УДК 537. 213

Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Некоторые обобщения классических формул Пуассона и Дини для двумерного уравнения Лапласа

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Получены обобщения классических интегралов Пуассона и Дини на случай неоднородной многолистной пластины книжной структуры, составленной из полукругов или круговых секторов. В основе метода лежит приём симметризации функций, заданных на границе пластин. В качестве применения найденных формул дано решение задачи кручения неоднородного стержня, составленного из двух разнородных секторов.

Ключевые слова: многолистные тонкие пластины книжной структуры, обобщённые интегралы Пуассона и Дини, симметризация краевых условий, задачи Дирихле, Неймана, смешанная.

Классические формулы Пуассона и Дини дают решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в круге (вне круга) в виде интегралов по границе области от граничной функции, умноженной на соответствующее ядро [1]. Эти формулы играют исключительно важную роль как в самой математической физике, так и в области её приложений. В статье [2] предложен метод построения аналогов формул Пуассона и Дини решения уравнения Лапласа в однородной многолистной пластине, состоящей из склеенных по диаметру полукругов. В настоящей работе этот метод обобщается на многолистные неоднородные пластины, состоящие из разных по физическим свойствам склеенных полукругов или круговых секторов. Получены точные решения краевых задач в виде обобщенных формул Пуассона и Дини. Впервые построены такие формулы для смешанных задач в случае пластин из круговых секторов (рис. 1). На основе развитого метода дано точное решение задачи кручения неоднородного стержня, поперечное сечение которого представляет область, составленную из двух секторов, жестко соединенных вдоль радиуса (рис. 2). Эта задача, насколько известно авторам, точного решения до настоящего времени не имела.

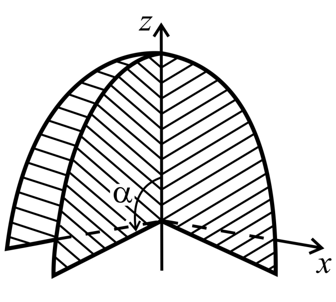

Рис. 1. Трёхлистная пластина

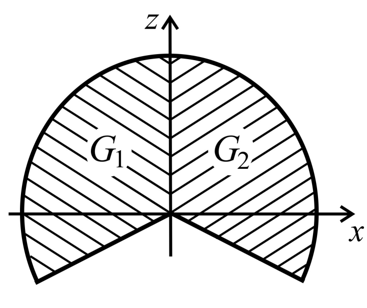

Рис. 2. Поперечное сечение стержня

1. Постановка задачи

В пространстве расположена тонкая N – листная пластина, листы которой изготовлены из разных материалов. Последние соединены между собой по диаметру или по радиусу. Надо найти решение двумерного уравнения Лапласа в такой пластине при заданных граничных условиях и условиях совершенного контакта на линии соединения листов.

С каждым листом свяжем декартову систему координат xoz (см. рис. 1), поместив начало координат в центр круга и совместив оси z. Листы пластины пронумеруем и будем в дальнейшем их различать по номерам, обозначая решение в листе с номером k через $u_k(x,z), \quad k=1,2,\ldots,N$ [2].

Условия совершенного контакта на линии $x=0$ берём в виде

$$\left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots + \mu_N \frac{\partial u_N}{\partial x}\right)_{|x=0} = 0, \quad \mu_k > 0, \tag{1.1}$$

$$u_k(0,z) = u_{k+1}(0,z), \quad k=1,2,\ldots,N-1. \tag{1.2}$$

2. Задача Дирихле для пластины из полукругов

На границе полукругов $(\rho < R)$ заданы краевые условия

$$u_k(R,\varphi) = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi, \tag{2.1}$$

где (ρ,φ) – полярные координаты, связанные с декартовыми равенствами $x = \rho \cdot sin\varphi, \quad z = \rho cos\varphi$; угол φ отсчитывается от положительного направления оси oz.

Решение внутренней задачи берем в виде $(\rho < R)$

$$u_k(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(a_n \cdot cos\, n\varphi + b_n^{(k)} \cdot sin\, n\varphi\right), \quad k=\overline{1,N}. \tag{2.2}$$

Условия (1.2) на линии $x=0$ будут удовлетворены, а условия (1.1) приводят к равенствам

$$\mu_1 \cdot b_n^{(1)} + \mu_2 \cdot b_n^{(2)} + \ldots + \mu_N \cdot b_n^{(N)} = 0, \quad n=1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Краевые условия (2.1) дают равенства

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos\, n\varphi + b_n^{(k)} \cdot sin\, n\varphi = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad k=\overline{1,N} \quad . \tag{2.4}$$

Для нахождения коэффициентов a_n, $b_n^{(k)}$ введём N вспомогательных функций $\varphi_k(t)$, непрерывных на $[0,\pi]$, и разложим их в ряды Фурье по $sin\, nt$:

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \cdot sin\, nt, \quad \alpha_n^{(k)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_k(t) \cdot sin\, ntdt. \tag{2.5}$$

<u>Справедлива теорема</u>: для выполнения условия (2.3) с $b_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)}$ необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяли на $[0,\pi]$ условию

$$\mu_1 \cdot \varphi_1(t) + \mu_2 \cdot \varphi_2(t) + \ldots + \mu_N \cdot \varphi_N(t) \equiv 0. \tag{2.6}$$

Краевые функции $f_k(t)$ представим в виде

$$f_k(t) = F(t) + \varphi_k(t), \quad k = \overline{1,N}\ , \tag{2.7}$$

где $F(t)-$ новая неизвестная функция.

Из (2.7) с использованием (2.6) находим

$$F(t) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_k \cdot f_k(t), \quad m = \sum_{n=1}^{N}\mu_k . \tag{2.8}$$

Зная $F(t)$, из (2.7) получим

$$\varphi_k(t) = f_k(t) - F(t). \tag{2.9}$$

Все вспомогательные функции найдены.

В равенствах (2.4) правые части будут иметь вид (2.7). Продолжим в этом равенстве функцию $F(t)$ чётно на $[-\pi,0]$, а функцию $\varphi_k(t)$ – нечетно. После этого (2.4) можно обратить и найти a_n, $b_n^{(k)}$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\cdot cos\, ntdt, \quad b_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)}. \tag{2.10}$$

В результате имеем точное решение задачи Дирихле.

Замечание 1. Метод представления системы функций $f_k(t), \quad k = \overline{1,N}$ в виде равенств (2.7) с $\varphi_k(t)$, удовлетворяющими условию (2.6), будем называть симметризацией.

Замечание 2. Аналогично находится точное решение задачи для области $\rho > R$, т.е. для системы склеенных полуплоскостей с вырезанными полукругами.

Как и в классическом случае [1], найденное решение преобразуется в интеграл с помощью суммирования рядов. Имеем $(x = \rho/R)$

$$u_k(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[F(t)\cdot S_1(x,t,\varphi) + \varphi_k(t)\cdot S_2(x,t,\varphi)]dt, \quad k = \overline{1,N},$$
$$(\rho < R, \quad 0 \le \varphi \le \pi), \tag{2.11}$$

где функции $F(t)$ и $\varphi_k(t)$ определены равенствами (2.8), (2.9).

Ядра $S_1(x,t,\varphi)$ и $S_2(x,t,\varphi)$ определяется формулами

$$S_1(x,t,\varphi) = 1 + k(x,t+\varphi) + k(x,t-\varphi), \quad S_2(x,t,\varphi) = k(x,t-\varphi) - k(x,t+\varphi),$$
$$k(x,t) = (1 - x\cdot cost)\Big/\left(1 - 2x\cdot cost + x^2\right).$$

Формула (2.11) есть аналог классической формулы Пуассона решения внутренней задачи Дирихле для круга [1].

Для случая двух однородных полукругов $(\mu_1 = \mu_2 = 1)$ (2.11) легко преобразуется в известную формулу, приведенную в учебниках по математической физике.

Замечание 3. Решение внешней задачи ($\rho > R$) получается из (2.11) заменой в ней $x = \rho/R$ на $y = R/\rho$.

3. Задача Неймана для пластины из полукругов

В этой задаче краевые условия имеют вид $(\rho < R)$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \rho}_{|\rho=R} = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad k = \overline{1,N}. \tag{3.1}$$

Условия сопряжения прежние – (1.1), (1.2).

Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа разрешима лишь при условии

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k \cdot \int_{l_k} \frac{\partial u_k}{\partial \rho}_{|\rho=R} dl = R \sum_{k=1}^{N} \mu_k \int_0^{\pi} f_k(t) dt = 0. \tag{3.2}$$

Решение задачи, как и раньше, выбираем в виде (2.2).

Из краевого условия имеем:

$$\frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cdot \cos nt + b_n^{(k)} \cdot \sin nt\right) = F(t) + \varphi_k(t), \quad 0 \le t \le \pi, \quad k = \overline{1,N}. \tag{3.3}$$

Здесь $F(t)$ и $\varphi_k(t)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

Равенство (3.3) возможно лишь при условии $\int_0^{\pi} F(t) dt = 0$, которое, с учётом выражения (2.8) для $F(t)$, будет иметь вид $\sum_{k=1}^{N} \mu_k \cdot \int_0^{\pi} f_k(t) dt = 0$.

Последнее условие совпадает с условием разрешимости задачи (3.2). Обращая ряд (3.3), находим

$$a_n = \frac{2R}{n\pi} \int_0^{\pi} F(t) \cdot \cos nt dt, \quad b_n^{(k)} = \frac{2R}{n\pi} . \int_0^{\pi} \varphi_k(t) \cdot \sin nt dt. \tag{3.4}$$

Условия сопряжения (1.1), (1.2) удовлетворяются за счет выбора решения в форме (2.2) и симметризации граничных функций $f_k(t)$.

Полученное решение может быть преобразовано в интеграл, если просуммировать ряды, через которые оно выражено. Окончательные формулы таковы:

$$u_k(\rho,\varphi) = C + \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} [F(t) \cdot H_1(x,\varphi,t) + \varphi_k(t) \cdot H_2(x,\varphi,t)] dt, \; 0 \le \varphi \le \pi, \tag{3.5}$$

$$k = 1,2 \ldots N,$$

$$H_1(x,\varphi,t)=h(x,\varphi-t)+h(x,\varphi+t),\quad H_2(x,\varphi,t)=h(x,\varphi-t)-h(x,\varphi+t),$$
$$h(x,t)=-{}^1\!/_2\cdot ln\left(1-2x\cdot cos\,t+x^2\right)\ ,\quad x=\rho/R.$$

Интеграл (3.5) представляет собой обобщение классической формулы Дини [1], решения внутренней задачи Неймана для однородного круга. Ограниченное на бесконечности решение внешней задачи получим из формулы (3.5), если в ней $x=\rho/R$ заменим на $y=R/\rho$.

Если условие (3.2) не выполнено, то в (3.5) следует добавить логарифмическое слагаемое. В этом случае решение не будет ограниченным на бесконечности [2].

4. Задача Дирихле для пластины из круговых секторов

Краевые условия:

$$u_k(R,\varphi)=f_k(\varphi),\quad 0\le\varphi\le\alpha; \tag{4.1}$$

$$u_k(\rho,\alpha)=g_k(\rho),\quad 0\le\rho\le R,\quad k=\overline{1,N}, \tag{4.2}$$

где α - угол раствора секторов.

Условия сопряжения на линии $x=0$ остаются прежними.

Исходную задачу разбиваем на две:

1. $v_k=0$ на луче $\varphi=\alpha$ и $v_k(R,\varphi)=f_k(\varphi)$ на дуге окружности;
2. $w_k=0$ на дуге $\rho=R$ и $w_k(\rho,\alpha)=g_k(\rho)$ на отрезке $0\le\rho\le R$.

Решение поставленной задачи, очевидно, будет суммой этих двух вспомогательных задач: $u_k(\rho,\varphi)=v_k(\rho,\varphi)+w_k(\rho,\varphi)$.

Для первой задачи решение выбираем в виде

$$v_k(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta_n}cos\,\beta_n\varphi+b_n^{(k)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha_n}sin\,\alpha_n\varphi\right], \tag{4.3}$$
$$\alpha_n=\frac{n\pi}{\alpha},\quad \beta_n=\frac{\pi}{2\alpha}(2n+1),\quad k=\overline{1,N}.$$

Такой выбор чисел α_n и β_n даёт возможность удовлетворить краевому условию на луче $\varphi=\alpha$. Функции $sin\,\alpha_n\varphi,\ \ cos\,\beta_n\varphi$ являются собственными функциями задач Штурма – Лиувилля:

$$y''+\lambda^2y=0,\quad \text{а)}\ y(0)=y(\alpha)=0,\qquad \text{б)}\ y'(0)=y(\alpha)=0.$$

Обе системы являются полными и ортогональными на $(0,\alpha)$.

Первое условие сопряжения (1.2) удовлетворяется автоматически, второе условие (1.1) будет удовлетворяться, если будет иметь место равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\mu_k\cdot\frac{\partial v_k}{\partial\varphi}\right)_{|\varphi=0}=0 \tag{4.4}$$

или вытекающее из (4.4) равенство

$$\mu_1 b_n^{(1)} + \mu_2 b_n^{(2)} + \ldots + \mu_N b_n^{(N)} = 0 \tag{4.5}$$

Краевое условие на дуге приводит к разложению

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\beta_n\varphi + b_n^{(k)} \sin\alpha_n\varphi\right) = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \tag{4.6}$$

Симметризуем функции $f_k(\varphi)$, т.е. представим их в виде

$$f_k(t) = F(t) + \varphi_k(t),$$

где $F(t)$ и $\varphi_k(t)$ определены формулами (2.8), (2.9).

Этим самым будут удовлетворены условия (4.4), (4.5) согласно теореме, приведенной выше.

Разложим $\varphi_k(t)$ и $F(t)$ в ряды Фурье. Будем иметь

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} \sin\alpha_n\varphi, \quad b_n^{(k)} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\varphi_k(t)\sin\alpha_n t dt. \tag{4.7}$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \cos\beta_n\varphi, \quad a_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} F(t)\cos\beta_n t dt. \tag{4.8}$$

Найдено точное решение для $v_k(\rho,\varphi)$. Его можно представить в виде интеграла:

$$v_k(\rho,\varphi) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\{F(t)[R_1(x,t-\varphi) + R_1(x,t+\varphi)] + \varphi_k(t)[R_2(y,t-\varphi) - R_2(y,t+\varphi)]\}, \quad x = \left(\frac{\rho}{R}\right)^r, y = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2r}, \quad r = \frac{\pi}{2\alpha}, \tag{4.9}$$

$$R_1(x,t) = \frac{x(1-x^2)\cos rt}{(1+x^2)^2 - 4\cos^2 rt}, \quad R_2(y,t) = \frac{1 - y\cos 2rt}{1 - 2y\cos 2rt + y^2}. \tag{4.10}$$

При нахождении решения второй части задачи, т.е. функции $w_k(\rho,\varphi)$, введём новую переменную $s = -ln(\rho/R), \quad 0 \le \rho < R, \quad 0 \le s < \infty.$

Уравнение Лапласа преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{4.11}$$

Краевые условия будут такими:

$$w_k(0,\varphi) = 0, \quad w_k(s,\alpha) = g_k(\rho) = g_k\left(R \cdot e^{-s}\right) = g_k^*(s), \quad 0 \le s < \infty. \tag{4.12}$$

Функцию w_k выберем в виде

$$w_k(s,\varphi) = \int_0^{\infty} \sin s\lambda[A(\lambda)\cdot ch\lambda\varphi + B_k(\lambda)\cdot sh\lambda\varphi]d\lambda, \tag{4.13}$$

где $A(\lambda)$ и $B_k(\lambda)$ – произвольные функции.

Первое краевое условие (4.12) и условия сопряжения (1.1) удовлетворяются автоматически. Для удовлетворения второго условия сопряжения должны выполняться равенства

$$\mu_1 B_1(\lambda)+\mu_2 B_2(\lambda)+\ldots+\mu_N B_N(\lambda)\equiv 0. \tag{4.14}$$

Граничное условие на лучах $\varphi=\alpha$ приводит согласно (4.12) к равенству

$$\int\limits_0^\infty sin\, s\lambda[A(\lambda)\cdot ch\lambda\alpha+B_k(\lambda)\cdot sh\lambda\alpha]d\lambda=g_k^*(s),\quad 0\le s<\infty. \tag{4.15}$$

По теореме обращения синус преобразования Фурье определяем

$$A(\lambda)\cdot ch\lambda\alpha+B_k(\lambda)\cdot sh\lambda\alpha=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty g_k^*(t)sin\,\lambda t dt=\overline{g}_k^*(\lambda), \tag{4.16}$$

где $\overline{g}_k^*(\lambda)$ - синус преобразование Фурье функции $g_k^*(s)$.

Найдём из (4.16) $B_k(\lambda)$ и подставим его в (4.14). В результате получим

$$A(\lambda)=\frac{1}{m\cdot ch\lambda\alpha}\sum_{k=1}^N \mu_k\cdot\overline{g}_k^*(\lambda), \tag{4.17}$$

где m определено в (2.8). Из (4.16) найдём

$$B_k(\lambda)=\frac{1}{sh\lambda\alpha}\left[\overline{g}_k^*(\lambda)-\frac{1}{m}\sum_{p=1}^N \mu_p\cdot\overline{g}_p^*(\lambda)\right]. \tag{4.18}$$

В результате получено точное решение для $w_k(\rho,\varphi)$. После вычисления ядер оно может быть представлено в интегральной форме:

$$w_k(\rho,\varphi)=\frac{1}{m\alpha}\int\limits_0^R g_k(r)\frac{dr}{r}M_1(\varphi,\rho;r)+\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^R\left[g_k(r)-\frac{1}{m}\sum_{p=1}^N \mu_p\cdot g_p(r)\right]\frac{dr}{r}, \tag{4.19}$$

где обозначено:

$$M_1(\varphi,\rho;r)=cos\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\left[\frac{\sqrt{\rho_1 r_1}(1+\rho_1 r_1)}{1+2\rho_1 r_1\cdot cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}+\rho_1^2 r_1^2}-\frac{(\rho_1+r_1)\sqrt{\rho_1 r_1}}{\rho_1^2+r_1^2+2\rho_1 r_1\cdot cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}}\right],$$

$$M_2(\varphi,\rho;r)=2\,sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}\left[\frac{1}{1+2\rho_1 r_1\cdot cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}+\rho_1^2 r_1^2}-\frac{1}{\rho_1^2+r_1^2+2\rho_1 r_1\cdot cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}}\right],$$

$$\rho_1=(\rho/R)^{\pi/\alpha},\quad r_1=(r/R)^{\pi/\alpha}.$$

Решение исходной задачи будет суммой двух решений (4.9) и (4.19).

Замечание 4. Преобразованием обратных радиусов $\rho=R^2/\rho'$ задача Дирихле для областей $S_k:(\rho'>R,\ 0\le\varphi\le\alpha)$, соединенных по лучу

$(\varphi = 0, \rho' > R)$, сводится к только что рассмотренной. Для $v_k^\infty(\rho,\varphi)$ и $w_k^\infty(\rho,\varphi)$ будем иметь выражения:

$$v_k^\infty(\rho,\varphi) = v_k\left(R^2/\rho,\varphi\right), \quad w_k^\infty(\rho,\varphi) = \frac{1}{m\alpha}\int_R^\infty g_k(r)\frac{dr}{r}M_1\left(\varphi,R^2/\rho;R^2/r\right) +$$
$$+\frac{1}{2\alpha}\int_R^\infty\left(g_k(r) - \frac{1}{m}\sum_{p=1}^N \mu_p g_p(r)\right)\frac{dr}{r}M_2\left(\varphi,R^2/\rho;R^2/r\right), \quad (\rho > R), \quad k = \overline{1,N}. \tag{4.20}$$

Здесь v_k^∞, w_k^∞ – решения для бесконечных областей S_k.

5. Смешанная задача для пластины из круговых секторов

5.1. На части луча $\varphi = \alpha$ задано условие

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_{\varphi=\alpha} = g_k(\rho), \quad 0 \le \rho \le R, \tag{5.1}$$

на оставшейся части границы, т.е. на дуге окружности задано условие

$$u_k(R,\varphi) = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \tag{5.2}$$

Как и в п. 4, задачу представим в виде суммы двух функций

$$u_k(\rho,\varphi) = v_k(\rho,\varphi) + w_k(\rho,\varphi), \tag{5.3}$$

где $v_k(\rho,\varphi)$ – решение, удовлетворяющее условиям

$$v_k(R,\varphi) = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha; \quad \left.\frac{\partial v_k}{\partial n}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad 0 \le \rho \le R, \tag{5.4}$$

а $w_k(\rho,\varphi)$ – условиям

$$w_k(R,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le \alpha; \quad \left.\frac{\partial w_k}{\partial n}\right|_{\varphi=\alpha} = g_k(\rho), \quad 0 \le \rho \le R, \tag{5.5}$$

С учётом граничного условия (5.4) v_k представим в виде

$$v_k(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^\infty\left[a_n x^{\alpha_n}\cos\alpha_n\varphi + b_n^{(k)} x^{\beta_n}\sin\beta_n\varphi\right],$$
$$x = \rho/R, \quad \alpha_n = n\pi/\alpha, \quad \beta_n = \pi(2n+1)/2\alpha. \tag{5.6}$$

Условие сопряжения (1.1) требует выполнения равенств

$$\mu_1 b_n^{(1)} + \mu_2 b_n^{(2)} + \ldots + \mu_N b_n^{(N)} = 0. \qquad 5.7)$$

Из первого граничного условия находим

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\cos\alpha_n\varphi + b_n^{(k)}\sin\beta_n\varphi = f_k(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha.$$

Приём симметризации краевых функций позволяет найти a_n и $b_n^{(k)}$:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} F(t)\cos\alpha_n t dt, \quad b_n^{(k)} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} \varphi_k(t)\sin\beta_n t dt, \tag{5.8}$$

где $F(t)$ и $\varphi_k(t)$ имеют смысл (2.8), (2.9). Функция $v_k(\rho,\varphi)$ – найдена.

Выражение для $w_k(\rho,\varphi)$ примем в форме интеграла

$$w_k(\rho,\varphi) = \int_0^{\infty} sin\left(\lambda \ln\frac{R}{\rho}\right)[A(\lambda)\cdot ch\lambda\varphi + B_k(\lambda)\cdot sh\lambda\varphi]d\lambda, \tag{5.9}$$

где $B_k(\lambda)$ должны удовлетворять условию

$$\mu_1 B_1(\lambda) + \mu_2 B_2(\lambda) + \ldots + \mu_N B_N(\lambda) \equiv 0, \quad \lambda \geq 0. \tag{5.10}$$

Функции $A(\lambda)$ и $B_k(\lambda)$ находим точно так, как в п. 4.

Ряды можно просуммировать, а интегралы вычислить. В результате получим аналог формулы Пуассона – Дини:

$$u_k(\rho,\varphi) = v_k(\rho,\varphi) + w_k(\rho,\varphi) = \frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^{\alpha} F(t)(1 + k_1(x,t+\varphi) + k_1(x,t-\varphi))dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\alpha} \varphi_k(t)(k_3(y,t-\varphi) - k_3(y,t+\varphi))dt\right\} +$$

$$+ \int_0^{R} g_k(r) D_1\left(\varphi, ln\frac{R}{\rho}, ln\frac{R}{r}\right)\frac{dr}{r} + \int_0^{R}\sum_{\rho=1}^{N}\mu_\rho g_\rho(r) D_2\left(\varphi, ln\frac{R}{\rho}, ln\frac{R}{r}\right)\frac{dr}{r}, \ ,$$

$$k_1(x,t) = \frac{1 - x\cos\frac{\pi}{\alpha}t}{1 - 2x\cos\frac{\pi}{\alpha}t + x^2}, \; k_3(y,t) = \frac{y\left(1+y^2\right)\cdot \sin\frac{\pi}{2\alpha}t}{\left(1+y^2\right)^2 - 4y^2\cos^2\frac{\pi}{2\alpha}t}, \; x = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\pi/\alpha},$$

$$y = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\pi/2\alpha}, \quad D_1(\varphi,s,t) = \frac{1}{2\pi}\left[ln\frac{ch\frac{\pi(s-t)}{2\alpha} + sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}{ch\frac{\pi(s-t)}{2\alpha} - sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}} - ln\frac{ch\frac{\pi(s+t)}{2\alpha} + sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}{ch\frac{\pi(s+t)}{2\alpha} - sin\frac{\pi\varphi}{2\alpha}}\right],$$

$$D_2(\varphi,s,t) = \frac{1}{m\pi}\left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{ch\frac{\pi(s+t)}{\alpha} + cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}}{ch\frac{\pi(s-t)}{\alpha} + cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}}\right) - \pi D_1(\varphi,s,t)\right].$$

5.2. На части луча задано условие задачи Дирихле, т. е. $u_k(\rho,\alpha) = g_k(\rho)$, на дуге окружности задано условие задачи Неймана, т. е. $\partial u_k/\partial\rho_{|\rho=R} = f_k(\varphi)$.

Задачу снова разбиваем на две и решаем каждую отдельно. Вычисления в этом случае не очень отличаются от предыдущих, поэтому мы их не будем проводить. Ядра в окончательном решении, как и в предыдущих случаях, выражаются через элементарные функции.

Замечание 5. Решение смешанных задач для областей $S_k = (\rho > R, 0 \le \varphi \le \alpha)$ легко можно получить с помощью преобразования обратных радиусов.

6. Приложение к задаче кручения

Поперечное сечение стержня изображено на рис. 2. Задача сводится к интегрированию уравнения $\Delta\Phi_k = -2G_k$, в секторе S_k $(k = 1{,}2)$ (Δ – оператор Лапласа, G_k – модуль сдвига). На границе области, $S = S_1 + S_2$, т. е. на дугах окружностей и на радиусах $\varphi = \alpha$, имеем нулевые условия для Φ_k. На линии сопряжения упругих тел $x = 0$ должны выполняться условия

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0, \quad \mu_k = G_k^{-1}.$$

Сделаем замену $u_k = \Phi_k + G_k \cdot x^2$. Тогда для u_k будем иметь уравнение Лапласа в S и те же условия сопряжения, что и для Φ_k.

Граничные условия для u_k будут такими:

$u_k = G_k \cdot \rho^2 \cdot sin^2 \alpha$ на радиусах, $u_k = G_k \cdot R^2 \cdot sin^2 \varphi$ на дугах окружностей.

Точное решение для $u_k(\rho,\varphi)$ даёт обобщённый интеграл Пуассона (4.9), (4.19), в котором следует положить

$$F(t) = \frac{R^2}{\mu_1 + \mu_2} sin^2 t, \quad \varphi_1(t) = \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} R^2 sin^2 t, \quad \varphi_2(t) = \frac{G_2^2}{G_1 + G_2} R^2 sin^2 t,$$

$$g_k(\rho) = G_k \cdot \rho^2 sin^2 \alpha.$$

Этот интеграл может быть вычислен в элементарных функциях при $\alpha = \pi/r$, где r – целое число.

Задача для неоднородного круглого стержня без выреза предложенным методом решена в [2]. Там решение представлено в элементарных функциях.

Выводы

1. Предложен метод построения обобщённых интегралов Пуассона и Дини для неоднородной N – листной пластины, листы которой соединены между собой и являются полукругами или круговыми секторами.
2. Метод распространен на смешанные задачи для круговых секторов, построены интегралы Пуассона и Дини.
3. Дано приложение к решению задачи кручения неоднородного стержня, составленного из двух разных по упругим свойствам стержней.

Список литературы

1. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, Н.Н. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 712 с.
2. Проценко В.С., Расчет потенциального поля в тонких многолистных пластинах, состоящих из круговых полуколец / В.С. Проценко, Т.В. Денисова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2010. – Вып. 46. – С. 189–198.

Рецензент: д-р физ.– мат. наук, проф. В.А. Меншиков,. Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 05.09.2011

Деякі узагальнення класичних формул Пуассона й Діні для двовимірного рівняння Лапласа

Знайдено узагальнення класичних інтегралів Пуассона й Діні на випадок неоднорідної багатолистової пластини книжкової структури, складеної із напівкругів або кругових секторів. В основі методу лежить прийом симетрізації функцій, заданих на межі пластин. Розглянуто задачі Діріхле, Неймана та мішані. Результати застосовано до задач кручення неоднорідних стрижнів.

Ключові слова: багатолистові тонкі пластини книжкової структури, узагальнені інтеграли Пуассона й Діні, симетрізація граничних умов, задачі Діріхле, Неймана, мішані.

Some generalizations of the classical Poisson and Dini formulas for two-dimensional Laplace equation

The generalizations of the classical Poisson and Dini integrals for the case of inhomogeneous multisheet plate of the book structure, composed of semicircles or circular sectors, are found. Dirichlet, Neumann and mixed problems are considered. An application to the problem of inhomogeneous bar torsion is given.

Keywords: multisheet thin plates of the book structure, Poisson and Dini generalized integrals, symmetrization of the boundary functions, Dirichlet, Neumann and mixed problems.