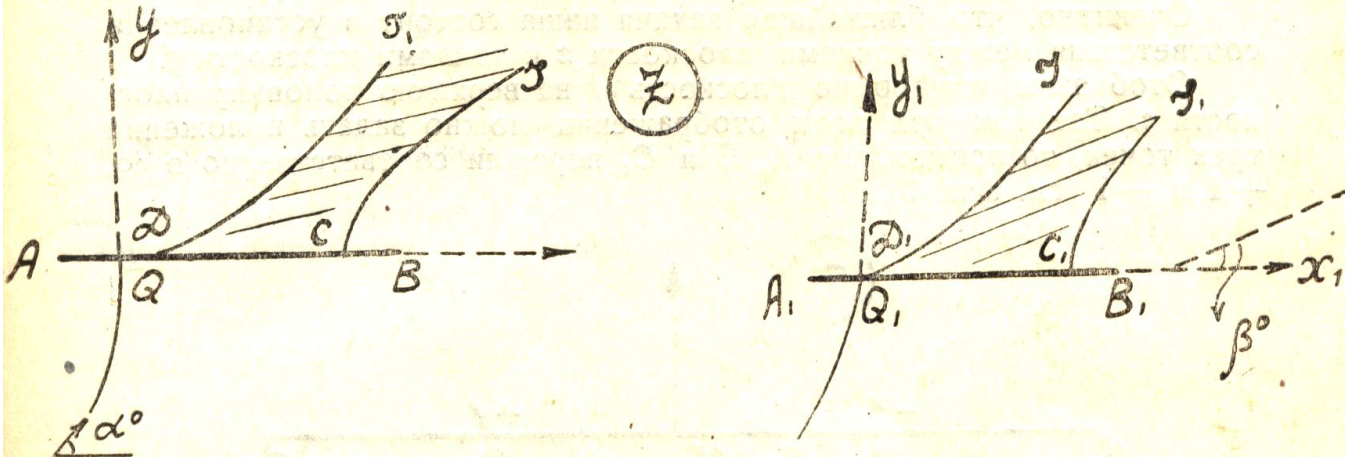


И. М. БЕЛЕНЬКИЙ

О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ ДВУХ ПЛАСТИНОК

§ 1

Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ находятся две пластинки AB и A_1B_1 , наклоненные друг к другу под углом β_0 . Рассмотрим струйное обтекание этих пластин стационарным безвихревым потоком идеальной и несжимаемой жидкости. Мы будем предполагать, что происходит плавное обтекание острых кромок A , A_1 , B и B_1 , а срыв струй происходит в некоторых точках C , D , C_1 и D_1 , лежащих на задней стороне пластин. Не нарушая общности



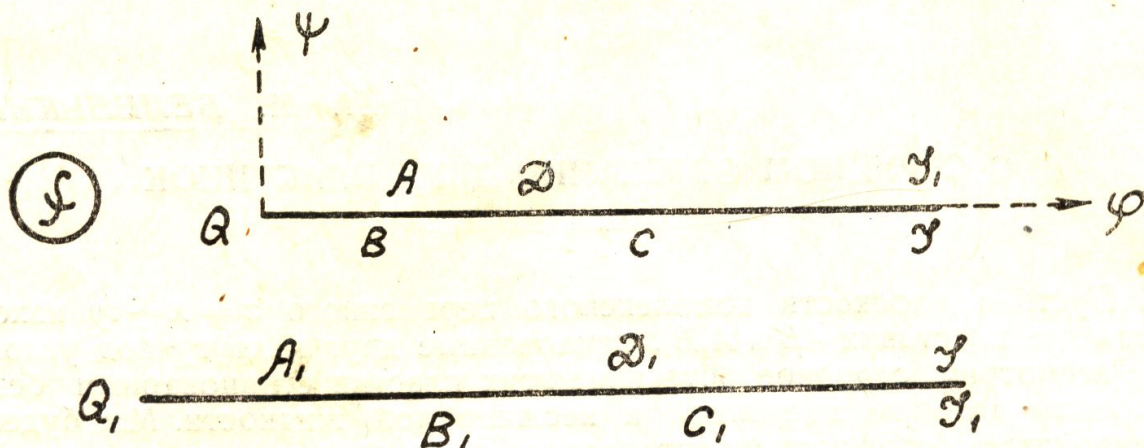
Фиг. 1

примем, что скорость течения на бесконечности равна единице и направлена под углом α_0 к пластинке AB , так что $\vec{V}_\infty = e^{i\alpha_0}$. Поток жидкости разветвляется в точках Q и Q_1 так, что часть жидкости течет по линиям QB и Q_1B_1 , плавно обтекает острые кромки B и B_1 , затем течет по верхней стороне пластин BC и B_1C_1 и, срываясь в точках C и C_1 , образует струи CI и C_1I_1 ; другая же часть жидкости течет вдоль QA и Q_1A_1 , также плавно обтекает острые кромки A и A_1 , затем течет по верхней стороне AD и A_1D_1 и, срываясь в точках D и D_1 , образует тянущиеся на бесконечность струи DI_1 и D_1I_1 .

Скорость вдоль струй, которые являются свободными границами области, занятой неподвижной жидкостью (на фиг. 1) (заштрихованная), будет постоянной по величине и равной скорости на бесконечности (т. е. в нашем случае единице), скорость же в острых кромках A , A_1 , B и B_1 будет бесконечно великой.

Построенный таким образом поток, как будто, не является физически возможным, так как в точках, где скорость бесконечно велика, получаются бесконечно большие отрицательные давления. Однако, несмотря на это; такой поток все же можно рассматривать, если из рассмотрения выкинуть небольшие области, содержащие точки, где скорость бесконечно велика.

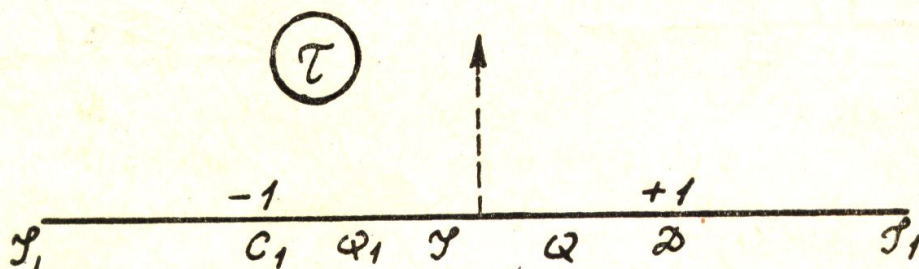
В плоскости комплексного потенциала $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ рассматриваемому течению будет соответствовать вся плоскость, разрезанная вдоль двух параллельных полупрямых. Если принять, что точке Q соответствует $f=0$ (что всегда возможно), то плоскость f будет иметь вид, указанный на фиг. 2, где соответственные точки обозначены одинаковыми буквами.



Фиг. 2

Очевидно, что ближайшая задача наша состоит в установлении соответствия между точками плоскости z и точками плоскости f .

Отобразим конформно плоскость f на верхнюю половину плоскости τ . Так как при этом отображении можно задать положение трех точек, то примем, что I_1 , D и C_1 перешли соответственно в ∞ , $+1$ и -1 (см. фиг. 3).



Фиг. 3

Пользуясь формулой Schwarz-Christoffel, напишем преобразующую функцию:

$$f = M \int \frac{(\tau - \tau_Q)(\tau - \tau_{Q_1})}{(\tau - \tau_I)} d\tau + L, \quad (1, 1)$$

где τ_Q , τ_{Q_1} и τ_I — абсциссы точек Q , Q_1 и I в плоскости τ , а M и L некоторые постоянные.

Отобразим далее верхнюю половину плоскости τ на внутренность прямоугольника со сторонами ω_1 и $-i\omega_2$ (ω_2 — мнимое число), лежащего в плоскости u так, что C_1 , D_1 , C и D перейдут соответственно в его вершины (см. фиг. 4).

Координаты точек B , Q , A , I_1 , B_1 , Q_1 , A_1 и I обозначим соответственно через b , c , a , $\omega_1 + id_1$, $b_1 + i\omega_2$, $c_1 + \omega_2$, $a_1 + \omega_2$ и id . Отображающая функция может быть представлена в такой форме:

$$\tau = A' + \frac{B'}{p(u) + C'}, \quad (1, 2)$$

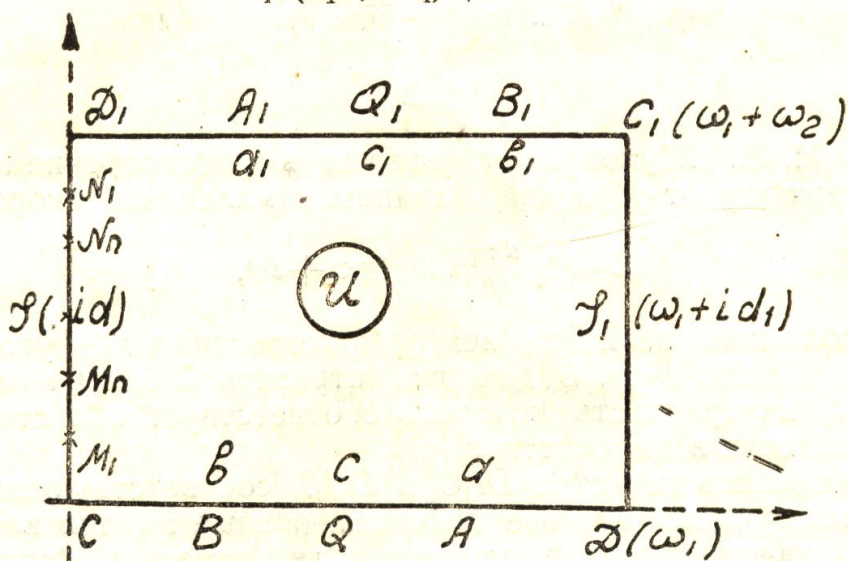
где $p(u)$ — эллиптическая функция Weierstrass с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$.

Постоянные A' , B' и C' могут быть определены из соответствия точек D , C_1 и I_1 . Пишем, что:

$$1 = A' + \frac{B'}{p(\omega_1) + C'}$$

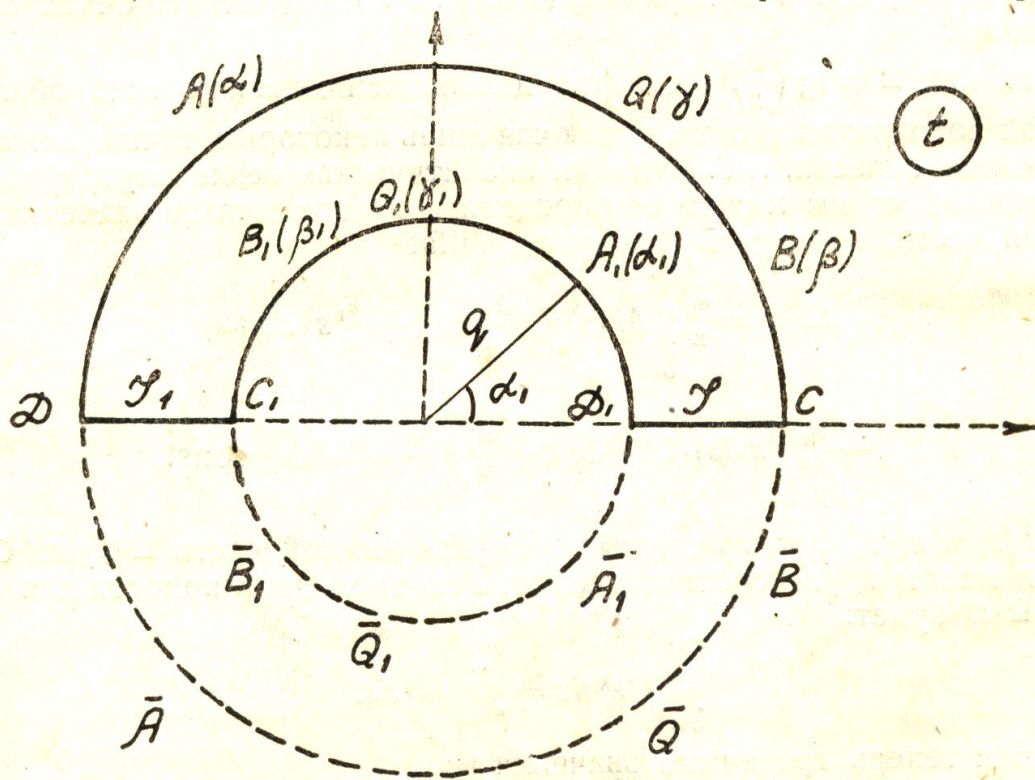
$$-1 = A' + \frac{B'}{p(\omega_1 + \omega_2) + C'}$$

$$p(\omega_1 + id_1) + C' = 0.$$



Фиг. 4

Далее отображаем конформно внутренность прямоугольника плоскости u на внутренность полукольца с радиусами 1 и $q = e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}$, лежащего в плоскости t с соответствием точек, указанным на фиг. 5.



Фиг. 5

Преобразующая функция, как легко может быть проверено, пишется так:

$$u = -\frac{i\omega_1}{\pi} \lg t. \quad (1, 3)$$

Из соответствия точек получаем следующие соотношения, связывающие параметры обеих плоскостей

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\omega_1}{\pi} \alpha; & a_1 &= \frac{\omega_1}{\pi} \alpha_1; \\ b &= \frac{\omega_1}{\pi} \beta; & b_1 &= \frac{\omega_1}{\pi} \beta_1; \\ c &= \frac{\omega_1}{\pi} \gamma; & c_1 &= \frac{\omega_1}{\pi} \gamma_1; \end{aligned} \right\} (1, 4)$$

§ 2

Следуя Н. Е. Жуковскому, введем в рассмотрение функцию, равную логарифму от обратной величины комплексной скорости, т. е.

$$\Omega = \lg \frac{dz}{df} = -\lg v + i\Theta, \quad (2, 1)$$

где v — абсолютная величина вектора скорости, а Θ — угол образованный ею с осью x -ов. Будем рассматривать Ω внутри полукольца плоскости t , внутренность которого соответствует области, занятой потоком жидкости в плоскости z .

Вдоль отрезков диаметра DI_1C_1 и D_1IC , соответствующих струям, $\Omega(t)$ принимает чисто мнимые значения, равные $i\Theta$, так как v имеет постоянное значение, равное единице. Следовательно функция $\Omega(t)$ может быть аналитически продолжена через эти отрезки диаметра на нижнее полукольцо, согласно формуле:

$$\Omega(\bar{t}) = -\overline{\Omega(t)}.$$

Отсюда следует, что значения мнимой части $\Omega(t)$ на нижних полукольцах те же, что и на верхних, т. е. Θ в сопряженных точках будет одинакова.

Так как $\Omega = \lg \left(\frac{dt}{df} \right)$ есть функция аналитическая во всей области, занятой потоком жидкости, исключая лишь некоторые точки, лежащие на границе области, т. е. функция аналитическая везде внутри кольца (см. фиг. 5), то мы можем ее определить по граничным значениям ее мнимой части, пользуясь формулой Villat¹

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} M(s) \cdot \zeta \left(\frac{i\omega_1}{\pi} \lg t + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds - \\ &- \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} m(s) \cdot \zeta \left(\frac{i\omega_1}{\pi} \lg t + \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_2 \right) ds + \text{const}, \end{aligned}$$

где $M(s)$ и $m(s)$ суть граничные значения мнимой части $\Omega(t)$ на большом и малом круге соответственно. Условием регулярности для функции $\Omega(t)$ будет:

$$\int_0^{2\pi} M(s) ds = \int_0^{2\pi} m(s) ds.$$

Напишем теперь граничные значения Θ :

$$M(s) = \begin{cases} \pi & \text{при } 0 \leq s \leq \beta \\ 0 & \text{при } \beta \leq s \leq \gamma \\ \pi & \text{при } \gamma \leq s \leq \alpha \\ 0 & \text{при } \alpha \leq s \leq \pi \end{cases}$$

¹ Villat. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, XXX III, 1912, 134.

и

$$m(s) = \begin{cases} -\beta_0 & \text{при } 0 \leq s \leq \alpha_1 \\ \pi - \beta_0 & \text{при } \alpha_1 \leq s \leq \gamma_1 \\ -\beta_0 & \text{при } \gamma_1 \leq s \leq \beta_1 \\ \pi - \beta_0 & \text{при } \beta_1 \leq s \leq \pi \end{cases}$$

Если воспользоваться замечанием о том, что Θ в сопряженных точках имеет одинаковое значение, то условие регулярности для функции $\Omega(t)$ приводит к такому соотношению между параметрами:

$$(\alpha + \beta - \gamma) + (\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1) = \pi - \beta_0. \quad (2, 2)$$

Переходя к определению $\Omega(t)$ согласно с формулой Villat и замечая, что

$$\int \zeta(x) dx = \lg \sigma(x),$$

и пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sigma(x + 2\omega_1) &= -\sigma(x) e^{2\eta_1(x+\omega_1)} \\ \sigma(x + 2\omega_2) &= -\sigma(x) e^{2\eta_2(x+\omega_2)}, \end{aligned}$$

где

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1) \text{ и } \eta_2 = \zeta(\omega_2),$$

после ряда упрощений и перехода от плоскости t к плоскости u на основании (1, 3) и (1, 4) после освобождения от логарифмов получим, что

$$\frac{dz}{df} = -e^{(2\eta_1 + 2\eta_2 + \lambda)u} \times \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u+c)\sigma(u-a-\omega_2)\sigma(u-b-\omega_2)\sigma(u+c_1+\omega_2)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)\sigma(u-c)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u+b_1+\omega_2)\sigma(u-c_1-\omega_2)}, \quad (2, 3)$$

где положено

$$\lambda = -2\eta_1 \frac{\beta_0}{\pi}. \quad (2, 4)$$

Постоянная интегрирования была определена из того условия, что при $u=0$ $\frac{dz}{df} = -1$.

§ 3

Перейдем к определению z как функции от u . Имеем, что:

$$dz = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{du} \cdot du.$$

Формулы (1, 1) и (1, 2) дают:

$$\frac{df}{d\tau} = M \frac{(\tau - \tau_Q)(\tau - \tau_{Q_1})}{(\tau - \tau_I)}$$

и

$$\frac{d\tau}{du} = -B' \frac{p'(u)}{[p(u) + c']^2}.$$

Так как точкам Q , Q_1 и I в плоскости u соответствуют значения равные соответственно c , $\omega_2 + c_1$ и id , то из (1, 2) следуют такие три соотношения:

$$\tau_Q = A' + \frac{B'}{p(\omega_1) + C'}$$

$$\tau_{Q_1} = A' + \frac{B'}{p(\omega_2 + c_1) + C'}$$

$$\tau_I = A' + \frac{B'}{p(id) + C'}$$

Пользуясь этими соотношениями, а также формулой (1, 2), представим $\frac{df}{d\tau}$ в такой форме:

$$\frac{df}{d\tau} = \text{const} \frac{[p(u) - p(c)] [p(u) - p(\omega_2 + c_1)]}{[p(u) - p(id)] [p(u) - p(\omega_1 + id_1)]}.$$

Найденные выражения для производных $\frac{df}{d\tau}$ и $\frac{d\tau}{du}$ в совокупности с (2, 3), выражающей $\frac{dz}{df}$, дают возможность записать z в виде функции от u . Собирая все постоянные, не зависящие от u , в постоянную, которую обозначим буквой C , и пользуясь хорошо известными формулами:

$$p(x) - p(y) = - \frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)}$$

и

$$p'(x) = 2 \frac{\sigma(x+\omega_1)\sigma(x+\omega_2)\sigma(x-\omega_1-\omega_2)}{\sigma^3(x)\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_1+\omega_2)},$$

а также и такими

$$\begin{aligned} \sigma(x+\omega_1) &= -\sigma(x-\omega_1)e^{2\eta_1 x} \\ \sigma(x+\omega_2) &= -\sigma(x-\omega_2)e^{2\eta_2 x}, \end{aligned}$$

найдем:

$$z = C \int \Phi(u) du + C_0, \quad (3, 1)$$

где C_0 — постоянная интегрирования, а

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= e^{\lambda u} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma(u-b_1-\omega_2)\sigma^2(u+c)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u+b_1+\omega_2)} \times \\ &\times \frac{c^2(u+c_1+\omega_2)\sigma(u+\omega_1)\sigma(u+\omega_2)\sigma(u+\omega_1+\omega_2)\sigma(u)}{\sigma(u-id)\sigma(u+id)\sigma^3(u+\omega_1+id_1)\sigma^3(u-\omega_1-id_1)}. \end{aligned} \quad (3, 2)$$

Исследуем функцию $\Phi(u)$, для чего вначале выпишем условие регулярности $\Omega(t)$ (2, 2) в параметрах плоскости u . На основании (1, 4) и (2, 2) получаем, что

$$(a+b-c) + (a_1+b_1-c_1) = \omega_1 \left(1 - \frac{\beta_0}{\pi}\right). \quad (3, 3)$$

Если воспользоваться хорошо известным соотношением

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

а также значением λ по (2, 4), то из (3, 2) легко получить следующие два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(u+2\omega_1) &= \Phi(u) \\ \Phi(u+2\omega_2) &= \Phi(u)e^{-2\beta_0 i} \end{aligned} \right\} \quad (3, 4)$$

т. е. $\Phi(u)$ есть квази-периодическая функция с множителями, равными 1 и $e^{-2\beta_0 i}$.

Известно, что если квази-периодическая функция $\Phi(u)$ с множителями μ и μ_1 имеет полюсы в точках a_k кратности α_k , то она может быть представлена в виде такого ряда:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \sum_k \left[A_k f(u-a_k) - B_k f'(u-a_k) + \right. \\ &\left. + \frac{C_k}{2} f''(u-a_k) \dots + (-1)^{\alpha_k-1} \frac{E_k}{(\alpha_k-1)!} f^{(\alpha_k-1)}(u-a_k) \right], \end{aligned}$$

где A_k суть вычеты функции $\Phi(u)$ в полюсах a_k , а

$$f(u) = - \frac{H'(0)}{H(r)} \cdot \frac{H(u-r)}{H(u)} e^{su}.$$

Здесь $H(u)$ есть функция Якоби, а постоянные r и s определяются из таких соотношений¹:

¹ См. P. Appel et E. Lacour. „Principes de la théorie des Fonctions Elliptiques et Applications“. Chap. XI.

$$s = \frac{1}{2\omega_1} \lg \mu$$

$$r = \frac{1}{\pi i} \{ \omega_1 \lg \mu_1 - \omega_2 \lg \mu \}.$$

Полагая в нашем случае $\mu = 1$ и $\mu_1 = e^{-2\beta_0 i}$, будем иметь, что

$$s = 0$$

$$r = -2\omega_1 \frac{\beta_0}{\pi}$$

и простейший элемент разложения $\Phi(u)$ запишется так:

$$f(u) = \frac{H'(0)}{H\left(2\omega_1 \frac{\beta_0}{\pi}\right)} \cdot \frac{H\left(u + 2\omega_1 \frac{\beta_0}{\pi}\right)}{H(u)}.$$

Следовательно $\Phi(u)$ может быть представлена так.

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & A_1 f(u+a) + A_2 f(u+b) + A_3 f(u+a_1 + \omega_2) + \\ & + A_4 f(u+b_1 + \omega_2) + A_5 f(u+id) + A_6 f(u-id) + \\ & + A_7 f(u+\omega_1 + id_1) + A_8 f(a-\omega_1 - id_1) - B_1 f'(u+\omega_1 + id_1) - \\ & - B_2 f'(u-\omega_1 - id_1) + \frac{C_1}{2!} f''(a+\omega_1 + \\ & + id_1) + \frac{C_2}{2!} f''(u-\omega_1 - id_1). \end{aligned} \quad (3, 5)$$

Задача определения $z(u)$ сводится, таким образом, к нахождению интеграла:

$$\int \frac{H(u+x)}{H(u)} du.$$

Последний интеграл в замкнутой форме не берется, поэтому интегрирование можно вести путем представления подинтегрального выражения в виде ряда¹:

Имеем, что

$$\frac{\sigma(u+x)}{\sigma(u)\sigma(x)} = e^{\frac{\eta_1 ux}{\omega_1}} \left\{ \frac{\pi}{2\omega_1} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2\omega_1} \right] + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{m,n>0} q^{2mn} \sin \frac{\pi}{\omega_1} (mu + nx) \right\},$$

с другой стороны

$$H(u) = H'(0) e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot \sigma(u).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{H(u+x)}{H(u)} &= e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(x^2+2ux)} \frac{\sigma(u+x)}{\sigma(u)} = \\ &= \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{H(x)}{H'(0)} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2\omega_1} + 4 \sum_{m,n>0} q^{2mn} \sin \frac{\pi}{\omega_1} (mu + nx) \right). \end{aligned}$$

Дальнейшее вычисление z не представляет уже затруднений, однако ввиду громоздкости получаемых формул мы их выписывать здесь не будем.

§ 4

Переходим теперь к определению сил, действующих на пластинки. Так как требование плавного обтекания острых кромок пластинок приводит к бесконечно большим скоростям в них, а значит, и к бесконечно большим отрицательными давлениям, то при подсчете сил,

¹ Уиттекер и Ватсон. „Курс совр. анализа“, т. II, стр. 296.

действующих на пластинки, мы не будем включать бесконечно малые окрестности угловых точек, т. е. интегрирование будем производить в смысле Cauchy. В знак этого при интегралах будем ставить звездочки. Обозначим силу, действующую на пластинку AB , через P_y . Имеем, что:

$$P_y = \int_{CBQAD}^* p \cdot \cos(n, y) ds + \int_{DC} p_0 \cos(n, y) ds,$$

где p — давление в точке омываемого контура,

p_0 — постоянное давление в застойной области, равное давлению на бесконечности,

ds — элемент контура AB ,

n — направление внутренней нормали к контуру.

Выражая давление через квадрат скорости, на основании теоремы Bernoulli

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - v^2)$$

и замечая, что вдоль пластинки

$$\cos(n, y) ds = -dx,$$

находим, что:

$$P_y = -\frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* (1 - v^2) dx - \frac{\rho}{2} \oint_{CBQDC} p_0 dx.$$

Следуя Kirchhoff, введем функцию

$$\omega = \frac{dz}{df} = \frac{1}{v} \cdot e^{i\theta},$$

тогда

$$v^2 = \frac{1}{\omega \cdot \bar{\omega}}.$$

Замечая, что $\oint p_0 dx = 0$ и вдоль по пластинке $dx = dz$, пишем, что:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \left(\frac{1}{\omega \cdot \bar{\omega}} - 1 \right) dz. \quad (4, 1)$$

Последнее выражение можно представить в несколько иной форме, если заметить, что вдоль пластинки AB df вещественно, а $\omega = \bar{\omega}$, и писать так:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \left(\frac{1}{\omega \cdot \bar{\omega}} - 1 \right) \frac{dz}{df} \cdot df = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \left(\frac{1}{\omega} - \bar{\omega} \right) \cdot df.$$

Рассматривая ω как функцию от t и замечая, что вдоль отрезков действительной оси CD_1 и C_1D , соответствующих струям

$$|\omega(t)| = 1,$$

мы можем ее аналитически продолжить через эти отрезки диаметра на нижнее полукольцо (см. фиг. 5) согласно формуле:

$$\omega(\bar{t}) = \frac{1}{\omega(t)}. \quad (4, 2)$$

Пользуясь этим, P_y можно представить так:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \frac{df}{\omega(t)} - \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \frac{df}{\omega(\bar{t})}$$

или окончательно:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \oint_{CQD\bar{Q}C}^* \frac{df}{\omega(t)}. \quad (4, 3)$$

Дадим теперь другое выражение для P_y .

Из (4, 1) имеем, что:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \left(\frac{1}{\omega \cdot \bar{\omega}} - 1 \right) \cdot \frac{dz}{df} \cdot df = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \left(\frac{1}{\omega} - \omega \right) \cdot df,$$

а это на основании (4, 2) дает:

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \omega(\bar{t}) df - \frac{\rho}{2} \int_{CBQAD}^* \omega(t) df.$$

Соединяя оба интеграла в один, находим, что:

$$P_y = - \frac{\rho}{2} \oint_{CQD\bar{Q}C}^* \omega(t) \cdot df. \quad (4, 4)$$

Перейдем теперь к определению силы, действующей на пластинку A_1B_1 , которую обозначим через P_{y_1} . Будем пользоваться здесь системой координат $z_1 = x_1 + iy_1$ (см. фиг. 1). Легко видеть, что

$$z_1 = \text{const} + e^{i\beta_0} z.$$

Повторяя буквально те же рассуждения, которые были проведены для пластинки AB , мы придем к таким двум формулам, аналогичным формулам (4, 3) и (4, 4):

$$P_{y_1} = \frac{\rho}{2} \oint_{C_1Q_1D_1\bar{Q}_1C_1}^* \frac{df_1}{\omega_1(t)},$$

и

$$P_{y_1} = - \frac{\rho}{2} \oint_{C_1Q_1D_1\bar{Q}_1C_1}^* \omega_1(t) df_1,$$

где

$$f_1(z_1) = f(z)$$

и

$$\omega_1 = \frac{dz_1}{df_1},$$

но

$$\omega_1 = \frac{dz}{df} \cdot \frac{dz_1}{dz} = \omega \cdot e^{i\beta_0},$$

а потому имеем, что:

$$e^{i\beta_0} \cdot P_{y_1} = \frac{\rho}{2} \oint_{C_1Q_1D_1\bar{Q}_1C_1}^* \frac{df}{\omega(t)} \quad (4, 5)$$

и

$$e^{-i\beta_0} P_{y_1} = - \frac{\rho}{2} \oint_{C_1Q_1D_1\bar{Q}_1C_1}^* \omega(t) \cdot df. \quad (4, 6)$$

Вычисление интегралов будем производить в плоскости прямоугольника u . Тогда кругу $CQD\bar{Q}C$ будет соответствовать отрезок

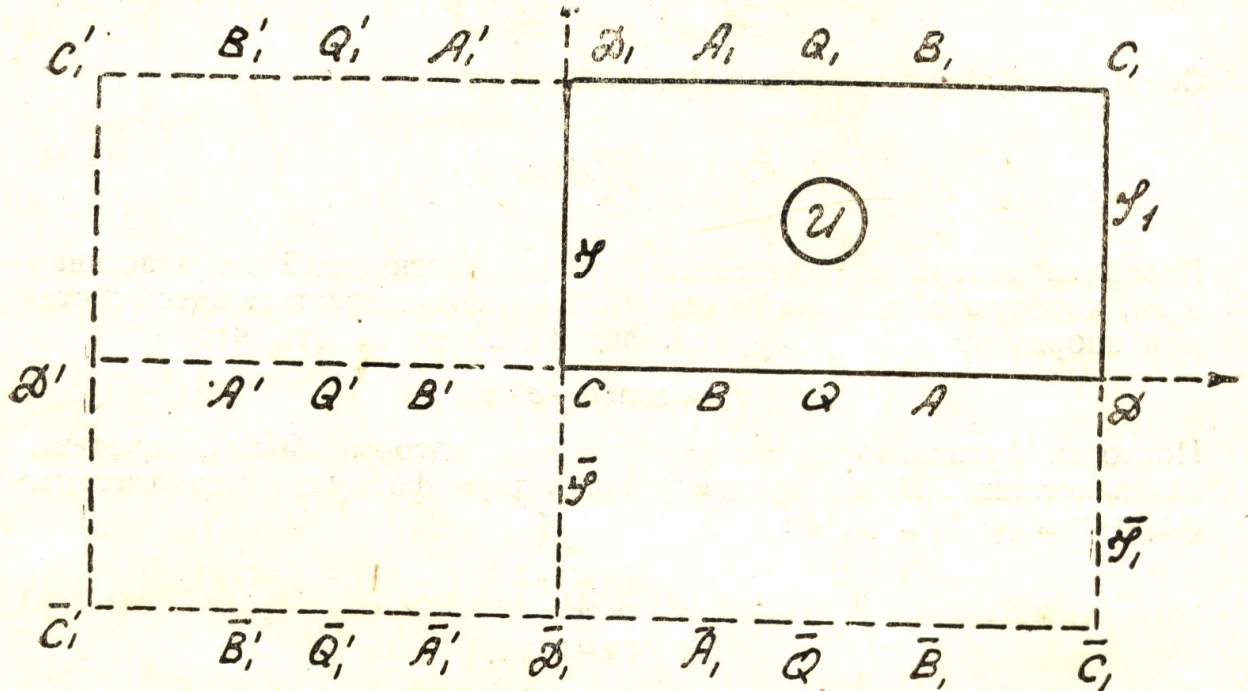
$D'A'Q'B'CBQAD$, а круг $C_1Q_1D_1Q_1\bar{C}_1$ отрезок $C_1Q_1D_1Q_1\bar{C}_1$ (см. фиг. 6). Складывая (4, 3) и (4, 5), а также (4, 4) и (4, 6) и переходя от переменной t к переменной u , можем записать такие два выражения:

$$P_y + e^{i\beta_0} P_{y_1} = \frac{\rho}{2} \int_{D'Q'QD}^* \frac{1}{\omega(u)} \cdot \frac{df}{du} du + \frac{\rho}{2} \int_{C_1Q_1D_1Q_1\bar{C}_1}^* \frac{1}{\omega(u)} \cdot \frac{df}{du} \cdot du$$

и

$$-(P_y + e^{-i\beta_0} P_{y_1}) = \frac{\rho}{2} \int_{D'CD}^* \omega(u) \cdot \frac{df}{du} du + \frac{\rho}{2} \int_{C_1D_1C_1}^* \omega(u) \cdot \frac{df}{du} \cdot du.$$

Представим подынтегральное выражение через $\Phi(u)$.



Фиг. 6

Из (3, 1) следует, что:

$$\frac{dz}{du} = C \cdot \Phi(u).$$

Пользуясь значением ω , легко видеть, что:

$$\omega(u) \cdot \frac{df}{du} = \frac{dz}{du} = C \cdot \Phi(u).$$

Далее рассмотрим функцию:

$$\Upsilon(u) = \frac{1}{\omega(u)} \cdot \frac{df}{du} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{df}{du}.$$

Подставляя сюда значение $\frac{df}{dz}$ и $\frac{df}{du}$, после ряда упрощений получим, что:

$$\Upsilon(u) = -C \cdot \Phi(-u).$$

На основании полученного, выражения для сил представятся так:

$$P_y e^{i\beta_0} + P_y = -\frac{\rho C}{2} \int_{D'Q'QD}^* \Phi(-u) du - \frac{\rho C}{2} \int_{C_1Q_1D_1Q_1\bar{C}_1}^* \Phi(-u) du$$

и

$$-(P_y + e^{-i\beta_0} P_{y_1}) = \frac{\rho C}{2} \int_{D'CD}^* \Phi(u) du + \frac{\rho C}{2} \int_{C_1 \bar{D}_1 C_1'}^* \Phi(u) du.$$

Заменяя в первом из этих выражений u на $(-u)$ и замечая, что $\Phi(u)$ имеет период $2\omega_1$ (см. 3, 4), а значит имеют место такие два равенства (см. фиг. 6):

$$\begin{aligned} \int_{\bar{C}_1 \bar{I}_1 D} \Phi(u) du + \int_{D_1 I_1 \bar{C}_1'} \Phi(u) du &= 0 \\ \int_{D_1 I_1 C_1} \Phi(u) du + \int_{C_1' I_1' D'} \Phi(u) du &= 0 \end{aligned}$$

приходим к таким контурным интегралам:

$$P_y + e^{i\beta_0} P_{y_1} = \frac{\rho C}{2} \int_{k_1}^* \Phi(u) du \quad (4, 7)$$

и

$$-(P_y + e^{-i\beta_0} P_{y_1}) = \frac{\rho C}{2} \int_{k_2}^* \Phi(u) du, \quad (4, 8)$$

где контуром k_1 служит прямоугольник $\bar{C}_1 \bar{D}_1 \bar{C}_1' D C D' \bar{C}_1'$, а контуром k_2 служит прямоугольник $D' C D C_1 D_1 C_1' D'$. По теореме Cauchy о вычетах можем записать, что:

$$\begin{aligned} P_y + e^{i\beta_0} P_{y_1} = \frac{\rho C}{2} \cdot 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-b_1 - \omega_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-a_1 - \omega_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(\omega_1 - id_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-b) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-a) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-\omega_1 - id_1) + \operatorname{Res} \Phi(-id) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -(P_y + e^{-i\beta_0} P_{y_1}) = \frac{\rho C}{2} \cdot 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-a) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-b) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(\omega_1 + id_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(\omega_2 - a_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(\omega_2 - b_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Phi(-\omega_1 + id_1) + \operatorname{Res} \Phi(id) \right\}. \end{aligned}$$

Из разложения (3, 5) следует, что:

$$\begin{aligned} A_1 = \operatorname{Res} \Phi(-a); & \quad A_5 = \operatorname{Res} \Phi(-id); \\ A_2 = \operatorname{Res} \Phi(-b); & \quad A_6 = \operatorname{Res} \Phi(id); \\ A_3 = \operatorname{Res} \Phi(-a_1 - \omega_2); & \quad A_7 = \operatorname{Res} \Phi(-\omega_1 - id_1); \\ A_4 = \operatorname{Res} \Phi(-b_1 - \omega_2); & \quad A_8 = \operatorname{Res} \Phi(\omega_1 + id_1). \end{aligned}$$

На основании формул (3, 4) следует, что:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \Phi(\omega_1 - id_1) &= \operatorname{Res} \Phi(-\omega_1 - id_1) = A_7 \\ \operatorname{Res} \Phi(\omega_2 - a_1) &= e^{-2\beta_0 i} \operatorname{Res} \Phi(-\omega_2 - a_1) = e^{-2\beta_0 i} A_3 \\ \operatorname{Res} \Phi(\omega_2 - b_1) &= e^{-2\beta_0 i} \operatorname{Res} \Phi(-b_1 - \omega_2) = e^{-2\beta_0 i} A_4 \\ \operatorname{Res} \Phi(-\omega_1 + id_1) &= \operatorname{Res} \Phi(+\omega_1 + id_1) = A_8 \end{aligned}$$

Следовательно можем записать:

$$P_y + e^{i\beta_0} P_{y_1} = \frac{\pi i \rho C}{2} \{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2A_5 + 2A_7\} \quad (4, 9)$$

и

$$P_y + e^{-i\beta_0} P_{y_1} = -\frac{\pi i \rho C}{2} \cdot \{A_1 + A_2 + e^{-2\beta_0 i} (A_3 + A_4) + 2A_6 + 2A_8\} \quad (4, 10)$$

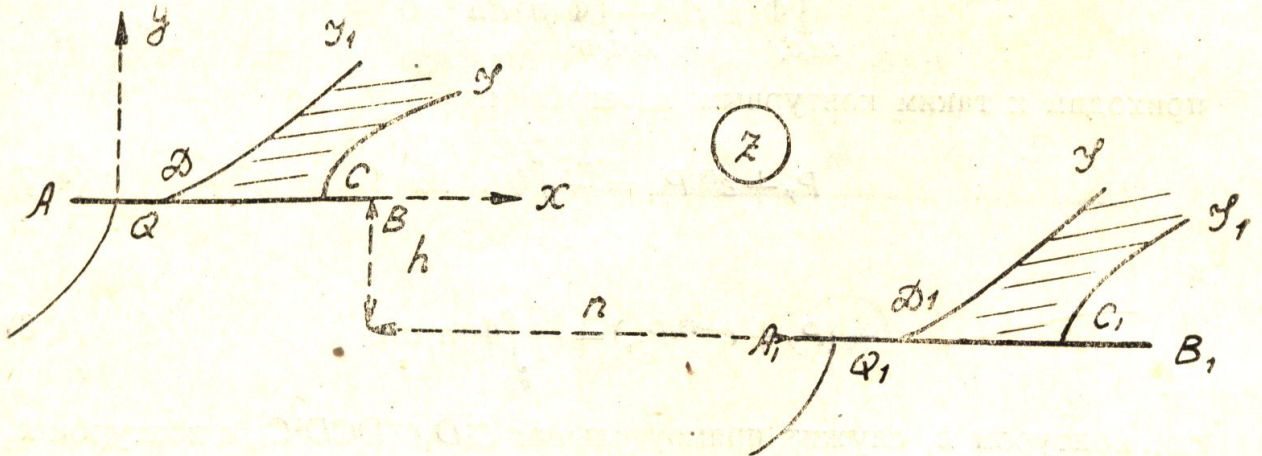
Из этих двух выражений можно найти отдельно P_y и P_{y_1} . Имеем, что:

$$\sin \beta_0 \cdot P_y = -\frac{\pi \rho C}{2} \{ \cos \beta_0 (A_1 + A_2) + e^{-i\beta_0} (A_3 + A_4 + A_5 + A_7) + e^{i\beta_0} (A_6 + A_8) \} \quad (4, 11)$$

$$\sin \beta_0 P_{y_1} = \frac{\pi \rho C}{2} \{ A_1 + A_2 + \cos \beta_0 e^{-i\beta_0} (A_3 + A_4) + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \} \quad (4, 12)$$

§ 5

Рассмотрим тот случай, когда пластинки AB и A_1B_1 будут параллельны (см. фиг. 7).



Фиг. 7

Этот случай мы получим, если в предыдущих формулах положим $\beta_0 = 0$.

Условие (3, 3) примет вид:

$$(a + b - c) + (a_1 + b_1 - c_1) = \omega_1. \quad (5, 1)$$

Замечая, что [см. (2, 4)]

$$\lambda = 0, \quad (5, 2)$$

получаем для $\frac{dz}{df}$ такое значение:

$$\frac{dz}{df} = -e^{(2\gamma_1 + 2\gamma_2)u} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u+c)\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma(u-b_1-\omega_2)\sigma(u+c_1+\omega_2)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)\sigma(u-c)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u+b_1+\omega_2)\sigma(u-c_1-\omega_2)}, \quad (5, 3)$$

и, наконец, из (3, 2) следует, что

$$\Phi(u) = \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma(u-b_1-\omega_2)\sigma^2(u+c)\sigma^2(u+c_1+\omega_2)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u+b_1+\omega_2)\sigma(u-id)\sigma(+id)\sigma^3(u+\omega_1+id_1)\sigma^3(u-\omega_1-id_1)} \quad (5, 4)$$

и далее получаем [см. (3, 4)]:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(u + 2\omega_1) &= \Phi(u) \\ \Phi(u + 2\omega_2) &= \Phi(u) \end{aligned} \right\} \quad (5, 5)$$

т. е. в случае параллельных пластинок $\Phi(u)$ есть эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$. На основании теоремы Hermité о разложении эллиптических функций пишем, что

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= A_1 Z(u+a) + A_2 Z(u+b) + A_3 Z(u+a_1+\omega_2) + \\ &+ A_4 Z(u+b_1+\omega_2) + A_5 Z(u+id) + A_6 Z(u-id) + \\ &+ A_7 Z(u+\omega_1+id_1) + A_8 Z(u-\omega_1-id_1) + B_1 Z'(u+\omega_1+id_1) + \\ &+ B_2 Z'(u-\omega_1-id_1) + C_1 Z''(u+\omega_1+id_1) + \\ &+ C_2 Z''(u-\omega_1-id_1) + D, \end{aligned} \quad (5, 6)$$

где

$$Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)}.$$

Так как $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ суть вычеты функции $\Phi(u)$ относительно полюсов, лежащих в параллелограмме периодов (см. фиг. 6), то должно иметь место следующее соотношение:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = 0. \quad (5, 7)$$

Определим теперь z . Подставляя в (3, 1) вместо $\Phi(u)$ его выражение по (5, 6), найдем, что:

$$z(u) = C \{ A_1 \lg H(u+a) + A_2 \lg H(u+b) + A_3 \lg H(u+a_1+\omega_2) + \\ + A_4 \lg H(u+b_1+\omega_2) + A_5 \lg H(u+id) + A_6 \lg H(u-id) + \\ + A_7 \lg H(u+\omega_1+id_1) + A_8 \lg H(u-\omega_1-id_1) + B_1 Z(u+\omega_1+id_1) + \\ + B_2 Z(u-\omega_1-id_1) + C_1 Z'(u+\omega_1+id_1) + C_2 Z'(u-\omega_1-id_1) + \\ + D.u \} + C_0. \quad (5, 8)$$

Постоянная C_0 связана с выбором начала системы координат и может быть определена из условия, что

$$z(c) = 0.$$

Посмотрим из каких условий могут быть определены введенные нами параметры $a, b, c, a_1, b_1, c_1, d, d_1, \frac{\omega_1}{-i\omega_2}, C = c' + ic''$.

Для определения этих 11 чисел мы имеем: условие (5, 1), два условия, выражающие скорость на бесконечности [см. (5, 3)],

$$e^{i\alpha_0} = \left. \frac{dz}{df} \right|_{u=id}$$

$$e^{i\alpha_0} = \left. \frac{dz}{df} \right|_{u=\omega_1+id_1}$$

и, наконец,

$$AB = l_1 = z(b) - z(a)$$

$$A_1 B_1 = l_2 = z(\omega_2 + b_1) - z(\omega_2 + a_1)$$

$$AD = s_1 = z(\omega_1) - z(a)$$

$$CB = s_2 = z(b) - z(0)$$

$$A_1 D_1 = s_3 = z(\omega_2) - z(\omega_2 + a_1)$$

$$C_1 B_1 = s_4 = z(\omega_2 + b_1) - z(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\cdot n - ih = z(\omega_2 + a_1) - z(b)$$

т. е. получаем одиннадцать уравнений — равное числу неизвестных.

Здесь длины пластинок $AB(l_1)$ и $A_1 B_1(l_2)$, расстояние между ними h и вынос n , а также положение точек отрыва струй $AD(s_1)$, $CB(s_2)$, $A_1 D_1(s_3)$ и $C_1 B_1(s_4)$ задаются. Однако, ввиду сложности получаемых уравнений, не удастся определить параметры через заданные величины. Подсчет можно произвести, задавая численные значения параметров в соответствии с имеющимися соотношениями, а затем найти все линейные размеры, т. е. длины пластинок, расстояние между ними, вынос, а также положение точек отрыва струй.

При подсчете сил, действующих на пластинки, нельзя пользоваться формулами (4, 11) и (4, 12) для P_v и P_{y_i} , так как подставляя туда $\beta_0 = 0$ и пользуясь (5, 7), получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому здесь мы ограничимся подсчетом суммарной силы воздействия жидкости на обе пластинки. Полагая в формулах (4, 9) и (4, 10) $\beta_0 = 0$, получаем:

$$P_y + P_{y_i} = \frac{\pi i \rho C}{2} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2A_5 + 2A_7)$$

и

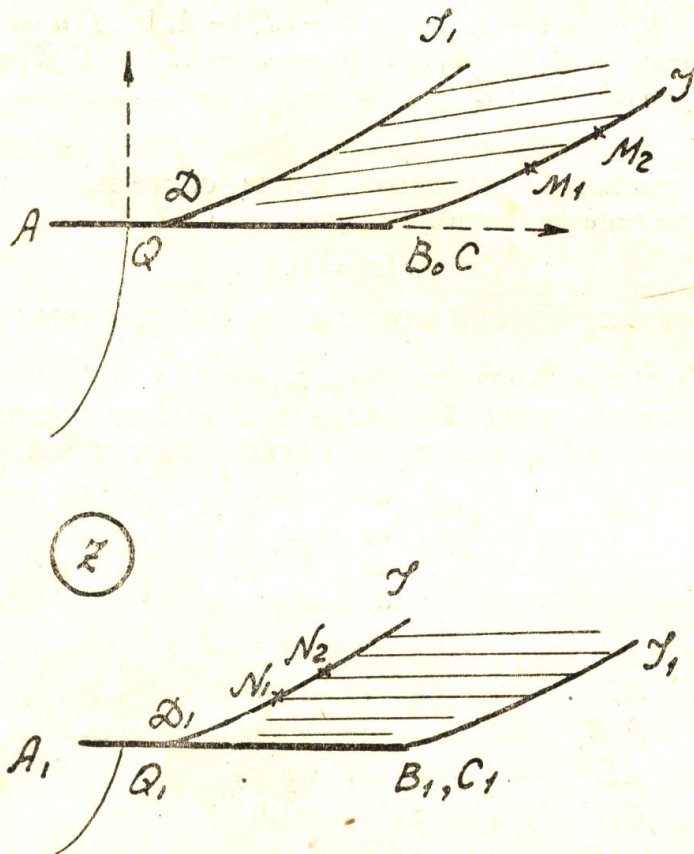
$$P_y + P_{y_1} = -\frac{\pi i \rho C}{2} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2A_6 + 2A_8).$$

Если воспользоваться формулой (5, 7), то оба эти выражения примут такую форму:

$$P_y + P_{y_1} = \frac{\pi i \rho C}{2} (A_5 - A_6 + A_7 - A_8). \quad (5, 9)$$

§ 6.

В этом параграфе мы рассмотрим обтекание двух параллельных пластинок по схеме С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева¹.



Фиг. 8

Здесь мы имеем срыв струй с концов пластинок B и B_1 и плавное обтекание обеих острых кромок A и A_1 с последующим срывом струй с задней стороны в некоторых точках D и D_1 (см. фиг. 8).

Этот случай получится из предыдущего, если мы потребуем совпадения точек B и C , а также B_1 и C_1 . Для этого нужно положить (см. фиг. 4)

$$b = 0 \text{ и } b_1 = \omega_1, \quad (6, 1)$$

и условие (5, 1) примет вид:

$$a + a_1 - c - c_1 = 0. \quad (6, 2)$$

Подставляя значения b и b_1 по (6, 1) в (5, 3) и замечая, что

$$-e^{(2\eta_1 + 2\eta_2)u} \sigma(u - \omega_1 - \omega_2) = \sigma(u + \omega_1 + \omega_2),$$

¹ С. А. Чаплыгин и А. Л. Лаврентьев. „О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности“. Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933 г.

находим для $\frac{dz}{df}$ такое значение:

$$\frac{dz}{df} = \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+c)\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma(u+c_1+\omega_2)}{\sigma(u+a)\sigma(u-c)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u-c_1-\omega_2)}. \quad (6, 3)$$

Если как и раньше обозначить $\frac{dz}{df}$ через $\omega(u)$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\omega(u+2\omega_1) = \omega(u)$$

$$\omega(u+2\omega_2) = \omega(u)$$

т. е. $\omega(u)$ есть эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$.

Относительно формы струй будем предполагать, что они не имеют точек перегиба и угол, образованный вектором скорости с осью x -ов, меняется монотонно, вдоль струй от нуля до α_0 ¹.

Покажем, что производная от $\omega(u)$ по u обращается в нуль в точках $u=id$ и $u=\omega_1+id_1$. Возьмем вдоль струи BI последовательность точек $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Ввиду нашего допущения о монотонности изменения угла поворота касательной вдоль струй, мы всегда можем выбрать такую последовательность точек $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$ вдоль струи D_1I так, чтобы направления касательных в них совпадали с направлением касательных в точках $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. В плоскости четырехугольника u (см. фиг. 4) точкам $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ и N_1, N_2, N_n, \dots будут соответствовать две последовательности точек

$$u_{M_1}, u_{M_2}, \dots, u_{Mn}, \dots$$

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \dots, u_{Nn}, \dots$$

каждая из которых сходится к точке $u=id$. Таким образом можем записать, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{Mn}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{Nn}) = id$$

и

$$\begin{aligned} \omega(M_1) &= \omega(N_1) = e^{i\alpha_1} \\ \omega(M_2) &= \omega(N_2) = e^{i\alpha_2} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega(M_n) &= \omega(N_n) = e^{i\alpha_n} \\ \omega(id) &= e^{i\alpha_0} \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ — углы, образованные касательными в точках $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ с осью x -ов. Так как

$$\omega(u_{Mn}) - \omega(u_{Nn}) = 0,$$

то

$$\left. \frac{d\omega(u)}{du} \right|_{u=id} = \lim_{\substack{u_{Mn} \rightarrow id \\ u_{Nn} \rightarrow id}} \frac{\omega(u_{Mn}) - \omega(u_{Nn})}{u_{Mn} - u_{Nn}} = 0$$

Аналогичное рассуждение, проведенное для точки $I_1(u = \omega_1 + id_1)$, дает, что:

$$\left. \frac{d\omega(u)}{du} \right|_{u = \omega_1 + id_1} = 0$$

¹ Гипотезу о монотонном изменении направления вектора скорости вдоль струй впервые высказал Н. И. Ахиезер в работе „О плоскопараллельном потоке через бесконечную решетку“. Научн. зап. Харьк. авиац. инст., вып. 2, 1934 г., стр. 5.

Рассмотрим функцию

$$\omega_1(u) = \omega(u) - e^{i\alpha_0}$$

т. к. $\omega(u)$ есть эллиптическая функция четвертого порядка, т. е. каждое значение она принимает в параллелограмме периодов четыре раза, то $\omega_1(u)$ будет также эллиптической функцией четвертого порядка.

Точки $u=id$ и $u=\omega_1+id_1$ будут нулями $\omega_1(u)$, т. к. $\omega(id) = \omega(\omega_1+id_1) = e^{i\alpha_0}$. Выше мы показали, что в этих точках обращается в нуль $\frac{d\omega(u)}{du}$, следовательно в этих точках обратится в нуль и $\omega_1'(u)$, т. е.

$$\omega_1'(id) = 0$$

$$\omega_1'(\omega_1+id_1) = 0.$$

Таким образом мы приходим к тому, что точки $u=id$ и $u=\omega_1+id_1$ служат нулями второй кратности для функции $\omega_1(u)$. А потому $2id+2(\omega_1+id_1)$ должно быть сравнимо с суммой полюсов $\omega_1(u)$ по системе модулей $(2\omega_1, 2\omega_2)$, т. е. должно иметь место такое сравнение:

$$2id+2(\omega_1+id_1) \equiv -a+c-a_1-\omega_2+c_1+\omega_2(2\omega_1, 2\omega_2).$$

Принимая во внимание соотношение (6, 2), приходим к тому, что

$$2id+2id_1 = m \cdot 2\omega_2,$$

где m целое число.

Но $|id| < |\omega_2|$ и $|id_1| < |\omega_2|$, поэтому $m=1$ и

$$d+d_1 = \frac{\omega_2}{i}. \quad (6, 4)$$

$\Phi(u)$ будет попрежнему эллиптической функцией, и ее значение получим, полагая в (5, 4) $b=0$ и $b_1=\omega_1$. Здесь же воспользуемся следующими формулами:

$$p'(x) = 2 \frac{\sigma(x+\omega_1)\sigma(x+\omega_2)\sigma(x-\omega_1-\omega_2)}{\sigma^3(x)\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_1+\omega_2)}$$

и

$$p'(x) = -\frac{\sigma(2x)}{\sigma^4(x)},$$

следовательно

$$\sigma(x)\sigma(x+\omega_1)\sigma(x+\omega_2)\sigma(x-\omega_1-\omega_2) = -\frac{1}{2}\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_1+\omega_2)\cdot\sigma(2x).$$

Пользуясь этим, $\Phi(u)$ с точностью до постоянного множителя, который включим в C (см. 3, 1), может быть представлена так:

$$\Phi(u) = e^{6\eta_1 u - 2c_1 \eta_2} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma^2(u+c)\sigma^2(u+c_1+\omega_2)\sigma(2u)}{\sigma(u+a)\sigma(u+a_1+\omega_2)\sigma(u+id)\sigma(u-id)\sigma^3(u+\omega_1+id_1)\sigma^3(u+\omega_1-id_1)}. \quad (6, 5)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что при u вещественном, а также при $u=v+\omega_2$, где v — вещественно, $\Phi(u)$ будет вещественным¹. Отсюда будет следовать, что C , стоящее в выражении

$$\frac{dz}{du} = C \cdot \Phi(u)$$

¹ Достаточно заметить, что

$$e^{-2c_1 \eta_2} \frac{\sigma(u-a_1-\omega_2)\sigma^2(u+c_1+\omega_2)}{\sigma(u+a_1+\omega_2)} = \frac{\theta(u-a_1)\theta^2(u+c_1)}{H'^2(0)\theta(u+a_1)} \cdot e^{\frac{2\eta_1}{\omega_1}(c_1-a_1)u + \frac{\eta_1}{\omega_1}(u^2+c_1^2) + \omega_2 \eta_2}$$

будет вещественным. В самом деле вещественные значения u соответствуют пластинке, вдоль по которой $\frac{dz}{du}$ будет также вещественным,

На основании теоремы о разложении эллиптических функций имеем, что:

$$\Phi(u) = A_1 Z(u+a) + A_2 Z(u+a_1+\omega_2) + A_3 Z(u-id) + A_4 Z(u+id) + \\ + A_5 Z(u+\omega_1+id_1) + A_6 Z(u+\omega_1-id_1) + B_1 Z'(u+\omega_1+id_1) + \\ + B_2 Z'(u+\omega_1-id_1) + C_1 Z''(u+\omega_1+id_1) + C_2 Z''(u+\omega_1-id_1) + D. \quad (6, 6)$$

Так как коэффициенты A_i суть вычеты функции $\Phi(u)$ относительно полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, то должно иметь место соотношение:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0.$$

Мы здесь не будем выписывать z как функцию от u . Это будет совершенно аналогично с тем, как это имело место в предыдущем параграфе. Укажем лишь, что из рассмотрения коэффициентов можно показать, что A_1 и A_2 действительны, а остальные будут попарно сопряженными, т. е.

$$A_3 = \overline{A_4} \\ A_5 = \overline{A_6} \\ C_1 = \overline{C_2} \\ B_1 = \overline{B_2}$$

Для определения силы, действующей на пластинки, можем воспользоваться формулой (5, 9), если мы ее представим в такой форме:

$$P_y + P_{y_1} = \frac{\pi i \rho C}{2} \left\{ \text{Res } \Phi(-id) + \text{Res } \Phi(-\omega_1 - id_1) - \right. \\ \left. - \text{Res } \Phi(id) - \text{Res } \Phi(\omega_1 + id_1) \right\}.$$

В рассматриваемом нами случае

$$\begin{aligned} A_3 &= \text{Res } \Phi(id); & A_5 &= \text{Res } \Phi(-\omega_1 - id_1); \\ \overline{A_3} &= \text{Res } \Phi(-id); & \overline{A_5} &= \text{Res } \Phi(-\omega_1 + id_1). \end{aligned}$$

А потому

$$P_y + P_{y_1} = \frac{\pi i \rho C}{2} \left\{ \overline{A_3} - A_3 + A_5 - \overline{A_5} \right\}. \quad (6, 7)$$

§ 7

В этом параграфе мы рассмотрим частные случаи, которые получаются из рассмотренной нами задачи.

а) Случай Rayleigh для двух пластинок. Здесь мы рассмотрим случай обтекания двух параллельных пластинок, при котором происходит срыв струй с концов и картина течения будет иметь вид, указанный на фиг. 9.

Так как мы имеем здесь совпадение точек A и D , B и C , A_1 и D_1 , B_1 и C_1 , то для получения основных формул, описывающих рассматриваемый поток, положим в формулах § 6 (см. фиг. 9 и фиг. 4)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a &\neq \omega_1 \end{aligned} \right\}. \quad (7, 1)$$

Тогда условие (6, 2) примет вид:

$$c + c_1 = \omega_1. \quad (7, 2)$$

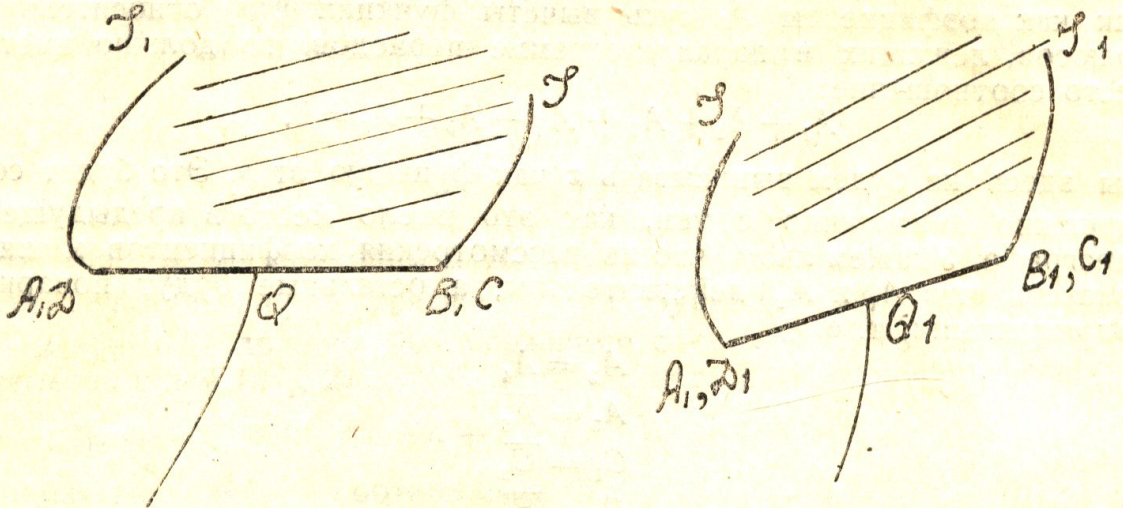
Очевидно, в этом случае нельзя требовать монотонности изменения поворота вектора скорости вдоль струй, так как это может привести к пересечению струй.

Напишем теперь $\frac{dz}{df}$, для чего полагаем в (6, 3) условия (7, 1):

$$\frac{dz}{df} = \frac{\sigma(u - \omega_1) \sigma(u + c) \sigma(u - \omega_2) \sigma(u + c_1 + \omega_2)}{\sigma(u + \omega_1) \sigma(u - c) \sigma(u + \omega_2) \sigma(u - c_1 - \omega_2)},$$

что может быть преобразовано так:

$$\frac{dz}{df} = - \frac{H(u + c) \theta_1(u - c)}{H(u - c) \theta_1(u + c)} = - \frac{Sn(u + c) dn(u - c)}{Sn(u - c) \cdot dn(u + c)} = \frac{Cn(u - c_1)}{Cn(u + c_1)} \quad (7, 3)$$



Фиг. 9

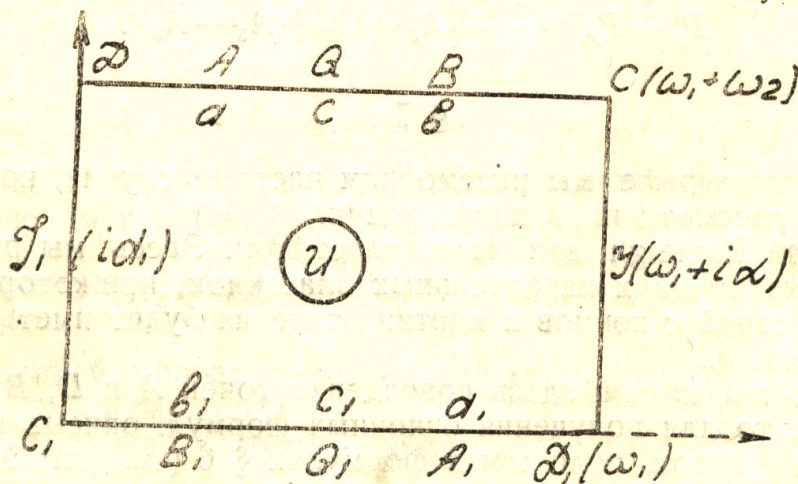
и, наконец, из (6, 5) находим, что:

$$\Phi(u) = \frac{\sigma^2(u + c) \sigma^2(u + c_1 + \omega_2) \sigma(2u) \cdot e^{-2c_1 \eta_2 + u(4\eta_1 - 2\eta_2)}}{\sigma(u - id) \sigma(u + id) \sigma^3(u + \omega_1 + id_1) \sigma^3(u + \omega_1 - id_1)}. \quad (7, 4)$$

Формулы (7, 3) и (7, 4) дают решение задачи об обтекании двух параллельных пластинок по схеме Kirchhoff.

б) Обтекание одной пластинки.

Для того чтобы рассмотреть случай вырождения двух пластинок в одну, мы перепишем основные формулы для $\frac{dz}{df}$ и $\Phi(u)$, счи-



Фиг. 10

тая, что плоскости z (фиг. 7) будет соответствовать внутренность прямоугольника плоскости u с соответствием точек указанным на фиг. 10, а не на фиг. 4.

Необходимость этого выяснится из дальнейшего. Обращаясь к формулам (5, 3) и (5, 4), мы видим, что они переписутся теперь так:

$$\frac{dz}{df} = -e^{(2\eta_1 + 2\eta_2)u} \frac{\sigma(u-a_1) \sigma(u-\omega_2-a) \sigma(u-b_1) \sigma(u-\omega_2-b) \sigma(u+c_1) \sigma(u+\omega_2+c)}{\sigma(u+a_1) \sigma(u+\omega_2+a) \sigma(u+b_1) \sigma(u+\omega_2+b) \sigma(u-c_1) \sigma(u-\omega_2-c)} \quad (7, 4)$$

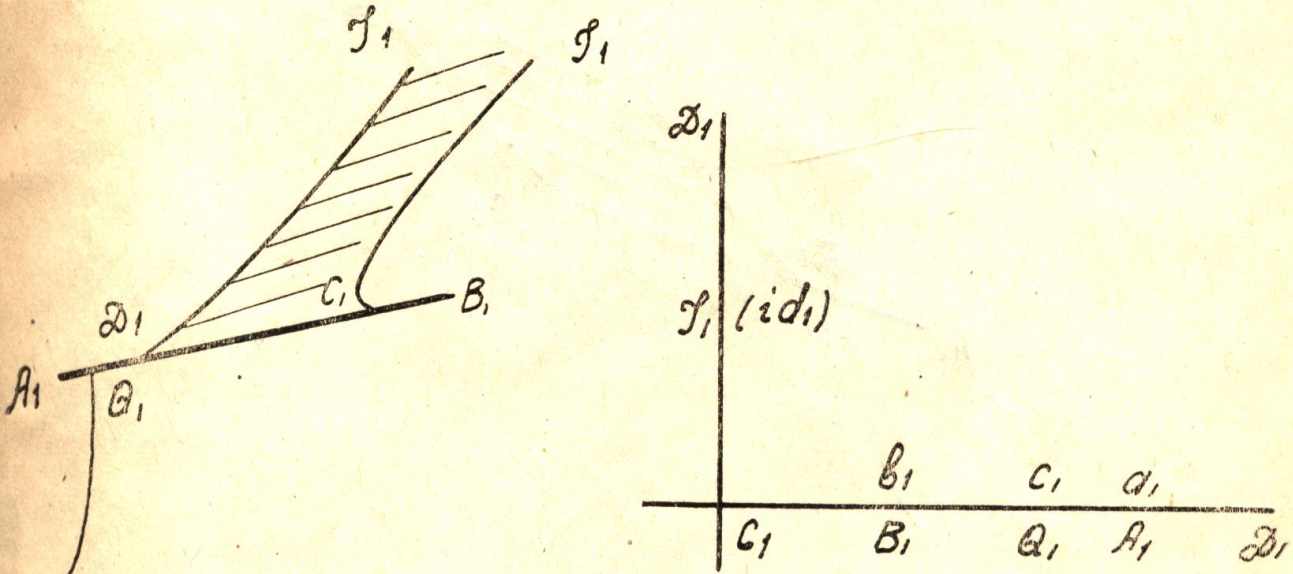
и

$$\Phi(u) = e^{2\eta_1 u} \frac{\sigma(u-a_1) \sigma(u-\omega_2-a) \sigma(u-b_1) \sigma(u-\omega_2-b) \sigma^2(u+c_1) \sigma^2(u+\omega_2+c) \sigma(2u)}{\sigma(u+a_1) \sigma(u+\omega_2+a) \sigma(u+b_1) \sigma(u+\omega_2+b) \sigma(u+\omega_1+id) \sigma(u-\omega_1-id) \sigma^3(u-id) \sigma^3(u+id)} \quad (7, 5)$$

Вырождению двух пластинок в одну будет соответствовать вырождение прямоугольника в прямой угол (см. фиг. 11), т. е. нужно положить, что:

$$\omega_1 = \infty$$

$$\omega_2 = i\infty$$



Фиг. 11

В этом случае:

$$\sigma(u) = u$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u}$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 0.$$

Здесь же мы заметим, что мы можем задаться положением трех точек, а потому можем принять, что $d_1 = 1$.

Делая предельный переход в (7, 4) и (7, 5), после раскрытия неопределенности приходим к такому результату:

$$\frac{dz}{df} = \frac{(u-a_1)(u-b_1)(u+c_1)}{(u+a_1)(u+b_1)(u-c_1)} \quad (7, 6)$$

и

$$\Phi(u) = 2 \frac{(u-a_1)(u-b_1)(u+c_1)^2 u}{(u+a_1)(u+b_1)(u^2+1)^3} \quad (7, 7)$$

При $u = i \frac{dz}{df} = e^{iz_0}$, следовательно:

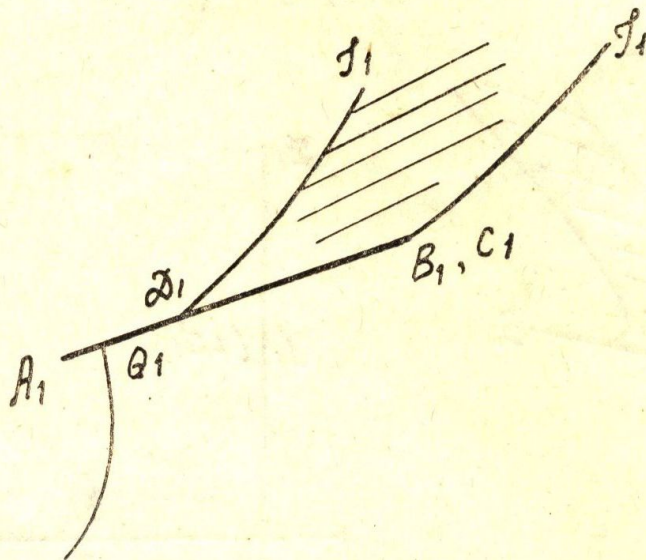
$$e^{iz_0} = \frac{(i-a_1)(i-b_1)(i+c_1)}{(i+a_1)(i+b_1)(i-c_1)} \quad (7, 8)$$

и, наконец,

$$\frac{dz}{du} = C \cdot \Phi(u) = \text{const} \frac{u(u-a_1)(u-b_1)(u+c_1)^2}{(u+a_1)(u+b_1)(1+u^2)^3} \quad (7, 9)$$

Формулы (7, 6) и (7, 9) дают решение задачи об обтекании пластинки косым потоком по самой общей схеме (т. е. при обтекании обеих острых кромок¹).

Если делать предельный переход в $\Phi(u)$, исходя из формулы (5, 4), т. е. в согласии с фиг. 4, то благодаря тому, что на бесконечность удаляется точка $I_1(u = \omega_1 + id_1)$, которая является полюсом третьего порядка для $\Phi(u)$, само $\Phi(u)$ обращается в нуль, что говорит о том, что так сделанный предельный переход не дает желанного обтекания одной пластинки. Поэтому-то пришлось изменить соответствие точек на прямоугольнике так, чтобы после перехода к пределу на бесконечность удалась точка $I(u = id)$, которая является простым полюсом для $\Phi(u)$



Фиг. 12

с) Случай С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева.

Этот случай соответствует обтеканию пластинки, при котором происходит плавное обтекание передней кромки, а срыв струй происходит с задней кромки и с верхней стороны пластинки (см. фиг. 12).

В этом случае мы имеем совпадение точек B_1 и C_1 , а это дает, что

$$b_1 = 0$$

и основные формулы (7, 8), (7, 6) и (7, 9) примут вид:

$$e^{i\alpha s} = \frac{(i - a_1)(i + c_1)}{(i + a_1)(i - c_1)}, \quad (7, 10)$$

$$\frac{dz}{df} = \frac{(u - a_1)(u + c_1)}{(u + a_1)(u - c_1)} \quad (7, 11)$$

и

$$\frac{df}{du} = \text{const} \frac{u(u - a_1)(u + c_1)^2}{(u + a_1)(1 + u^2)^3}. \quad (7, 12)$$

Эти формулы совпадают с соответствующими формулами в работе С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева².

¹ См. И. М. Беленький и И. Е. Зеленский. „К обтеканию пластинки косым потоком по обобщенной схеме Schmieiden“. Изд. Харьк. авиац. инст., 1936 г.

² См. С. А. Чаплыгин и А. Л. Лаврентьев. „О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности“. Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933 г.