УДК 658.8

Н.Н. Гора, А.В. Попов

Многофазная модель контроля качества логистической производственной цепи

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Введение

При анализе существующих и проектировании новых автоматизированных систем контроля качества (СКК) возникает актуальная и достаточно сложная задача математического моделирования процесса с учетом технологических пунктов контроля (ПК) качества, которые осуществляют мониторинг качества логистической производственной цепи (снабжение – производство – сбыт) [1]. В таком случае целесообразно использовать метод математического моделирования, основанный на теории массового обслуживания, что позволяет представить элементы логистической цепи в виде отдельных фаз обслуживания и далее получить значения основных характеристик проектируемых СКК, отражающих динамику контроля качества в виде обслуживания требований (время пребывания и ожидания требований в отдельных ПК и СКК, число обслуживаемых требований в ПК и СКК, загрузка ПК и СКК).

В данной работе исследуется многофазная вероятностная модель в целях определения основных математических зависимостей для оценки динамики обслуживания требований в системе контроля качества производственной логистической цепи в стационарном режиме на основе последовательной сети Джексона для построения автоматизированной системы контроля качества.

Постановка задачи исследования

Для исследования процессов контроля качества производственного процесса необходимо проанализировать информационные потоки, возникающие в ходе функционирования отдельных пунктов контроля качества. Каждый из этих потоков можно представить в виде набора требований, которые необходимо своевременно обслужить (провести контроль отдельных технологических операций) и результаты контроля качества направить в СКК для сбора итоговой информации о качестве выпускаемого изделия для всех фаз производственной цепи (снабжение – производство - сбыт). В случае возникновения «узких» мест в системе контроля качества необходимо изменить характеристики контроля, а именно: увеличить пропускную способность отдельных пунктов контроля или увеличить их количество.

Рассмотрим логистическую производственную систему в виде модели массового обслуживания с неограниченным потоком требований, состоящую из двух ПК разной производительности. Время обслуживания требований в СКК подчинено показательному закону распределения с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для первого и второго ПК. После обслуживания требований первым ПК осуществляется контроль качества вторым ПК.

Метод решения задачи

Представим динамику контроля качества производства в виде многофазной сети массового обслуживания (СеМО). Для неограниченного пуассоновского входящего потока с плотностью λ можно использовать следующую систему уравнений состояний двухфазной системы [4]:

$$P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{01}(t),,$$

…………………………

$$P'_{0,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_2)P_{0,n_2}(t) + \mu_1 P_{1,n_2-1}(t) + \mu_2 P_{0,n_2+1}(t),$$

…………………………

$$P'_{n_1,0}(t) = -(\lambda + \mu_1)P_{n_1,0}(t) + \mu_2 P_{n_1,1}(t) + \lambda P_{n_1-1,0}(t),$$

………………………..

$$P'_{n_1,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n_1,n_2}(t) + \mu_1 P_{n_1+1,n_2-1}(t) + \mu_2 P_{n_1,n_2-1}(t) + \lambda P_{n_1-1,n_2}(t),$$

где $P_{0,0}(t)$ - вероятность того, что в момент времени *t* оба ПК свободны;

$P_{n_1,n_2}(t)$- вероятность состояния системы контроля, при которой в момент времени *t* в первой фазе находится n_1 требований (включая и те, которые уже обслуживаются), а во второй фазе - n_2 требований.

После решения данной системы уравнений можно получить следующие характеристики, описывающие возможные состояния СКК:

1. Вероятность того, что оба ПК свободны от заявок:

$$P_{00} = (1-\rho_1)(1-\rho_2),$$

где $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}; \rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$.

2. Вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй – ни одного:

$$P_{n,0} = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

3. Вероятность того, что во второй фазе имеется n_2 требований, а в первой – ни одного:

$$P_{0,n_2} = \rho_2^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

4. Вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй фазе - n_2 требований:

$$P_{n_1,n_2} = \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

5. Математическое ожидание числа требований, находящихся в системе:

$$M = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(n_1+n_2) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2},$$

при этом среднее число требований, находящихся в первой фазе: $M_1 = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}$,а во второй фазе: $M_2 = \dfrac{\rho_2}{1-\rho_2}$,где $\rho_2 < 1, \rho_1 < 1$.

Если очередь в процессе функционирования системы стабилизируется, то интенсивность входного потока становится одинаковой для обеих фаз.

Рассмотрим общий случай, когда число фаз равно k.

Для последовательных $(j=1,...,k)$ фаз контроля качества логистической производственной цепи получим $p(n_1,...,n_k)=p(0,...,0)\prod_{j=1}^{k}\rho_j^{n_j}=\rho_1^{n_1}(1-\rho_1)...\rho_n^{n_k}(1-\rho_k)$,

где $p(0,...,0)=\prod_{j=1}^{k}(1-\rho_j)$ - вероятность того, что во всех n срезах нет заявок одновременно.

Поскольку фазы взаимно независимы, то вероятность того, что в *j*-й фазе находится *n* требований, равна $\rho_j^n(1-\rho_j)$.

Среднее число требований, находящихся в *j*-й фазе:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\rho_j^n(1-\rho_j)=\frac{\rho_j}{1-\rho_j}.$$

Среднее число требований, находящихся на обслуживании в *j*-й фазе:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_j^n(1-\rho_j)=\rho_j.$$

Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания в *j*-й фазе равно $\rho_j^2(1-\rho_j)^{-1}$.

Математическое ожидание числа требований, находящихся в системе, равно сумме математических ожиданий числа требований, находящихся в отдельных фазах обслуживания.

Распределение времени ожидания для отдельного требования, поступающего из (j -1)-й фазы в *j*-ю фазу для одноканальной системы контроля качества, имеет вид [4]

$$f_j(\xi)d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho_j)\rho_j^n\mu_j^n\xi^{n-1}\frac{e^{-\mu_j\xi}}{(n-1)!}d\xi=\lambda(1-\rho_j)e^{-(\mu_j-\lambda)\xi}d\xi.$$

Вероятность отсутствия ожидания в *j*-й фазе равна $1-\rho_j$, а вероятность ожидания, когда система занята: $(\mu_j-\lambda)e^{-(\mu_j-\lambda)\xi}d\xi$.

При $\mu_j=\mu$ положим $\sum n_j=n$. Пусть *p(n)* – вероятность того, что в системе ожидают обслуживание *n* требований. Тогда

$$p(n)=\binom{n+k-1}{k-1}\rho^n(1-\rho)^k\text{, где }\rho=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Рассмотрим СКК, которая состоит из *n* ПК, которые в процессе контроля включаются последовательно в производственной логистической цепи: сперва работает ПК$_1$, затем ПК$_2$ и т.д. Время T_i работы ПК$_i$ распределено по показательному закону с параметром μ_i и не зависит от времени работы других ПК (*i=1,2,…,n*). Тогда время $T_{(n)}$ обслуживания требований по контролю качества производства такой системы получится сложением времени работы отдельных ПК:

$$T_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Определим закон распределения и найдем формульные зависимости для основных характеристик СКК.

Введем следующие обозначения:

$$T_{1,2} = T_1 + T_2 \ ; \ T_{1,2,3} = T_{1,2} + T_3, ..., T_{1,2,...,k} = T_{1,2,...,k-1} + T_k \ , \ \ldots$$

Закон распределения для всей СКК представляет собой композицию законов распределения отдельных ПК$_i$. Методом математической индукции можно показать, что плотность распределения суммы *n* независимых случайных велечин T_1, T_2, …, T_n, распределенных по показательным законам с параметрами $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, имеет вид [5]:

$$g_{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\mu_j t}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\mu_j - \mu_k)} \quad (t > 0),$$

Функция распределения случайной величины $T_{(n)}$ определяется в виде:

$$G_{(n)}(t) = \int_0^t g_{(n)}(t) dt = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - e^{-\mu_j t}}{\mu_j \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\mu_j - \mu_k)} (t > 0).$$

Таким образом, закон распределения $T_{(n)}$ для всей СКК описывается обобщенным законом Эрланга *n*-го порядка, для которого математическое ожидание и дисперсия будет таким [5]:

$$M[T_{(n)}] = M\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i},$$

$$D[T_{(n)}] = D\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i^2}.$$

При $\mu_1 = \mu_2 = ...\mu_n = \mu$ также можно использовать закон Эрланга *n*-го порядка (n=1,2,…). В результате получим, что

$$\left.\begin{aligned} g_{(n)}(t) &= \frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} = \mu P(n-1, \mu t) \quad (t > 0), \\ G_{(n)}(t) &= \int_0^t \mu P(n-1, \mu t) dt = 1 - R(n-1, \mu t) \quad (t > 0), \end{aligned}\right\}$$

где $P(k,a)=a^k e^{-a}/k!$; $R(m,a)=\sum_{k=0}^{m} P(k,a)$.

Можно доказать следующие свойства функций $P(k,a)$ и $R(m,a)$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dR(k,a)}{da}=P(k,a);\quad R(k,a)=\int_0^{\infty}P(k,a)da;\\&1-R(k,a)=\int_0^{\infty}P(k,a)da;\ \int_0^{\infty}P(k,a)da=R(\infty,a)=1;\\&\frac{dP(k,a)}{da}=-\frac{d^2}{da^2}R(k,a)=P(k-1,a)-P(k,a)(k>0).\end{aligned}\right\}$$

В этом случае характеристики для оценки $T_{(n)}$, распределенной по закону Эрланга *n*-го порядка имеют следующий вид:

$$M[T_{(n)}]=\frac{n}{\mu};\ D[T_{(n)}]=\frac{n}{\mu^2};\ \sigma[T_{(n)}]=\frac{\sqrt{n}}{\mu}.$$

В инженерных приложениях часто используют нормированный закон Эрланга *n*-го порядка, по которому распределено значение $T_{(n)}$:

$$T_{(n)}=T_{(n)}/n.$$

Применив формулу для плотности распределения линейной функции случайной величины, получим

$$\tilde{g}_{(n)}(t)=ng_{(n)}(nt)=\frac{n\mu(n\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-n\mu t}\quad(t>0).$$

Обозначим $\widetilde{\mu_n}=n\mu$, тогда

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{g}_{(n)}(t)==\frac{\widetilde{\mu_n}(\widetilde{\mu_n}t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-n\tilde{\mu}t}=\widetilde{\mu_n}P(n-1,\widetilde{\mu_n}t),\\&\tilde{G}_{(n)}(t)=\int_0^{t}\tilde{g}_{(n)}(t)dt=1-R(n-1,\widetilde{\mu_n}t).\end{aligned}\right\}$$

Формулы $\tilde{g}$ и $\tilde{G}$ определяют плотность и функцию распределения нормированного закона Эрланга *n*-го порядка. Числовые характеристики случайной величины $T_{(n)}$ будут иметь следующий вид:

$$M[\tilde{T}_{(n)}]=M[T_{(n)}]=\frac{1}{\mu};\ D[\tilde{T}_{(n)}]=\frac{1}{n\mu^2};\ \sigma[\tilde{T}_{(n)}]=\frac{1}{\mu\sqrt{n}}.$$

Как видно, указанные характеристики не зависят от порядка распределения, что существенно облегчает расчеты. Характеристическая функция для $T_{(n)}$ будет определяться по формуле [5]:

$$\vartheta_{(n)}(x) = \frac{\mu^n}{(\mu - ix)^n},$$

а для математического ожидания $\widetilde{T}_{(n)}$ - по формуле

$$\vartheta_{(n)}(x) = \frac{\widetilde{\mu^n}}{(\widetilde{\mu_n} - ix)^n} = \frac{(\mu n)^n}{(\mu n - ix)^n} = \left(\frac{n}{n - ix/\mu}\right)^2.$$

Предел этого выражения

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\vartheta}_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n - ix/\mu}\right)^n = e^{-(-ix/\mu)}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$, $\widetilde{T}_{(n)}$ стремится к величине $1/\mu$, так как предельное выражение для характеристической функции совпадает с характеристической функцией неслучайной величины.

Заметим, что приведенные выкладки будут справедливыми и для расчета СКК, когда в каждом ПК время пребывания заявки включает в себя собственно время обслуживания и время ожидания. Этот факт следует из того, что плотность и функция распределение времени пребывания заявки в отдельном ПК имеет показательный закон.

Как известно [5], закон Эрланга *n*-го порядка тесно связан со стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ. Случайная величина $T_{(n)}$, распределенная по этому закону, представляет собой интервал времени, содержащий *n* интервалов между отдельными событиями в этом потоке. При n=1 можно получить показательный закон. При увеличении значения *n* закон Эрланга *n*-го порядка приближается к нормальному [4].

Заключение

Предложенный метод исследования системы контроля качества на производстве позволяет описать процесс контроля в виде многофазной системы массового обслуживания, где в качестве фаз выступают отдельные элементы логистической цепи (снабжение – производство – сбыт). Получены основные расчетные формулы для двухфазной, а затем и для многофазной СКК. Результаты исследований можно использовать в задачах создания СКК, а также для задач логистического управления качеством дискретного производства.

Список литературы

1. Логистика: управление в грузовых транспортно-логистических системах / Под ред. Л. Б. Миротина. – М.: Юристъ, 2002. – 414 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер. с англ. И. И. Грушко. Под ред. В. И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ. Под ред. Б. С. Цибакова. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
4. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее применение: Пер. с англ. Е.Г. Коваленко. Под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные применения. – М.: Наука. – 1988. – 480 с.