533.6
А-95

ХАРЬКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. ОСОАВИАХИМА

Проф. д-р Н. И. АХИЕЗЕР

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

БІБЛІОТЕКА ХАРК. АВІАЦ. ІНСТИТУТУ ІМ. ТСОАВІАХЕМУ

3525

ПЕРЕОБЛІК 2002 р.

Научно-техническая библиотека "ХАИ"
kn0003525

ХАРЬКОВ 1940

ПЕРЕОБЛІК 2019 р.

Предисловие

Настоящие задачи охватывают только часть курса теоретической аэродинамики и предназначаются не для работы при самостоятельном изучении аэродинамики, а как пособие для практических занятий, ведущихся в Институте. Часть задач подлежит решению вместе с преподавателем, другая часть может даваться на дом после необходимых в отдельных случаях предварительных указаний преподавателя. В силу этой установки я не привел ни решений задач, ни даже ответов.

Некоторые задачи требуют только вычислений, другие связаны с вычерчиванием кривых и иными геометрическими построениями. Наконец, часть задач дает материал для дополнительных теоретических исследований.

В составлении задач участвовали И.М. Беленький и И.Е. Зеленский, которым я приношу здесь свою благодарность

Н. Ахиезер

№ 1. Исследовать течение жидкости, если комплексный потенциал имеет вид:

a) $f = cz$,

в) $f = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-c)$,

c) $f = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-z_1}{z-z_2}$,

d) $f = \frac{Q}{2\pi} \ln(z-c)$,

e) $f = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-z_1}{z-z_2}$,

f) $f = -\frac{Qe^{i\alpha}}{z-c}$,

g) $f = cz^{\lambda}$,

где c, z_1, z_2 – комплексные числа, а $\Gamma, Q, \alpha, \lambda$ – числа вещественные.

В последней задаче рассмотреть случаи

$\lambda > 2$, $\lambda = 2$, $1 < \lambda < 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

№ 2. Комплексный потенциал течения равен

$$f(z) = (2-i)\ln(z^2+1) + (3-4i)\ln\frac{z-2}{z+1} + \frac{2}{z}.$$

Какие особенности имеет течение?

Чему равна циркуляция по каждой из линий

$$x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$$

$$|z+1| = 2 \quad ?$$

Чему равен поток через каждую из линий

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \quad |z-i| = \sqrt{3}, \quad |z-2| = \frac{1}{4} \quad ?$$

№ 3. Найти отображение источника $z = a + bi$ мощности Q относительно оси абсцисс.

№ 4. Найти отображение вихря $z = a + bi$ интенсивности Γ относительно оси абсцисс.

№ 5. Доказать, что отображением вихря $z = c$ $(|c| \neq R)$ интенсивности Γ относительно окружности $|z| = R$ является вихрь интенсивности $-\Gamma$ в точке $z = \frac{R^2}{\bar{c}}$

№ 6. Доказать, что отображением источника $z = c$ $(|c| > R)$ мощности Q является источник такой же мощности в точке $\frac{R^2}{\bar{c}}$ и источник мощности $-Q$ в точке $z = 0$.

№ 7. Исследовать течение жидкости, если комплексный потенциал равен

$$f(z) = u_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - i v_0\left(z - \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z,$$

где u_0, v_0, Γ — вещественны, a — положительно. Показать, что этот потенциал отвечает обтеканию круга $|z| = a$, причем циркуляция вокруг круга равна Γ, а скорость на бесконечности имеет проекции u_0, v_0.
В каких точках скорость обращается в нуль?
Если положить

$$f = (u_0 - i v_0) z + f^*,$$

то f^* отвечает некоторым особенностям, внесенным в равномерный поток и производящим вне круга $|z| = a$ тот же эффект, что и „твердый" круг в указанном равномерном потоке.
Каковы эти присоединенные особенности?

№8. Исследовать течение жидкости, если комплексный потенциал равен

$$f = u_0 z - \frac{m}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a},$$

где u_0, m, a - вещественны.

Показать, что написанная формула отвечает обтеканию некоторого овала равномерным на бесконечности потоком.

Каковы оси этого овала?

Каковы в рассматриваемом случае присоединенные особенности?

а) Во что вырождается овал, если $a \to 0$, $m \to \infty$ и

$$\frac{ma}{\pi} \to u_0 R^2 \quad ?$$

в) Чем заменится овал, если $\ln \frac{z-a}{z+a}$ заменить на $-\ln z$?

с) Чем заменится овал, если $\ln \frac{z-a}{z+a}$ заменить на

$$-\frac{1}{a}\int_0^a \ln(z-\xi)\,d\xi = \frac{z-a}{a}\ln(z-a) - \frac{z}{a}\ln z \ ?$$

Каковы в последнем случае присоединенные особенности?

№9. Построить комплексный потенциал течения, вызванного бесконечной последовательностью одинаковых источников мощности Q, расположенных в точках

$$z_k = z_0 + ikh \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, $h > 0$.

Показать, что полученное течение жидкости не изменится, если прямые

$$y = y_0 \pm \frac{h}{2}$$

заменить твердыми стенками.

№ 10. Построить комплексный потенциал течения, вызванного бесконечной последовательностью одинаковых диполей, расположенных в точках z_k (см. предыдущую задачу) и имеющих осью ось абсцисс.

Наложить на это течение равномерный поток, направленный по оси абсцисс.

Показать, что таким путем получается обтекание овала между двумя параллельными стенками.

Каковы присоединенные особенности в этом случае?

№ 11. Вдоль оси абсцисс находится стенка. На расстоянии h от этой стенки находится вихрь интенсивности Γ. Найти скорость перемещения этого вихря.

№ 12. Вдоль окружности $|z| = R$ находится стенка. В точке $z = c$ ($|c| \neq R$) находится вихрь интенсивности Γ. Найти скорость перемещения этого вихря и его траекторию.

№ 13. Вихрь интенсивности Γ находится в точке $c = a + bi$ в области, ограниченной положительными осями координат. Найти проекции скорости его перемещения и его траекторию.

№ 14. Исследовать движение двух вихревых точек.

а) Рассмотреть случай вихревой пары, то есть двух вихревых точек с равными по величине и противоположными по знаку интенсивностями.

в) Написать комплексный потенциал течения относительно вихревой пары.
Какова скорость на бесконечности?
Показать, что в этом случае мы получаем обтекание некоторого овала.
Каковы присоединенные особенности?

с) Рассмотреть случай двух вихрей одинаковой интенсивности /по величине и знаку/.

№15. Написать комплексный потенциал течения вне круга, если даны: m вихревых точек вне круга, циркуляция вокруг круга и скорость на бесконечности.

а) В частности рассмотреть случай одной вихревой точки и принять, что ее напряжение по величине равно, а по знаку противоположно циркуляции вокруг круга.
Как будет двигаться эта вихревая точка?

в) Рассмотреть случай двух вихревых точек, симметричных относительно оси x-ов с напряжениями Γ, $-\Gamma$, если скорость на бесконечности направлена по оси x-ов, а циркуляция вокруг круга равна нулю.

В каких точках скорость течения обращается в нуль.
При каких условиях вихревые точки не движутся относительно круга?

№16. Написать комплексный потенциал течения, вызванного n одинаковыми вихревыми точками, расположенными в вершинах правильного многоугольника. Как движется эта вихревая система?

№17. Составить комплексный потенциал течения, вызванного вне круга радиуса a непрерывно распределенными по окружности вихревыми точками с линейной плотностью

$$\gamma = \gamma(\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k' \cos k\theta + c_k'' \sin k\theta).$$

Показать, что Γ есть циркуляция вокруг круга.

а) Рассмотреть частный случай, когда все c_k', c_k'' равны нулю. Показать, что в этом случае течение вне круга тождественно с течением, вызванным одной вихревой точкой; найти скорость внутри круга и скорость самого вихревого слоя.

в) Рассмотреть частный случай, когда

$$\gamma(\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi a} - 2(u_0 \sin\theta - v_0 \cos\theta).$$

Найти скорость вне круга и внутри круга. С какой скоростью вращается вихревой слой? Результаты сравнить с задачей № 7

№18. Исследовать профиль и дать геометрическое построение, если изображающая функция есть

$$z = \zeta + \frac{m^2}{\zeta} \qquad (m>0),$$

причем образующий круг

а) имеет центр $\zeta = 0$ и радиус m, в) имеет центр $\zeta=0$ и радиус $R>m$,

c) имеет центр $\zeta=\delta>0$ и радиус $R=m+\delta$,

d) имеет центр $\zeta=if$ $(f>0)$ и радиус $R=\sqrt{m^2+f^2}$,

e) имеет центр $\zeta=-m+Re^{i\beta}$ и радиус

$$R=\sqrt{m^2+f^2}+\delta,\ \text{где } \delta>0,\ \frac{f}{m}=tg\beta .$$

№19. Исследовать профиль, если изображающая функция определяется уравнением

$$\frac{z-\lambda m}{z+\lambda m}=\left(\frac{\zeta-m}{\zeta+m}\right)^{\lambda} \qquad (2\geq\lambda>1)$$

и значит

$$\zeta=z+\frac{m^2}{3}(1-\lambda^2)\frac{1}{z}+\cdots ,$$

причем образующий круг

a) имеет центр $\zeta=0$ и радиус $R=m$,

в) имеет центр $\zeta=\delta>0$ и радиус $R=m+\delta$,

c) имеет центр $\zeta=if$ и радиус $R=\sqrt{m^2+f^2}$,

где $f>0$,

d) имеет центр $\zeta=-m+Re^{i\beta}$ и радиус

$$R=\sqrt{m^2+f^2}+\delta,\ \text{где } \delta>0,\ \frac{f}{m}=tg\beta .$$

№ 20. Для получения профилей Мизеса берут изображающую функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1+\frac{m}{\zeta}\right)^{\lambda-1}\left(1-\frac{\zeta_1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{\zeta_2}{\zeta}\right)\cdots\left(1-\frac{\zeta_n}{\zeta}\right),$$

где точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ лежат внутри образующего круга, точка $\zeta = -m$ на его окружности и

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n = (\lambda - 1)m .$$

Показать, что

$$\zeta = z + \left[\sum_{k,j} \zeta_k \zeta_j - \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)m^2\right]\frac{1}{z} + \cdots$$

В частности составить изображающую функцию и исследовать профиль, если

а) $\lambda = 2$, $n = 3$, $\zeta_1 = m$, $\zeta_2 = -\zeta_3 = \frac{m}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}$, причем радиус образующего круга равен $R = 1{,}1m$, а центр лежит в точке $\zeta = -m + Re^{i\frac{\pi}{18}}$;

б) $\lambda = 2$, $n = 2$, $\zeta_1 = -\frac{m}{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$, $\zeta_2 = m - \zeta_1$, причем радиус образующего круга равен $R = 1{,}25m$, а центр находится в точке $\zeta = -m + Re^{i\frac{\pi}{12}}$

№ 21. Пусть профиль $\mathcal{L}$ имеет одну угловую точку /задний носик/. Если область вне профиля / плоскость z/ отображается на область вне круга

$$|\zeta - c| = R$$

с помощью функции, которая для достаточно больших $|z|$ представима рядом

$$\zeta = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots ,$$

то подъемная сила профиля равна

$$P = 4\pi\rho R V_0^2 \sin(\alpha+\beta),$$

а момент относительно центра образующего круга (точка $z = c$) равен

$$\mathcal{M}_c = 2\pi\rho V_0^2 m^2 \sin 2(\alpha+\gamma),$$

где V_0 - величина скорости на бесконечности,

α - угол атаки относительно оси абсцисс,

β определяется из условия, что задний носик профиля соответствует точке

$$\zeta_0 = c - Re^{i\beta}$$

окружности образующего круга, γ определяется из равенства

$$a_1 = -m^2 e^{2i\gamma},$$

причем $m > 0$.

Построить оси профиля, т.е. прямые, проходящие через центр образующего круга под такими углами, что при движении вдоль первой оси исчезает подъемная сила, а при движении вдоль второй оси исчезает момент $\mathcal{M}_c$.

№22. Показать, что существует точка F /фокус профиля/, относительно которой момент не зависит от угла атаки. Эта точка F находится на расстоянии

$$\frac{m^2}{R}$$

от центра образующего круга и вторая ось профиля есть биссектриса угла между первой осью и прямой CF /см. предыдущую задачу/.

№23. Сохраняя обозначения предыдущих двух задач, показать, что при $\beta = \gamma$ подъемная сила при всех углах атаки проходит через фокус.

Показать, что при $\beta \neq \gamma$ огибающая различных положений подъемной силы, когда угол атаки меняется, есть парабола - парабола устойчивости.

Показать, что фокус параболы устойчивости есть фокус профиля и что касательная к параболе устойчивости в вершине параллельна первой оси профиля.

№24 Показать, что центр образующего круга есть центр тяжести масс, распределенных по контуру профиля с линейной плотностью

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

Показать далее, что вторая ось профиля и перпендикуляр к ней являются главными осями инерции этих масс.

№25 Теорема Фабера-Бибербаха из теории функции гласит: если

$$z = \zeta + A_0 + \frac{A_1}{\zeta - c} + \frac{A_2}{(\zeta-c)^2} + \dots$$

есть функция, отображающая область вне круга $|\zeta - c| = R$ на некоторую область /z - плоскости/, то

$$|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + \dots + n|A_n|^2 + \dots \leq R^2$$

На основании этой теоремы показать, что фокус профиля лежит всегда внутри или на окружности образующего круга.

Для какого профиля фокус лежит на окружности образующего круга?

№26 Построить оси, фокус и параболу устойчивости для профилей, рассмотренных в задачах 18, 19, 20.

№27 Для построения профилей задачи №19 положить

$$\zeta = me^{\psi + i\theta}$$

Принимая, что ζ пробегает окружность образующего круга, вычислить для ряда точек значения ψ, θ.

Вводя затем функции

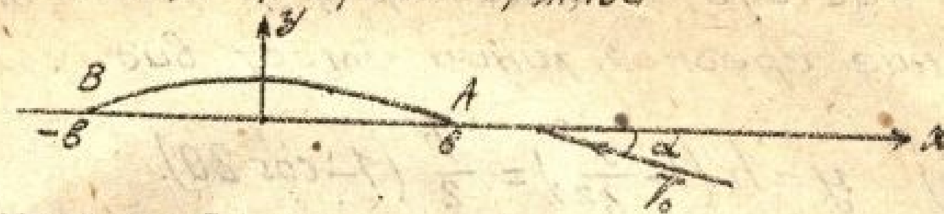
$$tg\, t = \frac{\sin\theta}{sh\psi}, \quad th\, s = \frac{\cos\theta}{ch\psi},$$

показать, что координаты соответствующих точек профиля даются формулами

$$x = \lambda m \frac{sh\,\lambda s}{ch\,\lambda s - \cos\lambda t},$$

$$y = \lambda m \frac{\sin\lambda t}{ch\,\lambda s - \cos\lambda t}$$

№28 Расчет тонкого профиля, средняя линия которого мало отличается от отрезка прямой



и имеет уравнение

$$y = f(x) \qquad (f(b) = f(-b) = 0),$$

основан на уравнении

$$-\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{1}{2\pi V_0}\int_{-b}^{+b}{}^{*} \frac{\gamma(x_2)\,dx_1}{x - x_1},$$

где α – угол атаки, V_0 – величина скорости на бесконечности, а $\gamma(x)$ – вихревая функция.

а) Полагая, что

$$y = f(x) = b \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta,$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k = 0$$

$$x = b\cos\theta,$$

доказать, что

$$\gamma(x) = \frac{C + 2\alpha V_0 \cos\theta}{\sin\theta} + 2V_0 \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \frac{\cos k\theta}{\sin\theta},$$

где C произвольно.

Как следует выбрать C (и какой вид имеет тогда $\gamma(x)$), чтобы скорость в точке $x = -b$ была конечна?

Чему равны при этом условии C_y и C_m?

в) Полагая, что

$$-\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\theta \qquad (x = b\cos\theta),$$

причем

$$A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k A_{2k}}{4k^2 - 1} = 0,$$

показать, что

$$\gamma(x) = 2V_0 \left\{ (\alpha - A_0)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\theta \right\},$$

если снова потребовать, чтобы скорость в точке $x = -b$ была конечна.

Чему равны C_y и C_m?

№ 29 Расчитать тонкий профиль, если уравнение средней линии имеет вид

a) $y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\theta)$

в) $y = 2h\frac{x}{b}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) = \frac{h}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)$

c) $y = 2b\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\left(B_0 - 2B_1\frac{x}{b}\right) =$

$= b(B_0 - B_1\cos\theta - B_0\cos 2\theta + B_1\cos 3\theta)$

$(x = b\cos\theta)$.

№ 30 Полагая, что уравнение средней линии есть

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

расчитать тонкий профиль, если известны наклоны касательных на концах средней линии:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-b} = m, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = n.$$

№ 31 Расчитать тонкий профиль Н. Е. Жуковского по приближенному методу и сравнить результаты с результатами точной теории. При этом за среднюю линию принять дугу окружности и воспользоваться предыдущей задачей.

3525

БИБЛ...КА
...
ХАРЬКОВ...
ИМ. ГОС... У.