

В.М.Рашкован, канд.физ-мат.наук

А.В.Дашков

**Динамика свободных магнитных тел в МПЯ сверхпроводящих
витков.**

Проявление эффекта "магнитной потенциальной ямы" представляет интерес в большинстве случаев тогда, когда все параметры, определяющие пространственное положение и ориентацию свободного тела, не подчиняются условиям фиксации [1]. В таком случае рассматривается задача о магнитной подвеске, которая отличается свободой всех пространственных перемещений тела, или задача свободного полета составного тела под действием магнитной силы неподвижного сверхпроводящего кольца. И та и другая задача исходит из того, что рассматриваемая динамическая система включает неподвижное (или совершающее заданное движение относительно инерциальной системы отсчета) идеально электропроводящее токовое кольцо, свободный динамически симметричный физический маятник с закрепленным на нем идеально проводящим токовым кольцом и поле постоянной силы тяжести, направленное по оси неподвижного кольца.

Для анализа динамики свободного токового витка в магнитном поле неподвижного витка вдоль одной координаты $\zeta_1 \equiv x$ рассмотрим эквивалентную электрическую схему, представленную на рисунке 1. Она состоит из неподвижных контуров 1, 2, 4 и движущегося вдоль оси X сверхпроводящего витка с собственной индуктивностью L_3 и магнитным потоком Φ_3 , пронизывающим этот контур. Контур 1 и 2 также являются сверхпроводящими, имеют собственные индуктивности L_1 и L_2 , а пронизывающие их магнитные потоки соответственно равны Φ_1 и Φ_2 . Кроме того, все три контура имеют взаимные индуктивные связи L_{12} , L_{23} и L_{13} , зависящие от их взаимного расположения, а

протекающие в контурах токи $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ зависят от времени. Контур 4 имеет активное сопротивление R_4 , собственную индуктивность L_4 , является запитывающим для контура I и может не иметь прямой индуктивной связи с тремя остальными контурами.

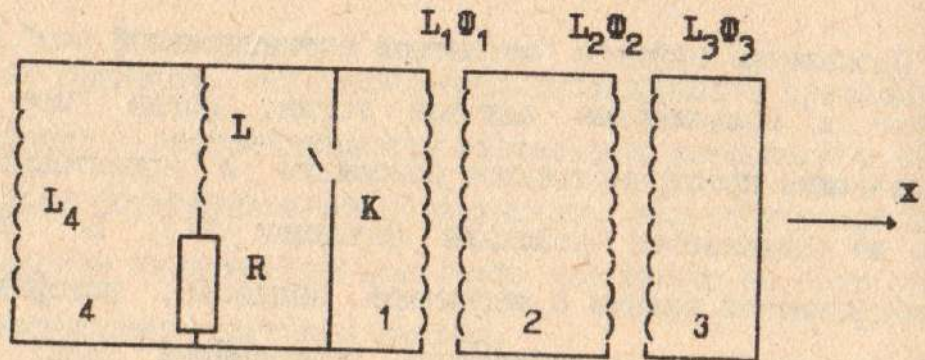


Рис I. Эквивалентная электрическая схема.

Для рассматриваемой электромеханической системы, схематически представленной на рис. I. имеется следующий набор электрических и механических координат

	Электрические	Механические	
Q_i	$\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4$	x	
\dot{Q}_i	i_1, \dots, i_4	\dot{x}	
P_i	Φ_1, \dots, Φ_4	$M \cdot \dot{x}$	(I)
f_i	U_1, \dots, U_4	0	

а формулы потенциальной и кинетической энергии будут такими:

$$U=0; \quad T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \int_{0,0}^{i_1, i_3} \sum_{i=1}^n \Phi_i(i_i, x_\gamma) di_i = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \int_0^{i_1} [L_1 i_1' + L_{12} i_2' + L_{13} i_3' + L_{14} i_4'] \cdot di_1' + \int_0^{i_2} [L_{12} i_1' + L_2 i_2' + L_{23} i_3' + L_{24} i_4'] \cdot di_2' +$$

$$+ \int_0^{t_3} [L_{13} \dot{t}_1 + L_{23} \dot{t}_2 + L_{33} \dot{t}_3 + L_{34} \dot{t}_4] \cdot dt_3; \quad (2)$$

С учетом (2) функция Лагранжа $L=T-U$ имеет вид:

$$L = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} [L_1 t_1^2 + L_2 t_2^2 + L_3 t_3^2 + L_4 t_4^2] + L_{12} t_1 t_2 + L_{23} t_2 t_3 + L_{13} t_1 t_3 + L_{14} t_1 t_4 + L_{24} t_2 t_4 + L_{34} t_3 t_4. \quad (3)$$

Так как в контуре 4 имеется активное сопротивление, а при движении 3-го контура по некоторым направлениям возникают потери на трение, то диссипативная энергия может быть представлена так:

$$F = \frac{1}{2} R_4 t_4^2 + \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2, \quad (4)$$

где α - коэффициент трения.

В этом случае уравнение движения подчиняется уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5)$$

которое с учетом (3) и (4) запишется в виде системы уравнений для обобщенных координат и их производных

$$\begin{aligned} t=1) \quad m \ddot{x} - t_2 t_3 \frac{\partial L_{23}}{\partial x} - t_1 t_3 \frac{\partial L_{13}}{\partial x} - t_4 t_3 \frac{\partial L_{34}}{\partial x} + \alpha \dot{x} &= 0 \\ t=2) \quad L_1 \frac{dt_1}{dt} + L_{12} \frac{dt_2}{dt} + L_{13} \frac{dt_3}{dt} + \\ &+ t_3 \frac{dL_{13}}{dt} \cdot \dot{x} + L_{14} \frac{dt_4}{dt} + t_4 \frac{dL_{14}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\psi_1}{dt} = 0; \\ t=3) \quad L_2 \frac{dt_2}{dt} + L_{12} \frac{dt_1}{dt} + L_{23} \frac{dt_3}{dt} + \\ &+ t_3 \frac{dL_{23}}{dt} \cdot \dot{x} + L_{24} \frac{dt_4}{dt} + t_4 \frac{dL_{24}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\psi_2}{dt} = 0; \\ t=4) \quad L_3 \frac{dt_3}{dt} + L_{13} \frac{dt_1}{dt} + L_{23} \frac{dt_2}{dt} + L_{34} \frac{dt_4}{dt} + \end{aligned}$$

$$+ l_3 \frac{dL_{13}}{dx} \cdot \dot{x} + l_2 \frac{dL_{13}}{dx} \cdot \dot{x} + l_4 \frac{dL_{34}}{dx} \cdot \dot{x} - \frac{d\phi_3}{dt} = 0;$$

$$t=1) \quad L_4 \frac{dt_3}{dt} + L_{14} \frac{dt_1}{dt} + L_{24} \frac{dt_2}{dt} + L_{34} \frac{dt_4}{dt} + \\ + l_3 \frac{dL_{13}}{dx} \cdot \dot{x} + R_4 l_4 \frac{d\phi_4}{dt} = 0. \quad (6)$$

Если предположить, что 4-й контур участвует только в зарядке контура 1 и в дальнейшем процессе разрядки и ускорения контура 3 имеет пассивное влияние, его можно исключить или объединить с первым контуром. Тогда система уравнений (6) упрощается к виду:

$$1) \quad m\ddot{x} - l_2 l_3 \frac{\partial L_{23}}{\partial x} - l_1 l_3 \frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \alpha \dot{x} = 0$$

$$2) \quad L_1 \frac{dt_1}{dt} + L_{12} \frac{dt_2}{dt} + L_{13} \frac{dt_3}{dt} + l_3 \frac{\partial L_{13}}{\partial x} \cdot \dot{x} + R_1 l_1 = 0;$$

$$3) \quad L_2 \frac{dt_2}{dt} + L_{12} \frac{dt_1}{dt} + L_{23} \frac{dt_3}{dt} + l_3 \frac{\partial L_{23}}{\partial x} \cdot \dot{x} = 0 = \frac{d\phi_2}{dt}; \quad (7)$$

$$4) \quad L_3 \frac{dt_3}{dt} + L_{13} \frac{dt_1}{dt} + L_{23} \frac{dt_2}{dt} + \left[l_3 \frac{\partial L_{13}}{\partial x} + l_2 \frac{\partial L_{23}}{\partial x} \right] \cdot \dot{x} = 0;$$

Из уравнений движения данной сверхпроводящей динамической системы следует, что обобщенные импульсы (потокосцепления ϕ_2 и ϕ_3 не изменяются во времени

$$\phi_2 = \text{const}; \quad \phi_3 = \text{const}, \quad (8)$$

а это соответствует известному свойству замороженности магнитного потокосцепления контура без электрического сопротивления. Неизвестными в системе уравнений (8) являются токи в контурах l_1, l_2, l_3 , взаимные индуктивности $L_{13}(x), L_{23}(x)$ и скорость подвижного контура \dot{x} . Собственные индуктивности L_1, \dots, L_3 рассчитываются по геометрическим параметрам контуров. Константы интегрирования определяются из начальных условий: при $t=0, x=0, \dot{x}=0$.

Используя интегралы движения, можно сократить количество

неизвестных в (8), исключив токи i_2, i_3 . Для этого введем обозначения:

$$L_{12} \frac{di_2}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt} = A_1; \quad L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} = A_2; \quad (9)$$

тогда уравнения 3,4 в (7) с учетом (9) переписываются так

$$A_1 = -L_{12} \frac{di_1}{dt} - i_3 \frac{dL_{23}}{dt}; \quad (10)$$

$$A_2 = -L_{13} \frac{di_1}{dt} - \left[i_3 \frac{dL_{13}}{dx} + i_2 \frac{dL_{23}}{dx} \right] \cdot \dot{x};$$

Решая (9) относительно i_2 и i_3 , получим

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{A_1 L_3 - A_2 L_{23}}{L_2 L_3 - L_{23}^2}; \quad \frac{di_3}{dt} = \frac{A_2 L_2 - A_1 L_{23}}{L_2 L_3 - L_{23}^2}; \quad (11)$$

Тогда с учетом выражения (10) и (11) второе уравнение в (7) можно разрешить относительно i_1 , получим

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & \frac{\left\{ 1_2 \left[L_2 L_{13} - L_{12} L_{23} \right] + 1_3 \left[L_3 L_{12} - L_{23} L_{13} \right] \right\} \frac{\partial L_{23}}{\partial x}}{\left[L_1 \left(L_2 L_3 - L_{23}^2 \right) + L_{12} \left(2L_{23} L_{13} - L_3 L_{12} \right) - L_2 L_{13}^2 \right]} + \\ & + \frac{1_3 \left[L_2 \left(L_{13} - L_3 \right) + L_{23} \left(L_{23} - L_{12} \right) \right] \frac{\partial L_{13}}{\partial x}}{\left[L_1 \left(L_2 L_3 - L_{23}^2 \right) + L_{12} \left(2L_{23} L_{13} - L_3 L_{12} \right) - L_2 L_{13}^2 \right]} \cdot \dot{x} - 1_1 R_4 \left[L_2 L_3 - L_{23}^2 \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в выражения (11) значения коэффициентов A_1 и A_2 и производя соответствующие преобразования, получим решения относительно i_2 и i_3 :

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1_1^0 \left[L_{13} L_{23} - L_3 L_{12} \right] + \left[\left(1_2 L_{23} - 1_3 L_3 \right) \frac{\partial L_{23}}{\partial x} + 1_3 L_{23} \frac{\partial L_{13}}{\partial x} \right] \dot{x}}{L_2 L_3 - L_{23}^2} \quad (13)$$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{1_1^0 \left[L_{12} L_{23} - L_2 L_{13} \right] + \left[\left(1_3 L_{23} - 1_2 L_2 \right) \frac{\partial L_{23}}{\partial x} + 1_3 L_2 \frac{\partial L_{13}}{\partial x} \right] \dot{x}}{L_2 L_3 - L_{23}^2} \quad (14)$$

Интегрирование выражений (I2) - (I4) в интервале времени ускорения (торможения) свободного сверхпроводящего токового витка позволяет определять токи i_1, i_2, i_3 , а подстановка их в первое уравнение системы (7) определит уравнение движения витка.

Исключив из рассмотрения электрические контуры I и 4, обеспечивающих накопление определенного уровня магнитной энергии в сверхпроводящем контуре 2, которая расходуется на электродинамическое ускорение свободного сверхпроводящего контура 3, целесообразно рассмотреть взаимодействие последних двух контуров. Потенциальная энергия магнитного взаимодействия контуров 2 и 3 определяется выражением

$$U = \frac{\psi_2^2 L_3 - 2\psi_2 \psi_3 L_{23}(x) + \psi_3^2 [L_2 + L]}{2 \left[(L_2 + L) L_3 - L_{23}^2(x) \right]}, \quad (I5)$$

которая отличается от ранее рассмотренной потенциальной энергии двух короткозамкнутых витков наличием дополнительной индуктивности L во втором контуре.

Условие возникновения магнитной потенциальной ямы в этом случае определяется выражением

$$\frac{\psi_3}{\psi_2} = \frac{L_{23}(x)}{L_2 + L} \quad (I6)$$

Если ввести безразмерные параметры $y = L_{23}(x)L_2^{-1}$, $p = \psi_3\psi_2^{-1}$; $l_3 = L_3L_2^{-1}$; $l = Ll_2^{-1}$, тогда кинетическая энергия подвижного витка может быть представлена в виде равенства потенциальной энергии неподвижного витка в начальный момент и в конечный момент ускорения, т.е.

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{\psi_2^2}{2L_2} \left[\frac{l_3 - p^2 - 2py}{l_3 - y^2} - \frac{l_3 + p^2(1+l)}{l_3} \right] = U_{MO} f(k); \quad (I7)$$

Если процесс разрядки магнитной энергии организовать таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках в (I7) равнялось

единице, то тогда $\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} \dot{\psi}_2^2 (L_2^{-1})$, т.е. все накопленная в неподвижном сверхпроводящем витке магнитная энергия превращается в энергию кинетического движения свободного сверхпроводящего витка. Этого эффекта можно добиться в том случае, когда при превращении всей энергии магнитного поля в кинетическую в положении витков, обеспечивающих проявление эффекта магнитная потенциальная яма, ток в неподвижном витке может быть равным нулю и в этот момент можно без потерь разорвать электрическую цепь ускоряющего кольца. На этом принципе разработан и предложен новый способ электродинамического ускорения свободных магнитных тел с полным превращением энергии магнитного поля в их кинетическую энергию.

С точки зрения практического применения эффекта МПН может оказаться полезным рассмотрение варианта ускорения в магнитном поле сверхпроводящего свободного витка (S-витка) и свободного витка, обладающего активным сопротивлением (R-витка). Для такого случая при сохранении всех предыдущих символов и обозначений система уравнений одномерного движения R-витка будет такой

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{dL_{12}}{dx} ; \\ \psi_1 = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2 ; \\ I_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{dL_{12}}{dt} \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0 ; \end{array} \right. \quad (18)$$

где R_2 - активное сопротивление подвижного витка.

Предполагая, как и ранее, что подвижный и неподвижный виток имеют форму бесконечно тонких квазипараллельных колец, таких, что их взаимную индуктивность можно выразить через полные эллиптические интегралы найдем производную

$$\frac{dL_{12}}{dx} = \mu_0 \sqrt{r_2 \cdot r_1} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) \cdot k - \frac{2}{k} \cdot E \right\} ,$$

учитывая выражения для производных от полных эллиптических интегралов и их модуля [2]

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k \cdot x}{(r_1 + r_2)^2 + x^2}; \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}; \quad \frac{dE}{dx} = \frac{E - K}{k};$$

В результате дифференцирования получим

$$\frac{dL_{12}}{dx} = \mu_0 \cdot \frac{x}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + x^2}} \cdot \left[-K + \frac{r_1^2 + r_2^2 + x^2}{(r_1 - r_2)^2 + x^2} \cdot E \right]; \quad (19)$$

После некоторых преобразований система (18) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{-x}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + x^2}} \cdot \left[-K + \frac{r_1^2 + r_2^2 + x^2}{(r_1 - r_2)^2 + x^2} \cdot E \right] \\ \psi_1 = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2; \\ L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \mu_0 \cdot I_1 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{-x}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + x^2}} \cdot \left[-K + \frac{r_1^2 + r_2^2 + x^2}{(r_1 - r_2)^2 + x^2} \cdot E \right] \\ + L_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt} + R_2 \cdot I_2 = 0; \end{array} \right. \quad (20)$$

Для удобства численного решения системы (20) приведем ее в безразмерный вид, вводя следующие безразмерные параметры:

$$N_1 = \frac{I_1 \cdot L_1}{\psi_1}; \quad N_2 = \frac{I_2 \cdot L_2}{\psi_1}; \quad y = \frac{x}{r_1 + r_2}; \quad \tau = \frac{t \cdot R_2}{L_2}$$

$$\beta_1 = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{L_1}; \quad \beta_2 = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{L_2};$$

$$q = \frac{\mu_0 \cdot \psi_1^2 \cdot L_2}{m \cdot r_1 \cdot R_2^2 \cdot L_1}; \quad a_1 = \frac{4 \cdot r_1 \cdot r_2}{(r_1 + r_2)^2}; \quad a_2 = 1.0; \quad (21)$$

$$a_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}; \quad a_4 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2};$$

С учетом новых безразмерных переменных система (20) будет выглядеть так:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} &= N_1 \cdot N_2 \cdot q \cdot \frac{-y}{\sqrt{a_2 + y^2}} \cdot \left[-K + \frac{a_3 + y^2}{a_4 + y^2} \cdot E \right] \\ N_1 &= 1 - \beta_2 \cdot f(k) \cdot N_2; \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= \frac{1}{1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot f(k)^2} \left\{ \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot f(k) \cdot \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{2}{\sqrt{a_1}} \cdot \frac{-y}{\sqrt{a_2 + y^2}} \cdot \left[-K + \frac{a_3 + y^2}{a_4 + y^2} \cdot E \right] - N_2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \beta_2 \cdot f(k) \cdot N_2 \right] \cdot \beta_1 \cdot \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{2}{\sqrt{a_1}} \cdot \frac{-y}{\sqrt{a_2 + y^2}} \cdot \left[-K + \frac{a_3 + y^2}{a_4 + y^2} \cdot E \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

где $f(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) \cdot K - \frac{2}{k} \cdot E$.

Начальные условия при численном интегрировании будут иметь вид:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \frac{dy}{d\tau} = 0; \quad y(\tau) = y_0; \quad (23)$$

Начальные значения токов N_1 и N_2 удобно задавать в виде отношения $\frac{I_1}{I_2}$. В этом случае величину N_2 можно найти из формулы:

$$N_2 = \frac{I_2 \cdot L_2}{\Phi_1} = \frac{1}{\frac{L_1 \cdot I_1}{L_2 \cdot I_2} + \frac{L_{12}}{L_2}} = \frac{1}{\frac{\beta_2 \cdot I_1}{\beta_1 \cdot I_2} + \beta_2}. \quad (24)$$

Задавая величину отношения токов I_1 и I_2 , находим значение тока N_2 и затем из второго уравнения системы (22) вычисляем значение тока N_1 .

Численные расчеты проводились при следующих параметрах системы:
 $R_2 \approx 10^{-3}$ Ом; $L \approx 7 \cdot 10^{-8}$ Гн; $m \approx 10^{-6}$ кг; $I_1 \approx 10^5$ А;
 Подстановка этих значений в (20) дает значения безразмерных параметров:

$$\beta \approx 0.2 + 0.8; \quad a_1 < 1; \quad q \approx 10 + 100;$$

На рис 2 представлены графики изменения скорости R-витка от расстояния при разных значениях энергетического параметра q . Виток движется слева направо, неподвижное кольцо расположено на

расстоянии $y=a_3=2.0$. График скорости при $q=10$ имеет два выраженных максимума скорости, что соответствует двум точкам по обе стороны неподвижного кольца, где знак действующей силы меняется на противоположный. После прохождения второй потенциальной ямы скорость уменьшается и при $y \approx 3.6$ выходит на постоянный уровень, т.е. г-виток перестает взаимодействовать со сверхпроводящим неподвижным витком. Это подтверждается графиками зависимости тока в R-витке от координаты x (рис 3). Видно, что на расстояниях порядка $y \approx 3.6$ ток в подвижном кольце стремится к нулю, что связано с наличием сопротивления в R-витке. Графики изменения тока в неподвижном кольце показывают, что чем больше величина параметра q , тем меньше изменение тока в неподвижном сверхпроводящем кольце. После того, как ток в подвижном R-витке становится равным нулю, ток в неподвижном S-витке остается постоянным и равным $I_1 = \psi_1 / L_1$. Важным с точки зрения преобразования электромагнитной энергии неподвижного S-витка в кинетическую энергию свободного R-витка является наличие "остаточной" скорости R-витка "после прохождения положения "магнитной потенциальной ямы". С увеличением параметра q , который характеризует уровень запасенной энергии в S-витке, величина "остаточной" скорости увеличивается. С точки зрения максимального ускорения подвижного витка желательно разомкнуть цепь S-витка в момент достижения подвижным витком максимальной скорости, что технически трудно выполнимо. Исключением является случай размыкания в положении "магнитной потенциальной ямы", когда ток в неподвижном кольце равен нулю, при достижении максимальной скорости подвижным контуром. Анализ эквивалентной схемы индукционного ускорения и торможения свободного токового витка в магнитном поле одного или нескольких неподвижных сверхпроводящих витков дал возможность показать эффективность взаимного

преобразования магнитной и кинетической энергии и конкурентоспособность предложенного способа ускорения свободного токового витка по сравнению с известными методами ускорения.

Литература

1. Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г. "Магнитная потенциальная яма" - эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. - Киев: Наук.думка, 1991. - 336 с.
2. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М: Физматгиз, 1962. - 1100 с.

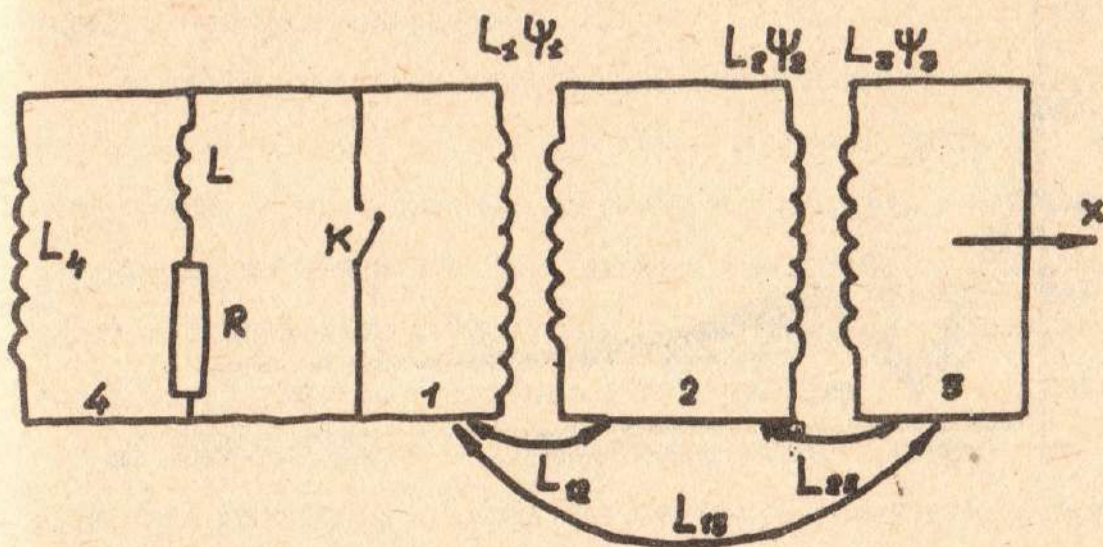


Рис. 1.

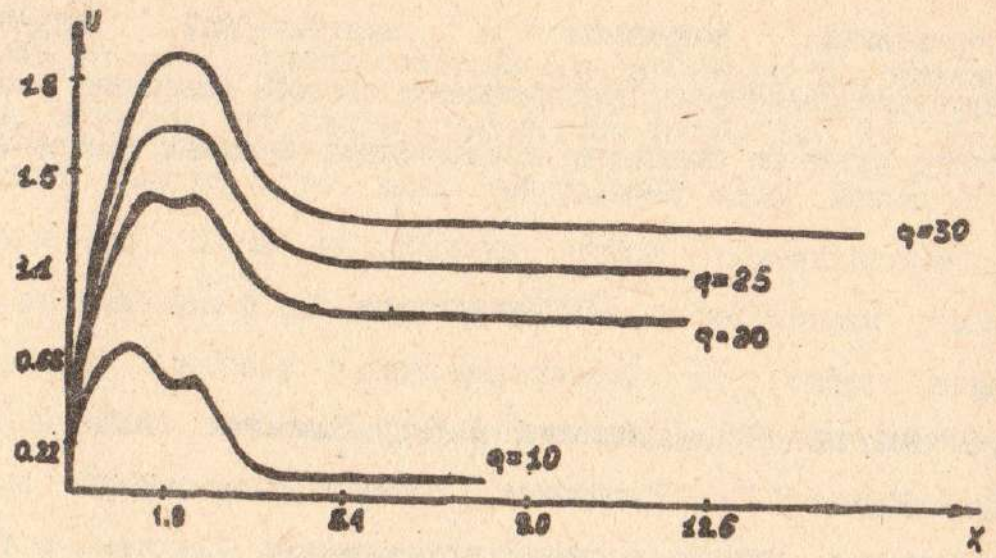


Рис. 2

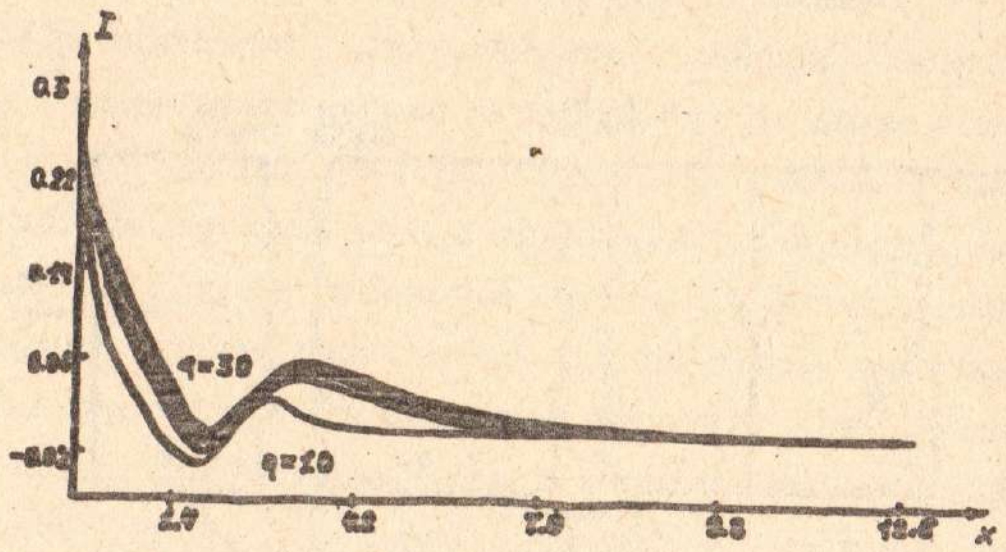


Рис. 3.