Кандидат математических наук ШВЕЦОВ К. И.

О предельных значениях интегралов. Проблема моментов с дополнительным условием А. А. Маркова на множестве E

Введение

Первая глава настоящей статьи посвящена нахождению предельных значений интегралов — ищется экстремум массы на множестве E', принадлежащем множеству E:

$$(-\infty, \alpha\rangle, \langle\beta, \infty).$$

При заданных $2n+1$ моментах эта задача является обобщением известных задач Чебышова-Маркова.

При нахождении предельных значений интегралов мы пользуемся методами, аналогичными тем, которые применял К. Поссе в задаче Маркова [1]).

Вторая глава посвящена L-проблеме при дополнительном условии Маркова на множестве E; эта проблема является предельной для L-проблемы на двух конечных интервалах, рассмотренной Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [2]).

При решении L-проблемы на множестве E мы пользуемся методами, аналогичными тем, которые развиты в работах Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [2]) [3]).

Глава первая

О предельных значениях интегралов

Пусть даны значения $2n+1$-го интеграла от неубывающей функции $\varphi(u)$ на множестве E

$$c_0 = \int_E d\varphi(u), \quad c_1 = \int_E u\, d\varphi(u), \ldots, \quad c_{2n} = \int_E u^{2n} d\varphi(u); \tag{1}$$

требуется найти экстремальные значения интеграла

$$\int_{E'} d\varphi(u),$$

где множество $E' = (-\infty, x)$ при $x \leqslant \alpha$ и $E' = (-\infty, \alpha) + (\beta, x)$ при $x \geqslant \beta$.

Иными словами, ищется экстремум массы на E' при наличии условий (1).

Обобщая вопрос, можно искать экстремум интеграла

$$\int_{E'} \Omega(u)\, d\varphi(u) \tag{2}$$

---

[1]) К. Поссе, Sur quelques applications des fractions continnue algebriques 1886 г., гл. V.

[2]) Н. І. Ахієзер і М. Г. Крейн, Проблема моментів на двох інтервалах при додатковій умові А. А. Маркова. (Записки Н.-Д. Інституту Математики, т. XIV).

[3]) N. Achyeser und M. Krein, Das Momentenproblem bei der zusätzlichen Bedingung von A. A. Markoff (те же записки, т. XII).

при условиях (1), где $\Omega(u)$ непрерывная функция, производные которой

$$\Omega(u),\quad \Omega'(u),\quad \Omega''(u),\ldots,\quad \Omega^{(2n)}(u)$$

неотрицательны на действительной оси.

Следуя К. Поссе[1]), мы начнем с нахождения решения проблемы моментов (1) вида

$$c_i=\sum_{j=1}^{k} m_j x_j^i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2n) \tag{3}$$

при минимальном числе неизвестных величин x_j и m_j.

Можно показать[4]), что существуют два подобных решения, причем:

а) в первом случае одно из чисел x_j полагается равным x и определяется $n+1$ масса $m_0,\ m_1,\ldots,\ m_n$, и n чисел $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$;

б) во втором случае три величины x_j полагаются равными x, α и β, и определяются $n+2$ массы $m_x,\ m_\alpha,\ m_\beta,\ m_1,\ldots,\ m_{n-1}$ и числа $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-1}$.

Если мы наложим на решение (3) условие $(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k)\subset E$, то решение (a) пригодно, если x лежит в интервале первого рода[4]), а решение (b), если x принадлежит интервалу второго рода[4]).

Предполагая x лежащим в интервале первого рода и обозначая корни квази-ортогонального полинома $C_{n+1}(u;x^i)$ относительно последовательности $\{c_k\}$, через

$$x_1<x_2<\ldots<x_k<x<x_{k+1}<\ldots<x_n$$

и функцию распределения, определяемую массами $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ldots,\ \sigma_{n-1},\ \sigma_n$, через $\varphi_x(u)$, будем иметь для интеграла

$$\int_{E'}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi_x(u)$$

значения

$$\int_{E'+0}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi_x(u)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\Omega_{2n}(x_i)+\sigma_x\Omega_{2n}(x), \tag{4$_1$}$$

$$\int_{E'-0}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi_x(u)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\Omega_{2n}(x_i) \tag{4$_2$}$$

сообразно с тем, включается x в E' или нет.

Аналогично, при x, лежащем в интервале второго рода, получим:

$$\int_{E'+0}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi(u)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\Omega_{2n}(x_i)+\sigma_x\Omega_{2n}(x), \tag{5$_1$}$$

$$\int_{E'-0}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi(u)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\Omega_{2n}(x_i), \tag{5$_2$}$$

смотря по тому, принадлежит x E или нет.

Здесь через

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k$$

обозначены те корни полинома $(u-\alpha)(u-\beta)D_n(u;x^i)$, квази-ортогонального относительно последовательности $\{d_k\}$, которые не превышают x, а

$$\sigma_i=\sigma\left\{\frac{C_{n+1}(u;\ x^i)}{u-x_i}\cdot\frac{1}{C'_{n+1}(x_i;\ x^i)}\right\}>0$$

(в главе II § 1[4]) было показано, что массы σ_i положительны).

Предельные значения интеграла (2) мы будем искать, основываясь на следующей теореме Маркова[5]).

---

[4]) К. И. Швецов, О проблеме моментов Hamburger'a при дополнительном требовании отсутствия масс на заданном интервале (Записки Института Математики, т. XVI). В дальнейшем мы опираемся на обозначения и результаты этой работы.

[5]) К. Поссе, loc. cit., стр. 116.

Если $\Omega(u)$ непрерывная функция от u на отрезке (a, b), удовлетворяющая условиям

$$\Omega(u) > 0, \quad \Omega'(u) \geqslant 0, \ldots, \quad \Omega^{(m+1)}(u) \geqslant 0$$

$(a < u < b)$ и $\Phi(u)$ полином степени m, то при

$$a < c < b,$$

сумма числа корней уравнения

$$\Phi(u) = \Omega(u),$$

лежащих в (a, c), и числа корней уравнения

$$\Phi(u) = 0,$$

принадлежащих (c, b), не больше чем $m+1$.

Предположим x лежащим в интервале первого рода и построим полином $\Phi_1(u)$ степени $2n$, удовлетворяющий условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(x_i) = \Omega(x_i) \\ \Phi_1'(x_i) = \Omega'(x_i) \end{array}\right\} \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\Phi_1(x) = \Omega(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(x_i) = 0 \\ \Phi_1'(x_i) = 0 \end{array}\right\} \; i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Очевидно, полином $\Phi_1(u)$ имеет вид

$$\Phi_1(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{C_{n+1}(u; x^i)}{(u - x_i)\, C'_{n+1}(x; x^i)} \Omega(x_i) + \frac{C_{n+1}(u; x^i)}{(u - x_i) C'_{n+1}(x; x^i)} \Omega(x) + C_{n+1}(u; x^i)\, \theta_{n-1}(u),$$

где $\theta_{n-1}(u)$ полином $n-1$ степени.

Полагая $a < x_1$, $x < b$ и замечая, что уравнение

$$\Phi_1(u) = \Omega(u) \tag{6}$$

имеет в $(a, x)\, 2k+1$ корень, из которых k корней — двойные и что уравнение

$$\Phi_1(u) = 0$$

имеет в $(x, b)\, 2n-2k$ корней второй кратности, получаем из теоремы Маркова, что при любом x, удовлетворяющем неравенству $a < x < b$:

1) уравнение (6) не имеет в (a, x) корней, кроме тех, которые указаны выше;

2) уравнение (7) не имеет в (x, b) корней, отличных от указанных.

Учитывая неравенства

$$\Phi_1(x_{k+1}) - \Omega(x_{k+1}) = -\Omega(x_{k+1}) \leqslant 0,$$
$$\Phi_1(x) = \Omega(x) \geqslant 0,$$

мы находим неравенства

$$\begin{array}{ll} \Phi_1(u) \geqslant \Omega(x), & (u < x), \\ \Phi_1(u) \geqslant 0, & (u > x), \end{array} \tag{7_1}$$

из которых следует неравенство:

$$\int\limits_{E'} \Omega(u)\, d\varphi(u) < \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(u)\, d\varphi(u),$$

или иначе:

$$\int\limits_{E'} \Omega(u)\, d\varphi(u) < \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \Omega(x_i) + \sigma_x \Omega(x) = \int\limits_{E'+0} \Omega_{2n}(u)\, d\varphi(u). \tag{8_1}$$

Таким образом, распределение (4_1) дает максимальное значение интеграла (2) при x, лежащем в интервале первого рода.

Если построить полином $\Phi_2(u)$ степени $2n$, удовлетворяющий условиям

$$\left.\begin{aligned}\Phi_2(x_i)&=\Omega(x_i),\\ \Phi_2'(x_i)&=\Omega'(x_i),\end{aligned}\right\}\quad i=1,\ 2,\ldots,k,$$

$$\Phi_2(x)=0,$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_2(x_i)&=0,\\ \Phi_2'(x_i)&=0,\end{aligned}\right\}\quad i=k+1,\ k+2,\ldots,n,$$

то, повторяя предыдущие рассуждения, мы получим неравенства

$$\begin{aligned}\Phi_2(u)&\leqslant\Omega(u), &&(u<x),\\ \Phi_2(u)&\leqslant 0, &&(u>x),\end{aligned}$$

из которых, как и ранее получается неравенство

$$\int\limits_{E'}\Omega(u)\,d\varphi(u)>\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(u)\,d\varphi(u),$$

т. е.

$$\int\limits_{E'}\Omega(u)\,d\varphi(u)>\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\,\Omega(x_i)=\int\limits_{E'}\Omega_{2n}(u)\,d\varphi(u). \tag{8_2}$$

Таким образом, распределение масс (4_2) дает минимум значения интеграла.

Следовательно, максимум и минимум интеграла (2), если x лежит в одном из интервалов первого рода, дается формулами (8_1) и (8_2), соответствующими случаю (a), т. е. случаю, когда

$$C_{n+1}(x;\ \beta^i)\quad\text{и}\quad C_{n+1}(x;\ \alpha^i)$$

одинаковых знаков.

Сделаем аналогичные выводы, не входя в детали, для случая (b), но когда x лежит в интервале второго рода.

Действительно, если составим полином $\Phi_1(u)$ степени $2n$, удовлетворяющий условиям

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x_i)&=\Omega(x_i),\\ \Phi_1'(x_i)&=\Omega'(x_i),\end{aligned}\right\}\quad i=1,\ 2,\ldots,k$$

$$\Phi_1(x)=\Omega(x),$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x_i)&=0,\\ \Phi_1'(x_i)&=0,\end{aligned}\right\}\quad i=k+1,\ k+2,\ldots,n-1$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\alpha)&=\Omega(\alpha),\\ \Phi_1(\beta)&=\Omega(\beta),\end{aligned}\right\}\ \text{при}\quad x>\beta,\ \text{и}\quad \left.\begin{aligned}\Phi_1(\alpha)&=0,\\ \Phi_1(\beta)&=0,\end{aligned}\right\}\ \text{при}\quad x<\alpha,$$

то тогда, как и раньше, окажутся справедливыми соотношения (7_1) при $u\subset E$.

В интервале $(\alpha,\ \beta)$ эти неравенства нарушаются, но этот интервал не входит в E'; на концах его лежат простые корни и поэтому исследование случая (b) может быть закончено с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным для случая (a).

При этом окажется, что распределение масс (5_1) дает максимальное значение интегралу (2).

Аналогично докажем, пользуясь соответствующим полиномом $\Phi_2(u)$, что распределение масс (5_2) дает минимум интеграла (2) при x, принадлежащем интервалу второго рода.

Проблема моментов с дополнительным условием А. А. Маркова на множестве E

Пусть дана последовательность чисел

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_{2n};$$

найдем необходимые и достаточные условия существования функции $f(u)$, удовлетворяющей равенствам

$$c_k = \int_{-\infty}^{\alpha} u^k f(u)\,du + \int_{\beta}^{\infty} u^k f(u)\,du \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2n) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$0 \leqslant f(u) \leqslant 2L, \tag{2}$$

где L, α, β $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$ заданные числа.

Беря функции

$$G(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}\exp\left[\frac{1}{2L}\int_E \frac{f(u)}{z-u}\,du\right] - 1 = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \ldots,$$

$$H(z) = \exp\left[\frac{1}{2L}\int_E \frac{f(u)}{z-u}\,du\right] - 1 = \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \ldots + \frac{t_{2n}}{z^{2n+1}} + \ldots,$$

где s_k, t_k $(k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2n)$ легко определяются через величины c_0, $c_1, \ldots, c_n$, L, с помощью метода, развитого в работах Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна[2, 3]) и теоремы Nevanlinna[6]), приходим к следующему результату.

Для того, чтобы существовала функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), необходимо, чтобы каждая из последовательностей

$$s_0,\ s_1, \ldots,\ s_{2n}, \tag{3_1}$$

$$t_0,\ t_1, \ldots,\ t_{2n}, \tag{3_2}$$

определяемых с помощью разложений

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}\exp\left[\frac{1}{2L}\left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_{2n}}{z^{2n+1}}\right)\right] = 1 + \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \ldots, \tag{4}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2L}\left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_{2n}}{z^{2n+1}}\right)\right] = 1 + \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \ldots + \frac{t_{2n}}{z^{2n+1}} + \ldots, \tag{4_1}$$

была ненегативна на множестве E.

Замечание 1. Для того, чтобы последовательность чисел

$$r_0,\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_{2n}$$

была ненегативной относительно интервала $<-\infty,\ \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы форма

$$\sum_{i,\,k=0}^{n} r_{i+k}\,\xi_i\xi_k$$

была не отрицательной.

---

[6]) R. Nevanlinna, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem стр. 35—48 и H. Hamburger, Über eine Erweiterung das Stieltjeschen Momentenproblems, 1 стр. 268—274.

Замечание 2. В дальнейшем нам понадобится лемма Fischer'a[7]). Если форма

$$\sum_{i,\,k=0}^{n} s_{i+k}\xi_i\xi_k$$

неотрицательна и сингулярна, то однозначно определяется представление

$$s_k = \sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

и

$$s_{2n} = \sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i^{2n} + M,$$

где $r < n$, $\mu_i > 0$, $M \geqslant 0$ и

$$-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_r < \infty;$$

M называется дополнительной массой.

Замечание 3. Если какая-либо из последовательностей (3_1) и (3_2) окажется сингулярной, то дополнительная масса Fischer'a должна быть равна нулю.

Действительно, если например, последовательность (3_1) сингулярна, то имеет место равенство

$$\sum_{i,\,k=0}^{r} s_{i+k}\xi_i\xi_k = 0 \qquad (r \leqslant n),$$

т. е.

$$\int_E (\xi_0 + \xi_1 u + \ldots + \xi_r u^r)^2 \, d\varphi(u) = 0,$$

а, значит, $\varphi(u)$ имеет не больше r точек роста $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Обозначив соответствующие массы через $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$ мы будем иметь представление

$$s_k = \sum_{j=0}^{r} \mu_j x_j^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Теперь докажем, что сформулированные выше необходимые условия существования ф-ии $f(u)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2), являются так же и достаточными.

Случай 1. Последовательность (3_1) положительна; тогда имеет место представление

$$s_k = \sum_{j=0}^{n} \mu_j x_j^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

где

$$-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty,$$

причем $x_\lambda = \beta$ и все $\mu_j > 0$.

Действительно, для квази-ортогонального полинома $s_{n+1}(z; \beta^i)$ имеет место разложение

$$\frac{s^x_{n+1}(z; \beta^i)}{s_{n+1}(z; \beta^i)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \ldots = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_j}{z - x_j},$$

откуда и вытекает представление чисел s_k $(k=0, 1, 2, \ldots, 2n)$.

Пользуясь представлением чисел s_k и применяя метод, изложенный в работе Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна[2]), убеждаемся, что ни одна из величин x_j не принадлежит интервалу $<\alpha, \beta)$.

---

[7]) E. Fischer, Rend. di Palermo Bd. 32, 1911, Uber das Caratheodorische Problem...

Составив функции

$$G_1(z) = 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{\mu_j}{z - x_j} = \frac{(z - y_0)\dots(z - y_n)}{(z - x_0)\dots(z - x_n)} = 1 + \frac{s_0}{z} + \dots + \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (5)$$

$$H_1(z) = \frac{z - \beta}{z - \alpha} G_1(z) = 1 + \frac{t_0}{z} + \dots + \frac{t_{2n}}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (5_1)$$

где

$$-\infty < y_0 < x_0 < y_1 < x_1 < \dots < y_n < x_n < \infty,$$

с помощью того же метода убеждаемся, что интервал (α, β) не содержит ни одной из точек y_k, т. е.

$$-\infty < y_0 < x_0 < \dots < y_\lambda \leqslant \alpha < \beta = x_\lambda < \dots < y_n < x_n < \infty.$$

Рассмотрим логарифм

$$\log \frac{z-\beta}{z-\alpha} G_1(z) = -\int_\alpha^\beta \frac{du}{z-u} + \sum_{k=0}^{n} \int_{y_k}^{x_k} \frac{du}{z-u};$$

этому выражению можно придать следующий вид

$$\frac{1}{2} \int_E \left[-\operatorname{sign} \frac{(u-y_0)\dots(u-y_n)}{(u-x_0)\dots(u-x_n)} + 1 \right] \frac{du}{z-u} = \frac{1}{2L} \int_E f_L(u) \frac{du}{z-u},$$

где

$$f_L(u) = L \left[-\operatorname{sign} \frac{(u-y_0)\dots(u-y_n)}{(u-x_0)\dots(u-x_n)} + 1 \right].$$

С другой стороны, согласно (4) и (5) имеют место разложение

$$2L \log \left[\frac{z-\beta}{z-\alpha} G_1(z) \right] = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots + \frac{c_{2n}}{z^{2n+1}} + \dots,$$

из которого следует что

$$c_k = \int_E u^k f_L(u)\, du \qquad (k = 0, 1, 2, \dots 2n)$$

Случай 2. Последовательность (3_1) неотрицательна; тогда имеет место представление

$$s_k = \sum_{i=0}^{r} \mu_j x_j^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n)$$

где $\mu_j > 0$, $r < n$ и

$$-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_r < \infty.$$

С помощью рассуждений, примененных в случае 1, заменяя n на r заключаем, что ни одна из величин x_j не принадлежит интервалу (α, β).

Составив функцию

$$G_1(z) = 1 + \sum_{0}^{r} \frac{\mu_j}{z - x_j} = \frac{(z - y_0)\dots(z - y_r)}{(z - x_0)\dots(z - x_r)} = 1 + \frac{s_0}{z} + \dots + \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \dots,$$

где

$$-\infty < y_0 < x_0 < \dots < y_r < x_r < \infty,$$

мы тем же приемом, что и раньше убеждаемся, что ни одно из чисел y не принадлежит $(\alpha, \beta>$. Функция, удовлетворяющая условию (1) и (2) имеет в данном случае вид

$$f_L(u) = L \left[-\operatorname{sign} \frac{(u-y_0)\dots(u-y_r)}{(u-x_0)\dots(u-x_r)} + 1 \right] =$$

$$= L \{ \operatorname{sign} [-(u-y_0)\dots(u-y_r)(u-x_0)\dots(u-x_r)] + 1 \} = L [\operatorname{sign} R(u) + 1]$$

где $R(u)$ — полином степени $2r < 2n$.

Замечание 4. В случае 2 рассматриваемая проблема моментов имеет только одно решение; в случае 1 — бесчисленное множество различных решений.

Эти заключения получаются при помощи метода, изложенного в работе Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [2]).

68