ШУН М. С.

Об одном типе экстремальных кулачков

Требуется построить профиль кулачка так, чтобы при заданном пути и подъеме ускорение менялось в данных пределах, а площадь, ограниченная профилем, была максимальной.

Эта задача эквивалентна следующей: через точки $O(O,O)$ и $A(l,H)$ нужно провести кривую при следующих условиях:

$$y'(O)=y'(l)=y(O)=0;\quad y(l)=H;\quad -m\leqslant y''\leqslant +km;\quad y'\geqslant 0.^*$$

и площадь S, ограниченная кривой $y=y(x)$, осью OX и крайними ординатами, должна быть maximum.

Пусть

$$y''(x)=\begin{cases} km\varphi_2(x) & 0\leqslant x\leqslant a\\ -m\varphi_1(x) & a\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

где

$$0\leqslant\varphi_2(x)\leqslant 1;\quad 0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant 1.$$

Тогда

$$y'(x)=\begin{cases} km\int\limits_0^x\varphi_2(x)\,dx & 0\leqslant x\leqslant a\\ m\int\limits_x^l\varphi_1(x)\,dx & a\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

причем

$$k\int\limits_0^a\varphi_2(x)\,dx=\int\limits_a^l\varphi_1(x)\,dx. \tag{1}$$

Отсюда

$$y(x)=\begin{cases} km\int\limits_0^x(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt & 0\leqslant x\leqslant a\\ H-\int\limits_x^l(t-x)\,\varphi_1(t)\,dt & a\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

и

$$k\int\limits_0^a x\varphi_2(x)\,dx=\int\limits_a^l x\varphi_1(x)\,dx. \tag{2}$$

Наконец,

$$S=\int\limits_0^l y(x)\,dt=lH+\frac{km}{2}\int\limits_0^a x^2\varphi_2(x)\,dx-\frac{m}{2}\int\limits_a^l x^2\varphi_1(x)\,dx.$$

Пусть

$$\frac{2(lH-S)}{m}=\varepsilon,$$

---

* Это необходимо для монотонного возрастания функции $y=y(x)$.

тогда:

$$\varepsilon = \int_a^l x^2 \varphi_1(x)\,dx - k\int_0^a x^2 \varphi_2(x)\,dx = \min$$

при условиях (1), (2). Очевидно для возможности задачи необходимо $H < y'_{\max} \cdot l \leqslant l \cdot km \cdot a$.

Выделим вблизи α_1 и α_2 интервалы достаточно малой длины σ ($0 \leqslant \alpha_2 \leqslant a$; $a \leqslant \alpha_1 \leqslant l$) и дадим в них φ_1 и φ_2 приращения δ_1 и δ_2, изменив a на $a + \Delta a$.

Тогда из (1) и (2) находим:

$$k\varphi_2(a) + \varphi_1(a) = \frac{\sigma}{\Delta a}(\delta_1 - k\delta_2); \quad k\varphi_2(a) + \varphi_1(a) = \frac{\sigma}{a\Delta a}(\alpha_1\delta_1 - k\alpha_2\delta_2),$$

$$\Delta\varepsilon = -[k\varphi_2(a) + \varphi_1(a)]\, a^2 \Delta a + \sigma(\alpha_1^2\delta_1 - k\alpha_2^2\delta_2),$$

$$\delta_1 = \frac{a-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \frac{\Delta a}{\sigma}[k\varphi_2(a) + \varphi_1(a)],$$

$$\delta_2 = -\frac{\alpha_1 - a}{\alpha_1-\alpha_2} \cdot \frac{\Delta a}{k\sigma}[k\varphi_2(a) + \varphi_1(a)], \quad Sgn\,\delta_1 = -Sgn\,\delta_2,$$

$$\Delta\varepsilon = [k\varphi_2(a) + \varphi_1(a)](\alpha_1 - a)(a - \alpha_2)\cdot\Delta a.$$

Таким образом $Sgn\,\Delta\varepsilon = Sgn\,\Delta a$.

Так как в случае минимума $\Delta\varepsilon > 0$, то $\Delta a > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$. Иначе — a должно быть возможно меньше, $\varphi_2(x)$ — возможно больше. Отсюда $\varphi_2(x) = 1$. Тогда (1), (2) и выражение для ε будет:

$$\int_a^l \varphi_1(x)\,dx = ka; \quad \int_a^l x\varphi_1(x)\,dx = \frac{1}{2}ka^2 + \frac{H}{m},$$

$$\varepsilon = \int_a^l x^2\varphi_1(x)\,dx - \frac{ka^3}{3} = \min.$$

В этом случае, как показано А. А. Марковым (см. напр., А. Марков: „Новые приложения непрерывных дробей“) в его работах по проблеме моментов, $\varphi_1(x)$ должно определяться так:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & a \leqslant x \leqslant \beta \\ 1 & \beta \leqslant x \leqslant \gamma \\ 0 & \gamma \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Отсюда

$$\gamma - \beta = ka; \quad \gamma^2 - \beta^2 = ka^2 + \frac{2H}{m};$$

из условий:

$$\beta \geqslant a; \quad \gamma \leqslant l$$

получаем:

$$a = \frac{\theta_1 l}{1+k}; \quad m = \frac{2H}{l^2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{\theta^2}{\theta_1^2}; \quad \gamma = \frac{\theta_1 l}{2}\left(1 + \frac{1}{\theta_2}\right); \quad \beta = \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_2} - 1\right)\right]\theta_1 l,$$

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1; \quad \theta_1 \leqslant \frac{2\theta_2}{1+\theta_2}.$$

$$Q = 1 - \frac{S}{lH} = \theta_1\left[\frac{1}{12}\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\theta_2 + \frac{1}{4\theta_2} + \frac{1}{2(k+1)}\right];$$

поэтому θ_2 и k надо выбрать возможно больше, а θ_1 — возможно меньше. Окончательно — $\theta_2 = 1$ (след., $\beta = a$)

$$y = \begin{cases} \frac{km}{2}x^2 & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\theta_1 l}{1+k} \\ \psi(x) & \frac{\theta_1 l}{1+k} \leqslant x \leqslant \theta_1 l \\ H & \theta_1 l \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

где

$$\psi(x) = H - \frac{m}{2}(\theta_1 l - x)^2,$$

$$m = \frac{2H}{l^2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{1}{\theta_1^2}; \quad Q = \frac{\theta_1(k+2)}{3(k+1)}.$$

ПРИМЕРЫ:

1) $H = 10$ *см*, $l = 0{,}02$ *ск*, $m = 6 \cdot 10^4 \frac{см}{ск^2}$, $k = 5$,

тогда $\theta_1 = 1$ $Q = \frac{7}{18} \sim 39\%$;

2) $H = 5$ *см*, $l = 0{,}05$ *ск*, $m = 10^6 \frac{см}{ск^2}$, $k = 9$,

$$\theta_1 = \frac{1}{15}, \quad Q = \frac{1}{15} \cdot \frac{11}{30} \sim 2{,}44\%.$$