | -1 : 0 : 1 |
| 8 | 1 : -1 : 1 |

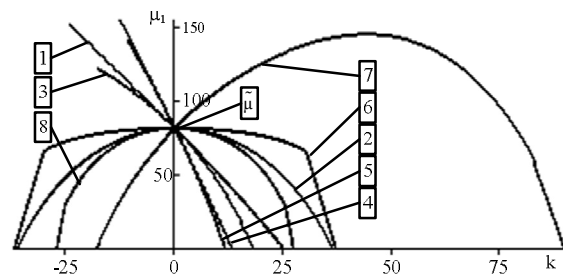


Рис. 1. Зависимость $\mu_1 = f(k), \lambda = 1$

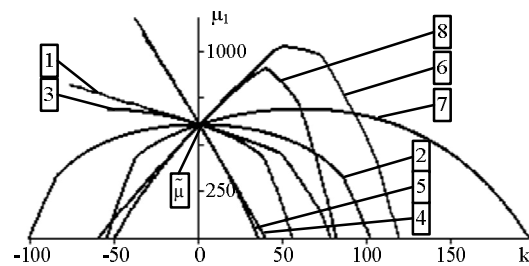


Рис. 2. Зависимость $\mu_1 = f(k), \lambda = 2$

Как и следовало ожидать, функция $\mu_1 = f(k)$, будучи непрерывной, имеет конечное число точек разрыва производной. При $k = 0$ в точке пересечения кривых величина $\tilde{\mu}$ соответствует первому собственному значению задачи о спектре основной бигармонической проблемы в прямоугольнике [5]: $\tilde{\mu} = 80,933387$ ($\lambda = 1$) и $\tilde{\mu} = 604,06387$ ($\lambda = 2$). На рис. 1 и 2 участки кривых между точками разрыва являются гладкими. В точках разрыва происходит смена форм колебаний преднапряженной пластины

в зависимости от параметра интенсивности k , как показано на рис. 3 (случай 6, $\lambda = 2$). Координаты характерных точек таковы: $p_1(-60,08; 0)$, $p_2(47,96; 1022,3)$, $p_3(72,15; 972,30)$, $p_4(106,24; 388,54)$, $p_5(118,06; 0)$, а сами формы колебаний изображены в правой части рис. 3.

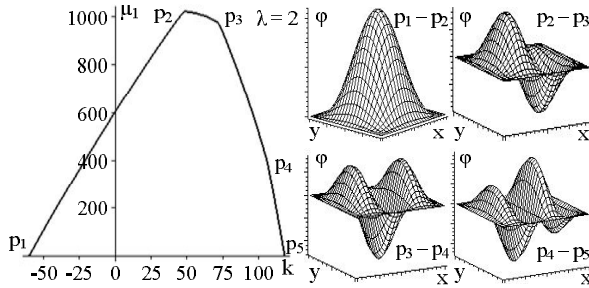


Рис. 3. Формы колебаний преднапряженной пластины при $\lambda = 2$, случай 6

Возвращаясь к рис. 1 и 2, отметим, что при $\lambda = 1$ графики функций $\mu_1(k)$ симметричны относительно оси μ_1 в случаях 2, 6, 8, что очевидно. При $\lambda \neq 1$ (здесь $\lambda = 2$, рис. 2) указанная симметрия наблюдается лишь в случае 2, что также очевидно.

Задача о продольно-поперечном изгибе пластин, имея самостоятельное значение, особую важность приобретает при анализе оболочечно-пластинчатых систем.

Ниже исследуются поля перемещений и напряжений в предкритическом состоянии ($k = 0,95k_{кр}$) пластины в неблагоприятном случае 5 при постоянном давлении $q(x, y) = q = \text{const}$ для двух параметров удлинения: $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$. Решение ищется в виде разложения в ряд (7) по собственным функциям краевой задачи (1) – (2). Основное внимание, как и выше, уделено устойчивости, сходимости и точности принятого метода.

Результаты решения краевой задачи (5) – (6) представлены в табл. 4, в которой приведены значения безразмерных функций прогиба и изгибающих моментов в характерных точках в зависимости от числа удерживаемых собственных функций S в решении (7). Истинные величины прогибов $w(x, y)$ и моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ определяются через соответствующие безразмерные равенствами:

$$w = D^{-1}qa^4\bar{w}, M = qa^2\bar{M}.$$

Как и ранее, здесь нет необходимости в подробном анализе данных таблицы: метод разложения в ряды по собственным функциям устойчив, быстро сходящийся и высокоточен.

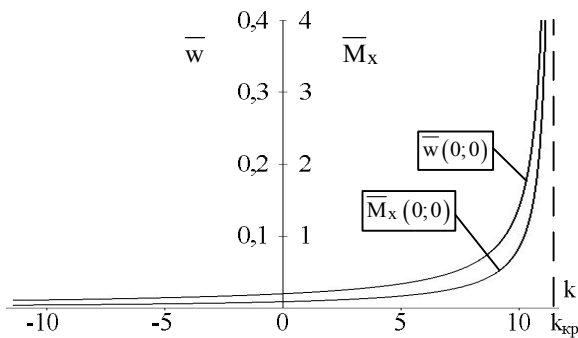
Вид функций прогиба и изгибающего момента M_x в центре квадратной пластины в зависимости от интенсивности k предварительного поля напряжений (например, для случая 5) можно проследить по рис. 4 ($k_{кр} = 11,46006343910348$). В остальных случаях характер подобных зависимостей аналогичный.

Поведение представленных графиков прозрачно: при $k \rightarrow k_{кр}$ обе функции уходят на бесконечность. При $k = 0$ (изгиб пластины) $\bar{w} = \bar{w}_0 = 0,0202$ и $\bar{M}_x = 0,0916$, что полностью совпадает с критерийными решениями работ [1, 4], полученными иными методами. Из данного рисунка видно, что уже при $k > (0,7...0,8)k_{кр}$ решение этой задачи желательно проводить на основе геометрически нелинейных теорий, не говоря уже об закритическом поведении пластины. Так, например, при $k = 0,8k_{кр}$ отношение $\bar{w}/\bar{w}_0 \approx 4,45$, а при $k = 0,9k_{кр}$ – $\bar{w}/\bar{w}_0 \approx 8,71$. Приведенные данные обосновывают сделанный выше вывод.

Таблица 4

Прогиб и изгибающие моменты при продольно-поперечном изгибе жестко заземленной по контуру прямоугольной пластины, $q = \text{const}$

| λ | S | $\bar{w}(0;0)$ | $\bar{M}_x(0;0)$ | $\bar{M}_y(0;0)$ | $\bar{M}_x(1;0)$ | $\bar{M}_y(0;1)$ |
|-----------|----------------|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | 1 | 0,109879830518 | 0,571375118695 | 0,571375118695 | -0,879038644146 | -0,879038644146 |
| | 4 | 0,203372878807 | 1,057538969794 | 1,057538969794 | -1,626983030453 | -1,626983030453 |
| | 9 | 0,340618191905 | 2,079619246074 | 2,079619246074 | -1,776008156266 | -1,776008156266 |
| | 16 | 0,342053160006 | 2,091931210600 | 2,091931210600 | -1,772564422924 | -1,772564422924 |
| | 36 | 0,348022750245 | 2,180835935776 | 2,180835935776 | -1,916540396563 | -1,916540396563 |
| | 64 | 0,348104825632 | 2,181980128570 | 2,181980128570 | -1,923408169289 | -1,923408169289 |
| | 196 | 0,348114783427 | 2,182240158613 | 2,182240158613 | -1,921591738713 | -1,921591738713 |
| | 400 | 0,348114807864 | 2,182241044235 | 2,182241044235 | -1,921658516856 | -1,921658516856 |
| 2 | 625 | 0,348114808001 | 2,182240929027 | 2,182240929027 | -1,921705947665 | -1,921705947665 |
| | 18 | 0,041379066689 | 0,474916157228 | 0,847151089592 | -0,114186385193 | -0,874912413504 |
| | 50 | 0,044060830157 | 0,517228164043 | 0,923224131323 | -0,103976177020 | -0,971736189732 |
| | 98 | 0,044078774885 | 0,517759756258 | 0,924591393360 | -0,104592685009 | -0,969207132081 |
| | 162 | 0,044079028960 | 0,517768113549 | 0,924622050279 | -0,104312240674 | -0,969358357732 |
| | 338 | 0,044079050999 | 0,517768764111 | 0,924623495817 | -0,104388109844 | -0,969364976559 |
| | 578 | 0,044079051266 | 0,517768758649 | 0,924623493314 | -0,104399492630 | -0,969364797281 |
| | 882 | 0,044079051270 | 0,517768763607 | 0,924623493240 | -0,104400015027 | -0,969364594815 |
| | 1058 | 0,044079051532 | 0,517769323296 | 0,924623660928 | -0,104398477536 | -0,969365311984 |
| 1250 | 0,044079064160 | 0,517801166270 | 0,924633214223 | -0,104658222159 | -0,969408072087 | |

Рис. 4. Графики функций: $\bar{w}(0;0)$; $\bar{M}_x(0;0)$

Заключение

1. Решена задача о спектре составного оператора, главный из которых – бигармонический, а подчиненный – оператор второго порядка с переменными коэффициентами, учитывающий предварительное поле напряжений. С механической точки зрения это задача о собственных колебаниях предварительно напряженной прямоугольной пластины.

2. Собственные значения и собственные функции задачи определяются с любой наперед заданной точностью.

3. Показано, что все вычислительные процедуры метода (а, следовательно, и сам метод) являются безусловно устойчивыми, быстросходящимися и обладающими высокой точностью, которая задается по выбору исследователя.

4. Предложена процедура «оптимизации» (упрощения) структуры собственных функций без ощутимой потери точности.

5. Дано решение восьми конкретных задач о спектре отличающихся различным сочетанием действующих в плоскости пластины нагрузок, а также их интенсивностью, характеризуемой некоторым параметром. Подробно исследована зависимость минимального собственного значения от параметра интенсивности для всех восьми задач при двух удлинениях пластины. В результате выяснено наличие угловых точек на графиках указанных зависимостей. Показано, что эти точки соответствуют смене форм собственных колебаний преднапряженной пластины.

6. Анализ поведения решения конкретной задачи о продольно-поперечном изгибе жестко защемленной прямоугольной пластины позволил сделать вывод о том, что при приближении параметра интенсивности преднапряженного поля к его критическому значению решение должно быть выполнено на основе геометрически нелинейных теорий.

7. Все вычисления проводились с помощью оригинального программного обеспечения, принадлежащего авторам.

Литература

1. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – X., 2011. – С. 81 – 94.

2. Халилов, С. А. Построение и исследование приближенного аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 – 49.

3. Халилов, С. А. Приближенное аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

4. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического оператора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 – 51.

5. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 5 (112). – С. 70-78.

6. Обобщенная задача на собственные значения в прямоугольнике с бигармоническим оператором при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 6 (113). – С. 36-47.

7. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 5. – X., 1978. – С. 46 – 56.

8. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Гостехиздат, 1957. – 478 с.

9. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.

10. Халилов, С. А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапецевидной области [Текст] / С. А. Халилов, М. А. Яровой // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 2 (10). – С. 33 - 38.

11. Халилов, С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях [Текст] / С. А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летатель-

ных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковского авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Х., 1987. – С. 31 – 39.

Поступила в редакцию 25.11.2014, рассмотрена на редколлегии 20.01.2015

АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРО СПЕКТР У ПРЯМОКУТНИКУ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ОПЕРАТОРА З БІГАРМОНІЧНИМ У ГОЛОВНІЙ ЧАСТИНІ

С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко

Дано розв'язання задачі про спектр в прямокутнику для складеного оператора при головних крайових умовах. Головним у складеному операторі є бігармонічний, а залежним - оператор другого порядку зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр. Запропонований підхід дозволяє визначити власні значення і власні функції з будь-якою наперед заданою точністю. Усі обчислювальні процедури методу (а отже, і сам метод) мають безумовну стійкість, швидку збіжність і високу точність. Запропоновано процедуру спрощення структури власних функцій шляхом виявлення їх компонент типу «білого шуму». Дано розв'язання восьми крайових задач про спектр, що відрізняються різним поєднанням навантажень, що діють у площині пластини, і параметром їх інтенсивності. Аналіз характеру розв'язання крайової задачі поздовжньо-поперечного вигину пластини при параметрі інтенсивності попередньо напруженого поля, що наближається до свого критичного значення, дозволив зробити висновок, що подібні задачі повинні розв'язуватися в геометрично нелінійній постановці, хоча критичний стан ще не досягнутий. Обчислення виконано із залученням оригінальних програм, складених авторами.

Ключові слова: власний спектр, складений оператор, параметр інтенсивності попередньо напруженого поля, стійкість, збіжність і точність обчислювальних процедур.

ANALYTIC-NUMERICAL SOLUTION FOR BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF SPECTRUM IN A RECTANGLE FOR COMPOUND OPERATOR WITH A BIHARMONIC IN THE MAIN PART

S. A. Khalilov, V. B. Myntyuk, D. A. Tkachenko, V. V. Kopychko

The solution of the problem of spectrum in the rectangle for the compound operator at the main boundary conditions is given. The compound operator contains biharmonic as main and operator of the second order with variable coefficients, containing the parameter, as subordinate. The offered approach allows to determine the eigenvalues and eigenfunctions with any desired accuracy. All method computational procedures (and hence the method itself) have unconditional stability, fast convergence and high accuracy. The eigenfunctions structure simplification procedure by means of identifying their components such as "white noise" is proposed. A solution is given for eight boundary value problems on the spectrum, based on different combinations of loads applied in the plate plane and their intensity parameter. The boundary value problem of the plate longitudinal-transverse bending solution character analysis with the prestressed field intensity parameter approaches its critical value led to the conclusion that these problems must be solved in a geometrically nonlinear formulation, although the critical state is not yet reached. The calculations are performed with the assistance of original programs compiled by the authors.

Keywords: own spectrum, compound operator, prestressed field intensity parameter, stability, convergence, and accuracy of calculation procedures.

Халилов Сиявуш Ахмедович – старший научный сотрудник научного отдела кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.

Копычко Виктор Владимирович – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor_kopychko@mail.ru.