

533  
А-95

ПРОФЕССОР д-р  
АХИЕЗЕР Н. И.

# КУРС АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Выпуск 6

ПЕРЕОБЛІК 2002 р.

Научно-техническая библиотека "ХАИ" 



mt0059917

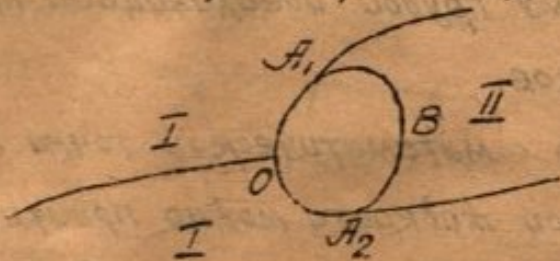
НАУКОВО-ТЕХНІЧЕСЬКА БІБЛІОТЕКА  
Национального авіаційного університету ім. М. Г. Жуківського  
Харків, вул. Авиационная, 10

ПЕРЕОБЛІК 20 19 р.

ИЗДАНИЕ \* ХАИ

БІБЛІОТЕКА  
НАЦІОНАЛЬНОГО АВІАЦІЙНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. М. Г. ЖУКІВСЬКОГО

§1. Понятие о струйной теории. В предыдущем выпуске мы уже отметили, что (в связи с отрывом от тела поверхностного слоя жидкости) за телом образуется вихревое течение, что вызывает некоторое сопротивление движению тела в жидкости. Так как вне поверхностного слоя незначительной вязкостью можно пренебречь, то мы приходим к задаче изучения течения в идеальной жидкости при наличии за телом некоторых вихревых образований. Ограничиваясь плоско-параллельными течениями, мы можем нарисовать следующую картину движения: некоторая линия течения, приходя из бесконечности, встречает профиль в некоторой точке  $O$  и разветвляется на две линии, которые следуют вдоль контура профиля до точек  $A_1$  и  $A_2$ , а затем отделяются от контура, ограничивая вместе с частью  $A_1BA_2$  контура некоторую область  $\text{II}$ , заполненную вихревым движением; в оставшейся области, которую мы назовем



областью  $\text{I}$ , вихри таким образом отсутствуют и течение, следовательно, имеет потенциал.

Так как покоящийся профиль представляет некоторую ширму для заполняющей область  $\text{II}$  жидкости, то жидкость в области  $\text{II}$  не может иметь заметного поступательного движения. Желая поэтому получить первое приближение, мы можем принять, что жидкость в области  $\text{II}$  находится в абсолютном покое.

Мы приходим таким образом к рассмотрению разрывного течения жидкости, в котором скорость испытывает скачок вдоль линий, ограничивающих область  $\text{I}$  от области  $\text{II}$ .

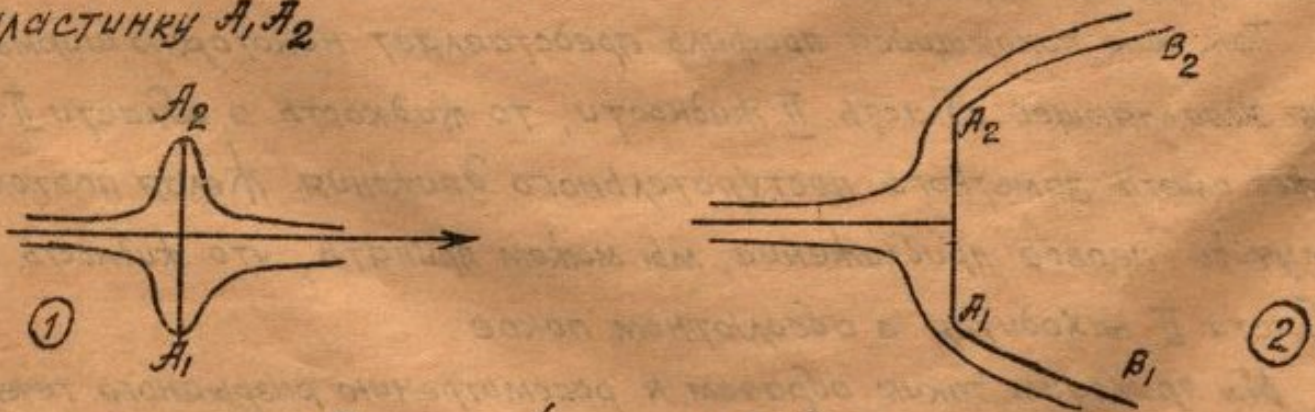
Предполагая, что жидкость в области  $\text{II}$  покоится, а не нахо-

дится в вихревом движении, мы, конечно, получим не точные результаты, а лишь грубо приближенные. Легко видеть, что сопротивление окажется меньшим действительного, так как наличие вихрей создает понижение давления, а вместе с тем увеличение силы сопротивления.

Однако, незнание и сложность истинного вихревого движения в области II заставляет нас во многих случаях довольствоваться указанной (с точки зрения аэродинамики грубой) схемой, изучение которой было начато еще Гельмгольцем, а затем продолжено Рэлеем, Жуковским, Леви-Чивита и другими, и которое привело к созданию в математическом отношении весьма интересной теории, получившей название струйной теории.

Рассматривая реальные жидкости с незначительной вязкостью, мы считаем приведенную схему грубой идеализацией происходящих в действительности процессов.

Но важно отметить, что с математической точки зрения к разрывным течениям идеальной жидкости можно прийти и на основе совсем других соображений. Проще всего это можно пояснить по Гельмгольцу следующим образом. Пусть поток набегает на плоскую пластинку  $A_1 A_2$



При сплошном обтекании (см. чертёж 1) мы получили бы в точках  $A_1$  и  $A_2$  бесконечно большие скорости. Так как это невозможно, то приходится принять, что линии течения не обтекают пластинку в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а сходят в этих местах в виде «свободных струй»  $A_1 B_1, A_2 B_2$

Сформулируем теперь те предположения, которые лежат в основе струйной теории.

1° Вдоль линии разрыва давление остается непрерывным.

2° Давление в застойной области равно давлению на бесконечности  $p_0$ .

3° Застойная область тянется на бесконечность.

Обозначая через  $V_0$  скорость потока на бесконечности в области  $\underline{I}$ , напишем уравнение Бернулли для области  $\underline{I}$ :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2}$$

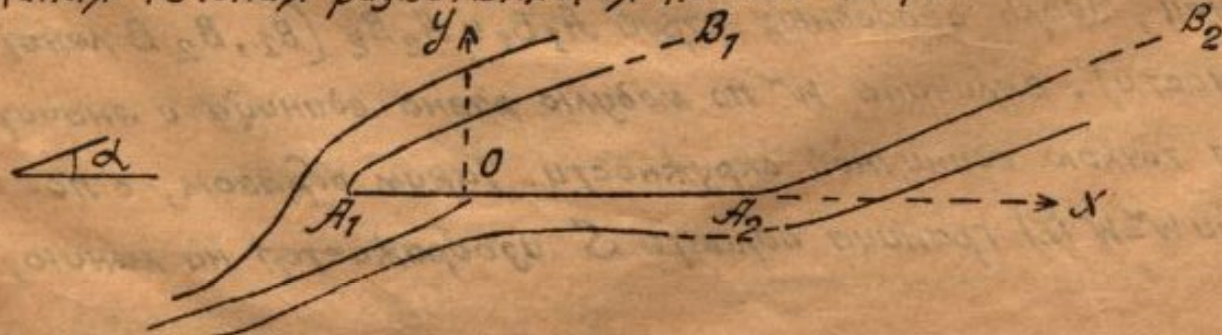
Так как вдоль линий разрыва  $p = p_0$ , то вдоль линий разрыва  $V = V_0$ , то-есть на линиях разрыва скорость течения имеет постоянное значение  $V_0$ .

### § 2 Обтекание с отрывом струй плоской пластинки

Перейдем от общих соображений к конкретной задаче и рассмотрим случай, когда профилем является отрезок прямой  $A_1 A_2$ , лежащий на оси  $x$ -ов, иначе говоря, будем рассматривать обтекание с отрывом струи бесконечно-длинной плоской пластинки ширины  $A_1 A_2 = b$ .

Обозначим угол атаки через  $\alpha$  и предположим для некоторого упрощения дальнейших выкладок, что скорость течения на бесконечности по величине равна единице.

Начало координат в плоскости течения возьмем в критической точке, т.е. в той точке, где приходящая из бесконечности линия течения разветвляется на две части.



В занятой потоком области  $S$  плоскости комплексного переменного  $Z = x + iy$  комплексная скорость

$$W = u - iv$$

и комплексный потенциал

$$f = \varphi + i\psi$$

суть аналитические функции от  $Z$ , нахождение которых и есть наша окончательная цель

Так как  $W = \frac{df}{dZ}$ , то

$$(1) \quad Z = \int \frac{df}{W},$$

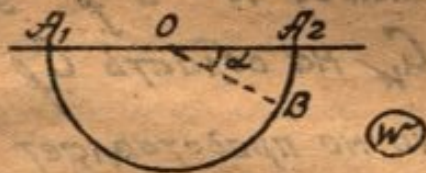
и мы видим отсюда, что если нам удастся найти  $f$  как функцию от  $W$ , то заменяя  $df$  его выражением через  $W$  и выполняя интегрирование в формуле (1), мы найдем  $Z$  в функции от  $W$ , и задача будет решена.

Вместо этого, очевидно, можно искать  $W$  и  $f$  как функции от вспомогательной переменной.

Будем на минутку рассматривать  $W$  и  $f$  как функции от  $Z$  и исследуем те области, которые пробегает в своих плоскостях точки  $W$  и  $f$ , когда точка  $Z$  пробегает область  $S$ .

Начнем с переменной  $W$ . В точке  $O$  области  $S$  скорость равна нулю ( $W=0$ ), вдоль линии  $OA_2$  переменная  $W$  положительна и растет от 0 до 1, вдоль линии  $OA_1$  переменная  $W$  убывает от 0 до -1, наконец, вдоль свободных струй  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  ( $B_1, B_2$  лежат на бесконечности), величина  $W$  по модулю равна единице и значит изображается точкою единичной окружности. Таким образом, с помощью функции  $W=W(Z)$  граница области  $S$  изображается на линию,

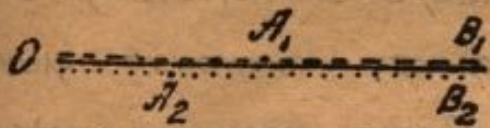
состоящую из половины единичной окружности и ее горизонтального диаметра. Так как скорость в области  $S$  конечна, то в плоскости  $W$  мы получим в качестве области изменения величины  $W$  внутренность указанного полукруга. Далее, поскольку идя вдоль  $OA_1 B_1 B_2 A_2 O$  мы оставляем область  $S$  слева, что соответствующей областью  $G$  в плоскости  $W$  будет нижний полукруг.



Соответственные точки границ областей  $S$  и  $G$  (как и областей, которые мы приведем далее) мы обозначаем на чертежах одинаковыми буквами. Так как на бесконечности  $u = \cos \alpha$ ,  $v = \sin \alpha$  и значит  $W = u - iv = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}$ , то всем трем точкам  $B_1, B_2$  и  $B$  плоскости  $Z$  в плоскости  $W$  отвечает одна точка  $B$ , для которой угол  $A_2 O B$  равен  $\alpha$ .

Рассмотрим теперь переменную  $f = \varphi + i\psi$ . Так как в составе комплексного потенциала произвольная аддитивная постоянная роли не играет, то мы можем принять, что при  $Z=0$  функция  $f$  также обращается в нуль. С другой стороны, вдоль контура профиля и свободных струй, которые являются линиями течения, функция тока  $\psi$  равна константе. Следовательно,  $\psi = 0$  на всей границе области. Мы знаем, что вдоль линий течения функция  $\varphi$  растет. Поэтому вдоль границы области  $S$  функция  $\varphi$  изменяется от 0 до  $+\infty$ , тогда как  $\psi$  все время равняется нулю. Отсюда следует, что внутренним точкам области  $S$  отвечают точки плоскости  $f$ , из которой удалена <sup>положительная</sup> положительная половина вещественной оси, а положительная половина вещественной оси, как граница полученной нами в плоскости  $f$  области  $G_f$ , должна рассматриваться как дуга

регобный разрез, и точки  $A_1, A_2$  будут лежать на противоположных берегах, как это и показано на чертеже.



Положение точек  $A_1, A_2$  определяется их абсциссами  $a_1, a_2$ , которые наперед нам неизвестны, но сама область  $G_f$  (как и область  $G_w$ ) в основном определена:

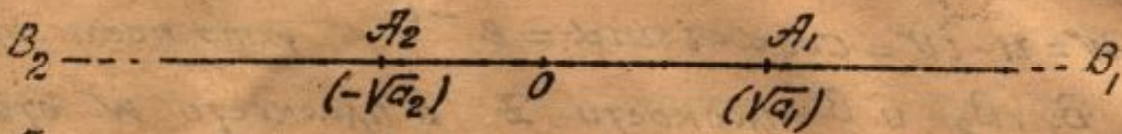
(D)

Найти зависимость между  $w$  и  $f$  это значит найти функцию отображающую область  $G_w$  на область  $G_f$ .

Решение этой задачи не представляет никакого труда и может быть получено следующим образом.

Положим  $f = F^2$ , тогда область  $G_f$  перейдет в область  $G_F$ , представляющую верхнюю половину плоскости  $F$ :

Решение этой задачи не представляет никакого труда и может быть получено следующим образом.

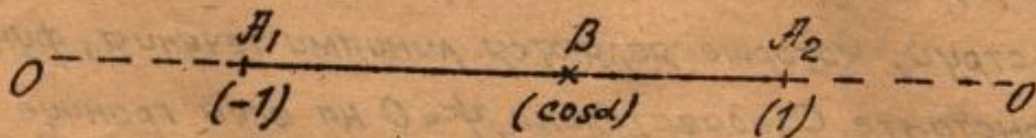


(E)

Далее положим

$$t = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right);$$

это преобразование переводит область  $G_w$  в область  $G_t$ , представляющую



(Z)

верхнюю половину плоскости  $t$ . Оба эти изображения нами были фактически рассмотрены.

Чтобы найти зависимость между  $f$  и  $w$ , очевидно, достаточно найти зависимость между  $F$  и  $t$ . На преобразование полуплоскости в полуплоскость осуществляется дробной линейной функцией. Следовательно,

$$F = \frac{At + B}{Ct + D}$$

Так как при  $t = \infty$ ,  $\cos \alpha$  мы должны соответственно получить  $F = 0, \infty$ , то мы находим для определения коэффициентов  $A, B, C, D$  такие уравнения

$$A = 0, C \cos \alpha + D = 0.$$

Значит

$$F = \frac{k}{t - \cos \alpha},$$

где  $k$  = есть константа, которая должна оставаться пока неопределенной; через эту константу и  $\cos \alpha$  могут быть выражены введенные нами ранее параметры  $a_1, a_2$ .

Окончательно мы имеем:

$$f = F^2 = \frac{k^2}{(t - \cos \alpha)^2} = \frac{4k^2}{\left(W + \frac{1}{W} - 2\cos \alpha\right)^2}.$$

Это есть искомая зависимость между  $f$  и  $W$ . Для удобства вычислений выгодно ввести вспомогательную переменную. А именно,

положим

$$t = \frac{1 - \cos \alpha \cdot \cos \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}$$

где  $\omega$  и есть вспомогательная величина. Легко находим, что

$$f = \frac{k^2}{(t - \cos \alpha)^2} = \frac{k^2 (\cos \alpha - \cos \omega)^2}{\sin^4 \alpha}$$

и

$$\frac{1}{W} = t + \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1 - \cos \alpha \cdot \cos \omega + \sin \alpha \cdot \sin \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}$$

Отсюда

$$df = \frac{2k^2 (\cos \alpha - \cos \omega) \sin \omega}{\sin^4 \alpha} d\omega,$$



и для ширины пластинки мы получаем выражение

$$b = \int_{-1}^1 \frac{df}{dw} \frac{1}{w} dw = \int_0^{\pi} \frac{2k^2 \sin \omega \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \omega + \sin \alpha \cdot \sin \omega)}{\sin^4 \alpha} d\omega =$$

$$= \frac{k^2 (4 + \pi \sin \alpha)}{\sin^4 \alpha}.$$

Это равенство показывает, что

$$k^2 = b \frac{\sin^4 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}.$$

Вычислим теперь давление на нашу пластинку, которое мы обозначим через  $R$ . Снизу на элемент  $dx$  профиля действует сила  $p dx$ , а сверху  $-p_0 dx$ , что вместе дает

$$(p - p_0) dx$$

и значит

$$R = \int (p - p_0) dx$$

На основании формулы Бернулли

$$R = \frac{\rho}{2} \int (1 - v^2) dx.$$

Но вдоль профиля  $v$  равно нулю, а значит  $v^2 = w^2$ . Кроме того на профиле  $dx = dz \dots$

Поэтому

$$R = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \frac{df}{dw} \frac{1}{w} (1 - w^2) dw.$$

А так как

$$\frac{df}{dw} dw = df = \frac{2k^2 (\cos \alpha - \cos \omega) \sin \omega \cdot d\omega}{\sin^4 \alpha}$$

и

$$\frac{1}{w} (1 - w^2) = \frac{1}{w} - w = 2 \sqrt{t^2 - 1} = 2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \omega}{\cos \alpha - \cos \omega}$$

то

$$R = \frac{2\rho k^2}{\sin^3 \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \cdot d\omega = \frac{\pi \rho k^2}{\sin^3 \alpha} = \frac{\pi \rho v \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

Если бы скорость на бесконечности равнялась  $V_0$ , а не 1, то мы получили бы, что

$$R = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho v V_0^2;$$

отсюда для аэродинамического коэффициента  $C$  получается значение

$$C = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha},$$

и легко видеть, что коэффициенты  $C_x, C_y$  равны

$$C_x = \frac{\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}, \quad C_y = \frac{\pi \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

Приведенное нами решение принадлежит Рэлею, а частный случай, когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (прямой удар), был изучен еще Кирхгоффом, которому также принадлежит примененный здесь метод.

### §3. Сравнение с результатами эксперимента

Мы видели ранее, что теория Н.Е. Жуковского (циркуляционная теория) дает для коэффициента подъемной силы значение

$$C_y^{(3)} = \pi \alpha,$$

где  $\alpha$ , угол атаки в радианах относительно первой оси профиля. Для малых углов атаки формула Н.Е. Жуковского хорошо согласуется с результатами экспериментов.

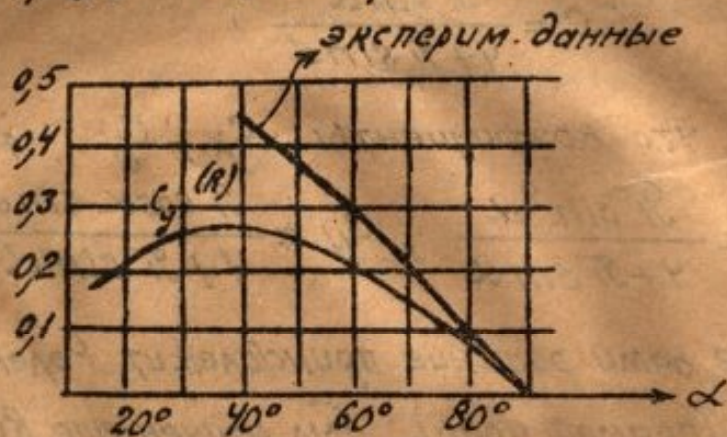
С другой стороны, полученная нами в предыдущем параграфе формула Рэлея дает для коэффициента подъемной силы при малых углах атаки величину

$$C_y^{(R)} \approx \frac{\pi}{4} \alpha = \frac{1}{4} C_y^{(3)}$$

Мы видим, что по струйной теории значение коэффициента подъемной силы  $B$  четыре раза меньше того которое дается теорией Н.Е. Жуковского, хорошо подтверждающейся экспериментами.

Поэтому для малых углов атаки струйная теория непригодна.

Интересно сравнить результаты струйной теории с результатами экспериментов, когда угол атаки близок к  $90^\circ$ . Эти результаты представлены на чертеже,



которые мы позаимствовали из книги Frank-Mises, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II, 1927, стр. 782.

Мы видим, что для углов атаки, близких к  $90^\circ$ , экспериментальная кривая приближается к кривой Рэлея; следовательно, для больших углов атаки струйная теория приводит к более или менее удовлетворительным результатам.

Это объясняется тем, что при больших углах атаки действительно имеет место отрыв струи, и хотя за реальным кривом никогда не бывает полного покоя, а образуются завихрения, что приводит к понижению давления и увеличению аэродинамических сил, можно все-таки считать, что

струйная теория в этих случаях, действительно, дает  
сносное приближение.

Что касается до малых углов атаки, то кривая Рэлея  
расходится с результатами эксперимента главным образом  
потому, что струйная теория учитывает только процессы  
перед крылом, а при образовании подъемной силы процессы  
за крылом (отщепление вихрей из поверхностного слоя)  
играют значительно большую роль.

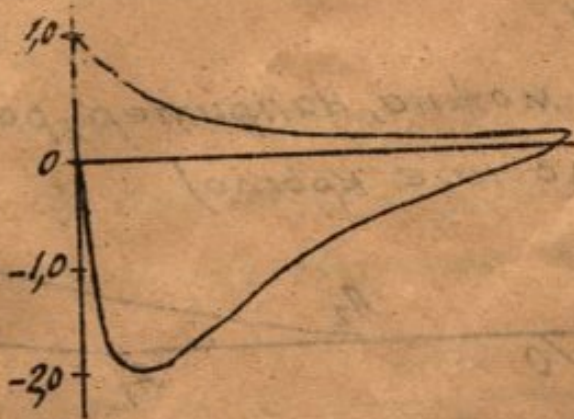
В этом нас убеждают также измерения давления в  
различных точках около поверхности крыла.

На прилагаемом чертеже представлено типичное распре-  
деление измеренных давлений в различных точках поверх-  
ности крыла.

По оси ординат откладываются отношения

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2},$$

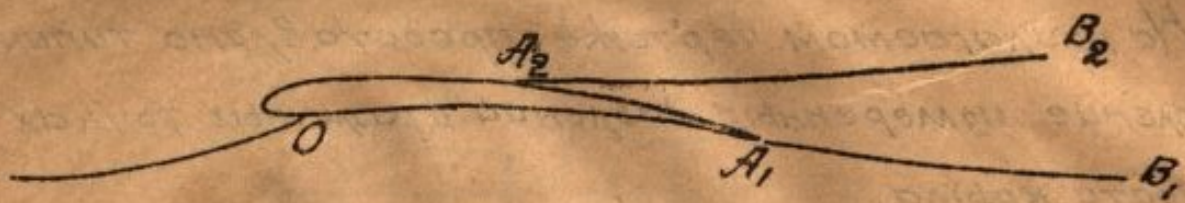
а горизонтальная ось направлена по хорде крыла от  
переднего носика к заднему



Верхняя часть кривой отвечает повышенному давлению  
под крылом, а нижняя часть - разряжению над крылом.  
Чертеж показывает, что подъемная сила значительно

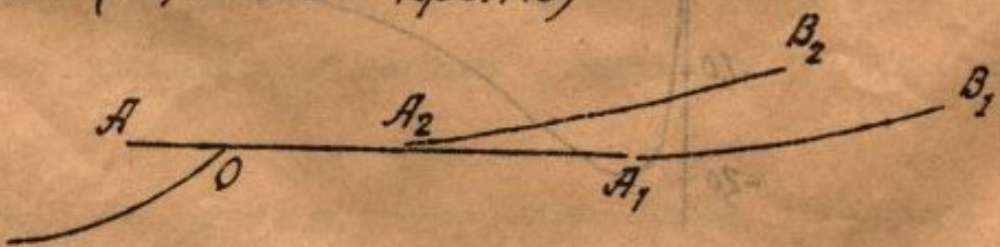
более обязана разряжению над крылом, чем повышенному давлению под крылом.

В заключение этого параграфа отметим, что картина струйного обтекания и картина циркуляционного обтекания являются в некотором смысле двумя крайними случаями. В соответствии с общей теорией поверхностного слоя наиболее вероятной является "промежуточная" картина, которая схематически может быть описана следующим образом.



Некоторая линия течения встречает в точке  $O$  обтекаемый контур, в этой точке происходит разветвление линии тока; затем одна из ветвей покидает профиль в заднем носике  $A_1$ , а другая - в некоторой точке  $A_2$  задней поверхности крыла, причем за крылом образуется застойная зона как в схеме Кирхгоффа.

По этой схеме можно, например, рассмотреть обтекание отрезка (плоское крыло)



При этом в переднем носике  $A$  мы получим бесконечную скорость, как и в теории Н. Е. Жуковского при обтекании дуги.

Впервые эту задачу решили С. Чаплыгин и Я. Лаврентьев. Мы приведем анализ этих авторов без доказательства \*)

Прежде всего отметим, что существует бесчисленное множество течений указанного рода; они будут отличаться друг от друга положением точки  $A_2$  и формой свободных струй  $A_1 B_1, A_2 B_2$ . Здесь мы имеем такую же неопределенность, как и в циркуляционной теории Н.Е. Жуковского, где одно течение отличается от другого значением циркуляции вокруг крыла. Н.Е. Жуковский предложил некоторую гипотезу для устранения указанной неопределенности в случае циркуляционного обтекания.

Чаплыгин и Лаврентьев подобной гипотезы не дали. Оказывается, что среди всех течений рассматриваемого рода существует одно и только одно для которого свободные струи не имеют точек перегиба.

Мы предлагаем для устранения указанной неопределенности выбирать именно это течение. Возможно, что такой выбор можно обосновать соображениями устойчивости течения.

Если принять нашу гипотезу, то для коэффициента подъемной силы  $C_y$  при малых углах атаки получается следующее приближенное выражение

$$C_y = \pi b \sin \alpha \approx \frac{\pi \alpha}{1 + \frac{\pi-2}{4} \sin 2\alpha}$$

---

\*) См. Н. Ахиезер, о плоскопараллельном потоке через бесконечную решетку (Научные записки ХАЦ, 1934).

По циркуляционной теории

$$C_y = \pi \sin \alpha$$

и значит  $b = 1$ , здесь же  $b < 1$ . Вот несколько точных значений коэффициента  $b$

$\alpha$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$
$b$	0,95217	0,90456	0,86670	0,82921	0,79400

Как видим, результаты соответствуют действительности даже несколько лучше, чем результаты циркуляционной теории.

#### § 4 Эффект Кармана

Мы уже ранее говорили, что при движении крыла из поверхностного слоя отделяются вихри внутрь потока.

Если профиль имеет симметричную форму относительно направления движения, то вихри отделяются парами, причем полная циркуляция каждой такой пары вихрей равна нулю.

Поэтому циркуляция вокруг профиля, а вместе с нею и подъемная сила, не образуется. Но в связи с вихреобразованием будет возникать лобовое сопротивление, которое часто называют сопротивлением Кармана, так как Карман впервые дал теорию рассматриваемого явления.

Примем, что вихри за телом располагаются в некотором правильном порядке в виде двух параллельных рядов, которые назовем дорожками Кармана. Для упрощения предположим, что вихревые дорожки тянутся на бесконечность в обе стороны. Эта картина приблизительно имеет место далеко за телом.

Предположим, что центры вихрей, образующих дорожки,

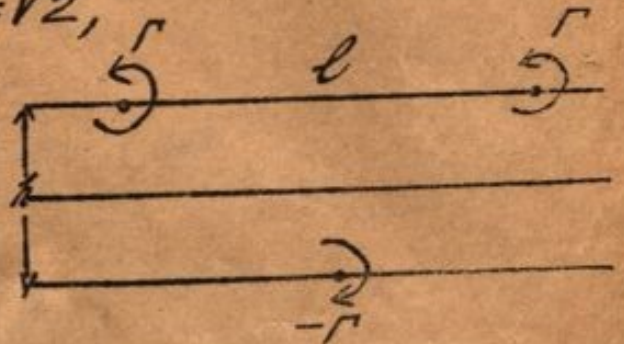
лежат на двух прямых, параллельных оси  $x$ -ов, в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ . Пусть циркуляция вокруг каждого вихря верхнего ряда равна  $\Gamma$ , а нижнего  $-\Gamma$ .

Если обозначить через  $l$  расстояние между двумя соседними вихрями одного ряда, а через  $h$  расстояние между рядами, то, как показывает анализ Кармана, вихревые дорожки не будут неустойчивыми только тогда, когда вихри расположены в шахматном порядке и

$$\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2},$$

откуда

$$\frac{h}{l} = 0,2806.$$



При этих условиях вихревые ряды будут двигаться в направлении положительной оси  $x$ -ов с постоянной скоростью

$$u = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} = \frac{\Gamma}{2l} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Далее вычисление показывает, что сопротивление  $R$ , вызываемое эффектом Кармана и отнесенное на единицу длины размаха, равно

$$R = \rho l V_0^2 \left[ 0,7936 \frac{u}{V_0} - 0,3141 \left( \frac{u}{V_0} \right)^2 \right].$$

При этом  $V_0$  есть скорость, с которой движется тело,  $u$  — скорость, с которой перемещаются вихревые ряды, причем жидкость на бесконечности предполагается покоящейся.

Величина  $l$  зависит от размеров профиля и может быть найдена фотографированием потока.

Что касается отношения  $\frac{u}{V_0}$ , то его можно найти, подсчитывая число вихревых пар, отщепляющихся в единицу времени.

Карман и Рубах провели интересные экспериментальные исследования, подтверждающие в существенном теорию, результаты которой мы здесь изложили без доказательства.