

УДК 539.311

В. Б. МИНТЮК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», Украина*

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЖАТЫХ ПЛАСТИН ИЗ МАТЕРИАЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*Проведен анализ закритического поведения сжатых тонких пластин на основе полностью нелинейной теории. В основу нелинейной теории положены классические гипотезы Кирхгофа, использован гиперупругий материал первого порядка, связывающий компоненты правого тензора кратности удлинений и симметричного тензора напряжений Био. Аналитико-численное решение получено с помощью метода Рэлея-Ритца. Построены диаграммы равновесных состояний с указанием значений полной потенциальной энергии. На основе проведенного анализа и принципа минимума полной потенциальной энергии получено значение предельной сжимающей нагрузки.*

**Ключевые слова:** нелинейная теория пластин, закритическое поведение, материал первого порядка.

### Введение

Многие тонкостенные элементы силовых конструкций аэрокосмической техники могут полноценно функционировать и после потери устойчивости. К таким элементам можно отнести крыльевые и фюзеляжные панели, стенки лонжеронов, нервюры и др. Их местное выпучивание не приводит к разрушению и допускается в нормальной работе силовой конструкции. Таким образом, нагрузки, соответствующие нижним критическим эйлеровым силам, не являются предельными. Вычисление последних – задача весьма актуальная и предполагает рассмотрение закритического поведения элементов конструкций, что можно сделать только с привлечением геометрически нелинейных моделей элементов.

Простейшей геометрически нелинейной моделью пластин является модель, основанная на теории Фёппля-Кармана. Здесь наряду с линейными членами в выражениях деформаций присутствуют квадраты линеаризованных углов поворотов. Эта теория, не являясь полностью нелинейной, способна более или менее достоверно описать закритическое поведение непосредственно возле точки бифуркации, но при силах, существенно превышающих критические, приводит к значительным погрешностям. Сейчас эта теория активно используется для получения результатов аналитическими и полуаналитическими методами. Построение самой теории можно найти, например, в [1, 2], ее дальнейшее развитие и использование – [3 – 5].

Полностью нелинейные теории строятся, как правило, с использованием деформаций Грина и напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода. Примеры построения таких нелинейных теорий можно

найти в работах [6 – 10]. Отметим, что эти деформации и напряжения не являются инженерными, т.е. деформациями, которые представляют собой относительные изменения длин, и напряжениями, которые являются истинными в пересчете на недеформированные площадки. Такими деформациями и напряжениями являются деформации, порожденные правым тензором кратности удлинений, и напряжения Био. Эта энергетически сопряженная пара тензоров деформаций и напряжений в практике нелинейных расчетов встречается редко, хотя имеет ряд достоинств [11 – 14]. Работы, в которых по той или иной причине была использована эта пара тензоров, но относящиеся больше к теоретическим работам, можно представить в следующем списке [15 – 18].

Относительно существующих методов исследования отметим, что в подавляющем большинстве работ численные решения получены методом конечного элемента. Редкие исключения для упрощенных теорий представлены, например, в работах [19 – 22].

В данной работе нелинейная теория деформирования пластины строится с использованием классических гипотез Кирхгофа. Материал принимается гиперупругим, более того, считается справедливым закон Гука. Численное решение строится методом Рэлея-Ритца с использованием аналитических координатных функций. Как показывает практика вычислений [23 – 29], такой метод обладает высокой точностью и быстрой сходимостью не только по энергии и перемещениям, но и по напряжениям.

В работе подразумевается правило суммирования по повторяющемуся индексу, причем латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие – 1, 2; обычным шрифтом (строчным или прописным)

обозначаются скалярные величины, например,  $x$ ,  $E$ ,  $g_{\alpha\beta}$ ; строчным жирным шрифтом обозначаются векторы:  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}_\alpha$ ; тензоры второго ранга записываются жирными прописными буквами:  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{1}$ ; символом ( $\equiv$ ) вводятся обозначения.

### 1. Постановка задачи

Функция состояния материала в терминах энергетически сопряженных (согласно Хилу [30]) правого тензора кратности удлинений  $\mathbf{\Lambda}$  и симметричного тензора напряжений Био  $\mathbf{B}$  с учетом гипотез Кирхгофа имеет вид

$$W = \frac{E \left\{ v [(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{1}) : \mathbf{1}]^2 + (1-v)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{1}) : (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{1}) \right\}}{2(1-v^2)}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  
 $v$  – коэффициент Пуассона;  
 $:$  – операция свертки тензоров;  
 $\mathbf{1}$  – единичный тензор.

Такой материал называется материалом первого порядка [31], в зарубежной литературе чаще употребляется термин «полулинейный материал» [32].

Для сведения задачи к двумерной линеаризуем тензор  $\mathbf{\Lambda}$  по вырожденной координате  $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 + z\mathbf{\Lambda}_1 + o(z^2) \quad (2)$$

и проинтегрируем (1) по толщине пластины

$$\begin{aligned} W_\varepsilon &= \int_V W dV = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} W dz dS = \\ &= \frac{Eh^3}{24(1-v^2)} \int_S \left\{ v [(\mathbf{\Lambda}_1 : \mathbf{1})^2 + (1-v)\mathbf{\Lambda}_1 : \mathbf{\Lambda}_1 + \right. \\ &\left. + \frac{12}{h^2} \left( v [(\mathbf{\Lambda}_0 - \mathbf{1}) : \mathbf{1}]^2 + (1-v)(\mathbf{\Lambda}_0 - \mathbf{1}) : (\mathbf{\Lambda}_0 - \mathbf{1}) \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $V$  – объем недеформированной пластины;  
 $S$  – ее срединная поверхность.

Явный вид компонент тензоров  $\mathbf{\Lambda}_0$  и  $\mathbf{\Lambda}_1$ , записанных посредством функции перемещений, получим, рассматривая деформированное состояние пластины. Для этого введем правую прямоугольную декартову систему координат  $x_i$  с единичными ортами  $\mathbf{e}_i$  и расположим ее так, чтобы  $\mathbf{e}_\alpha$  лежали в срединной плоскости недеформированной пластины ( $x_3 \equiv z$ ). Произвольная точка срединной поверхности пластины до деформации идентифицируется

вектором  $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , после деформации – вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ . Здесь  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  – вектор перемещения точек срединной поверхности. Касательные к деформированной срединной поверхности векторы и вектор единичной нормали определяются, как  $\mathbf{r}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\alpha}$  и  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\Omega}$ , где  $\Omega = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|$ .

Положение произвольной точки пластины с координатой  $z$  до деформации определяется вектором  ${}_z \mathbf{x} = \mathbf{x} + z\mathbf{e}_3$ , после деформации – вектором  ${}_z \mathbf{r} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$ . Касательные к эквидистантному слою векторы примут вид  ${}_z \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + z\mathbf{n}_\alpha$ , где обозначено  $\mathbf{n}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_\alpha}$ . В этих обозначениях тензор градиента деформации и метрический тензор срединной поверхности представляется так:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Grad}({}_z \mathbf{r})|_{z=0} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{n} \mathbf{e}_3; \quad (4)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \equiv g_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (5)$$

где под записью  $\mathbf{ab}$  подразумевается диадное произведение векторов, а компоненты метрического тензора  $g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$  являются коэффициентами первой квадратичной формы деформированной срединной поверхности пластины.

Далее, используя теорему о полярном разложении тензора, сначала вычисляем искомые компоненты тензора кратности удлинений

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{G}^{\frac{1}{2}} \equiv \lambda_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (6)$$

где  $\lambda_{11} = \frac{g_{11} + \Omega}{e_1 + e_2}$ ;  $\lambda_{22} = \frac{g_{22} + \Omega}{e_1 + e_2}$ ;  $\lambda_{12} = \frac{g_{12}}{e_1 + e_2}$ ;

$$e_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{g_{11} + g_{22} \pm \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}} -$$

отличные от единицы корни главных значений метрического тензора  $\mathbf{G}$  (5), сингулярные числа тензора градиента деформации и главные значения самого же тензора  $\mathbf{\Lambda}_0$ . Затем определяем компоненты сопровождающего его тензора поворота

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Lambda}_0^{-1} = \\ &= \frac{\lambda_{22} \mathbf{r}_1 - \lambda_{12} \mathbf{r}_2}{\Omega} \mathbf{e}_1 + \frac{\lambda_{11} \mathbf{r}_2 - \lambda_{12} \mathbf{r}_1}{\Omega} \mathbf{e}_2 + \mathbf{n} \mathbf{e}_3 \equiv \\ &\equiv \mathbf{q}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{n} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Компоненты тензора  $\mathbf{\Lambda}_1$  как коэффициенты ряда Тейлора получим из соотношений (6), где вместо  $g_{\alpha\beta}$  необходимо использовать компоненты метрического тензора эквидистантной поверхности

$$z g_{\alpha\beta} = z r_{\alpha} \cdot z r_{\beta} = r_{\alpha} \cdot r_{\beta} + 2z r_{\alpha} \cdot n_{\beta} + z^2 n_{\alpha} \cdot n_{\beta}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \Big|_{z=0} = \kappa_{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta},$$

здесь величины  $\kappa_{\alpha\beta}$  принимают вид

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \bar{\lambda}_{12} (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_2); \\ \kappa_{22} &= \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \bar{\lambda}_{12} (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1); \\ \kappa_{12} &= \bar{\lambda}_{11} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + \bar{\lambda}_{22} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1, \end{aligned} \quad (8)$$

и введено обозначение  $\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_{11} + \lambda_{22}}$ .

Переход к известным выражениям теории пластин Феппля-Кармана

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_3}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial u_3}{\partial x_{\beta}} \right); \\ \kappa_{\alpha\beta} &= - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \end{aligned} \quad (9)$$

осуществляется путем разложения величин  $\kappa_{\alpha\beta}$  (8) в ряд Тейлора с удержанием только линейных слагаемых  $\frac{\partial u_i}{\partial x_{\beta}}$  и  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}$ , а при разложении величин

$\lambda_{\alpha\beta}$  (6) еще и квадратичных по  $\frac{\partial u_3}{\partial x_{\beta}}$ .

Таким образом, выражение полной потенциальной энергии (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi &= W_{\text{ext}} + \frac{1}{2} \int_S \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ (\lambda_{11} + \lambda_{22} - 2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \left( (\lambda_{11} - 1)(\lambda_{22} - 1) - 2\lambda_{12}^2 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \left( \kappa_{11}\kappa_{11} - \kappa_{12}^2 \right) \right] dS, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $W_{\text{ext}}$  – потенциал внешних сил, а величины  $\lambda_{\alpha\beta}$  и  $\kappa_{\alpha\beta}$  определяются по формулам (6) и (8) для полностью нелинейной теории и по (9) для теории Феппля-Кармана.

### 3. Построение численного решения

Рассматривается прямоугольная пластина (рис. 1), равномерно сжатая вдоль оси  $x$  (здесь перейдем к привычным обозначениям  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,

$u \equiv u_1$ ,  $v \equiv u_2$ ,  $w \equiv u_3$ ).

Внешняя нагрузка считается консервативной. Ее потенциал равен

$$W_{\text{ext}} = p \int_{-b/2}^{b/2} \left( u \Big|_{x=a/2} - u \Big|_{x=-a/2} \right) dy.$$

Считаем, что на границе из главных краевых условий заданы только  $w = 0$  при  $x = \pm \frac{a}{2}$  и  $y = \pm \frac{b}{2}$ .

Эти условия будут выполнены, если функции перемещений искать в следующем виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}} U_{nm} P_{2n+1}(\bar{x}) P_{2m}(\bar{y}); \\ v &= \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}} V_{nm} P_{2n}(\bar{x}) P_{2m+1}(\bar{y}); \\ w &= \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}} W_{nm} [P_{n+2}(\bar{x}) - P_n(\bar{x})] [P_{m+2}(\bar{y}) - P_m(\bar{y})], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $U_{nm}$ ,  $V_{nm}$  и  $W_{nm}$  – коэффициенты, подлежащие определению;

$P_i$  – полиномы Лежандра;

$\bar{x} = \frac{2x}{a}$ ,  $\bar{y} = \frac{2y}{b}$  – безразмерные координаты.

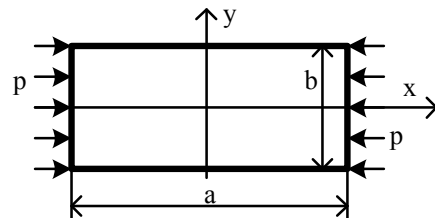


Рис. 1. Равномерно сжатая пластина

Функции  $u$ ,  $v$  и  $w$  в виде сумм (11) подставляются в выражение полной потенциальной энергии (10). Условия ее стационарности  $\frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0$  приводят к системе нелинейных уравнений. Здесь  $C_i$  – элементы вектора, составленного из неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \{ C_i \} = \\ &= \{ U_{00}, V_{00}, W_{00}, U_{01}, V_{01}, W_{01}, \dots \}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение системы проводится методом Ньютона. Используется процедура пошагового нагружения с возможностью контроля как приращения величины внешних нагрузок, так и величины евклидовой нормы вектора  $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{\sum C_i^2}$ . На каждом шаге нагружения определяется число обусловленности

матрицы Гессе как отношение наибольшего ее собственного значения к наименьшему. По знаку числа обусловленности делается заключение об устойчивости или неустойчивости данного равновесного состояния.

Алгоритм решения задачи реализован на языке программирования C++.

#### 4. Численный пример

На рис. 2 показаны диаграммы равновесных состояний (справа) и изменения значения полной потенциальной энергии (слева) для пластины с размерами в плане  $a \times b = 1.5 \times 1$  и толщиной  $h = 0.01$ . Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала равны соответственно  $E = 720000$ ,  $\nu = 0.3$ . Здесь и ниже все абсолютные величины приводятся к размерности силы [кН] и длины [дм].

Рассматриваются две ветви равновесных состояний, берущих свое начало в точках бифуркации, соответствующих первой критической силе  $p_{kr1} = 2.8244$  (точка  $B_1$ , две полуволны) и второй –  $p_{kr2} = 3.0549$  (точка  $B_2$ , одна полуволна). Обе ветви имеют предельные точки  $C_1$  и  $C_2$ . В этих точках возмущенные формы равновесия в виде двух и одной полуволн перестают быть устойчивыми (ветви  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$ ). Таким образом, при превышении внешней нагрузкой величины  $p = 14.6$  ( $p = 13.6$ ) произойдет перескок на устойчивую ветвь  $D_1E_1$  ( $D_2E_2$ ). Соответственно, при разгрузке произойдет перескок из ветвей  $DE$  на ветви  $BC$  при силах, равных  $p = 9.21$  и  $p = 8.10$ . Такой вид диаграммы равновесных состояний характерен для поведения оболочек, а при исследовании закритического поведения пластин ранее, как известно автору, обнаружен не был.

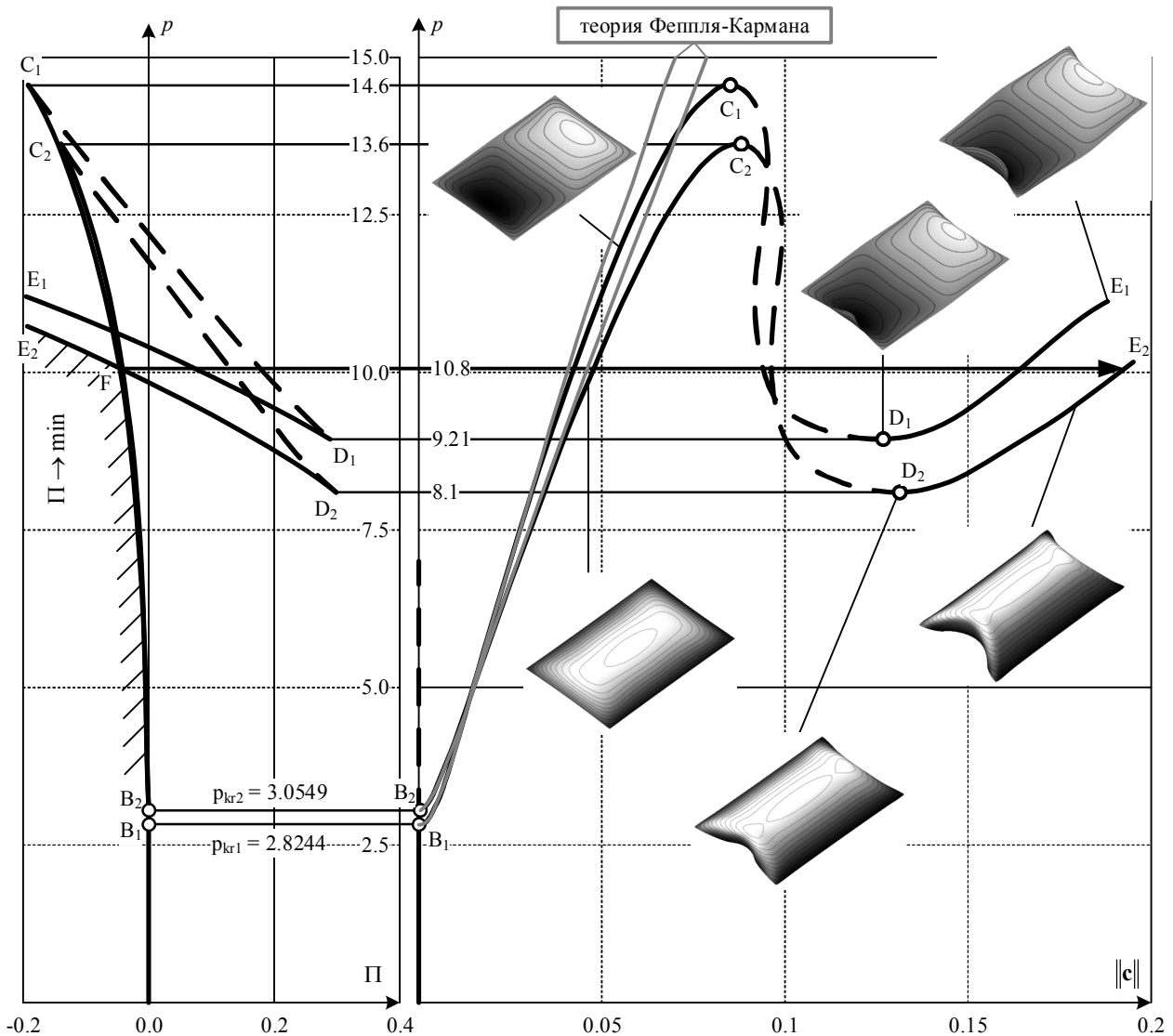


Рис. 2. Диаграмма равновесных состояний (справа) и изменение полной потенциальной энергии (слева)

На рис. 2 также показаны эти же ветви равновесных состояний, но полученные по теории пластин Феппля-Кармана. Видно, что эта теория приводит к более или менее достоверному результату при силах, превышающих критические не более, чем в три раза (прогиб составляет не более четырех толщин). Естественно, эта теория не позволяет определить предельные точки на диаграмме равновесных состояний.

Отметим также, что тела стремятся занять положение с минимальным значением потенциальной энергии. Таким образом, если считать, что «потенциальный барьер» всегда может быть преодолен каким-либо случайным воздействием, то при нагружении пластины перескок из любой устойчивой формы равновесия на ветвях ВС на ветвь  $D_2E_2$  произойдет при значении усилия  $p=10.8$ . Именно здесь реализуется наименьшее значение полной потенциальной энергии. Перемещения на этой ветви растут очень быстро, поэтому эта величина может считаться предельным значением усилия сжатия данной пластины.

### Заключение

1. Предложенная геометрически нелинейная теория пластин позволяет выявить все особенности закритического поведения сжатых пластин.

2. В закритической области для равномерно сжатых пластин (как и для оболочек) наблюдаются перескоки из одних форм равновесия на другие.

3. Принцип минимума полной потенциальной энергии можно использовать для определения предельного значения внешних нагрузок.

4. Теорию пластин Феппля-Кармана можно применять только при прогибах, не превышающих толщину в несколько раз. Иначе она может приводить к существенным количественным погрешностям и качественно неверному решению.

Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Халилову за помощь в подготовке и написании статьи.

### Литература

1. Ventsel, E. *Thin Plates and Shells: Theory and Applications [Text]* / E. Ventsel, T. Krauthammer. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 651 p.
2. Съярле, Ф. *Уравнения Кармана [Текст]* / Ф. Съярле, П. Рабье. – М.: Механика. Новое в науке, 1983. – Вып. 31. – 172 с.
3. Ciprian, D. C. *On the compatibility relation for the Föppl–von Kármán plate equations [Text]* / D. C. Ciprian // *Applied Mathematics Letters*. – 2012. – N 25. – P. 2407–2410.

4. Vidoli, S. *Discrete approximations of the Föppl–Von Kármán shell model: From coarse to more refined models [Text]* / S. Vidoli // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – P. 1241–1252.

5. Audoly, B. *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells [Text]* / B. Audoly, Y. Pomeau. – Oxford: University Press, 2010. – 617 p.

6. Chernykh, K.F. *Nonlinear theory of isotropically elastic thin shells [Text]* / K. F. Chernykh // *Izv. ANSSSR. MTT*. – 2002. – Vol. 15. – P. 118–127.

7. Sanders, L. J. *Nonlinear theories for thin shells [Text]* / L. J. Sanders // *Q. appl. Math.* – 1963. – Vol. 21. – P. 21–36.

8. Koiter, W. T. *On the nonlinear theory of thin elastic shells [Text]* / W. T. Koiter // *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.* 1966. – Vol. 69. Issue 1. – P. 1–54.

9. Pietraszkiewicz, W. *Geometrically non-linear theories of thin elastic shells [Text]* / W. Pietraszkiewicz. – Bochum: Ruhr-Universität, Mitt. Inst. F. Mech., 1988. – 126 p.

10. Ciarlet, Ph. G. *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates [Text]* / Ph. G. Ciarlet. Amsterdam: Elsevier, 1997. – 498 p.

11. Халилов, С.А. *Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений [Текст]* / С.А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 1 (78). – С. 39–45.

12. Минтюк, В.Б. *Применение гипотез Кирхгофа-Лява при нелинейном изгибе пластин [Текст]* / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2017. – № 4 (139). – С. 27–32.

13. Минтюк, В. Б. *Исследование геометрически и физически нелинейного обобщенного плоского напряженного состояния [Текст]* / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 4 (91). – С. 38–44.

14. Черных, К.Ф. *Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин [Текст]* / К. Ф. Черных. М.: Наука. Физматлит, 1996. – 288 с.

15. Atluri, S.N. *Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shellstheory [Text]* / S. N. Atlury // *Comp. & Struct.* – 1983. – Vol. 18. – P. 93–116.

16. Buzler, H. *The Biot stresses in nonlinear elasticity and the associated generalized variational principles [Text]* / H. Buzler // *Ing. Arch.* – 1985. – Vol. 55. – P. 450–462.

17. Reissner, E. *On mixed variational formulations in finite elasticity [Text]* / E. Reissner // *Acta Mechanica*. – 1985. – Vol. 56. – P. 177–125.

18. Wisniewski, K. *A shell theory with independent rotations for relaxed Biot stress and right stretch strain [Text]* / K. Wisniewski // *Computational Mechanics*. – 1998. – N 21. – P. 101–122.

19. Postbuckling of hyperelastic plates [Text] / C. Zhang, J. Wu, K.-C. Hwang, Y. Huang // *Journal of Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 83. – P. 117–118.

20. Le-Manh, T. Buckling and post-buckling behavior of moderately thick plates using an exact finite strip [Text] / T. Le-Manh, J. Lee // *Computers and Structures*. – 2015. – Vol. 147. – P. 172–180.

21. Ebrahimi, F. Thermal buckling of FGM nano-plates subjected to linear and nonlinear varying loads on Pasternak foundation [Text] / F. Ebrahimi, J. Ehyaei, R. Babaei // *Advances in Materials Research*. – 2016. – Vol. 5. No. 4. – P. 245–261.

22. Postbuckling analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method [Text] / K. M. Liew, J. Wang, M. J. Tan, S. Rajendran // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2006. – N. 195. – P. 551–570.

23. Минтюк, В. Б. Исследование плоского нелинейного изгиба балки [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 3 (80). – С. 43–52.

24. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 5 (112). – С. 70–78.

25. Задача Дирихле для трансверсально-изотропной прямоугольной панели [Текст] / С. А. Халилов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, В. В. Копычко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2017. – № 3 (138). – С. 50–63.

26. Синтез метода идентификации краевых условий и метода конечных элементов. Прямоугольные пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2017. – № 4 (139). – С. 4–26.

27. Обобщённая задача на собственные значения в прямоугольнике с бигармоническим оператором при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 6 (113). – С. 36–47.

28. Аналитико-численное решение основной краевой задачи о спектре в прямоугольнике для составного оператора с бигармоническим в главной части [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 1 (114). – С. 60–67.

29. Халилов, С. А. Построение и исследование приближённого аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 2

(99). – С. 40–49.

30. Hill, R. On constitutive inequalities for simple materials [Text] / R. Hill // *J. of the Mech. and Ph. of Solids*. – 1968. – Vol. 16. Issue 4. – P. 229–242.

31. Черных, К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах [Текст] / К. Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

32. Koiter, W. T. On the complementary energy theorems in nonlinear elasticity theory [Text] / W. T. Koiter. – Delft: Dept. of Mech. Eng., 1975. – 35 p.

## References

1. Ventsel, E., Krauthammer, T. *Thin Plates and Shells: Theory and Applications*. New York, Marcel Dekker, 2001. 651 p.

2. S'jarle, F., Rab'e, P. *Uravenjenja Karmana [Karman's equations]*. Moscow, Mehanika. Novoe v zarubezhnoj nauke Publ., 1983, issues 31, 172 p.

3. Ciprian, D. C. On the compatibility relation for the Föppl-von Kármán plate equations. *Applied Mathematics Letters*, 2012, no. 25, pp. 2407–2410.

4. Vidoli, S. Discrete approximations of the Föppl-Von Kármán shell model: From coarse to more refined models. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, pp. 1241–1252.

5. Audoly, B., Pomeau, Y. *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells*. Oxford: University Press, 2010, 617 p.

6. Chernykh, K.F. Nonlinear theory of isotropically elastic thin shells. *Izv. ANSSSR. MTT*, 2002, vol. 15, pp. 118–127.

7. Sanders, L. J. Nonlinear theories for thin shells. *Q. appl. Math*, 1963, vol. 21, pp. 21–36.

8. Koiter, W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch*, 1966, vol. 69, issue 1, pp. 1–54.

9. Pietraszkiewicz, W. Geometrically non-linear theories of thin elastic shells. Bochum: Ruhr-Universität, *Mitt. Inst. F. Mech.*, 1988, 126 p.

10. Ciarlet, Ph. G. *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*. Amsterdam: Elsevier, 1997, 498 p.

11. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Ploskii nelineinyi izgib balki. Vyvod zamknutoi sistemy uravnenii [Simple non-linear bending of beam. Derivation of closed equations set]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologija – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, no. 1, vol. 78, pp. 39–45.

12. Mintyuk, V. B. Primenenie gipotez Kirhgofa-Ljava pri nelinejnom izgibe plastin [Application of Kirchhoff-Love hypotheses for non-linear plate bending]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologija – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2017, no. 4, vol. 139, pp. 27–32.

13. Mintyuk, V. B. Issledovanie geometricheski i fizicheski nelinejnogo obobshhennogo ploskogo napr-

jazhennogo sostojanija [Research of geometrically and physically nonlinear generalized plane stress]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2012, no. 4, vol. 91, pp. 38–44.

14. Chernyh, K.F. *Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelinejnuju teoriju treshhin* [Introduction to the physically and geometrically nonlinear theory of cracks]. Moscow, Nauka, Fizmatlit Publ., 1996. – 288 p.

15. Atluri, S.N. Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells *Theory. Comp. & Struct*, 1983, vol. 18, pp. 93–116.

16. Bifler, H. The Biot stresses in nonlinear elasticity and the associated generalized variational principles. *Ing. Arch.*, 1985, vol. 55, pp. 450–462.

17. Reissner, E. On mixed variational formulations in finite elasticity. *Acta Mechanica*, 1985, vol. 56, pp. 177–125.

18. Wisniewski, K.A shell theory with independent rotations for relaxed Biot stress and right stretch strain. *Computational Mechanics*, 1998, no. 21, pp. 101–122.

19. Zhang, C., Hwang, K.-C., Huang, Y. Postbuckling of Hyperelastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, vol. 83, pp. 117–118.

20. Le-Manh, T., Lee, J. Buckling and postbuckling behavior of moderately thick plates using an exact finite strip. *Computers and Structures*, 2015, vol. 147, pp. 172–180.

21. Ebrahimi, F., Ehyaei, J., Babaei, R. Thermal buckling of FGM nanoplates subjected to linear and nonlinear varying loads on Pasternak foundation. *Advances in Materials Research*, 2016, vol. 5, no. 4, pp. 245–261.

22. Liew, K. M., Wang, J., Tan, M. J., Rajendran, S. Postbuckling analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2006, no. 195, pp. 551–570.

23. Mintjuk, V. B. Issledovanie ploskogo nelinejnogo izgiba balki [Researching nonlinear plane bending of a beam]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, no. 3, vol. 80, pp. 43–52.

24. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. Sobstvennyj spektr bigarmonicheskogo operatora v prjamougol'nike pri glavnyh kraevykh uslovijah [Biharmonic operator own spectrum in a rectangle at the main boundary conditions]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 5, vol. 112, pp. 70–78.

25. Halilov, S. A., Krivcov, V. S., Mintjuk, V. B., Kopychko, V. V., Tkachenko, D. A., Pavlenko, V. N. Zadacha Dirihle dlja transversal'no-izotropnoj prjamougol'noj paneli [The dirichlet problem for transversely-isotropic panel]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2017, no.3, vol. 138, pp. 50–63.

26. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. Sintez metoda identifikacii kraevykh uslovij i metoda konechnykh jelementov. Prjamougol'nye plastiny [Synthesis of boundary conditions identification method and finite element method. Rectangular plates]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2017, no. 4, vol. 139, pp. 4–26.

27. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. Obobshhonnaja zadacha na sobstvennye znachenija v prjamougol'nike s bigarmonicheskim operatorom pri glavnyh kraevykh uslovijah [The generalized eigenvalue problem in a rectangle with the biharmonic operator by the main boundary conditions]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 6, vol. 113, pp. 36–47.

28. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. Analitiko-chislennoe reshenie osnovnoj kraevoj zadachi o spektre v prjamougol'nike dlja sostavnogo operatora s bigarmonicheskim v glavnoj chasti [Analytic-numerical solution for basic boundary value problem of spectrum in a rectangle for compound operator with a biharmonic in the main part]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 1, vol. 114, pp. 60–67.

29. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Tkachenko, D. A. Postroenie i issledovanie priblizhonnogo analiticheskogo reshenija bigarmonicheskogo problema v prjamougol'nike pri odnorodnyh glavnyh kraevykh uslovijah [Development and research of the approximate analytic solution for the biharmonic problem at the rectangle with the homogeneous boundary conditions]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2013, no. 2, vol. 99, pp. 40–49.

30. Hill, R. On constitutive inequalities for simple materials. *J. of the Mech. and Ph. of Solids*, 1968, vol. 16, issue 4, pp. 229–242.

31. Chernykh, K. F. *Nelineinaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh* [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]. Leningrad, «Mashinostroenie» Publ., 1986, 336 p.

32. Koiter, W. T. *On the complementary energy theorems in nonlinear elasticity*. Delft: Dept. of Mech. Eng., 1975, 35 p.

## ГРАНИЧНИЙ СТАН СЖАТОЇ ПЛАСТИНИ З МАТЕРІАЛУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

*В. Б. Минтюк*

Виконано аналіз закритичної поведінки стиснутих тонких пластин на основі повністю нелінійної теорії. В основу нелінійної теорії покладено класичні гіпотези Кірхгофа, використано гіперпружний матеріал першого порядку, який зв'язує компоненти правого тензору кратності подовжень та симетричного тензору напружень Біо. Аналітико-числове вирішення отримано за допомогою методу Релея-Рітца. Побудовано діаграми рівноважних станів із зазначенням величин повної потенційної енергії. На основі проведеного аналізу та принципу мінімуму повної потенційної енергії отримано значення граничного стискуючого навантаження.

**Ключові слова:** нелінійна теорія пластин, закритична поведінка, матеріал першого порядку.

## LIMIT STATE COMPRESSED PLATE FROM THE FIRST-ORDER MATERIAL

*V. B. Myntiuk*

The post-buckling of a uniformly compressed plate was considered. An analytical-numerical solution was obtained using the Rayleigh-Ritz method. Legendre polynomials and their linear combinations were used as basis functions. The resolving equations were obtained from the principle of the stationarity of the total potential energy, in which the elastic potential is a strain energy density function of the semilinear material. This hyperelastic material means a linear binding between the right stretch tensor (right Biot-stretch tensors) and the conjugate symmetric tensor of stresses Biot (Jaumann stress) pertaining to the Seth-Hill family. To reduce the problem to a two-dimensional (plane stressed state), Kirchhoff-Love's classical hypotheses were used. The components of the right stretch tensor in the reference Cartesian coordinate system were written explicitly in terms of the derivatives of the three displacement functions. To do this, the deformation gradient tensor of the deformed middle surface, the right Cauchy-Green deformation tensor, the right stretch tensor and the proper orthogonal rotation tensor were first constructed. After this, the right tensor of the multiplicity of elongations for an equidistant surface was similarly constructed. After this, the right tensor of elongations was constructed similarly for a surface that is located from a deformed middle surface to a small distance  $z$ . The components of this tensor were expanded in a Taylor series about the neglected coordinate  $z = 0$  and its linear part were singled out. The algorithm for solving the problem, which includes the implementation of the Rayleigh-Ritz method and Newton's method, was performed using the C++ programming language. Diagrams of equilibrium states were constructed and graphs of the change in the total potential energy were presented. Two branches of equilibrium states, which begin with the first and second critical Euler loads, were traced, and these branches, obtained by the Föppl-von Kármán plate theory, are also given. It has been shown that Föppl-von Kármán plate theory gives a satisfactory result only near the bifurcation point and can lead to a qualitatively incorrect result. It was demonstrated that post-buckling for uniformly compressed plates, jumps from one form of equilibrium to another (as for shells) are observed. To determine the limiting value of the compressive load from the condition of a minimum of the total potential energy was proposed.

**Keywords:** nonlinear theory of plates, post-buckling, semi-linear material.

**Минтюк Віталій Борисович** – канд. техн. наук, доц. кафедри прочності летательних апаратів, Національний аэрокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Myntiuk Vitalii Borysovych** – PhD, assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.