

В. К. ЗОЛУХИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ В ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БАЛКЕ ПРИ РАБОТЕ ПРОДОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ

Расчет самолета на прочность производится на эксплуатационную и на расчетную нагрузку. В последнем случае ряд продольных элементов самолета имеет напряжения, лежащие в упруго-пластической зоне.

В самолетостроении все время уделялось значительное внимание развитию методов расчетов агрегатов на расчетную нагрузку. В общем машиностроении за последние годы коэффициент запаса прочности стал определяться на основе предельной несущей способности сооружения или машины, что, безусловно, приводит к облегчению веса. Поэтому методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость при расчетных или предельных нагрузках имеют существенное значение, а всякого рода уточнения и развитие этих методов крайне необходимы.

В соответствии с установившейся методикой расчета агрегатов самолета на прочность на расчетную нагрузку определение нормальных и касательных напряжений схематично заключается в следующем [1, 2]: задаются редуцированными коэффициентами φ и η , пользуясь диаграммой $\sigma - \varepsilon$, методом последовательных приближений находят действительные нормальные напряжения с необходимой степенью точности. Затем на основе полученных значений редуцированных площадей сечений по формуле Журавского, с соответствующим раскрытием статической неопределимости, определяют касательные напряжения.

Несостоятельность такого определения касательных усилий известна, так как в таком расчете не отражается действительное распределение касательных усилий, вызванных изменением нормальных сил по длине конструкции. Действительное изменение нормальных напряжений не пропорционально редуцированному коэффициенту или, что то же самое, текущему модулю. Только диаграмма $\sigma - \varepsilon$ может дать истинное значение такого изменения.

В настоящей работе излагается методика определения касательных усилий с учетом действительной графической зависимости между σ и ε .

Пусть в результате расчетов на расчетную нагрузку получены с достаточной степенью точности нормальные напряжения (точки 1, 2 и другие на графике, рис. 1).

При изложении метода определения действительных касательных усилий будем предполагать, что контур поперечного сечения тонкостенной цилиндрической балки статически определим, так как статическая неопределимость ничего нового в методику не вносит. Целью нашей работы является определение касательных усилий, которые находились до сих пор по формуле Журавского

$$q = \frac{Q_y S_x}{I_x}, \quad (1)$$

где S_x и I_x — статический момент и момент инерции редуцированных площадей относительно оси X .

В рассматриваемом сечении (рис. 2) нормальные напряжения дают силы, момент которых равен моменту внешних сил.

Для определения касательных усилий возьмем сечение II на расстоянии Δz от сечения I (рис. 2)

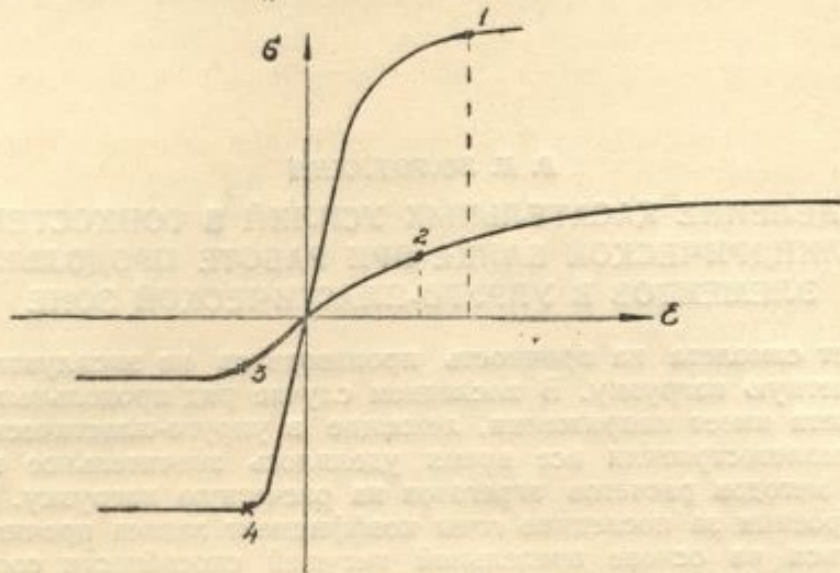


Рис. 1.

Будем считать Δz достаточно малым, чтобы принять изменение нормальных напряжений в продольных элементах по касательной линии на графике $\sigma - \epsilon$ (рис. 3).

Пусть изгибающий момент в сечении II возрос на ΔM .

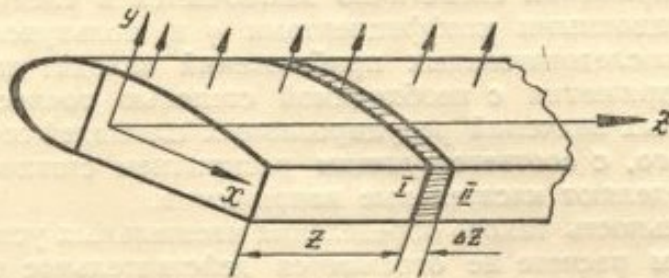


Рис. 2.

Введем следующие обозначения:

- $\Delta \epsilon_i$ — приращение относительного удлинения в i -ом продольном элементе на участке Δz ;
- $\Delta \sigma_i$ — приращение нормального напряжения;
- y_i — расстояние от центра тяжести сечения элемента до условной оси параллельной оси y_0 на поперечном сечении;
- y_0 — расстояние от центра тяжести всех площадей сечения продольных ребер до условной оси;
- $\operatorname{tg} \alpha_i$ — тангенс угла наклона с осью ϵ касательной к линии $\sigma - \epsilon$ в i -ой точке действительного напряжения сечения I;
- F_i — действительная площадь сечения i -го продольного элемента;
- n — количество продольных элементов сечения, работающих на нормальные напряжения.

Ось x — главная ось инерции сечения I.

Из условий равновесия следует:

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i (y_i - y_0) F_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i F_i = 0, \quad (3)$$

где (2) — означает, что приращение момента внешних сил равно приращению момента внутренних сил;

(3) — сумма проекций сил на продольную ось равна нулю, так как считаем внешние силы действующими перпендикулярно продольной оси.

Кроме этого считаем, что в сечении II приращение относительных удлинений подчиняются закону плоскости

$$\frac{\Delta \varepsilon_1}{y_1 - y_0} = \frac{\Delta \varepsilon_2}{y_2 - y_0} = \dots = \frac{\Delta \varepsilon_i}{y_i - y_0}. \quad (4)$$

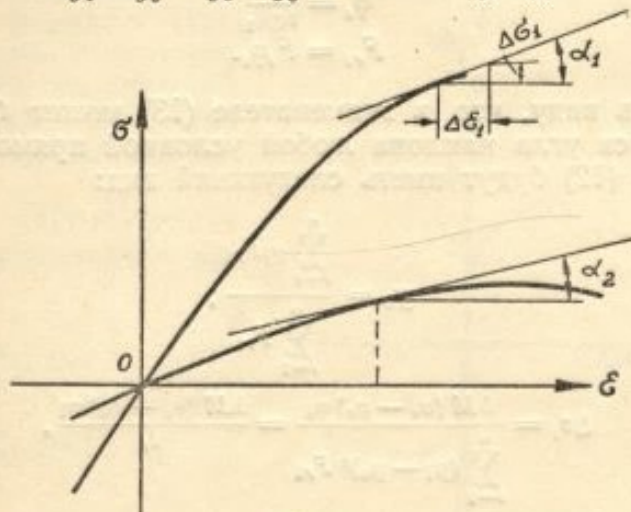


Рис. 3.

Из рисунка 3 следует:

$$\frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \varepsilon_i} = \operatorname{tg} \alpha_i \quad \text{или} \quad \Delta \varepsilon_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\operatorname{tg} \alpha_i}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4) и получим

$$\frac{\Delta \sigma_1}{(y_1 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\Delta \sigma_2}{(y_2 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_2} = \dots = \frac{\Delta \sigma_i}{(y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i} \quad (6)$$

или

$$\Delta \sigma_i = \Delta \sigma_1 \frac{(y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i}{(y_1 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (7)$$

Из (3) найдем величину y_0 , подставив (7);

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_1 \frac{(y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i}{(y_1 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_1} F_i = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i F_i = 0. \quad (8)$$

Из (8) получим

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i \operatorname{tg} \alpha_i}{\sum_{i=1}^n F_i \operatorname{tg} \alpha_i}. \quad (9)$$

В (2) подставим (7)

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_1 \frac{(y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i}{(y_1 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_1} (y_i - y_0) F_i; \quad (10)$$

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\Delta M (y_1 - y_0) \operatorname{tg} \alpha_1}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 F_i \operatorname{tg} \alpha_i}, \quad (11)$$

или, подставив (7), получим для любого $\Delta\sigma_i$

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta M (y_i - y_0) \operatorname{tg} \alpha_i}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 F_i \operatorname{tg} \alpha_i} \quad (12)$$

Формулы (9) и (12) показывают, что определение положения нейтральной оси и приращения нормальных напряжений можно выполнять на основе обычных формул сопротивления материалов, но в расчет необходимо ввести не действительные площади, а редуцированные.

Введем следующее обозначение редуцированных коэффициентов:

$$\varphi_i = \frac{\operatorname{tg} \alpha_i}{\operatorname{tg} \alpha_1} \quad (13)$$

$$\text{и} \quad F_{ri} = F_i \varphi_i \quad (14)$$

Следует иметь в виду, что в знаменателе (13) может быть поставлено значение тангенса угла наклона любой условной прямой.

Тогда (9) и (12) будут иметь следующий вид:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_{ri}}{\sum_{i=1}^n F_{ri}}; \quad (15)$$

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta M (y_i - y_0) \varphi_i}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 F_{ri}} = \frac{\Delta M (y_i - y_0) \varphi_i}{I_r}, \quad (16)$$

где $\sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 F_{ri} = I_r$ — момент инерции редуцированных площадей сечения.

Касательное усилие в стенке, расположенной между K и $K + 1$ продольными элементами, определяется из условий равновесия

$$q_k \Delta z = \sum_{i=1}^k \Delta\sigma_i F_{ri} \quad (17)$$

Подставим в (17) значение (16)

$$q_k \Delta z = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta M (y_i - y_0) \varphi_i}{I_r} F_{ri}$$

После преобразований получаем

$$q_k = \frac{\Delta M}{\Delta z} \frac{1}{I_r} \sum_{i=1}^k (y_i - y_0) F_{ri} \varphi_i$$

$$q_k = \frac{\Delta M}{\Delta z} \frac{1}{I_r} \sum_{i=1}^k (y_i - y_0) F_{ri} \quad (18)$$

Переходя к пределу и обозначив $\sum_{i=1}^k (y_i - y_0) F_{ri} = S_{rk}$ — статический момент K площадей, получим

$$q_k = \frac{Q}{I_r} S_{rk} \quad (19)$$

Вид формулы (19) совпадает с формулой Журавского. Основное отличие заключается в методе определения статического момента и момента инерции сечения. В формуле (1) редуционные коэффициенты взяты по секущим модулям, а в формуле (19) редуционные коэффициенты взяты по касательным модулям. Между двумя этими коэффициентами редукиции имеется существенное различие. Принятый в настоящей работе коэффициент редукиции, во-первых, отражает действительное приращение нормальных напряжений, во-вторых, может быть величиной отрицательной, когда имеется падение напряжений с увеличением относительного удлинения.

Касательное усилие, подсчитанное по формуле (19), может существенно отличаться от подсчитанного по обычной формуле (1) [1, 2]. Оно может даже изменять направление.

Указанное существенное различие в распределении ка-

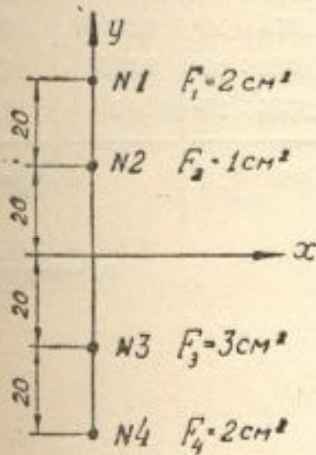


Рис. 4.

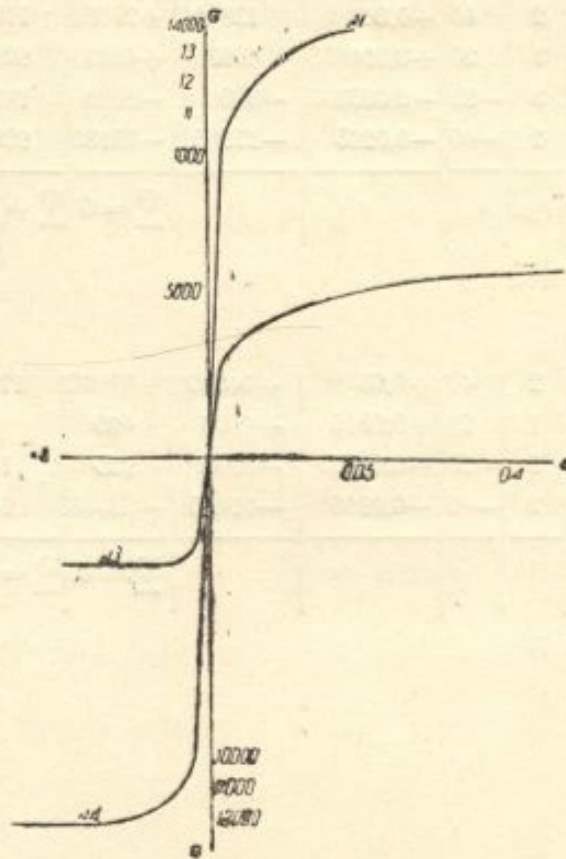


Рис. 5.

сательных усилий при изгибе дает ощутимую разницу в положении центра изгиба, в величине $M_{кр}$ и т. п.

Решим простейший пример.

Дана балка, имеющая 4 продольных элемента, воспринимающих только нормальные напряжения. Стенка работает на касательные напряжения.

Размеры сечения даны на рисунке 4. Зависимость $\sigma - \epsilon$ дана на рисунке 5, где на каждой кривой нанесен номер элемента.

Методом последовательных приближений сечение рассчитано на изгибающий момент $M = 2\,303\,400 \text{ кг см}$ и на $M = 2\,348\,000 \text{ кг см}$.

В таблице 1 приведены результаты вычисления по определению редуционных коэффициентов, статических моментов и моментов инерции, а также выполнена проверка расчета на изгибающие моменты.

Определим касательные усилия по участкам стенки по формуле (1)

$$q = \frac{QS_x}{I_x}$$

Считаем, что $Q = 44600 \text{ кг}$ и $\Delta z = 1 \text{ см}$.

$$q = \frac{44600}{5399,29} S_x; \quad q_{12} = 534 \frac{\text{кг}}{\text{см}}; \quad q_{23} = 624 \frac{\text{кг}}{\text{см}}; \quad q_{34} = 448 \frac{\text{кг}}{\text{см}}.$$

№ элементов	F см ²	y , см	ϵ ,	σ , кг/см ²	$F\sigma$	$E\sigma y$	$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon}$	$\varphi = \frac{E_s}{E_{s4}}$	$F_T = F\varphi$
1	2	40	+0,04	13800	+27600	1104000	$3,45 \cdot 10^5$	0,6116	1,2232
2	1	20	+0,024875	4620	+4620	92400	$1,857 \cdot 10^5$	0,3292	0,3292
3	3	-20	-0,005375	-3030	-9090	181800	$5,637 \cdot 10^5$	0,9993	2,9979
4	2	-40	-0,0205	-11565	-23130	925200	$5,641 \cdot 10^5$	1	2,0
					$\Sigma = 0$	$\Sigma = 2303400$			$\Sigma = 6,5503$

$$y_0 = \frac{-84,446}{6,5503}$$

1	2	40	+0,05	+14000	+28000	1120000	$2,8 \cdot 10^5$	0,5695	1,1390
2	1	20	+0,0315	+4900	+4900	98000	$1,5565 \cdot 10^5$	0,31637	0,31637
3	3	-20	-0,00550	-3100	-9300	186000	$5,6364 \cdot 10^5$	1,1464	3,4392
4	2	-40	-0,0240	-11800	-23600	944000	$4,9166 \cdot 10^5$	1	2,0
					$\Sigma = 0$	$\Sigma = 2348000$			$\Sigma = 6,8946$

$$y_0 = \frac{-96,896}{6,8946}$$

№ точек	$\Delta \epsilon$	$\Delta \sigma$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon}$	$\varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_4}$	F
1	0,01	200	20000	0,298	2
2	0,006625	280	36721,3	0,547	1
3	-0,000125	-70	560000	8,34	3
4	-0,0035	-235	67143	1	2

Таблица 1

$E_r y$	y'	$y' F_r$	y'^2	$y'^2 F_r$	$\sigma = \frac{M y'}{I_r} \varphi$	σF	$\sigma F y'$
48,928	52,892	64,6975	2797,564	3421,980	13800,364	27600,728	1459857,71
6,584	32,892	10,8280	1081,884	356,156	4619,375	4619,375	151940,48
-59,958	-7,108	-21,3090	50,524	151,466	3030,235	-9090,705	64616,73
-80,0	-27,108	-54,216	734,844	1469,688	11564,598	-23129,196	626986,255
$\Sigma = -84,446$		$\Sigma = 0$		$\Sigma = 5399,29$		$\Sigma = 0$	$\Sigma = 2303401,2$
$= -12,892$							
45,560	54,054	61,5664	2921,835	3327,970	14000,081	28000,162	1513520,76
6,3274	34,054	10,7778	1159,675	366,886	4899,732	4899,732	166855,47
-68,784	-5,946	-20,4494	35,355	121,593	3100,059	-9300,177	55298,85
-80,0	-25,946	-51,8940	673,195	1346,390	11799,929	-23599,858	612321,92
$\Sigma = -96,896$		$\Sigma = 0$		$\Sigma = 5162,839$		$\Sigma = -0,141$	$\Sigma = 2347997,00$
$= -14,054$							

Таблица 2

$F_r = F \varphi$	$y F_r$	y'	$y' F_r$	$y'^2 F_r$
0,596	23,84	59,3736	35,387	2101,0
0,547	10,94	39,3736	21,537	858,00
25,02	-500,4	-0,6264	-15,672	9,82
2,0	-80	-20,6264	-41,252	850,9
$\Sigma = 28,163$	$\Sigma = -545,62$		$\Sigma = 0$	$\Sigma = 3819,72$
$y_0 = \frac{-545,62}{28,163} = -19,3736$				

Равнодействующая внутренних сил будет

$$Q = 534 \cdot 20 + 624 \cdot 40 + 448 \cdot 20 = 44600 \text{ кг.}$$

Расчет для сечения II дает значения касательных усилий первого сечения $\pm 1 \text{ кг/см}$. Поэтому будем считать их совпадающими.

Определим касательные усилия, исходя из условия равновесия элементов (рис. 6).

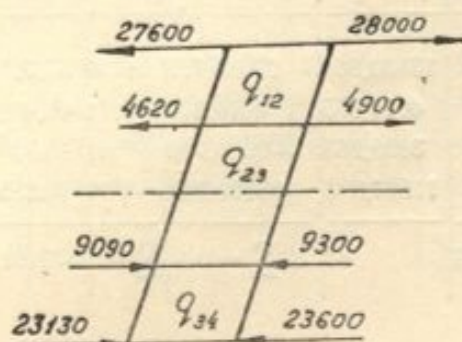


Рис. 6.

В этом случае

$$q_{12} = 400 \text{ кг/см;}$$

$$q_{23} = 680 \text{ кг/см;}$$

$$q_{34} = 470 \text{ кг/см;}$$

$$Q = 400 \cdot 20 + 680 \cdot 40 + 470 \cdot 20 = 44600 \text{ кг.}$$

Расхождение в величинах q особенно велико на участке 1—2 и составляет в процентах

$$100 \frac{534 - 400}{400} = \frac{134 - 100}{400} = 33,5\%.$$

Определим q по формуле (19). В этом случае принимаем касательный модуль равным $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon}$, где $\Delta \sigma$ и $\Delta \varepsilon$ взяты из таблицы 1.

Как и в предыдущем расчете считаем $\varphi_4 = 1$.

Результаты вычислений приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 3

№ участков	S_{rk}	$q = \frac{QS_{rk}}{I_r}$	% расхождения с q , подсчитанным по (1)	% расхождения с q , найденным из условий равновесия (рис. 6)
1—2	35,387	414	29	3,4
2—3	56,924	666	6,3	2,1
3—4	41,352	483	7,2	2,7

По данным таблицы 3 видно, что касательные усилия, найденные по формулам (1) и (19), сильно отличаются друг от друга. Расхождения в касательных усилиях, найденных по формулам (19) и из условий равновесия (рис. 6), лежат в пределах 2—3%, т. е. метод расчета вполне применим для практики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Касательные усилия для цилиндрической балки с продольными элементами, работающими в упруго пластической зоне, необходимо определять по формуле Журавского

$$q_k = \frac{Q}{I_r} S_{rk},$$

в которой статический момент и момент инерции берутся редуцированных площадей, найденных по коэффициенту редукции с учетом касательных модулей.

Касательные усилия формулы (1) значительно отличаются от касательных усилий, вычисленных по формуле (19). Расхождение будет тем

больше, чем больше будут отличаться друг от друга секущие и касательные модули. Возможны случаи, когда касательные усилия формул (1) и (19) на отдельных участках будут иметь даже разные направления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник авиаконструктора. Т. III. Прочность, изд. ЦАГИ, М., 1939.
2. М. Ф. Астахов и др. Справочная книга по расчету самолета на прочность. Оборонгиз, М., 1954.