*Посвящается светлой памяти на-
шего дорогого учителя В.Л.. Рвачева*

УДК 517.927.21

В.С. Проценко, Я.П. Бузько, Т.В. Денисова

Теоремы сложения для решений уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат и системе координат эллиптического цилиндра

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет

Введение. Предложенный ранее [1] одним из авторов настоящей статьи метод вывода (доказательства) теорем сложения базисных решений уравнения Лапласа применяется к выводу теорем сложения уравнения Гельмгольца $\Delta u - \mu^2 u = 0$, где Δ – двумерный оператор Лапласа, $\mu > 0$. Получены теоремы сложения в декартовой системе координат и системе координат эллиптического цилиндра. Отметим, что теоремам сложения в различных парах ортогональных криволинейных координат посвящена книга [2]. В настоящей статье получены теоремы сложения, которых нет в работе [2].

Постановка задачи. Получить представления (в интегралах или рядах) решений уравнения Гельмгольца, записанных в декартовой системе координат, по решениям этого же уравнения в системе координат эллиптического цилиндра, и обратные им.

Основной результат. Будем рассматривать два случая расположения эллипса по отношению к полуплоскости, где решения являются регулярными: а) большая ось эллипса параллельна границе полуплоскости; б) большая ось эллипса перпендикулярна этой границе.

Декартовы координаты и координаты эллиптического цилиндра связаны соотношениями

$$x = a\,ch\xi\cos\theta, \quad z = a\,sh\xi\sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi,\ \xi \ge 0).$$

1. Группа формул относится к случаю “а”.

Разложение внешних решений в координатах эллиптического цилиндра по решениям в декартовой системе координат.

Решения уравнения Гельмгольца $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mu^2 u = 0$, $\mu > 0$ для полуплоскости $z > 0$ выбираем в виде интеграла Фурье

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-\gamma z} \begin{Bmatrix} \cos\lambda x \\ \sin\lambda x \end{Bmatrix} d\lambda, \quad \gamma^2 = \lambda^2 + \mu^2. \qquad (1)$$

Будем рассматривать отдельно четные и нечетные решения по переменной x.

Внешние решения уравнения Гельмгольца в системе координат эллиптического цилиндра [3] выражаются через радиальные и угловые функции Матье. Они имеют вид:

$$Fek_n(\xi,-q)\cdot ce_n(\theta,-q)\,,\quad Gek_n(\xi,-q)\cdot se_n(\theta,-q)\,,\quad q=\frac{1}{4}a^2\mu^2\,.$$

Четные решения по переменной x даются формулами

$$Fek_{2n}(\xi,-q)\cdot ce_{2n}(\theta,-q)\,,\quad Gek_{2n+1}(\xi,-q)\cdot se_{2n+1}(\theta,-q)\,. \tag{2}$$

Будем искать в полуплоскости $z>0$ решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца по граничным значениям функции $Fek_{2n}(\xi,-q)\cdot ce_{2n}(\theta,-q)$ при $z=0$. Такое решение существует в классе функций с ограниченным интегралом Дирихле и может быть представлено интегралом (1). В силу теоремы единственности решения краевой задачи Дирихле в рассматриваемом классе функций равенство двух решений будет иметь место не только на границе области $z=0$, но и в полуплоскости $z>0$, где эти решения регулярны (не имеют особых точек). Таким образом, при $z\ge 0$ имеет место равенство

$$Fek_{2n}(\xi,-q)\,ce_{2n}(\theta,-q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_{2n}(\lambda)\frac{e^{-\gamma z}}{\gamma}\cos\lambda x\,d\lambda\,. \tag{3}$$

Положим в этом равенстве $x=0$, $\theta=\pi/2$ и сделаем замену $\lambda=\mu\,sh\,t$. В результате получим

$$Fek_{2n}(\xi,-q)\,ce_{2n}(\pi/2,-q)=2\int\limits_0^{\infty}A_{2n}(\mu\,sh\,t)e^{-a\mu\,sh\,\xi\,ch\,t}dt\,.$$

Сравним это выражение с формулой (1) [3], с 244. Окончательно имеем

$$A_{2n}(\lambda)=\frac{(-1)^n ce_{2n}(\pi/2,-q)\,ce_{2n}(\pi/2,q)}{2\pi A_0^{(2n)}}Ce_{2n}(t,q)\,,\quad t=Arsh\frac{\lambda}{\mu}\,. \tag{4}$$

Аналогично находим интегральное представление для второго решения (2):

$$Gek_{2n+1}(\xi,-q)\,se_{2n+1}(\theta,-q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{2n+1}(\lambda)\frac{e^{-\gamma z}}{\gamma}\cos\lambda x\,d\lambda\,,\quad z\ge 0\,, \tag{5}$$

$$B_{2n+1}(\lambda)=\frac{(-1)^{n+1} se_{2n+1}(\pi/2,-q)\,ce'_{2n+1}(\pi/2,q)}{2\pi\sqrt{q}\,A_1^{(2n+1)}}Ce_{2n+1}(t,q)\,,\quad t=Arsh\frac{\lambda}{\mu}\,. \tag{6}$$

В формулах (4), (6) $Ce_n(t,q)$ – четная по t модифицированная функция Матье, $A_r^{(n)}$ – коэффициенты разложения периодических функций Матье в ряды Фурье по косинусам [3].

Формулы (3), (5) получены в предположении законности всех формальных действий, выполненных выше. Эти действия легко обосновываются, если учесть, что $Ce_n(t,q)\sim c_n e^{-\frac{1}{2}t}$ при $t\to\infty$. В этом случае интегралы в (3), (5) сходятся абсолютно и равномерно при $z\ge 0$. При $z>0$ эти интегралы можно дифференцировать любое число раз.

Решения, нечетные по x, даются формулами

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q)ce_{2n+1}(\theta,-q)\,,\quad Gek_{2n+2}(\xi,-q)se_{2n+2}(\theta,-q)\,. \tag{7}$$

Решая задачу Дирихле для полуплоскости $z>0$, найдем

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q)\, ce_{2n+1}(\theta,-q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{2n+1}(\lambda) \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} \sin \lambda x \, d\lambda, \quad z \geq 0. \tag{8}$$

Это равенство справедливо во всей полуплоскости $z \geq 0$ по тем же причинам, что и в предыдущем пункте. Положить $x = 0$, $\theta = \pi/2$ в нем можно, но это ничего не дает для определения $A_{2n+1}(\lambda)$, так как левая и правая части обращаются в нули. Найдем производную по x в (8) и положим $x = 0$, $\theta = \pi/2$. В результате получим

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q)\, ce'_{2n+1}(\pi/2,-q)(-a\, ch\, \xi)^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{2n+1}(\lambda) \frac{\lambda}{\gamma} e^{-\gamma a\, ch \xi} \, d\lambda. \tag{9}$$

Предположим, что функция $A_{2n+1}(\lambda)$ ограничена, $A_{2n+1}(0) = 0$ и проинтегрируем (9) по частям. Равенство (9) при этом перейдет в другое

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q)\, ce'_{2n+1}(\pi/2,-q) = -2cth\, \xi \int\limits_{0}^{\infty} A'_{2n+1}(\lambda) \frac{e^{-\gamma a\, sh \xi}}{\gamma} \, d\lambda.$$

Сделаем замену $\lambda = \mu\, sh\, t$, $A_{2n+1}(\lambda) = M_{2n+1}(t)$, где $M_{2n+1}(t)$ – новая неизвестная функция. В итоге получим

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q)\, ce'_{2n+1}(\pi/2,-q) = -2cth\, \xi \int\limits_{0}^{\infty} M'_{2n+1}(t) e^{-a\mu\, ch t\, sh \xi} \, dt. \tag{10}$$

Примем во внимание разложение [3]

$$Fek_{2n+1}(\xi,-q) = (-1)^n \frac{se_{2n+1}(\pi/2, q)}{\pi\sqrt{q}\, B_1^{(2n+1)}} cth\, \xi \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(a\mu\, sh \xi)$$

и формулу $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x\, ch t} ch\, rt\, dt = K_r(x), \quad x > 0$.

Сравнивая теперь (10) с этим разложением, найдем

$$A_{2n+1}(\lambda) = M_{2n+1}(t) = (-1)^{n+1} \frac{ce'_{2n+1}(\pi/2,-q) se_{2n+1}(\pi/2, q)}{2\pi\sqrt{q}\, B_1^{(2n+1)}} Se_{2n+1}(t,q), \tag{12}$$

$$t = Arsh\left(\lambda \mu^{-1}\right).$$

В формуле (12) $Se_n(t,q)$ – нечетная по t модифицированная функция Матье.

Из последней формулы следует, что сделанные ранее предположения относительно функции $A_{2n+1}(\lambda)$ выполняются. Законность всех формальных действий обосновывается тем, что интеграл (8) и его производная по x сходятся абсолютно и равномерно при $z \geq 0$.

Формула для второго нечетного решения (7) получается аналогично и имеет вид

$$Gek_{2n+2}(\xi,-q)\, se_{2n+2}(\theta,-q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_{2n+2}(\lambda) \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} \sin \lambda x \, d\lambda, \quad z \geq 0, \tag{13}$$

где

$$B_{2n+2}(\lambda)=(-1)^n \frac{se'_{2n+2}(\pi/2,-q)}{\pi\, q\, B_2^{(2n+2)}} se'_{2n+2}(\pi/2,q) Se_{2n+2}(t,-q), \tag{14}$$

$t = Arsh\dfrac{\lambda}{\mu}$, $B_r^{(n)}$ – коэффициенты разложения периодических функций Матье в ряд Фурье по синусам [3].

Итак, формулы (3)-(6), (8), (12) и (13), (14) дают искомые интегральные представления внешних решений уравнения Гельмгольца через решения этого же уравнения в декартовых координатах.

Обратные формулы разложения декартовых решений уравнения Гельмгольца по внутренним решениям этого уравнения в координатах эллиптического цилиндра.

Здесь рассмотрим отдельно решения, четные и нечетные по координатам x и z, а также решения разной четности по этим переменным.

Решение задачи Дирихле для внутренности эллипса $\xi < \xi_0 > 0$ с граничной функцией $ch\gamma z\cos\lambda x$ может быть представлено в виде ряда

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n} Ce_{2n}(\xi,-q) ce_{2n}(\theta,-q), \quad q=\frac{1}{4}\mu^2 a^2 .$$

В силу регулярности этих решений и теоремы единственности для краевой задачи Дирихле равенство гармонических функций будет иметь место не только на границе $\xi=\xi_0$, но и внутри эллипса. А так как ξ_0 – произвольное, то это означает, что равенство справедливо в любой конечной области плоскости xOz.

Итак, имеем

$$ch\gamma z\cos\lambda x=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n} Ce_{2n}(\xi,-q) ce_{2n}(\theta,-q). \tag{15}$$

В (15) положим $z=0$, $|x|\le a$, что соответствует $\xi=0$. В результате получим равенство

$$\cos(\lambda a\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n} Ce_{2n}(0,-q) ce_{2n}(\theta,-q), \quad 0\le\theta\le 2\pi ,$$

которое можно обратить. С учетом полноты и ортогональности системы функций $ce_{2n}(\theta,-q)$ находим

$$\alpha_{2n}=2(-1)^n \frac{A_0^{(2n)} Ce_{2n}(t,q)}{ce_{2n}(0,q)\, Ce_{2n}(0,-q)}, \quad t=Arsh\frac{\lambda}{\mu}.$$

Разложение нечетных по z решений ищем в виде

$$sh\gamma z\cos\lambda x=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1} Se_{2n+1}(\xi,-q) se_{2n+1}(\theta,-q). \tag{16}$$

Это разложение справедливо, как и разложение (15), в любой конечной области плоскости xOz. Дифференцируем его по z и положим $z=0$, ($\xi=0$):

$$\gamma a \sin\theta \cos(\lambda a \cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1} Se'_{2n+1}(0,-q)\, se_{2n+1}(\theta,-q).$$

Обращаем этот ряд и находим

$$\beta_{2n+1} = 2(-1)^{n+1} \frac{\sqrt{q}\ A_1^{(2n+1)} Ce_{2n+1}(t,q)}{ce_{2n+1}(0,q)\, Se'_{2n+1}(0,-q)}. \tag{17}$$

Разложения для решений $ch\,\gamma z \sin\lambda x$ и $sh\,\gamma z \sin\lambda x$ определяем аналогично. Выпишем окончательно результаты:

$$ch\,\gamma z \sin\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} Ce_{2n+1}(\xi,-q)\, ce_{2n+1}(\theta,-q); \tag{18}$$

$$\alpha_{2n+1} = 2(-1)^{n} \frac{\sqrt{q}\ B_1^{(2n+1)} Se_{2n+1}(t,q)}{se'_{2n+1}(0,q)\, Ce_{2n+1}(0,-q)}; \tag{19}$$

$$sh\,\gamma z \sin\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+2} Se_{2n+2}(\xi,-q)\, se_{2n+2}(\theta,-q); \tag{20}$$

$$\beta_{2n+2} = 2(-1)^{n} \frac{q\ B_2^{(2n+2)} Se_{2n+2}(t,q)}{se'_{2n+2}(0,q)\, Se'_{2n+2}(0,-q)}. \tag{21}$$

Абсолютная и равномерная сходимость найденных разложений при $\xi \ge 0$ следует из асимптотических формул [3] ($n \to \infty$) для коэффициентов $A_r^{(n)}$, $B_r^{(n)}$. Более того, эти разложения можно дифференцировать любое число раз.

Из формул (15), (16), (18), (20) можно получить разложения для решений $e^{\pm\gamma z}\cos\lambda x$, $e^{\pm\gamma z}\sin\lambda x$.

Разложения, приведенные в этом пункте, могут быть применены к решению задач математической физики для уравнения Гельмгольца в полуплоскости и полосе с эллиптической неоднородностью в случае, когда большая ось эллипса параллельна границе области.

2. Группа формул относится к случаю “б”.

Разложения внешних решений эллиптического цилиндра.

Для функции $Fek_n(\xi,-q)ce_n(\theta,-q)$, которую будем считать граничной на линии $x = a$, решаем задачу Дирихле для полуплоскости $x > a$. Это решение существует и представимо в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{\gamma} e^{-\gamma x} \cos kz\, dk, \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 + k^2}.$$

В силу теоремы единственности решения задачи Дирихле в классе функций с ограниченным интегралом Дирихле, заключаем, что равенство

$$Fek_n(\xi,-q)ce_n(\theta,-q) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k) \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} \cos kz\, dk \tag{22}$$

справедливо не только на границе полуплоскости $x = a$, но и в полуплоскости $x > a$.

Положим в (22) $z=0$, $\theta=0$, $x>a$. В результате получим

$$Fek_n(\xi,-q)ce_n(0,-q)=\int_{-\infty}^{\infty} C_n(k)\frac{e^{-\gamma\, a\, ch\,\xi}}{\gamma}dk\,,\quad \xi>0\,. \tag{23}$$

Здесь следует различать четный и нечетный индексы n. Для $n=2k$ функцию C_{2k} выберем в виде

$$C_{2k}(k)=\frac{1}{2}\chi_{2k}Ce_{2k}(t,-q),\quad t=Arsh\frac{k}{\mu}.$$

Подстановка ее в формулу (23) приводит к ряду

$$Fek_{2k}(\xi,-q)=\frac{\chi_{2k}(-1)^k}{ce_{2k}(0,-q)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{(2k)}K_{2r}(a\,\mu\, ch\,\xi).$$

Сравнивая этот ряд с (9) [3], с. 200, найдем

$$\chi_{2k}=\frac{ce_{2k}(0,-q)\,ce_{2k}(0,q)}{\pi\; A_0^{(2k)}}\,.$$

Окончательно имеем

$$C_{2k}(k)=\frac{ce_{2k}(0,-q)\,ce_{2k}(0,q)}{2\pi\; A_0^{(2k)}}Ce_{2k}(t,-q). \tag{24}$$

Для $C_{2k+1}(k)$ запишем окончательное выражение

$$C_{2k+1}(k)=\frac{ce_{2k+1}(0,-q)\,se'_{2k+1}(0,q)}{2\pi\sqrt{q}\;\; B_1^{(2k+1)}}Ce_{2k+1}(t,-q). \tag{25}$$

Интегральное представление для решений, нечетных по z, берем в виде

$$Gek_n(\xi,-q)se_n(\theta,-q)=\int_{-\infty}^{\infty} D_n(k)\frac{e^{-\gamma z}}{\gamma}\sin kz\,dk\,. \tag{26}$$

Для нахождения функции $D_n(k)$ надо продифференцировать (26) по z и положить $z=0$, $\theta=0$, $\xi>0$, затем в правой части полученного равенства проинтегрировать по частям и сравнить результат с соответствующими рядами для $Gek_n(\xi,-q)$ из [3]. Окончательно имеем

$$\begin{cases} D_{2n+1}(k)=\dfrac{se'_{2n+1}(0,-q)\,ce_{2n+1}(0,q)}{2\pi\sqrt{q}\;\; A_1^{(2n+1)}}Se_{2n+1}(t,-q), \\ D_{2n+2}(k)=\dfrac{se'_{2n+2}(0,-q)\,se'_{2n+2}(0,q)}{2\pi q\;\; B_2^{(2n+2)}}Se_{2n+2}(t,-q). \end{cases} \tag{27}$$

Абсолютная и равномерная сходимость интегралов (23), (26) при $x>a$ следует из асимптотических формул [3], с. 267 для функций $Ce_n(t,-q)$ и $Se_n(t,-q)$ при $t\to\infty$.

Разложения декартовых решений по решениям эллиптического цилиндра.

Не будем здесь повторять выкладки, аналогичные тем, которые сделаны при выводе соотношений (15), (16), а запишем окончательные формулы.

Для решений, четных по z,

$$ch\,\gamma x\cos\lambda z=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}Ce_{2n}(\xi,-q)ce_{2n}(\theta,-q), \qquad (28)$$

$$a_{2n}=\frac{2A_0^{(2n)}Ce_{2n}(t,-q)}{ce_{2n}(0,q)\,Ce_{2n}(0,-q)},$$

$$sh\,\gamma x\cos\lambda z=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}Ce_{2n+1}(\xi,-q)ce_{2n+1}(\theta,-q), \qquad (29)$$

$$a_{2n+1}=\frac{2\sqrt{q}\;B_1^{(2n+1)}Ce_{2n+1}(t,-q)}{se'_{2n+1}(0,q)\,Ce_{2n+1}(0,-q)}.$$

Для решений нечетных по z

$$ch\,\gamma x\sin\lambda z=\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}Se_{2n+1}(\xi,-q)se_{2n+1}(\theta,-q), \qquad (30)$$

$$b_{2n+1}=\frac{2\sqrt{q}\;A_1^{(2n+1)}Se_{2n+1}(t,-q)}{ce_{2n+1}(0,q)\,Se'_{2n+1}(0,-q)};$$

$$sh\,\gamma x\sin\lambda z=\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+2}Se_{2n+2}(\xi,-q)se_{2n+2}(\theta,-q), \qquad (31)$$

$$b_{2n+2}=\frac{2q\;B_2^{(2n+2)}Se_{2n+2}(t,-q)}{se'_{2n+2}(0,q)\,Se'_{2n+2}(0,-q)},\quad t=Arsh\frac{\lambda}{\mu}.$$

Эти разложения, как и полученные выше, сходятся абсолютно и равномерно в любой конечной части плоскости xOz. Из них можно получить разложения для других решений $e^{\pm\gamma x}\cos\lambda z$, $e^{\pm\gamma x}\sin\ z$.

Заключение. Найденные формулы дополняют формулы справочника [2] и могут быть применены к исследованию задачи теплопроводности для пластины в виде полуплоскости или полосы с эллиптической неоднородностью при конвективном теплообмене пластины с окружающей средой [4].

Список литературы

1. Проценко В.С., Соловьев А.И. О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применение к решению краевых задач // Математические методы анализа динамических систем. – Х: 1984. – Вып. 8. – С. 50-77.

2. Ерофеенко В.Т. Теоремы сложения. – Минск., Наука и техника, 1989. – 255 с.

3. Мак-лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 457 с.

4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.