

Схематическая теория разрывного обтекания ломаного крыла (крыло с „закрылком“)

В 1933 году С. А. Чаплыгин и А. А. Лаврентьев,¹⁾ предложив схему струйного обтекания, более близкую, нежели схема G. Kirchhoff'a, к имеющему место для реальных жидкостей срыву поверхностного слоя с задней спинки крыла, применили ее для изучения подъемной силы и лобового сопротивления длинного плоского крыла, погруженного в бесконечный поток. При этом был использован метод конформных отображений.

Эту же задачу решили Секерж — Зенькович²⁾ методом Levi — Civita и Н. И. Ахиезер³⁾, предположивший монотонность изменения направления вектора скорости на границах свободных струй и, благодаря этому, определивший положение точки отрыва струи с задней спинки крыла.

Схема Чаплыгина — Лаврентьева была позднее использована для изучения обтекания плоской пластинки струей конечной ширины⁴⁾ и для определения влияния земли на величину подъемной силы и лобового сопротивления крыла, движущегося около поверхности земли.⁵⁾

В этой работе мы рассматриваем струйное обтекание по схеме Чаплыгина — Лаврентьева крыла бесконечного размаха с профилем в виде двухзвенной ломаной.

Задачу о циркуляционном обтекании такого крыла изучили в 1931 году С. А. Чаплыгин совместно с Н. С. Аржаниковым.⁶⁾

§ 1.

Пусть крыло бесконечного размаха с профилем $AQ'D$ (рис. 1) погружено в бесконечный плоско-параллельный стационарный и невихревой поток несжимаемой идеальной жидкости.

Линия тока EO разветвляется в некоторой точке O профиля (эту точку мы выберем за начало координат в плоскости течения) на две части, которые, плотно прилегая к профилю, срываются с его задней кромки в точке A и с верхней спинки части QD в точке B . Продолжения BC и AC ветвей этой линии тока ограничивают застойную область.

Выберем положительное направление оси OX параллельно $Q'D$ и введем обозначения:

$$\begin{aligned} AQ' = AQ = l_1 & \quad \angle AQ'D = \pi(1 - q) \\ Q'D = QD = l_2 & \quad 0 < q < 1 \\ BD = \lambda, & \end{aligned}$$

1) „О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности“. Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933. Также: „Собр. сочинений С. А. Чаплыгина“, т. III, стр. 309—322. Ак. Наук СССР, 1935.

2) „Обобщенная схема Кирхгофа и ее применение к изучению поляры Лилиенталя“. Труды ЦАГИ, вып. 170, 1934.

3) „О плоскопараллельном потоке через бесконечную решетку“. Научные записки Хар. Авиаци. Ин-та, вып. 2, 1934.

4) И. З. Штогалю, „Über den Druck auf eine ebene Platte im Strome endlicher Breite“. Записки Хар. Мат. Т-ва та Наук. Дослід. I-та Матем. й Механіки ХДУ, серія 4, т. X, стр. 93—101.

5) И. Д. Глузман, Кандидатская диссертация 1935 г. (не напечатана).

6) К теории открылка и закрылка“. Труды ЦАГИ, вып. 105, 1931 (таблицы не точны). Также „Собрание сочинений С. А. Чаплыгина“ т. II, стр. 277—289. Ак. Наук СССР, 1933.

Пусть $V_0 e^{-i\theta_0}$ — комплексная скорость на бесконечности.

Как известно, решение задачи о струйном обтекании сводится к установлению зависимости между комплексным потенциалом

$$w = f(z) = \varphi + i\psi$$

и функцией Н. Е. Жуковского⁷⁾

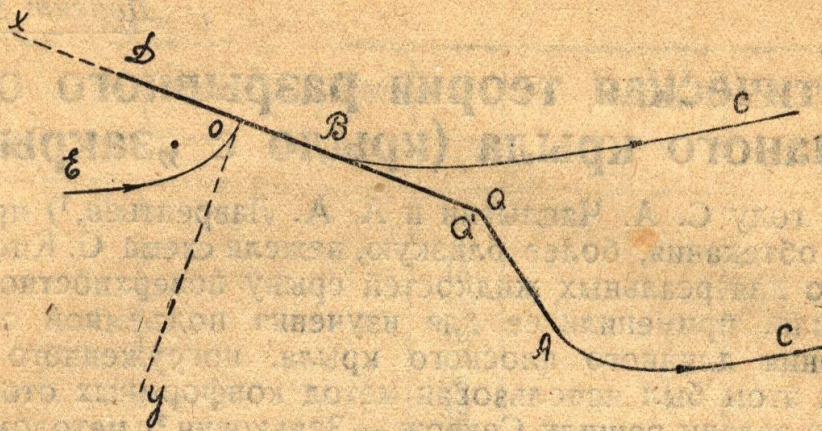


Рис. 1

$$\tau = \vartheta + i\theta = \lg V_0 \frac{dz}{df},$$

где $\frac{df}{dz} = V e^{-i\theta}$ — комплексная скорость.

Эту зависимость можно найти разными способами, и мы воспользуемся методом Levi-Civita, ведущим к цели в рассматриваемом случае быстро и без сложных вычислений.

Предполагая, что при струйном обтекании одного профиля струя, срываясь с профиля, с последним больше не встречается, Levi-Civita⁸⁾ дал такую формулу для комплексного потенциала

$$f = a^2 \left[\cos \varepsilon - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right]^2, \quad (1)$$

где параметр t изменяется в верхнем полуокружности единичного круга плоскости t (рис. 2). При этом границы свободных струй соответствуют радиусам CA и CB , а часть профиля, обтекаемая потоком без отрыва, есть отображение полуокружности $|t| = 1$, $|\arg t| \leq 0$.

Мы решим, очевидно, нашу задачу, если выразим функцию τ через тот же параметр t .

Таким образом мы приходим к задаче Dirichlet. Действительно, т. к.

$$\tau = \vartheta + i\theta = \lg \frac{V_0}{V} + i\theta = \lg V_0 \frac{dz}{df} \quad (2)$$

⁷⁾ „Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости на неизвестной линии тока“. Матем. Сборник, т. XV, 1890. Также „Собрание сочинений“, т. II, вып. 3. Труды ЦАГИ, вып. 41.

⁸⁾ Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo. Т. XXIII, 1—37, 1907; также: Н. Villat, „Aperçus théoriques sur la résistance des fluides“, 1920.

и обтекаемым точкам профиля соответствуют точки полуокружности $t = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi$, то на этой полуокружности известны значения мнимой части $\theta = \Phi(\sigma)$ функции τ , регулярной в верхнем полукруге $|t| < 1$. Сверх того, на диаметре AB τ принимает чисто мнимые значения.

Следовательно, ф-ию τ можно продолжить по принципу симметрии в нижний полукруг и, если \bar{t} — точка нижнего полукруга симметричная с t относительно вещественной оси, то должно быть

$$\tau(\bar{t}) = -\overline{\tau(t)}.$$

Поэтому значения мнимой части τ известны и на нижней полуокружности $|t| = 1$, а именно: для $\pi < \sigma < 2\pi$ имеем:

$$\theta(\sigma) = \Phi(2\pi - \sigma).$$

Кроме того $\tau(0) = i\theta_0$.

Этими условиями τ определяется однозначно:

$$\tau(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \theta(\sigma) \frac{t + e^{i\sigma}}{t - e^{i\sigma}} d\sigma, \quad (3)$$

где $\theta = \Phi(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq \pi$, и $\theta = \Phi(2\pi - \sigma)$, если $\pi < \sigma < 2\pi$ и

$$\int_0^{2\pi} \theta(\sigma) d\sigma = 2\pi\theta_0.$$

Используя равенство значений $\theta(\sigma)$ в симметричных точках верхней и нижней полуокружностей $|t| = 1$, можно придать последним формулам следующий вид:

$$\tau(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} \theta(\sigma) \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t \cos \sigma + 1} d\sigma \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} \theta(\sigma) d\sigma = \pi\theta_0 \quad (4 \text{ bis})$$

Формулы (1), (4) и (4 bis) позволяют определить все элементы потока⁹⁾. Предположим, что точка O лежит на $Q'D$ (рис. 1). Тогда $\theta(\sigma)$ определится такими равенствами:

$$\begin{aligned} \theta(\sigma) &= -(1+q)\pi & \text{если } 0 \leq \sigma < k, \\ \theta(\sigma) &= -\pi & \text{„ } k < \sigma < \varepsilon, \\ \theta(\sigma) &= 0 & \text{„ } \varepsilon < \sigma < \delta, \\ \theta(\sigma) &= -\pi & \text{„ } \delta < \sigma \leq \pi, \end{aligned}$$

где e^{ik} , $e^{i\varepsilon}$ и $e^{i\delta}$ — точки верхней полуокружности $|t| = 1$, соответствующие точкам Q' , O и D профиля крыла.

При этих условиях формулы (4) и (4 bis) дают

$$\tau(t) = -\pi i + \lg \frac{1 - te^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t} \frac{e^{i\delta} - t}{1 - te^{i\delta}} \left(\frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right)^q, \quad (5)$$

$$\delta - \varepsilon - qk = \pi + \theta_0 = \alpha, \quad (\alpha > 0), \quad (6)$$

где α — угол атаки, а в формуле для τ , $-\pi \leq I\{\lg\} \leq \pi$.

Легко видеть, что формулы (5) и (6) остаются справедливыми при каком угодно положении точки O на профиле крыла, т. е. независимо от того, будет ли $k < \varepsilon$, или $k \geq \varepsilon$.

⁹⁾ Н. Villat, loc. cit.

Приступим теперь к выводу формул для длин l_1 и l_2 отрезков AQ' и $Q'D$ профиля и для величины λ , определяющей положение точки отрыва B струи на QD , а также изучим условия возможности струйного обтекания по рассматриваемой схеме.

Пользуясь формулой (2) найдем, что

$$dz = \frac{1}{V_0} e^{-if} df,$$

откуда, принимая во внимание (1) и (5):

$$dz = -\frac{a^2}{2V_0} e^{-i\epsilon} (1 - te^{i\epsilon})^2 \frac{e^{i\delta} - t}{1 - te^{i\delta}} \left(\frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right) \left(t - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t^2}.$$

Таким образом, для точек профиля

$$dz = \frac{4a^2}{V_0} \left(\frac{\sin \frac{\sigma + k}{2}}{\sin \frac{\sigma - k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\delta - \sigma}{2}}{\sin \frac{\delta + \sigma}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \epsilon}{2} \sin \sigma d\sigma.$$

А так как $ds = |dz|$, то:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{4a^2}{V_0} \int_0^k \left(\frac{\sin \frac{k + \sigma}{2}}{\sin \frac{k - \sigma}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\delta - \sigma}{2}}{\sin \frac{\delta + \sigma}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \epsilon}{2} \sin \sigma d\sigma = \frac{4a^2}{V_0} I_1(\delta, \epsilon, k) \\ l_2 &= \frac{4a^2}{V_0} \int_k^\delta \left(\frac{\sin \frac{\sigma + k}{2}}{\sin \frac{\sigma - k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\delta - \sigma}{2}}{\sin \frac{\delta + \sigma}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \epsilon}{2} \sin \sigma d\sigma = \frac{4a^2}{V_0} I_2(\delta, \epsilon, k) \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\lambda = \frac{4a^2}{V_0} \int_\delta^\pi \left(\frac{\sin \frac{\sigma + k}{2}}{\sin \frac{\sigma - k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\sigma - \delta}{2}}{\sin \frac{\sigma + \delta}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \epsilon}{2} \sin \sigma d\sigma = \frac{4a^2}{V_0} I(\delta, \epsilon, k). \quad (8)$$

Формулы (7) дают для определения параметров δ , ϵ и k , связанных условием (6), уравнение:

$$\frac{I_2(\delta, \epsilon, k)}{I_1(\delta, \epsilon, k)} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (9)$$

Рассмотрим еще интеграл:

$$I_3(\delta, \epsilon, k) = I(\delta, \epsilon, k) - I_2(\delta, \epsilon, k) = \int_k^\pi \left(\frac{\sin \frac{\sigma + k}{2}}{\sin \frac{\sigma - k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\sigma - \delta}{2}}{\sin \frac{\sigma + \delta}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \epsilon}{2} \sin \sigma d\sigma$$

и положим

$$\frac{a^2}{l_2 V_0} = \nu. \quad (10)$$

Тогда, вторая из формул (7) дает

$$\nu = \frac{1}{4I_2}, \quad (11)$$

и на основании (8), (9) и определения интеграла I_3 находим для расстояния λ точки отрыва B струи от конца D профиля формулу:

$$\lambda = l_2 \left(1 + \frac{I_3(\delta, \epsilon, k)}{I_2(\delta, \epsilon, k)} \right). \quad (12)$$

Очевидно, что точка отрыва B будет находиться на QD только при условии

$$I_3(\delta, \varepsilon, k) \leq 0 \quad (13)$$

Таким образом, обтекание по рассматриваемой схеме имеет место только для такого отношения длин $\frac{l_2}{l_1}$ (при заданных α и q), для которого параметры δ , ε и k , связанные уравнениями (6) и (9), удовлетворяют неравенству (13).

Однако, и при выполнении этих условий положение точки B на QD остается произвольным, и, изменяя это положение, мы тем самым будем изменять подъемную силу и лобовое сопротивление крыла.

В то же время, естественно считать, что при заданных V_0 и α лобовое сопротивление и подъемная сила, равно как и расстояние точки отрыва B струи на QD от кромки D , будут иметь для данного крыла вполне определенные значения.

Ясно, что параметры δ , ε и k должны быть связаны еще одним условием (кроме (6), (9) и (13)), характер которого зависит от вида границ свободных струй. Что касается последнего, то здесь возможны различные предположения¹⁰⁾, на одном из которых, именно на монотонности изменения направления вектора скорости на границах свободных струй, мы и остаемся в дальнейшем.

Вспоминая, что $\tau(t) = i\theta(t)$, когда $I\{t\} = 0$, из формулы (5) получим:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \left(\frac{\sin \delta}{t^2 - 2t \cos \delta + 1} - \frac{\sin \varepsilon}{t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1} - \frac{q \sin k}{t^2 - 2t \cos k + 1} \right) \quad (5 \text{ bis})$$

для $-1 \leq t \leq 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{d\theta}{dt} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - q \operatorname{ctg} \frac{k}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \frac{d\theta}{dt} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - q \operatorname{tg} \frac{k}{2}.$$

Так как $\pi > \delta > \varepsilon \geq k \geq 0$ или $\pi > \delta > k > \varepsilon > 0$, и $0 < q < 1$, то первый из этих пределов меньше нуля при любом выборе δ , ε , k (удовлетворяющих, конечно, условию (6)), откуда следует, что граница свободной струи AC вблизи точки срыва A обращена выпуклостью к потоку и что $\theta \rightarrow -(1+q)\pi$ убывая. Что касается второго предела, то легко показать, пользуясь (6), что он положителен¹¹⁾ и, значит, граница свободной струи BC обращена вогнутостью к потоку около точки срыва B , а $\theta \rightarrow -\pi$ при движении вдоль BC к B , убывая. Так как $\frac{d\theta}{dt}$, как это следует из (5 bis) имеет внутри единичного круга только два нуля и в то же время меняет знак при возрастании t от -1 до $+1$, то на отрезке $-1, +1$ лежит всегда один и только один корень $\frac{d\theta}{dt}$ и, значит на границах свободных струй есть одна точка перегиба. Таким образом, для монотонности θ на границах свободных струй необходимо и достаточно, чтобы эта точка перегиба совпала с бесконечно удаленной точкой C , т. е. чтобы $\frac{d\theta}{dt} \Big|_{t=0} = 0$, что приводит к уравнению

$$\sin \delta - \sin \varepsilon - q \sin k = 0 \quad (14)$$

¹⁰⁾ Schmieden „Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetigen Strömungen“. Ing-Arch. 1932, 356—371; также: Н. И. Ахизер, loc. cit.

¹¹⁾ Так как $\varepsilon < \delta - qk$, то $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - q \operatorname{tg} \frac{k}{2} > \operatorname{tg} \frac{\delta - qk}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - q \operatorname{tg} \frac{k}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} A_n [\delta^{2n-1} - (\delta - qk)^{2n-1} - qk^{2n-1}]$, где $A_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots$), и $\delta^{2n-1} - (\delta - qk)^{2n-1} - qk^{2n-1} = qk^{2n-1} = qk [\delta^{2n-2} - k^{2n-2} + \delta^{2n-3}(\delta - qk) + \dots + (\delta - qk)^{2n-2}] > 0$.

Следовательно, при данных $\frac{l_2}{l_1}$, α и q , и в предположении монотонности θ на границах свободных струй, параметры δ , ε и k суть те решения системы уравнений (6), (14) и (9), которые удовлетворяют условию (13).

Система эта, однако, достаточно сложна, поэтому при вычислении нужно считать один из параметров, например k , известным и определять δ , ε и $\frac{l_2}{l_1}$. В этом предположении уравнения (6) и (14) дают:

$$\delta = \arccos \frac{q \sin k}{2 \sin \frac{\alpha + qk}{2}} + \frac{\alpha + qk}{2} \quad (15)$$

$$\varepsilon = \arccos \frac{q \sin k}{2 \sin \frac{\alpha + qk}{2}} - \frac{\alpha + qk}{2}$$

и

$$\delta'(k) = q \frac{\cos k - \cos \varepsilon}{\cos \delta - \cos \varepsilon}, \quad \varepsilon'(k) = q \frac{\cos k - \cos \delta}{\cos \delta - \cos \varepsilon} \quad (15 \text{ bis})$$

Когда $k=0$, то $\delta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $l_1=0$, и точка O находится на $Q'D$. Далее, для малых k , $\varepsilon'(k) < 0$, поэтому при возрастании k от 0 до $k=k_0$, где $k_0 < \frac{\pi - \alpha}{2(1+q)}$ есть корень уравнения

$$\sin[\alpha + k(1+q)] - (1+q) \sin k = 0 \quad (16)$$

$\varepsilon(k)$ монотонно убывает. В то же время монотонно убывает и $\delta(k)$, но разность $\delta - \varepsilon$ растет. При $k=k_0$, $\varepsilon(k_0) = k_0$ и точка O совпадает с точкой Q' .

При дальнейшем возрастании k , $\delta'(k) > 0$, и δ монотонно возрастает, начиная со значения $\delta = \alpha + (1+q)k_0$, а ε продолжает монотонно убывать. При этом точка O движется вдоль AQ' , а $\delta - k$ убывает монотонно. Из неравенства (13) следует, что верхняя граница значений k меньше корня уравнения

$$(1-q) \sin k - \sin[(1-q)k - \alpha] = 0 \quad (17)$$

очевидно имеющего решение между $k = \frac{\alpha}{1-q}$ и $k = \pi$.

§ 3.

Рассмотрим теперь силу $R = R_x + iR_y$, с которой поток действует на крыло. Применяя к профилю (рис. 3) теорему Bernoulli, находим

$$R = -\frac{i\rho}{2} \int_{AOB} (V_0^2 - V^2) dz,$$

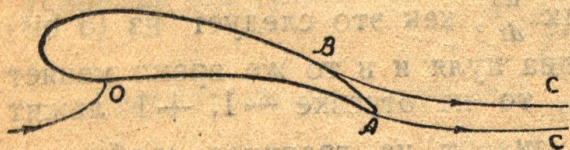


Рис. 3

где ρ — плотность жидкости. На основании (2) последняя формула принимает вид:

$$R = -\frac{i\rho V_0}{2} \left[\int_0^\pi e^{i\sigma} df - \int_0^\pi e^{i\sigma - 2\theta(\sigma)} df \right]$$

Сделав во втором интеграле подстановку $\sigma_1 = 2\pi - \sigma$, и приняв во внимание, что

$$\tau(\sigma) - 2\theta(\sigma) = -\theta(\sigma) + i\theta(\sigma) = \theta(\sigma_1) + i\theta(\sigma_1) = \tau(\sigma_1),$$

а также инвариантность df при этой подстановке, мы получим:

$$R = -\frac{i\rho V_0}{2} \int_{|t|=1} e^{\tau(t)} f'(t) dt = \pi\rho V_0 \cdot \text{rés}_{t=0} e^{\tau(t)} f'(t) \quad (18)$$

¹²⁾ H. Villat, loc. cit.

Последняя формула, однако, справедлива только в предположении известной регулярности контура, во всяком случае в предположении отсутствия точек профиля с бесконечной скоростью. При наличии такой точки (точка D в нашем случае) интеграл в формуле (18), как легко видеть, теряет смысл (благодаря разрыву подынтегральной функции в точке $t = e^{-i\delta}$), но и само течение с бесконечной скоростью не имеет непосредственного физического смысла.

Можно считать, что в действительности, при наличии точки D , около нее образуется небольшой вихревой слой жидкости, и, до момента отрыва этого вихря, жидкость обтекает новый профиль „ P^a “, образованный крылом $AQ'D$ и вихревым „насадком“ в точке D , с конечной скоростью. Процесс вихреобразования и отрыва вихря — периодический.

Отбрасывая небольшую дугу профиля „ P^a “, округляющую конец D крыла $AQ'D$, что соответствует отбрасыванию отрезка $(\delta - \eta_1, \delta + \eta_2)$ (η_1 и η_2 очень малы) интервала $(0, \pi)$ в соответствующей формуле для τ , мы мало изменим значения τ , и потому можно считать допустимым пользование формулой (5) и в предположении периодического вихреобразования в точке B .

Поскольку же нас интересует действие потока на профиль $AQ'D$, а не на округленный профиль „ P^a “, то в формуле (18) интеграл нужно заменить его главным значением. Так мы приходим к формуле:

$$R = R_x + iR_y = \pi\rho V_0 \left[\text{rés}_{t=0} e^{\tau(t)} f'(t) + \frac{1}{2} \text{rés}_{t=e^{-i\delta}} e^{\tau(t)} f'(t) \right]$$

и, пользуясь (1)

$$R = R_x + iR_y =$$

$$= \pi\rho a^2 V_0 \left\{ e^\tau \left[\tau' \cos \varepsilon - \frac{\tau'^2 + \tau''}{4} \right] - ie^{i\delta} \sin \delta (\cos \delta - \cos \varepsilon) \text{rés}_{t=e^{-i\delta}} e^{\tau(t)} \right\}, \quad (18 \text{ bis})$$

где τ' и τ'' — значения соответствующих функций при $t=0$.⁽¹³⁾

Для нашей задачи $e^\tau = e^{i\theta_0} = -e^{i\alpha}$, $\tau' = 0$ (условие монотонности θ на границах свободных струй), а $\tau'' = 2i(\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k)$.

Кроме того

$$\text{rés}_{t=e^{-i\delta}} e^{\tau(t)} = 2ie^{-i\delta} \sin \delta \frac{\sin \frac{\delta - \varepsilon}{2} \left(\frac{\sin \frac{\delta - k}{2} \right)^q}{\sin \frac{\delta + \varepsilon}{2} \left(\frac{\sin \frac{\delta + k}{2} \right)^q}.$$

Принимая еще во внимание (10), получим из (18 bis)

$$R_x + iR_y = \pi\rho v l_2 V_0^2 \left\{ ie^{i\alpha} \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{2} - 4t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -\pi\rho v l_2 V_0^2 \left[\frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{2} \sin \alpha + 4t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \right] \\ R_y &= \pi\rho v l_2 V_0^2 \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{2} \cos \alpha, \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где

$$t_0 = \frac{\sin \frac{\delta - k}{2}}{\sin \frac{\delta + k}{2}}.$$

Таким образом:

$$\text{Подъемн. сила} = -\pi\rho v l_2 V_0^2 \left(\frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{2} + 4t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \sin \alpha \right).$$

$$\text{Лобов. сопрот.} = 4\pi\rho v l_2 V_0^2 t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \cos \alpha.$$

¹³⁾ По поводу приведенных выше соображений и формулы см. Н. И. Ахиезер, loc. cit.

Рассмотрим предельные случаи.

1°. Если $k=0$ (что эквивалентно $q=0$), то, как мы видели в § 2, $l_1=0$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, и мы приходим к задаче о струйном обтекании плоской пластинки по схеме Чаплыгина при отсутствии точек перегиба на границах свободных струй¹⁴.

Как и следовало ожидать

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \lim_{k \rightarrow 0} \theta(t) = -i \lim_{t \rightarrow -1+0} \lim_{k \rightarrow 0} \tau(t) = -\pi.$$

Далее, из формулы (5) находим для функции Kirchhoff'a

$$\zeta = e^\tau = \frac{e^{i\alpha} + t^2}{1 + t^2 e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\theta_0} - t^2}{1 - t^2 e^{i\theta_0}}.$$

Легко видеть, что формулы (19) дают теперь

$$R_x = 0, \quad R_y = -\pi \rho \chi l_2 V_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

где

$$\chi = \lim_{k \rightarrow 0} \nu = \frac{1}{\frac{\pi + \alpha}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi + \alpha}{2}} \frac{\sin \frac{\varphi + \varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varepsilon}{2}} \sin(\varphi + \varepsilon) \sin \varphi \, d\varphi}$$

Все эти формулы совпадают с соответствующими формулами Н. И. Ахиезера (l. c.).

2°. В § 2 мы видели, что верхняя граница M допустимых для нашей схемы значений k меньше корня $k = k_1$ уравнения (17). Соответствующее значение $\delta > M$. Когда $k_1 > k > M$, то, хотя δ и остается больше нежели k , однако $\lambda > l_2$, и обтекание с отрывом на QD по рассматриваемой схеме невозможно; другими словами схема Чаплыгина несовместна с гипотезой про монотонность θ на линии тока BC при $k > M$, т. е. при достаточно малых значениях отношения $\frac{l_2}{l_1}$. Поэтому, при малом $\frac{l_2}{l_1}$ или имеет место схема обтекания Kirchhoff'a или же схема Чаплыгина, но, в последнем случае, на линии тока BC должна быть точка перегиба.

Из предыдущего, кроме того, ясно, что значения δ близкие к π точно так же несовместны с гипотезой про монотонное изменение θ на границах свободных струй.

Поэтому, переходя к изучению таких δ (а это эквивалентно допущению близости точки отрыва B к передней кромке крыла D), мы можем сохранить только формулы (5), (5 bis), (6), (7) и (8).

Положим $\delta = \pi - \delta_1$, $\delta_1 > 0$.

Тогда формулы (5), (5 bis) и (6) принимают вид:

$$\tau(t) = \lg \frac{1 - te^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t} \frac{1 + te^{i\delta_1}}{e^{i\delta_1} + t} \left(\frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right)^q, \quad (20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \left\{ \frac{\sin \delta_1}{t^2 + 2t \cos \delta_1 + 1} - \frac{\sin \varepsilon}{t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1} - \frac{q \sin k}{t^2 - 2t \cos k + 1} \right\}, \quad (21)$$

$$\delta_1 + \varepsilon + qk = \pi - \alpha. \quad (22)$$

Из (20) при $\delta_1 \neq 0$, получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \theta(t) = -\pi, \quad (23)$$

¹⁴) Н. И. Ахиезер, l. c. в формуле (19) вместо χ должно стоять $\chi \cos \alpha$.

а, в силу (21), для малых δ_1 и всех t достаточно близких к -1 , $t > -1$, $\frac{d\theta}{dt} > 0$, тогда, как $\frac{d\theta}{dt} \Big|_{t=-0} < 0$.

Таким образом, когда точка отрыва B близка к передней кромке D , то мы имеем схему обтекания Чаплыгина, и на линии тока BC действительно есть точка перегиба, приближающаяся [как это следует из (21)] вдоль линии тока BC к точке отрыва B , когда последняя приближается к передней кромке.

При $\delta_1 = 0$, $\frac{d\theta}{dt} < 0$ для $-1 \leq t \leq 1$, $\theta(-1) = 0$, $\theta(1) = -\pi$, и схема Чаплыгина переходит в схему Kirchhoff'a. Функция Kirchhoff'a имеет теперь вид:

$$\zeta = e^z = \frac{1 - te^{iz}}{e^{iz} - t} \left(\frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right)^q, \quad (24)$$

а формула (22) переходит в уравнение:

$$\varepsilon + qk = \pi - \alpha = -\theta_0. \quad (15)$$

Для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{4a^2}{V_0} \int_0^k \left(\frac{\sin \frac{k+\varphi}{2}}{\sin \frac{k-\varphi}{2}} \right)^q \cos^2 \frac{\varphi - (\alpha + qk)}{2} \sin \varphi d\varphi \\ l_2 &= \frac{4a^2}{V_0} \int_k^\pi \left(\frac{\sin \frac{\varphi+k}{2}}{\sin \frac{\varphi-k}{2}} \right)^q \cos^2 \frac{\varphi - (\alpha + qk)}{2} \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

3°. Полагая в последних формулах $k=0$, откуда

$$\varepsilon = \pi - \alpha, \quad \zeta = -\frac{t + e^{iz}}{e^{iz}t + 1}, \quad l_1 = 0,$$

а

$$l_2 = \frac{4a^2}{V_0} \int_0^\pi \cos^2 \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2}{V_0} (4 + \pi \sin \alpha),$$

получим обтекание плоской пластинки по схеме Kirchhoff'a; при этом формула (18) даст

$$R_x = 0, \quad R_y = -\pi \rho a^2 V_0 \sin \alpha,$$

или

$$R_y = -\frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} l_2 \rho V_0^2. \quad (16)$$

§ 5.

Интегралы

$$I_1 = \int_0^k \left(\frac{\sin \frac{k+\varphi}{2}}{\sin \frac{k-\varphi}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\delta-\varphi}{2}}{\sin \frac{\delta+\varphi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi+\varepsilon}{2} \sin \varphi d\varphi$$

¹⁵⁾ Н. И. Ахиезер (I. с.) рассматривает задачу об обтекании по схеме Kirchhoff'a решетки с ломаным пером. Но естественно, что формула (23) и уравнение (24) совпадают с соответствующими формулами его статьи.

¹⁶⁾ Rayleigh „On the Resistance of Fluids“, Philos. Mag., 1876, II.

$$I_2 = \int_k^\delta \left(\frac{\sin \frac{\varphi+k}{2}}{\sin \frac{\varphi-k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\delta-\varphi}{2}}{\sin \frac{\delta+\varphi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi+\varepsilon}{2} \sin \varphi d\varphi,$$

$$I_3 = \int_k^\pi \left(\frac{\sin \frac{\varphi+k}{2}}{\sin \frac{\varphi-k}{2}} \right)^q \frac{\sin \frac{\varphi-\delta}{2}}{\sin \frac{\varphi+\delta}{2}} \sin^2 \frac{\varphi+\varepsilon}{2} \sin \varphi d\varphi,$$

входящие в формулы § 3, можно представить с помощью достаточно быстро сходящихся рядов, а в случае рационального q выразить через элементарные функции.

Сделаем подстановки

$$t = \frac{\sin \frac{k-\varphi}{2}}{\sin \frac{k+\varphi}{2}} \quad \text{в интеграле } I_1$$

$$t = \frac{\sin \frac{\varphi-k}{2}}{\sin \frac{\varphi+k}{2}} \quad \text{в интегралах } I_2 \text{ и } I_3.$$

Тогда, после небольших преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2 \sin^2 k \sin^2 \frac{\varepsilon+k}{2} \int_0^1 t^{-q} \frac{(t+t_\delta)(1-t^2)(1+t_\varepsilon t)^2}{(1+t_\delta t)(t^2+2t \cos k+1)^3} dt \\ I_2 &= -2 \sin^2 k \sin^2 \frac{\varepsilon+k}{2} \int_0^{t_\delta} t^{-q} \frac{(t-t_\delta)(1-t^2)(1-t_\varepsilon t)^2}{(1-t_\delta t)(t^2-2t \cos k+1)^3} dt \\ I_3 &= 2 \sin^2 k \sin^2 \frac{\varepsilon+k}{2} \int_0^1 t^{-q} \frac{(t-t_\delta)(1-t^2)(1-t_\varepsilon t)^2}{(1-t_\delta t)(t^2-2t \cos k+1)^3} dt \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$t_\delta = \frac{\sin \frac{\delta-k}{2}}{\sin \frac{\delta+k}{2}}, \quad \text{а } t_\varepsilon = \frac{\sin \frac{\varepsilon-k}{2}}{\sin \frac{\varepsilon+k}{2}}.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{(t-t_\delta)(1-t^2)(1-t_\varepsilon t)^2}{(1-t_\delta t)(t^2-2t \cos k+1)^3} &= \frac{M}{1-t_\delta t} + \frac{A}{t-e^{ik}} + \frac{B}{(t-e^{ik})^2} + \frac{C}{(t-e^{ik})^3} + \frac{\bar{A}}{t-e^{-ik}} + \\ &+ \frac{\bar{B}}{(t-e^{-ik})^2} + \frac{\bar{C}}{(t-e^{-ik})^3}, \end{aligned}$$

где

$$M = -t_\delta \frac{\sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta-\varepsilon}{2}}{\sin^2 k \sin^2 \frac{k+\varepsilon}{2}} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{iCe^{-2ik}}{2 \sin^2 k} (e^{i\epsilon} q \sin k - e^{i\delta} \sin \delta + e^{i\epsilon} \sin \delta) \\ B &= \frac{Ce^{-ik}}{2 \sin k} (2 \sin \delta + 2ie^{i\epsilon} - ie^{ik}) \\ C &= \frac{e^{i(\delta-\epsilon+2k)}}{4 \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

а \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} — комплексные числа, сопряженные соответственно с A , B и C .
Таким образом,

$$\frac{I_3}{2 \sin^2 k \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} = M \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1-t_3 t} + 2R\{AJ_1 + BJ_2 + CJ_3\},$$

где

$$J_n = \int_0^1 t^{-q} \frac{dt}{(t-a)^n}, \quad a = e^{ik},$$

и $R\{z\}$ — вещественная часть z .

Формула

$$J_n = \frac{1}{a(n-1)(1-a)^{n-1}} - \frac{n-2+q}{a(n-1)} J_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

дает

$$\begin{aligned} AJ_1 + BJ_2 + CJ_3 &= \frac{Ce^{-2ik}}{8 \sin^2 \frac{k}{2}} + \left(B - Ce^{-ik} \frac{1+q}{2} \right) \frac{e^{-\frac{3}{2}ik}}{2i \sin \frac{k}{2}} - \\ &- \left[qe^{-ik} \left(B - Ce^{-ik} \frac{1+q}{2} \right) - A \right] J_1. \end{aligned}$$

Если сумму членов правой части последнего равенства, независимых от J_1 обозначить через T , а через S обозначить коэффициент перед J_1 то

$$\frac{I_3}{2 \sin^2 k \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} = M \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1-t_3 t} + 2R\{T\} + 2R\{SJ_1\}. \quad (29)$$

Пользуясь формулами (14) и (28), найдем, что

$$S = \frac{\sin 2\delta - \sin 2\epsilon - q \sin \frac{\epsilon}{k}}{16 \sin^2 k \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} e^{i(\delta-\epsilon)i},$$

и, значит

$$2R\{SJ_1\} = \frac{\sin 2\delta - \sin 2\epsilon - q \sin \frac{\epsilon}{k}}{8 \sin^2 k \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} \{ \sin(\delta-\epsilon) U_1 - \sin(\delta-\epsilon-k) U_2 \}, \quad (30)$$

где

$$U_1 = \int_0^1 \frac{t^{1-q} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1}, \quad \text{а} \quad U_2 = \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1}. \quad (31)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} 2R\{T\} &= \frac{1}{8 \sin k \sin \frac{k}{2} \sin^2 \frac{\epsilon+k}{2}} \left\{ 2 \cos \epsilon \cos \left(\delta - \epsilon - \frac{k}{2} \right) + \right. \\ &\left. + q \sin k \cdot \sin \left(\delta - \epsilon - \frac{k}{2} \right) - \sin \frac{k}{2} \sin(\delta - \epsilon - k) \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

Теперь из формул (29), (30), (32) и (27) получим:

$$I_3 = \frac{1}{2} \cos \frac{k}{2} \left\{ 2 \cos \varepsilon \cos \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) + q \sin k \sin \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - \sin \frac{k}{2} \sin (\delta - \varepsilon - k) \right\} -$$

$$- 2t_\delta \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1 - t_\delta t} +$$

$$+ \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{4} \left\{ \sin (\delta - \varepsilon) U_1 - \sin (\delta - \varepsilon - k) U_2 \right\}. \quad (33)$$

Так как в силу формул (26)

$$I_3(\pi - \delta, \pi - \varepsilon, \pi - k) = I_1(\delta, \varepsilon, k)$$

и уравнение (14), которым мы пользовались при преобразовании I_3 , остается инвариантным при замене δ, ε и k через $\pi - \delta, \pi - \varepsilon$ и $\pi - k$, то, воспользовавшись (33), мы можем сразу написать соответствующую формулу для I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{k}{2} \left\{ 2 \cos \varepsilon \sin \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - q \sin k \cos \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \cos \frac{k}{2} \sin (\delta - \varepsilon - k) \right\} + 2t_\delta \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1 + t_\delta t} +$$

$$+ \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{4} \left\{ \sin (\delta - \varepsilon) U_1(\pi - k) + \sin (\delta - \varepsilon - k) U_2(\pi - k) \right\}. \quad (34)$$

Что касается интеграла I_2 , то он вычисляется так же как и интеграл I_3 . Таким образом получим:

$$I_2 = \frac{1}{4t_\delta^q} \left\{ 1 + \cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos (\delta - \varepsilon - k) + (1 - q) \sin k \cdot \sin (\delta - \varepsilon - k) \right\} +$$

$$+ 2t_\delta \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \int_0^{t_\delta} \frac{t^{-q} dt}{1 - t_\delta t} -$$

$$- \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{4} \left\{ \sin (\delta - \varepsilon) V_1 - \sin (\delta - \varepsilon - k) V_2 \right\}, \quad (35)$$

где

$$V_1 = \int_0^{t_\delta} \frac{t^{1-q} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1}, \quad a \quad V_2 = \int_0^{t_\delta} \frac{t^{-q} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1}.$$

Итак все сводится к вычислению интегралов:

$$\int_0^\beta \frac{t^{-q} dt}{1 - at} \quad \text{и} \quad \int_0^\beta \frac{t^q dt}{t^2 - 2t \cos k + 1},$$

в которых $0 \leq \beta \leq 1$, $|a| < 1$ и $|k| < \pi$.

А. Общий случай (q — произвольное, $0 < q < 1$).

Начнем с интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \frac{t^{-q}}{1-at} dt &= \int_0^\beta \frac{t^{-q} + at^{1-q}}{1-a^2t^2} dt = \int_0^\beta t^{2-q} \left[\frac{1}{t^2} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{1+at} + \frac{1}{1-at} \right) \right] dt + \\ &+ \frac{a}{2} \int_0^\beta t^{1-q} \left(\frac{1}{1+at} + \frac{1}{1-at} \right) dt = \\ &= \frac{\beta^{1-q}}{1-q} + \frac{a}{2} \int_0^\beta t^{2-q} \frac{d}{dt} \lg \frac{1+at}{1-at} dt + \frac{1}{2} \int_0^\beta t^{1-q} \frac{d}{dt} \lg \frac{1+at}{1-at} dt = \\ &= \frac{\beta^{1-q}}{1-q} + \beta^{1-q} \frac{1+\alpha\beta}{2} \lg \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta} - \alpha(2-q) \int_0^\beta t^{1-q} \frac{1}{2} \lg \frac{1+at}{1-at} dt - \\ &- (1-q) \int_0^\beta t^{-q} \cdot \frac{1}{2} \lg \frac{1+at}{1-at} dt. \end{aligned}$$

В двух последних интегралах заменим $\frac{1}{2} \lg \frac{1+at}{1-at}$ разложением в ряд по положительным степеням t и проинтегрируем почленно. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \frac{t^{-q}}{1-at} dt &= \frac{\beta^{1-q}}{1-q} + \beta^{1-q} \frac{1+\alpha\beta}{2} \lg \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta} - \\ &- \alpha(2-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} \beta^{2n+1-q}}{(2n-1)(2n+1-q)} - (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} \beta^{2n-q}}{(2n-1)(2n-q)}. \end{aligned}$$

Наконец, полагая в полученной формуле последовательно:

$$\alpha = t_0, \beta = 1; \quad \alpha = -t_0, \beta = 1; \quad \alpha = t_0, \beta = t_0,$$

найдем что:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1-t_0 t} &= \frac{1}{1-q} + \frac{1+t_0}{2} \lg \frac{1+t_0}{1-t_0} - \\ &- (2-q) t_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1-q)} - (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{2n-1}}{(2n-1)(2n-q)}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1+t_0 t} &= \frac{1}{1-q} - \frac{1-t_0}{2} \lg \frac{1+t_0}{1-t_0} - \\ &- (2-q) t_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1-q)} + (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{2n-1}}{(2n-1)(2n-q)}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \frac{t^{-q} dt}{1-t_0 t} &= t_0^{1-q} \left\{ \frac{1}{1-q} + \frac{1+t_0^2}{2} \lg \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2} - \right. \\ &- (2-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{4n}}{(2n-1)(2n+1-q)} - \left. (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_0^{4n-2}}{(2n-1)(2n-q)} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим теперь интеграл:

$$\int_0^{\beta} \frac{t^{\gamma} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1}.$$

Так как

$$\frac{1}{t^2 - 2t \cos k + 1} = \frac{1}{\sin k} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \sin nk \quad (k \neq l\pi, l - \text{целое}),$$

то при $|\beta| \leq 1$

$$\int_0^{\beta} \frac{t^{\gamma} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1} = \frac{1}{\sin k} \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n+\gamma} \frac{\sin nk}{n+\gamma}.$$

Далее

$$\frac{1}{n+\gamma} = \frac{1}{n} - \frac{\gamma}{n^2} + \frac{\gamma^2}{n^3} - \frac{\gamma^3}{n^3(n+\gamma)}$$

и, следовательно:

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1} = \frac{1}{\sin k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^2} + \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3} - \gamma^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3(n+\gamma)} \right\}.$$

Но:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n} &= \frac{\pi - k}{2} = S_1(k) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3} &= \frac{2\pi^2 k - 3\pi k^2 + k^3}{12} = S_3(k) \end{aligned} \right\}; \quad (39)$$

при $0 < k < \pi$

что же касается суммы $S_2(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^2}$, то с помощью тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\lg \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \quad (x \neq l\pi, l - \text{целое})$$

найдем, что

$$S_2(k) = -k \lg 2 - 2 \int_0^{\frac{k}{2}} \lg \sin x dx.$$

А так как

$$\int_0^{\frac{k}{2}} \lg \sin x dx = \frac{k}{2} \lg \sin \frac{k}{2} - \int_0^{\frac{k}{2}} x \operatorname{ctg} x dx = \frac{k}{2} \lg \sin \frac{k}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

где B_n — числа Бернулли, то окончательно:

$$S_2(k) = -k \lg 2 \sin \frac{k}{2} + k - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (40)$$

Таким образом

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma} dt}{t^2 - 2t \cos k + 1} = \frac{1}{\sin k} \left\{ S_1(k) - \gamma S_2(k) + \gamma^2 S_3(k) - \gamma^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3(n+\gamma)} \right\},$$

откуда:

$$U_1 = \int_0^1 \frac{t^{1-q}}{t^2 - 2t \cos k + 1} dt = \quad (41)$$

$$= \frac{1}{\sin k} \left\{ S_1(k) - (1-q) S_2(k) + (1-q)^2 S_3(k) - (1-q)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3(n+1-q)} \right\},$$

$$U_2 = \int_0^1 \frac{t^{-q}}{t^2 - 2t \cos k + 1} dt = \frac{1}{\sin k} \left\{ S_1(k) + q S_2(k) + q^2 S_3(k) + q^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk}{n^3(n-q)} \right\}, \quad (42)$$

$$U_1(\pi - k) = \int_0^1 \frac{t^{1-q}}{t^2 + 2t \cos k + 1} dt = \quad (43)$$

$$= \frac{1}{\sin k} \left\{ S_1^{(1)}(k) - (1-q) S_2^{(1)}(k) + (1-q)^2 S_3^{(1)}(k) - (1-q)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nk}{n^3(n+1-q)} \right\}$$

$$U_2(\pi - k) = \int_0^1 \frac{t^{-q}}{t^2 + 2t \cos k + 1} dt =$$

$$= \frac{1}{\sin k} \left\{ S_1^{(1)}(k) + q S_2^{(1)}(k) + q^2 S_3^{(1)}(k) + q^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nk}{n^3(n-q)} \right\}, \quad (44)$$

где $S_1(k)$, $S_2(k)$ и $S_3(k)$ определяются формулами (39) и (40), а

$$S_1^{(1)}(k) = S_1(\pi - k) = \frac{k}{2}$$

$$S_2^{(1)}(k) = S_2(\pi - k) = S_2(k) + \int_0^k \lg 2 \sin x dx = k \lg 2 \cos \frac{k}{2} + \quad (45)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n (2^{2n} - 1) \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$S_3^{(1)}(k) = S_3(\pi - k) = \frac{\pi^2 k - k^3}{12}.$$

Для интегралов V_1 и V_2 , входящих в I_2 , находим аналогичным методом:

$$V_1 = \frac{t_0^{1-q}}{\sin k} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t_0 \sin k}{1 - t_0 \cos k} - (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n \frac{\sin nk}{n(n+1-q)} \right\}, \quad (46)$$

$$V_2 = \frac{t_0^{-q}}{\sin k} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t_0 \sin k}{1 - t_0 \cos k} + q \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n \frac{\sin nk}{n(n-q)} \right\}. \quad (47)$$

В. Случай рационального q ($0 < q < 1$)

Пусть $q = \frac{p}{r}$, где r четное.

Тогда

$$\int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1 - t_0 t} = r \int_0^1 \frac{x^{r-p-1} dx}{1 - t_0 x^r}$$

Разлагая подынтегральную дробь на простейшие и интегрируя, получим:

$$\int_0^1 \frac{t^{-q} dt}{1 - t_\delta^2 t} = \frac{1}{t_\delta^{1-q}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{r-1} \left[2 \sin 2q\pi\lambda \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{t_\delta} \sin \omega_\lambda}{1 - \sqrt{t_\delta} \cos \omega_\lambda} - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos 2q\pi\lambda \cdot \lg \left(\sqrt{t_\delta^2} - 2\sqrt{t_\delta} \cos \omega_\lambda + 1 \right) \right] - \lg(1 - \sqrt{t_\delta})(1 + \sqrt{t_\delta})^{(-1)^{r-p}} \right\}, \quad (48)$$

где $\omega_\lambda = \frac{2\lambda\pi}{r}$.

Далее:

$$U_1 = \int_0^1 \frac{t^{1-q}}{t^2 - 2t \cos k + 1} dt = r \int_0^1 \frac{x^{2r-p-1}}{1 - 2x^r \cos k + x^{2r}} dx,$$

$$U_2 = \int_0^1 \frac{t^{-q}}{t^2 - 2t \cos k + 1} dt = r \int_0^1 \frac{x^{r-p-1}}{1 - 2x^r \cos k + x^{2r}} dx.$$

Но:

$$\int \frac{x^{m-1}}{1 - 2x^n \cos \theta + x^{2n}} dx = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left\{ \frac{\sin(m\omega_\lambda - \theta)}{n \sin \theta} \lg \sqrt{1 - 2x \cos \omega_\lambda + x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\cos(m\omega_\lambda - \theta)}{n \sin \theta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \sin \omega_\lambda}{1 - x \cos \omega_\lambda} \right\} + \operatorname{const},$$

где $\omega_\lambda = \frac{\theta + 2\pi\lambda}{n}$.

Следовательно:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1 - 2x^n \cos \theta + x^{2n}} dx = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left\{ \frac{\sin(m\omega_\lambda - \theta)}{n \sin \theta} \lg 2 \sin \frac{\omega_\lambda}{2} + \frac{\cos(m\omega_\lambda - \theta)}{n \sin \theta} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_\lambda}{2} \right) \right\}.$$

Подставляя в этой формуле $m = 2r - p$ и $m = r - p$, а $n = r$ и принимая во внимание, что $\frac{p}{r} = q$, получим после всех упрощений:

$$U_1 = \frac{1}{\sin k} \left\{ \frac{\pi \sin [k + q(\pi - k)]}{2 \sin q\pi} + \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sin(k - p\omega_\lambda) \lg \sin \frac{\omega_\lambda}{2} \right\}, \quad (49)$$

где

$$\omega_\lambda = \frac{k + 2\pi\lambda}{r},$$

и, аналогично:

$$U_2 = \frac{1}{\sin k} \left\{ \frac{\pi \sin q(\pi - k)}{2 \sin q\pi} - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sin p\omega_\lambda \lg \sin \frac{\omega_\lambda}{2} \right\} \quad (49 \text{ bis})$$

с тем же значением ω_λ .

Если теперь принять во внимание формулу (6), то получим:

$$\sin(\delta - \varepsilon) U_1 - \sin(\delta - \varepsilon - k) U_2 = \frac{\pi \sin(\alpha + q\pi)}{2 \sin q\pi} + \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sin(\alpha - 2q\pi\lambda) \lg \sin \frac{\omega_\lambda}{2}. \quad (50)$$

Подставляя наконец, (48) и (50) в формулу (33), получим для интеграла I_3 следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \frac{1}{2} \cos \frac{k}{2} \left\{ 2 \cos \varepsilon \cos \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) + q \sin k \cdot \sin \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - \right. \\
 & \left. - \sin \frac{k}{2} \sin \left(\delta - \varepsilon - k \right) \right\} + 2t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \left\{ \lg \left(1 - \sqrt[r]{t_0} \right) \left(1 + \sqrt[r]{t_0} \right)^{(-1)^{r-p}} + \right. \\
 & + \sum_{\lambda=1}^{\frac{r}{2}-1} \left[\cos 2q\pi\lambda \cdot \lg \left(\sqrt[r]{t_0^2} - 2 \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{2\pi\lambda}{r} + 1 \right) - \right. \\
 & \left. - 2 \sin 2q\pi\lambda \cdot \operatorname{arc} \lg \frac{\sqrt[r]{t_0} \sin \frac{2\pi\lambda}{r}}{1 - \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{2\pi\lambda}{r}} \right\} + \\
 & + \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{4} \left\{ \frac{\pi \sin (\alpha + q\pi)}{2 \sin q\pi} + \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sin (\alpha - 2q\pi\lambda) \lg \sin \frac{k + 2\pi\lambda}{2r} \right\}, \quad (51)
 \end{aligned}$$

где $q = \frac{p}{r}$ и r четное.

Так как вычисление интегралов I_2 и I_1 ничем не отличается от уже проведенного вычисления I_3 , то мы приведем здесь только окончательные формулы для них. Именно:

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{1}{4t_0^q} \left\{ 1 + \cos^2 \varepsilon + (1 - q) \sin k \cdot \sin \left(\delta - \varepsilon - k \right) - 2 \cos \varepsilon \cos \left(\delta - \varepsilon - k \right) \right\} + \\
 & + 2t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\frac{r}{2}-1} \left[2 \sin 2q\pi\lambda \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[r]{t_0^2} \sin \frac{2\pi\lambda}{r}}{1 - \sqrt[r]{t_0^2} \cos \frac{2\pi\lambda}{r}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos 2q\pi\lambda \cdot \lg \left(\sqrt[r]{t_0^4} - 2 \sqrt[r]{t_0^2} \cos \frac{2\pi\lambda}{r} + 1 \right) \right] - \lg \left(1 - \sqrt[r]{t_0^2} \right) \left(1 + \sqrt[r]{t_0^2} \right)^{(-1)^{r-p}} \right\} - \\
 & - \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{8} \sum_{\lambda=0}^{r-1} \left\{ \sin (\alpha - 2q\pi\lambda) \lg \left(\sqrt[r]{t_0^2} - 2 \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{k + 2\pi\lambda}{r} + 1 \right) + \right. \\
 & \left. + 2 \cos (\alpha - 2q\pi\lambda) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[r]{t_0} \sin \frac{k + 2\pi\lambda}{r}}{1 - \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{k + 2\pi\lambda}{r}} \right\}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \frac{1}{2} \sin \frac{k}{2} \left\{ 2 \cos \varepsilon \cdot \sin \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - q \sin k \cdot \cos \left(\delta - \varepsilon - \frac{k}{2} \right) - \cos \frac{k}{2} \sin \left(\delta - \varepsilon - k \right) \right\} + \\
 & + 2t_0^q \sin^2 \delta \sin^2 \frac{\delta - \varepsilon}{2} \sum_{\lambda=1}^{\frac{r}{2}} \left\{ 2 \sin (2\lambda - 1) q\pi \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[r]{t_0} \sin \frac{(2\lambda - 1)\pi}{r}}{1 - \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{r}} + \right. \\
 & \left. + \cos (2\lambda - 1) q\pi \cdot \lg \left(\sqrt[r]{t_0^2} - 2 \sqrt[r]{t_0} \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{r} + 1 \right) \right\} + \\
 & + \frac{\sin 2\delta - \sin 2\varepsilon - q \sin 2k}{4} \left\{ \frac{\pi \sin \alpha}{2 \sin q\pi} + \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sin [\alpha + (2\lambda + 1) q\pi] \cdot \lg \sin \frac{(2\lambda + 1)\pi - k}{2r} \right\}, \quad (53)
 \end{aligned}$$

где $q = \frac{p}{r}$ а r — четное.