УДК 512.152

В.А. ПОПОВ, О.Ю. МИРОНЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ И ЭРЛАНГОВСКИМИ ПОТОКАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Проводится анализ методов получения решений для вероятностей состояния многоканальных систем массового обслуживания (СМО) замкнутого типа, когда входящие потоки требований имеют гиперэкспоненциальное или эрланговское распределение, что позволяет их использовать для моделирования широкого класса объектов. Предложены графы состояний для указанных систем, получены системы уравнений относительно вероятностей состояния при произвольных порядках распределений для входного потока. Использование программного пакета MathCAD подтвердило правомерность предлагаемой методики путем решения серии тестовых примеров. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании радиоэлектронных комплексов, систем связи и передачи данных.

многоканальная система массового обслуживания, гиперэкспоненциальное распределение, распределение Эрланга, метод фаз, граф состояний и переходов

Введение

В связи с бурным развитием систем передачи информации возникают сложные задачи по исследованию их функционирования с целью использования результатов анализа в управлении информационными потоками. Существующие аппаратно-программные средства для решения таких задач требуют измерения большого числа параметров потоков, обработки измеренных данных и затем их использования для принятия решений по управлению потоками. Однако такой путь требует больших затрат и времени, так как в этом случае необходимо иметь большую статистику по параметрам сети, на основе которой можно разрабатывать и принимать рациональные решения.

В то же время существует другой путь решения указанных задач, который состоит из двух основных этапов.

1. Проведение системного анализа всей сети или ее фрагментов с целью выделения таких подсистем, которые можно смоделировать аналитическим средствами с применением вероятностных моделей массового обслуживания.

2. Разработка достаточно адекватных моделей отдельных звеньев сети, которые можно формально заранее задать некоторыми моделями массового обслуживания, в достаточной степени полно отражающими процессы, происходящие в сети и ее фрагментах.

В данной работе предлагаются многоканальные замкнутые модели с эрланговскими и гиперэкспоненциальными потоками, которые существенно отличаются от обычно применяемых классических моделей с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания.

Наличие обратной связи в замкнутой системе массового обслуживания может быть интерпретировано как необходимость учесть явление уведомления о получении информации на оконечном устройстве передающего канала, так как в данном случае очередная порция информации передается в том случае, когда предыдущая от некоторого источника оказалась переданной в оконечное устройство и об этом получен соответствующий сигнал обратной связи.

Анализ систем GI/M/m/N/k

Система E_r/M/m/N/k

Так как исследуемая система является замкнутой, то в ней имеется k источников заявок, которые могут генерировать заявки на обслуживание, причем поток заявок от источников в сумме является пуассоновским с интенсивностью $k\Lambda$, где Λ – интенсивность поступления заявок от одного источника.

Когда заявка генерируется источником, то она как бы проходит несколько последовательных фаз поступления, количество которых зависит от порядка распределения Эрланга для входного потока, затем она попадает в один из свободных приборов обслуживания, если таковые имеются, или в накопитель заявок в случае, когда все приборы заняты обслуживанием заявок. Нами рассматриваются системы, в которых емкость накопителя заявок достаточна для принятия всех возможных заявок от источников. Еще одной особенностью замкнутых систем является уменьшение интенсивности входного потока после генерации очередной заявки в случае, если ни одна заявка не покинула систему в результате окончания обработки. Изучение таких систем методом фаз предполагает построение графа состояний и переходов, который в общем виде представлен на рис. 1.

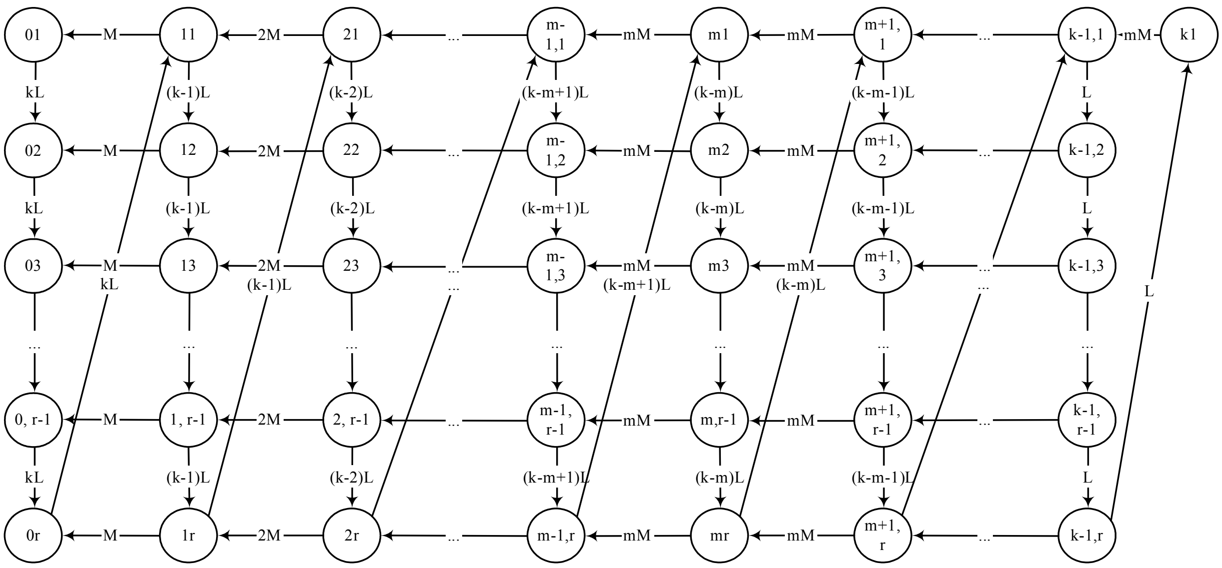

Рис. 1. Граф состояний и переходов для модели замкнутой системы обслуживания E_r/M/m/N/k/Fifo

Следующим основным этапом является построение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику поведения изучаемых систем массового обслуживания. Система уравнений строится непосредственно по графу состояний на рис. 1 [1, 2]. Каждое уравнение такой системы отвечает за одно состояние (в данном случае псевдосостояние) и решением системы будет являться вектор вероятностей нахождения системы в одном из множества возможных псевдосостояний.

В соответствии с графом, изображенным на рис. 1 получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&-k\Lambda \cdot p_{01} + \mu \cdot p_{11} = p_{01}^{/};\\
&-k\Lambda \cdot p_{0j} + k\Lambda \cdot p_{0,j-1} + \mu \cdot p_{1j} = p_{0j}^{/};\\
&-\big((k-l)\Lambda + l\mu\big)\cdot p_{l,1} + (k+1-l)\Lambda \cdot p_{l-1,r} +\\
&\qquad +(l+1)\mu \cdot p_{l+1,1} = p_{l,1}^{/}, \quad l<m;\\
&-\big((k-l)\Lambda + l\mu\big)\cdot p_{l,j} + (k-l)\Lambda \cdot p_{l,j-1} +\\
&\qquad +(l+1)\mu \cdot p_{l+1,j} = p_{l,j}^{/},\ l<m;\\
&-\big((k-l)\Lambda + m\mu\big)\cdot p_{l,1} + (k+1-l)\Lambda \cdot p_{l-1,r} +\\
&\qquad +m\mu \cdot p_{l+1,1} = p_{l,1}^{/}, \qquad l \ge m;\\
&-\big((k-l)\Lambda + m\mu\big)\cdot p_{l,j} + (k-l)\Lambda \cdot p_{l,j-1} +\\
&\qquad +m\mu \cdot p_{l+1,j} = p_{l,j}^{/}, \qquad l \ge m;\\
&-\mu \cdot p_{k,1} + \Lambda \cdot p_{k-1,r} = p_{k,1}^{/};\ j=\overline{2,r},\ l=\overline{1,k-1},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $p_{ki} = f(t)$; $\dfrac{dp_{ki}}{dt} = p_{ki}^{/}$.

Для решения системы (1) необходимо воспользоваться условием нормировки (2) для вероятностей состояния системы, которое означает, что сумма вероятностей всех состояний системы равна 1, что следует из аксиом теории вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{k}\sum_{i=1}^{r} p_{ki} = 1. \qquad (2)$$

Система (1) и условие (2) позволяют получить вероятности состояния для моделей E_r/M/m/N/k/Fifo с учетом разбиения на фазы. Для преобразования решений с учетом фаз в вероятности состояния, которые учитывают лишь число заявок в системе, нужно воспользоваться следующей формулой:

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} p_{ki}. \qquad (3)$$

В качестве примера рассмотрим модель E_2/M/2/2/3. Поступление заявок проходит после условного прохождения двух фаз. Отметим особенность: состояние полной занятости системы только одно, так как заявки от всех источников находятся в системе обслуживания (в приборах или в накопителе), и соответственно новые заявки не могут быть сгенерированы.

Для получения системы уравнений, описывающей рассматриваемую модель СМО в стационарном режиме, необходимо подставить в систему (1) следующие значения:

$$r = 2;\ m = 2;\ N = 2;\ k = 3,$$

а также записать в правые части нули как производные от константы. Проделав указанные шаги, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&-3\Lambda \cdot p_{01} + \mu \cdot p_{11} = 0;\\
&-3\Lambda \cdot p_{02} + 3\Lambda \cdot p_{01} + \mu \cdot p_{12} = 0;\\
&-(2\Lambda + \mu) \cdot p_{11} + 3\Lambda \cdot p_{02} + 2\mu \cdot p_{21} = 0;\\
&-(2\Lambda + \mu) \cdot p_{12} + 2\Lambda \cdot p_{11} + 2\mu \cdot p_{22} = 0;\\
&-(\Lambda + 2\mu) \cdot p_{21} + 2\Lambda \cdot p_{12} + 2\mu \cdot p_{31} = 0;\\
&-(\Lambda + 2\mu) \cdot p_{22} + \Lambda \cdot p_{21} = 0;\\
&-\mu \cdot p_{31} + \Lambda \cdot p_{22} = 0;\\
&p_{01} + p_{02} + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} = 1.
\end{aligned} \qquad (4)$$

В системе (4) уже прописано условие нормировки (2). Аналогичную систему можно получить и по графу состояний и переходов, который изображен на рис. 2.

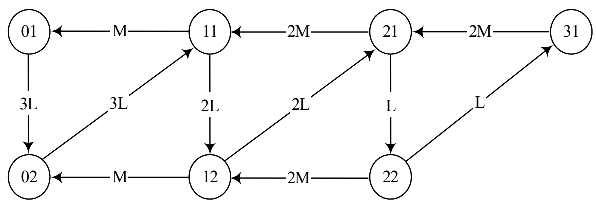

Рис. 2. Граф состояний и переходов
для модели E_2/M/2/2/3

Решения системы (4) для вероятностей состояния можно получить в аналитическом или численном виде в зависимости от целей исследования системы. Вектор условных вероятностей в аналитическом виде проще всего находится решением системы уравнений методом определителей. Для нашей системы указанный вектор будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{P} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \\ = \begin{pmatrix} \dfrac{8\mu^3\Lambda^2 + 16\mu^4\Lambda + 4\mu^5}{38\mu^3\Lambda^2 + 22\mu^4\Lambda + 4\mu^5 + 30\mu^2\Lambda^3 + 12\Lambda^4\mu + 3\Lambda^5} \\ \dfrac{30\mu^3\Lambda^2 + 6\mu^4\Lambda + 18\mu^2\Lambda^3}{38\mu^3\Lambda^2 + 22\mu^4\Lambda + 4\mu^5 + 30\mu^2\Lambda^3 + 12\Lambda^4\mu + 3\Lambda^5} \\ \dfrac{12\mu^2\Lambda^3 + 12\Lambda^4\mu}{38\mu^3\Lambda^2 + 22\mu^4\Lambda + 4\mu^5 + 30\mu^2\Lambda^3 + 12\Lambda^4\mu + 3\Lambda^5} \\ \dfrac{3\lambda^5}{38\mu^3\Lambda^2 + 22\mu^4\Lambda + 4\mu^5 + 30\mu^2\Lambda^3 + 12\Lambda^4\mu + 3\Lambda^5} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Можно соответственно получить решение и в численной форме. Например, при $\Lambda = 0,3$ и $\mu = 0,8$ вектор (5) примет значения:

$$\bar{P} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0,57241 \\ 0,38168 \\ 0,04477 \\ 0,00114 \end{pmatrix}.$$

Данным пунктом завершается исследование систем с эрланговским распределением времени поступления заявок Аналогично рассмотренному выше примеру можно исследовать любой частный случай указанных систем.

Система $H_rM/m/N/k$

Входной поток заявок условно разбивается на *r* параллельных фаз, по которым поступают заявки в систему с различной интенсивностью на каждой фазе. В каждый конкретный момент времени поступает только одна заявка, которая направляется в свободный прибор на обслуживание или в накопитель системы. Из накопителя заявка поступает на прибор для обслуживания, который освобождается при окончании обслуживания заявки. Изучение таких систем методом фаз предполагает построение графа состояний и переходов, который в общем виде представлен на рис. 3.

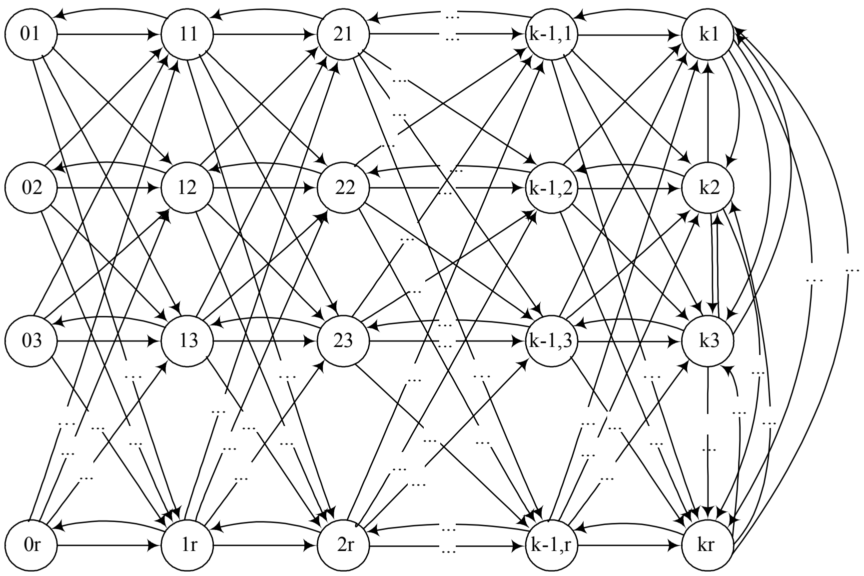

Рис. 3. Граф состояний и переходов для модели замкнутой СМО $H_r/M/m/N/k/Fifo$

Следующим основным этапом является построение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику поведения данных СМО. Указанная система строится непосредственно по графу состояний на рис. 3. Каждое уравнение такой системы отвечает за одно состояние (в данном случае псевдосостояние) и решением системы будет являться вектор вероятностей нахождения системы в одном из множества возможных состояний:

$$
\begin{aligned}
&-k\Lambda_l \cdot p_{0l} + \mu \cdot p_{1l} = p'_{0l};\\
&-\left((k-j)\Lambda_l + l\mu\right)\cdot p_{j,l} + (l+1)\mu \cdot p_{j+1,l} +\\
&\qquad + a_l(k+1-j)\cdot\sum_{i=1}^{r}\Lambda_l \cdot p_{j-1,i} = p'_{j,l}, \quad l < m;\\
&-\left((k-j)\Lambda_l + m\mu\right)\cdot p_{j,l} + m\mu \cdot p_{j+1,l} +\\
&\qquad + a_l(k+1-j)\cdot\sum_{i=1}^{r}\Lambda_l \cdot p_{j-1,i} = p'_{j,l}, \quad l \ge m; \quad (6)\\
&-\left(\Lambda_l - \Lambda_l \cdot a_l + m\mu\right)\cdot p_{k,l} + a_l \cdot \sum_{i=1}^{r}\Lambda_i \cdot p_{k-1i} +\\
&\qquad + a_l \cdot \sum_{i=1}^{r}\Lambda_i \cdot p_{k,i} - a_l \cdot \Lambda_l \cdot p_{k,l} = p'_{k,l},
\end{aligned}
$$

где $l = \overline{1,r},\ j = \overline{1,k-1}$; $p_{ki} = f(t)$; $\dfrac{dp_{ki}}{dt} = p'_{ki}$.

Для решения системы (6) к ней необходимо добавить условие нормировки (2) для вероятностей состояния системы.

Система (6) и вышеуказанное условие позволяют получить вероятности состояния для моделей Hr/M/m/N/k с учетом разбиения на фазы.

Для преобразования решений с учетом фаз в вероятности состояния, которые учитывают лишь число заявок в системе, нужно воспользоваться формулой (3).

Приведем пример.

Рассмотрим модель системы массового обслуживания $H_2/M/2/2/3$ как самую простую в данном классе.

Подставим в систему (6) значения:

$$r = 2;\ m = 2;\ N = 2;\ k = 3$$

получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&-3\Lambda\ \ p_{01}+\mu p_{11}=0;\\
&-3\Lambda_2 p_{02}+\mu p_{12}=0;\\
&-(2\Lambda_1+\mu)p_{11}+3a_1\Lambda_1 p_{01}+3a_1\Lambda_2 p_{02}+2\mu p_{21}=0;\\
&-(2\Lambda_2+\mu)p_{12}+3a_2\Lambda_1 p_{01}+3a_2\Lambda_2 p_{02}+2\mu p_{22}=0;\\
&-(\Lambda_1+2\mu)p_{21}+2a_1\Lambda_1 p_{11}+2a_1\Lambda_2 p_{12}+2\mu p_{31}=0;\\
&-(\Lambda_2+2\mu)p_{22}+2a_2\Lambda_1 p_{11}+2a_2\Lambda_2 p_{12}+2\mu p_{32}=0;\\
&-(a_2\Lambda_1+2\mu)p_{31}+a_1\Lambda_1 p_{21}+a_1\Lambda_2 p_{22}+a_1\Lambda_2 p_{32}=0;\\
&-(a_1\Lambda_2+2\mu)p_{32}+a_2\Lambda_1 p_{21}+a_2\Lambda_2 p_{22}+a_2\Lambda_1 p_{31}=0;\\
&p_{01}+p_{02}+p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}+p_{31}+p_{32}=1.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Систему (7) можно получить и по графу состояний, изображенному на рис. 4.

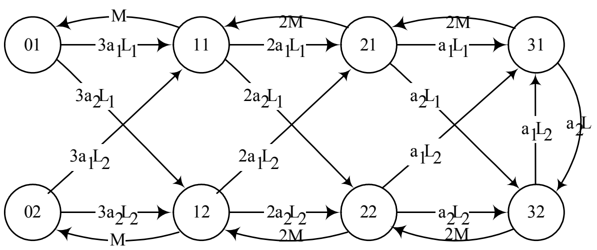

Рис. 4. Граф состояний и переходов для модели СМО $H_2/M/2/2/3$

Для решения системы (7) в численном виде необходимо подставить конкретные значения параметров потоков. Например, при

$$a_1=0,6;\ \Lambda_1=0,3;\ a_2=0,4;\ \Lambda_2=0,2;\ \mu=0,8$$

получим следующий вектор условных вероятностей:

$$\overline{P}=\left(p_0,p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}0,44196\\0,40697\\0,13006\\0,02101\end{pmatrix}.$$

Заключение

Таким образом, в данной работе на основе метода Колмогорова составлены системы дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояния для многоканальных замкнутых СМО с эрланговскими и геперэкспоненциальными потоками. Общий вид составленных систем уравнений позволяет решать частные случаи с помощью стандартных математических программных продуктов (Matlab, MathCAD) численным методом как для систем дифференциальных уравнений, так и для системы алгебраических уравнений. В некоторых случаях удалось получить аналитические решения относительно вероятностей состояний при небольших размерностях системы (до 10 псевдосостояний), так как получить решение в общем случае для системы дифференциальных или алгебраических уравнений не удалось в связи с большой сложностью такой задачи [3, 4].

Полученные результаты могут быть использованы для расчета сетей передачи данных, в которых с целью повышения адекватности расчетных моделей используются эрланговское и гиперэкспоненциальное распределения.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979 – 432 с.

2. Попов В.А., Мироненко О.Ю. Анализ систем обслуживания с гиперэкспоненциальными и эрланговскими потоками // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2004. – № 3. – С. 80 – 88.

3. Таранцев А.А., Эрюжев М.В. Об аналитических соотношениях в замкнутых одноканальных системах массового обслуживания // Известия РАН. Теория и системы управления – 2004. – № 3. – С. 84 – 91.

4. Таранцев А.А., Эрюжев М.В. Об аналитических соотношениях в одноканальных незамкнутых системах массового обслуживания // Известия РАН. Теория и системы управления – 2004. – № 1. – С. 120 – 124.

Поступила в редакцию 11.04.05

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Зеленский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.