

Построение аналитического решения задачи о передаче локальной нагрузки на панель крыла при наличии бимса по всей длине панели

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Получено точное решение в быстросходящихся одинарных рядах по системе собственных функций оператора второго порядка в частных производных задачи о передаче локальных нагрузок на прямоугольную пластину через бортовой элемент, работающий на изгиб. Пластина дополнительно подкреплена на продольных краях краевыми балками и центральным бимсом, на четвертой стороне она жестко закреплена. Анализ полученного решения отражен на серии графиков, и сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: подкреплённая пластина, локальные нагрузки, краевая задача о включении, точное решение.

Как было показано в работе [1], в предположении отсутствия линейных деформаций в поперечном направлении ($\varepsilon_y = 0$) определяющими являются напряжения в обшивке панели. Это объясняется тем, что там отсутствует продольный элемент (бимс), идущий вдоль направления действия локальной нагрузки.

Опытный конструктор великолепно понимает, что такую нагрузку необходимо «встретить» одномерным элементом, не только позволяющим выгодно перераспределить нагрузку между силовыми элементами системы, но и иметь возможность добиться ее минимальной массы.

Наиболее просто и оперативно это можно сделать, имея в своем распоряжении точное решение задачи, что позволяет ограничиться лишь анализом влияния подкрепления на общее напряженно-деформированное состояние системы без постановки и решения непростых задач оптимизации.

Ниже даются постановка и точное решение задач о передаче локальной нагрузки на крыльевые панели, когда последние имеют значительные подкрепления (при единственном допущении $\varepsilon_y = 0$): бортовая балка, краевые балки и бимс, идущий в направлении действия локальных нагрузок.

Силовая схема показана на рис. 1, там же указаны некоторые обозначения. Напряженно-деформированное состояние системы контролируется тремя безразмерными параметрами:

$$\rho = \frac{E_0 I_0}{k b^3 G h} = \frac{E_0 I_0}{b^3 \sqrt{F_x h_x G h}}; \quad \mu_k = \frac{E_k F_k}{F_x h_x b}, \quad k = 1, 2,$$

где $E_0 I_0$ – жесткость на изгиб краевой балки;

b – ширина панели;

E_x – приведенный модуль упругости обшивки (пластины);

h_x – приведенная толщина обшивки в продольном направлении (с учетом наличия регулярного одномерного подкрепления в этом направлении);

G – модуль сдвига обшивки;

h – номинальная толщина обшивки, работающей на сдвиг;
 $E_i F_i (i = 1, 2)$ – жесткости на растяжение-сжатие бимса ($i = 1$) и краевого подкрепления ($i = 2$);

$$k^2 = \frac{Eh_x}{Gh}$$

E – модуль упругости материала обшивки.

Кроме того, приняты следующие обозначения:

$kbx = x_0$, $by = y_0$ (x, y – безразмерные координаты, x_0, y_0 – размерные координаты), поэтому $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq \bar{l} = \frac{l}{kb}$. В силу симметрии системы относительно оси X достаточно рассмотреть лишь ее половину при $y \in (0; 1)$.

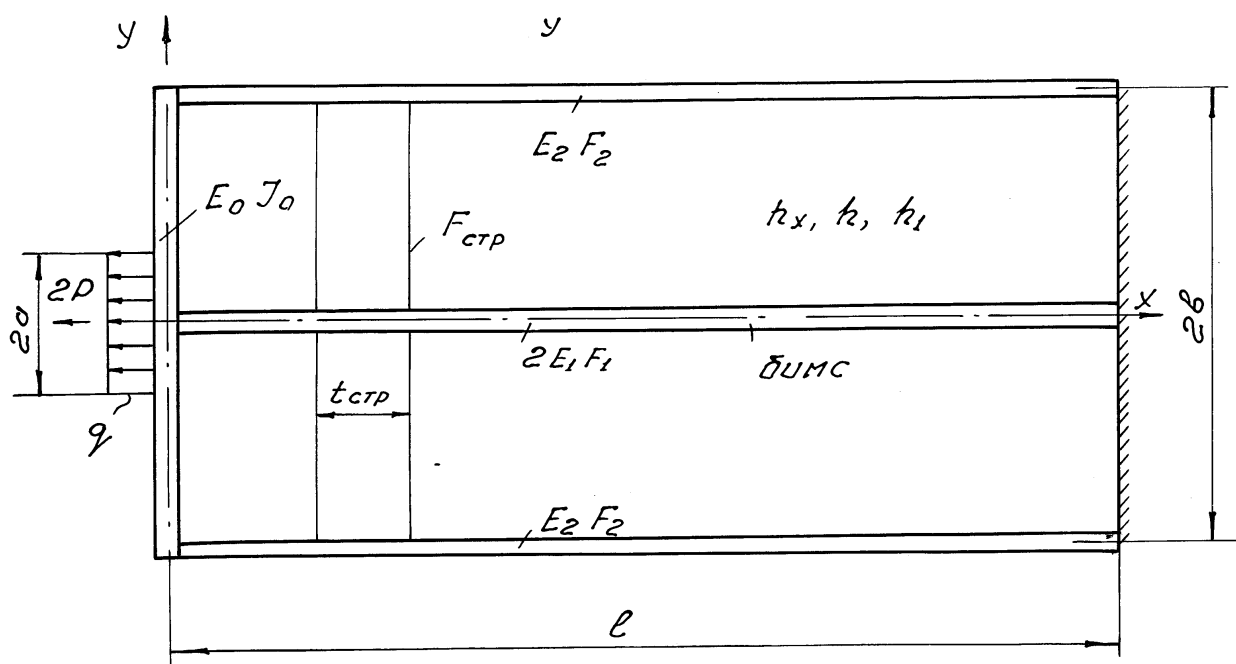


Рис. 1. Пластинчато-стержневая система и локальная нагрузка

Полученное решение, справедливое при $0 < y < 1$, продолжается затем с соблюдением условий симметрии на отрицательные значения $y (-1 < y < 0)$.

Решению подлжит краевая задача:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\left(\mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = - \left(\frac{q(y)b^4}{E_0 I_0} \right), \quad (4)$$

$$u(x = \bar{\ell}, y) = 0, \quad 0 < x < \bar{\ell} = \frac{\ell}{kb}, \quad 0 < y < 1. \quad (5)$$

Кроме того, решение краевой задачи должно быть подчинено двум дополнительным условиям, являющимся условиями равновесия половины краевой балки как жесткого целого:

$$\frac{Pk}{E_x h_x} = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} + \mu_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y=1} + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} dy, \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{x=0, y=0} + \mu_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y=1} + \int_0^1 y \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = \frac{Pk\alpha}{E_x h_x}. \quad (7)$$

При действии сосредоточенной силы следует положить $\alpha = 0$.

Разделяя переменные в уравнении (1), приходим к решению:

$$u(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 xy + (C_1 ch \lambda x + C_2 sh \lambda x) \cos \lambda y + (C_3 ch \lambda x + C_4 sh \lambda x) \sin \lambda y.$$

Из краевого условия (5) следует:

$$A_0 = -A_1 \bar{\ell} \equiv A \bar{\ell}, \quad (A_1 \equiv A);$$

$$A_2 = -A_3 \bar{\ell} \equiv -D \bar{\ell}, \quad (A_3 \equiv D);$$

$$C_2 = -C_1 cth \lambda \bar{\ell} \equiv -C cth \lambda \bar{\ell}, \quad (C_1 \equiv C);$$

$$C_4 = -C_3 cth \lambda \bar{\ell} \equiv -B cth \lambda \bar{\ell}, \quad (C_3 \equiv B).$$

Искомое решение принимает вид

$$u(x, y) = -(\bar{\ell} - x)(A + Dy) + (ch \lambda x - cth \lambda \bar{\ell} sh \lambda x)(C \cos \lambda y + B \sin \lambda y).$$

Из краевого условия (3) получаем

$$D = 0, \quad B = -\mu_1 \lambda C,$$

после чего решение приводится к виду

$$u(x, y) = -A(\bar{\ell} - x) - C(ch \lambda x - cth \lambda \bar{\ell} sh \lambda x)(\cos \lambda y + \mu_1 \sin \lambda y). \quad (8)$$

Решение (8) содержит неопределенные параметры A, C и λ .

Выполнив краевое условие (2), приходим к трансцендентному уравнению относительно параметра λ :

$$tg \lambda = - \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{1 - \lambda^2 \mu_1 \mu_2}. \quad (9)$$

При $\mu_1 = 0$ (бимс отсутствует) и $\mu_2 \equiv \mu$ уравнение (9) переходит в уравнение (18) работы [1].

Выполняя условие равновесия (6), получаем (с учетом уравнения (9))

$$A \equiv C_0 = \frac{Pk}{E_x h_x (1 + \mu_1 + \mu_2)}, \quad (10)$$

что при $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 \equiv \mu$ совпадает с формулой (23) работы [1].

Поскольку трансцендентное уравнение (9) имеет счетное множество решений, то в силу линейности краевой задачи искомое решение приобретает вид

$$u(x, y) = -C_0(\bar{\ell} - x) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) \varphi_n(y), \quad (11)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= ch\lambda_n x - cth\lambda_n \bar{\ell} \sin \lambda_n x, \\ \varphi_n(y) &= \cos \lambda_n y - \mu_1 \lambda_n \sin \lambda_n y, \\ 0 < x < \bar{\ell}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Распространяя решение на отрицательные значения y , получаем

$$u(x, y) = -C_0(\bar{\ell} - x) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) \varphi_n(|y|), \quad (13)$$

где $\varphi_n(|y|) = \cos \lambda_n y - \mu_1 \lambda_n \sin \lambda_n |y|$, $-1 < y < 1$.

Далее устанавливаются важные формулы:

$$\begin{aligned} \varphi'_n(|y|) &= -\lambda_n (\sin \lambda_n y + \text{sign} y \mu_1 \lambda_n \cos \lambda_n y); \\ \Phi_n(y) &= \int \varphi_n(|y|) dy = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi'_n(|y|); \\ \varphi''_n(|y|) &= -\lambda_n^2 \varphi_n(|y|), \quad \varphi'''_n(|y|) = -\lambda_n^2 \varphi'_n(|y|); \\ \varphi^{IV}_n(|y|) &= \lambda_n^4 \varphi_n(|y|). \end{aligned} \quad (14)$$

Следует отметить, что условие равновесия по моментам краевой балки как жесткого целого выполнено в силу симметрии, т.е. благодаря продолжению решения на отрицательные значения координаты y удалось избавиться от дополнительного условия (условие (7) отпадает).

Выполняя краевое условие (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[f_n(0) \varphi_n^{IV}(|y|) + \frac{1}{\rho} f'_n(0) \varphi_n(|y|) \right] + \frac{1}{\rho} C_0 = -\frac{q(y) b^4}{E_0 I_0}. \quad (15)$$

Положим $q(y) = \frac{P}{b} \tilde{q}(y)$,

где $\tilde{q}(y) = 2\delta(y)$ (приложена сосредоточенная сила);

$$q(y) = \begin{cases} 0, & |y| > \alpha \\ \frac{1}{\alpha}, & |y| \leq \alpha \end{cases} \quad (\text{приложена распределенная нагрузка}),$$

и примем далее

$$\tilde{q}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \varphi_n(|y|), \quad (16)$$

где $Q_n \equiv \begin{cases} 2D_n & - \text{сосредоточенная сила,} \\ E_n & - \text{распределенная нагрузка.} \end{cases}$

Положим, наконец, что функция $z(y) = 1$ может быть представлена рядом Фурье по системе $\varphi_n(|y|)$ на отрезке $(-1; 1)$:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(|y|). \quad (17)$$

Разложения (16) и (17) возможны в силу полноты системы $\varphi_n(|y|)$ в функциональном пространстве $L_2(-1; 1)$, что следует из известной теоремы Стеклова о полноте собственных функций задачи Штурма – Лиувилля.

Коэффициенты разложения (16) и (17) легко определяются, если система $\varphi_n(|y|)$ ортогональна в $L_2(-1; 1)$, что, к сожалению, не имеет места. Однако ортогональную в $L_2(-1; 1)$ систему образуют функции $\varphi'_n(|y|)$, а поскольку первообразные системы $\varphi_n(|y|)$ с точностью до постоянных совпадают с функциями $\varphi'_n(|y|)$, то следует разложить в ряды по системе

$$\Phi_n(|y|) = \int \varphi_n(|y|) dy = -\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi'_n(|y|)$$

неопределенные интегралы от левых частей (16) и (17).

Таким образом, имеем

$$\int \tilde{q}(y) dy = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{\lambda_n^2} \varphi'_n(|y|),$$

$$y = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} \varphi'_n(|y|).$$

В случае сосредоточенной силы

$$\int \tilde{q}(y) dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sign} y = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{\lambda_n^2} \varphi'_n(|y|),$$

откуда, с учетом ортогональности системы $\varphi'_n(|y|)$, получаем

$$Q_n = 2D_n = -\lambda_n^2 \frac{1}{\|\varphi'_n\|^2} \int_0^1 \varphi'_n(y) dy. \quad (18)$$

Здесь D_n – коэффициенты Фурье дельта-функции Дирака $\delta(y)$ по системе $\varphi_n(|y|)$ (или функции $\frac{1}{2} \text{sign} y$) по системе $\Phi_n(|y|)$.

В случае действия распределенной нагрузки

$$\int \tilde{q}(y) dy = \theta(y) = \begin{cases} -1, & y \leq -\alpha; \\ \frac{y}{\alpha}, & |y| \leq \alpha; \\ 1, & y > \alpha, \end{cases} \quad (19)$$

где коэффициенты Фурье Q_n функции $\theta(y)$

$$Q_n = E_n = -\frac{\lambda_n^2}{\|\phi_n'\|^2} \int_0^1 \theta(y) \phi_n'(y) dy,$$

по системе $\phi_n(|y|)$ (или функции $\theta(y)$ по системе $\Phi_n(|y|)$).

Наконец, A_n определяются формулой

$$A_n = -\frac{\lambda_n^2}{\|\phi_n'\|^2} \int_0^1 y \phi_n'(y) dy. \quad (20)$$

В формулах (18) – (20) обозначено:

$$\|\phi_n'\|^2 = \int_0^1 (\phi_n'(y))^2 dy = \frac{1}{2} \lambda_n^2 \left[(1 + \mu_1^2 \lambda_n^2) - (1 - \mu_1^2 \lambda_n^2) \frac{\sin 2\lambda_n}{2\lambda_n} + \mu_1 (1 - \cos 2\lambda_n) \right];$$

$$\int_0^1 \phi_n'(y) dy = -(1 - \cos \lambda_n - \mu_1 \lambda_n \sin \lambda_n);$$

$$\int_0^1 y \phi_n'(y) dy = \cos \lambda_n - \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n} + \mu_1 (1 - \cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n);$$

$$\int_0^1 \theta(y) \phi_n'(y) dy = \mu_1 + \cos \lambda_n - \mu_1 \lambda_n \sin \lambda_n - \\ - \cos \lambda_n \alpha (1 + \mu_1 - \alpha) - \sin \lambda_n \alpha \left[\frac{1}{\lambda_n} - \mu_1 \lambda_n (1 - \alpha) \right].$$

Подставляя теперь в (15) разложения (16) и (17), после некоторых преобразований получим

$$C_n = \frac{Pk}{E_x h_x} \left(\frac{A_n}{1 + \mu_1 + \mu_2} + Q_n \right) \frac{1}{\lambda_n (cth \lambda_n \bar{\ell} + \rho \lambda_n^3)}. \quad (21)$$

Если параметры системы таковы, что можно принять $cth \lambda_n \bar{\ell} \approx 1$, то для $f_n(x)$ получаем $f_n(x) \approx e^{-\lambda_n x}$, т.е. решение носит убывающий по экспоненте характер; скорость этого убывания определяется в основном наименьшим положительным корнем характеристического уравнения (9).

Итак, решение краевой задачи дается равенством (13) с учетом сказанного о функциях $f_n(x)$ и $\phi_n(y)$; входящие в это решение постоянные C_0 и C_n определяются соответственно по формулам (10) и (21). При определении компонент напряженного состояния необходимо пользоваться дополнительно формулами (14).

Компоненты напряженного состояния обшивки определяются по-прежнему равенствами

$$T(x, y) = \sigma_x h_x = \frac{E_x h_x}{kb} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E_x h_x}{kb} \left(C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n f'_n(x) \varphi_n(|y|) \right),$$

$$S(x, y) = \tau h = \frac{Gh}{b} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Gh}{b} \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) \varphi'_n(|y|), \quad (22)$$

$$R(x, y) = \sigma_y h_1 = \frac{Gh_1}{kb} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=1} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{Gh_1}{kb} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [f'_n(1) - f'_n(x)] \varphi_n(|y|).$$

Усилия в бимсе (индекс 1) и краевых стержнях-поясах нервюр (индекс 2) определяются равенствами

$$N_1(x) = \frac{2E_1 F_1}{kb} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{2E_1 F_1}{kb} \left(C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n f'_n(x) \varphi_n(0) \right),$$

$$N_2(x) = \frac{E_2 F_2}{kb} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=1} = \frac{E_2 F_2}{kb} \left(C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n f'_n(x) \varphi_n(1) \right). \quad (23)$$

Обсудим некоторые полученные результаты.

На рис. 2 приведены графики продольных нормальных усилий в обшивке при $x = 0$ в зависимости от жесткости бимса (μ_1) при фиксированных значениях жесткостей бортовой (ρ) и краевых балок (μ_2).

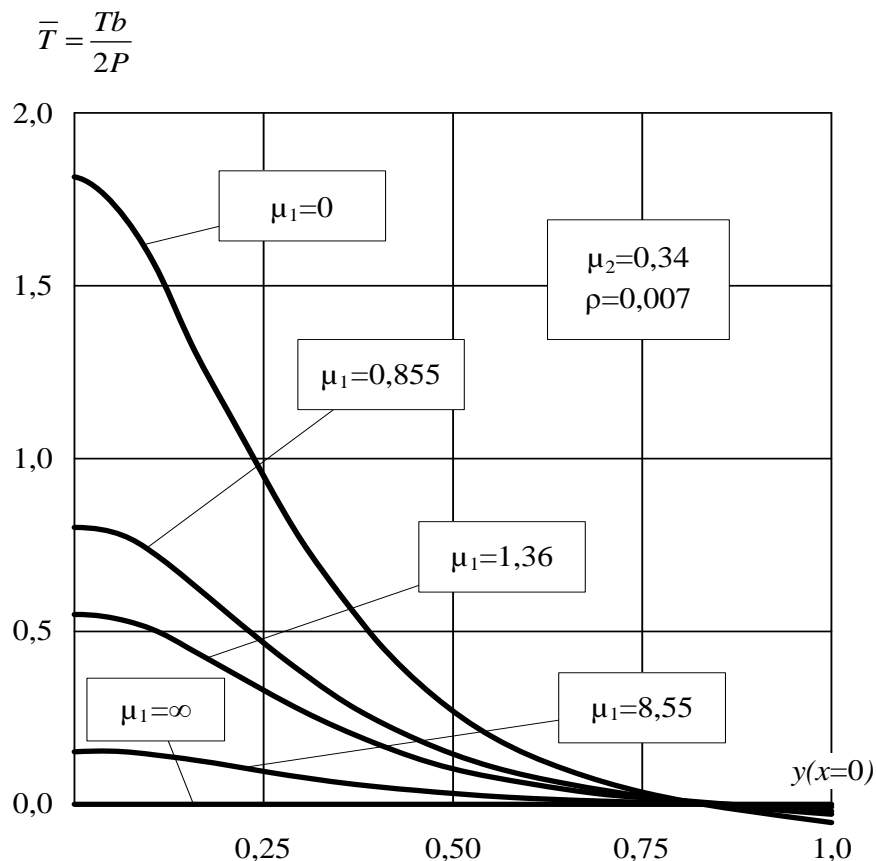


Рис. 2. Распределение продольных нормальных усилий в обшивке в зависимости от жесткости бимса

Качественно данный результат очевиден. С количественной точки зрения интересен тот факт, что наличие бимса позволяет уменьшить концентрацию напряжений в обшивке почти в десять раз, а при абсолютном жестком бимсе обшивка свободна от напряжений. Данный результат весьма важен при проектировании крыльевых панелей, поскольку он позволяет принять решение о рациональном распределении материала.

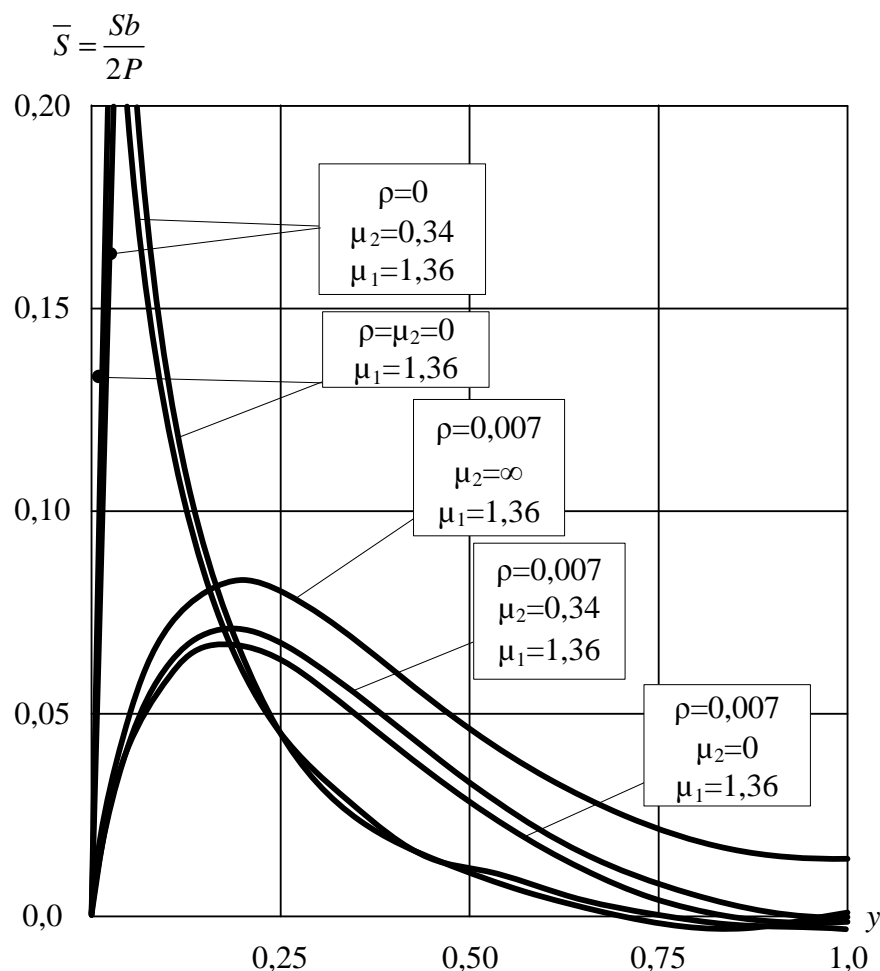


Рис. 3. Распределение касательных усилий в обшивке в зависимости от сочетания параметров подкрепления

Данные рис. 3 позволяют сформулировать весьма полезные выводы. Во-первых, независимо от жесткости краевых балок (μ_2) в отсутствие бортовой балки ($\rho = 0$) и при одной и той же жесткости бимса (μ_1), распределение касательных напряжений одно и то же. Во-вторых, при одной и той же жесткости бортовой балки (ρ) и жесткости бимса (μ_1) влияние на касательные напряжения жесткости краевых балок (μ_2) незначительно.

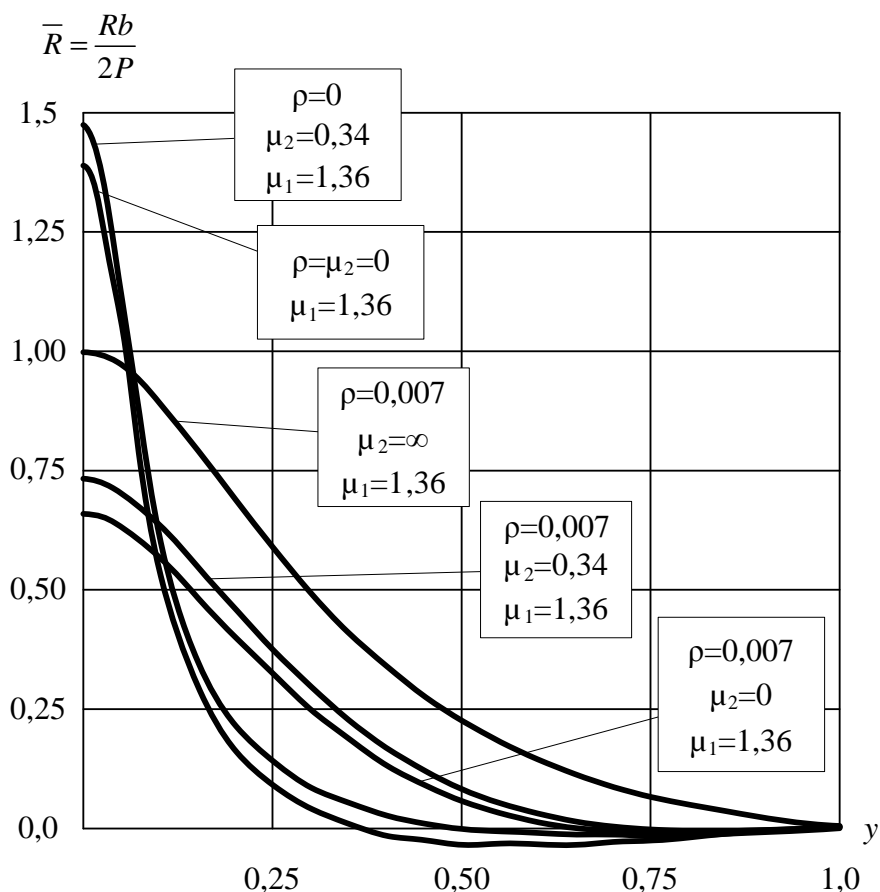


Рис. 4. Распределение поперечных нормальных усилий в обшивке в зависимости от сочетания параметров подкрепления

Выводы по данным рис. 4 аналогичны выводам по данным рис. 3. Этот результат и следовало ожидать.

Распределение нормальных усилий в продольных элементах показано на рис. 5.

При постоянной жесткости бимса (μ_1) и в отсутствие бортовой балки ($\rho = 0$) распределение усилий в бимсе не зависит от жесткости (μ_2) краевых балок.

Влияние же жесткости бортовой балки значительно лишь в ее окрестности ($x < 0,05$).

Все вышесказанное относится к кривым, изображенным сплошными линиями.

Графики усилий в краевых балках (пунктирные линии) показывают, что влияние жесткости бортовой балки значительно лишь при малых значениях безразмерного параметра x ($x < 0,03$). При $x > 0,2$ усилия во всех продольных элементах выравниваются и оказываются равными усилиям, доставляемым балочной теорией.

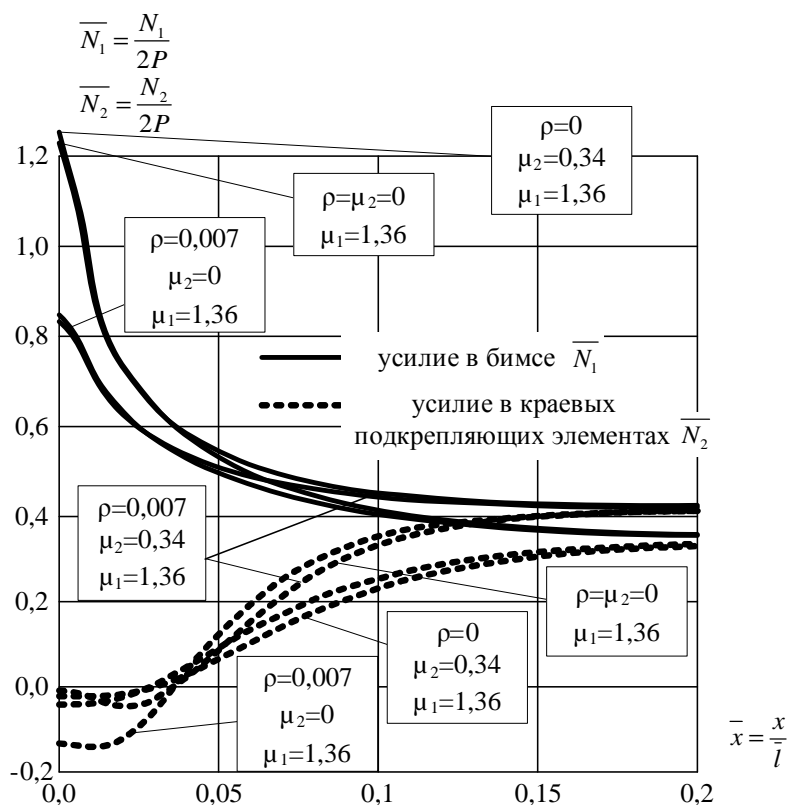


Рис. 5. Распределение нормальных сил в сечениях подкрепления в зависимости от сочетания их параметров
 По следующим графикам (рис. 6) можно сделать следующие выводы:

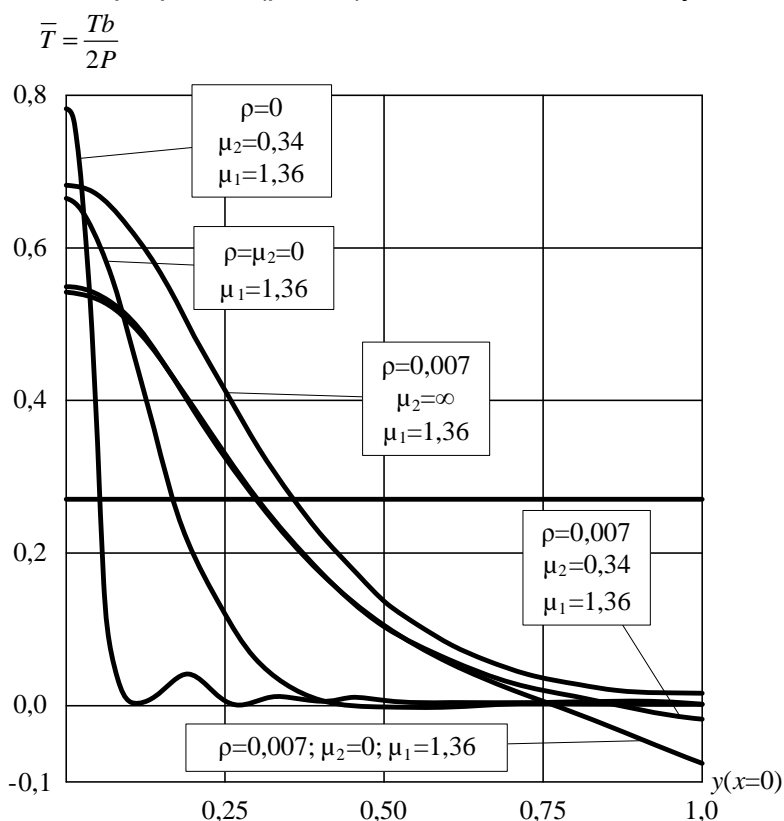


Рис. 6. Распределение продольных нормальных усилий в обшивке в зависимости от сочетания параметров подкрепления

– влияние на распределение продольных усилий в обшивке жесткости краевых балок при одних и тех жесткостях бортовой балки и бимса незначительно;

– жесткость бортовой балки оказывает существенное влияние на распределение нормальных усилий в обшивке лишь в окрестности приложенной локальной нагрузки ($y \leq 0,25$).

Анализ распределения продольных перемещений в обшивке в поперечном направлении (рис. 7) показывает, что изменение этих перемещений незначительно независимо от значений поперечной координаты y (серия верхних графиков). Жесткость продольных балок, напротив, влияет на данное распределение значительно (нижний график).

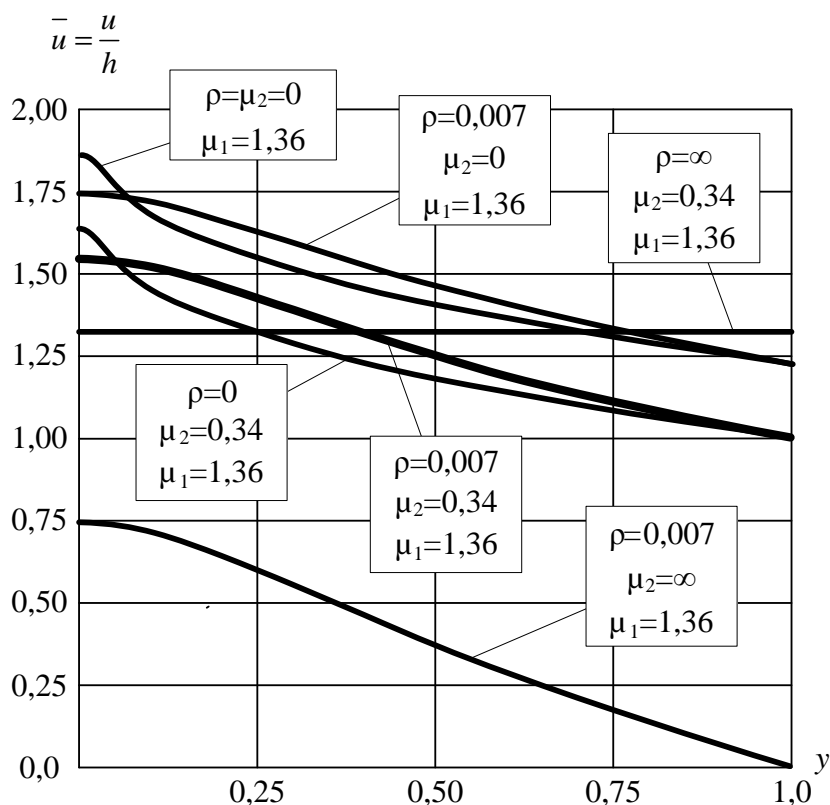


Рис. 7. Распределение продольных перемещений в обшивке в зависимости от сочетания параметров подкрепления

Данные рис. 8 носят вспомогательный характер. Исходя из них можно заключить, что если $\rho < 0,005$ при одной и той же жесткости бимса μ_1 , то перемещение вдоль бортовых балок можно считать отсутствующим при $\mu_1 \geq 0,04$.

Конечно же, для принятия окончательного решения при проектировании подобных систем необходим более скрупулезный анализ влияния всех безразмерных параметров системы на ее напряженное и деформированное состояние.

Этот анализ не вызывает затруднений, поскольку получено точное решение поставленной задачи при одном единственном допущении $\varepsilon_y = 0$

(пренебрежение влиянием коэффициента Пуассона на окончательный результат не вносит существенных погрешностей).

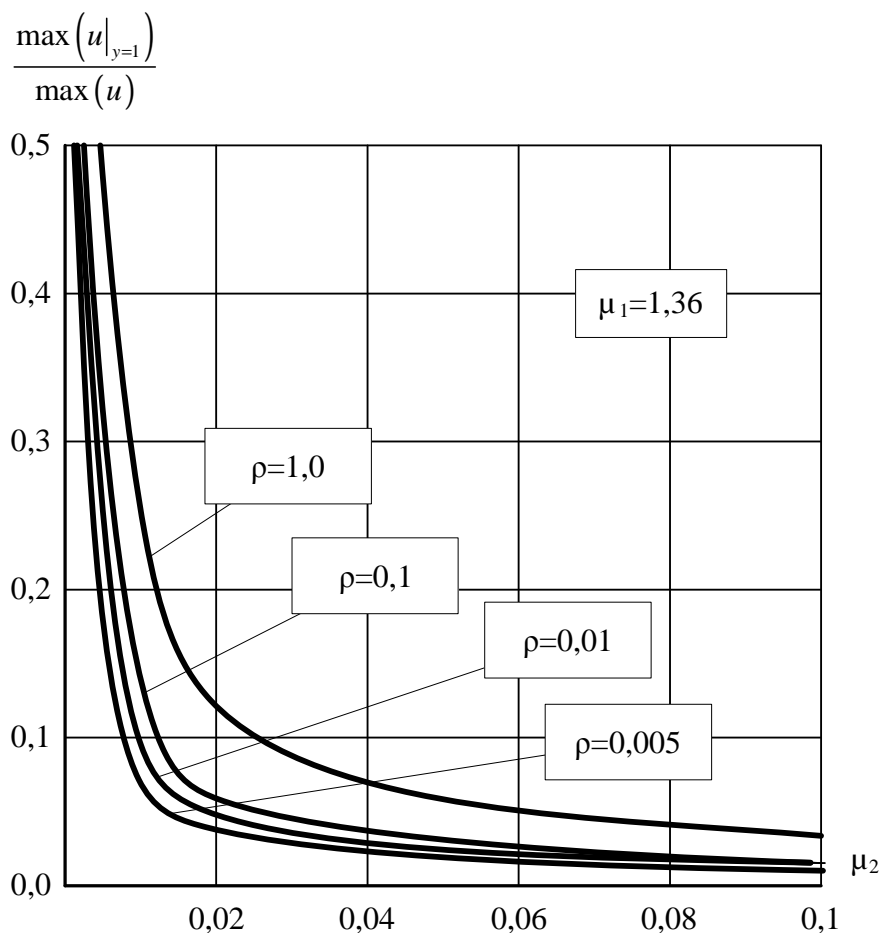


Рис. 8. Максимальные относительные продольные перемещения у краевого подкрепления в зависимости от его жесткости и жесткости бортовой балки

Полученные результаты позволяют проектировщику принять правильное решение при проектировании пластинчато-стержневых систем с учетом локальности действующих нагрузок, имея в своем распоряжении точное решение задачи.

Список литературы

1. Халилов С.А. Передача направленной по полету локальной нагрузки на крыльевую панель. Модель второго уровня / С.А. Халилов, С.И. Весельский, О.В. Макаров // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 44. – Х., 2009. – С. 117-126.

Рецензент: д. ф.–м.н., проф., зав. каф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 20.12.10

Побудова аналітичного розв'язання задачі про передачу локального навантаження на панель крила за наявності бiмса по всій довжині панелі

Отримано точний розв'язок у швидкозбіжних одинарних рядах за системою властивих функцій оператора другого порядку в частинних похідних задачі про передачу локальних навантажень на прямокутну пластину через бортовий елемент, що працює на вигин.

Пластина додатково підкріплена на поздовжніх краях крайовими балками і центральним бiмсом, на четвертій стороні вона жорстко закріплена.

Аналіз отриманого розв'язку відбито на серії графіків, і зроблено відповідні висновки.

Ключові слова: підкріплена пластина, локальні навантаження, крайова задача про включення, точний розв'язок.

Solution developing for the problem of local load transferring to the wing panel with presence of the beam along the whole length of the panel

The problem of local load transferring to the rectangular plate through side element effective in resisting bending is solved. The exact solution is obtained in terms of rapidly converged series. To derive these series the system of eigenfunctions of the second-order partial differential operator is used.

The plate is additionally stiffened along the longitudinal edges with boundary and centre beams, the forth edge of the plate is fixed. Analysis of solution obtained is represented with a series of diagrams. Relevant conclusions are made.

Keywords: stiffened plate, local load, inclusion boundary problem, exact solution.