ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 21 1961

Н. А. Шеломов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОНКОСТЕННОМ СТЕРЖНЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

σ_x — нормальные напряжения в поперечном сечении стержня.

q — поток касательных усилий в поперечном сечении стержня.

M_z — изгибающий момент.

M_x — крутящий момент.

Q_y — поперечная сила.

K_{yt}, $K_{\omega t}$ — соответственно интегралы $\int\limits_S yt\delta ds$, $\int\limits_S \omega t\delta ds$, взятые по всему контуру поперечного сечения стержня.

$\overline{S}_t$, $\overline{K}_{zt}$ — соответственно интегралы $\int\limits_{\overline{S}} t\delta ds$, $\int\limits_{\overline{S}} zt\delta ds$, взятые по любой половине контура поперечного сечения стержня.

S_t — интеграл $\int\limits_0^s t\delta ds$.

δ — толщина стенки профиля.

t — любая функция от координат (s, y, z, ω).

s — дуговая координата точки контура поперечного сечения стержня с началом отсчета в точке O_1. В верхней части контура $s > 0$ (рис. 1).

x, y, z — декартовы координаты точки стержня. Начало координат системы $OXYZ$ расположено в центре тяжести торцевого сечения стержня. Плоскость XOZ — плоскость симметрии стержня (рис. 1).

ω — главная секториальная координата точки контура поперечного сечения стержня. Знак ω определен правилом правого винта.

p — полупериметр контура поперечного сечения стержня.

В данной статье рассматривается вопрос о выборе функций для напряжений в согласии с уравнениями равновесия, гипотезой о плоскости действия внутренних сил и другими граничными условиями. При этом вопрос о выполнении условий совместности деформаций и о наилучшем приближении функций к данным экспериментальных исследований пока оставлен в стороне.

Для расчета тонкостенных стержней на прочность Л. П. Винокуровым[1] была предложена новая гипотеза, согласно которой компоненты

[1] Л. П. Винокуров. О внесении коррективов в гипотезу плоских сечений для тонкостенных стержней. Доклад на межвузовской научно-технической конференции, посвященной расчету на прочность оболочек типа авиаконструкций, МАИ, Кафедра строительной механики самолета, 1959.

основного тензора напряжений следует выбирать так, чтобы плоскости действия внешних и внутренних сил совпадали. Указанная гипотеза улучшает выполнение граничных условий на нагруженном торце стержня и, следовательно, обеспечивает более правильное приложение принципа Сен-Венана к тонкостенным стержням по сравнению с гипотезой Навье.

В случае стержней открытого симметричного профиля имеем, следуя названной работе Винокурова:

$$\sigma_x = a_1 y + a_2 s + a_3 s^3, \tag{1}$$

$$q = \frac{da_1}{dx}(\overline{S}_y - S_y) + \frac{da_2}{dx}(\overline{S}_s - S_s) + \frac{da_3}{dx}(\overline{S}_{s^3} - S_{s^3}). \tag{2}$$

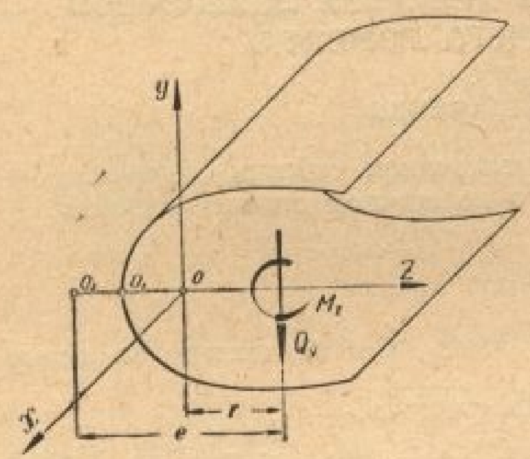

Рис. 1.

Для определения неизвестных a_1, a_2, a_3 составляются уравнения равновесия $\Sigma M_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$[1]

$$\int_S \sigma_x y \delta ds - M_z = 0 \tag{3}$$

$$\int_S q \rho ds - Q_y e = 0^{2} \tag{4}$$

и условие, вытекающее из гипотезы о плоскости действия внутренних сил,

$$\int_{\overline{S}} \sigma_x z \delta ds = r \int_{\overline{S}} \sigma_x \delta ds, \tag{5}$$

где r — расстояние от плоскости действия внешних сил до плоскости XOY (рис. 1),

e — расстояние от плоскости действия внешних сил до центра изгиба поперечного сечения стержня[3].

По условию (5) равнодействующая внутренних сил сжатой или растянутой зоны $\left(\text{интеграл } \int_{\overline{S}} \sigma_x \delta ds\right)$ должна быть удалена на расстояние r от центра тяжести поперечного сечения стержня, т. е. должна лежать в плоскости действия внешних сил.

Раскрывая (3), (4), (5) с одновременным дифференцированием (3) и (5) по x, получим три алгебраических уравнения относительно $\frac{da_1}{dx}$, $\frac{da_2}{dx}$, $\frac{da_3}{dx}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1}{dx} K_{yy} + \frac{da_2}{dx} K_{ys} + \frac{da_3}{dx} K_{ys^3} = \frac{dM_z}{dx} \\ \frac{da_1}{dx}(\overline{K}_{zy} - r\overline{S}_y) + \frac{da_2}{dx}(\overline{K}_{zs} - r\overline{S}_s) + \frac{da_3}{dx}(\overline{K}_{zs^3} - \overline{S}_{s^3}) = 0 \\ \frac{da_1}{dx} K_{\omega y} + \frac{da_2}{dx} K_{\omega s} + \frac{da_3}{dx} K_{\omega s^3} = Q_y e \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

---

[1] Остальные уравнения равновесия выполняются тождественно.

[2] Для удобства вычислений уравнение (4) составляется относительно оси, проходящей через центр изгиба поперечного сечения стержня. Положение центра изгиба определяется обычным способом.

[3] e и $r > 0$ если отложены от соответствующих полюсов в положительном направлении оси z.

Решение системы (6) существует, как известно, если ее детерминант $D_{(6)} \neq 0$.

$$D_{(6)} = \begin{vmatrix} K_{yy} & K_{ys} & K_{ys^3} \\ (\overline{K}_{zy} - r\overline{S}_y) & (\overline{K}_{zs} - r\overline{S}_s) & (\overline{K}_{zs^3} - r\overline{S}_{s^3}) \\ K_{\omega y} & K_{\omega s} & K_{\omega s^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_{yy} K_{ys} K_{ys^3} \\ \overline{K}_{zy} \overline{K}_{zs} \overline{K}_{zs^3} \\ K_{\omega y} K_{\omega s} K_{\omega s^3} \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} K_{yy} K_{ys} K_{ys^3} \\ \overline{S}_y \overline{S}_s \overline{S}_{s^3} \\ K_{\omega y} K_{\omega s} K_{\omega s^3} \end{vmatrix} = D_{1(6)} - rD_{2(6)} \neq 0. \quad (7)$$

При рассмотрении (7) интересны следующие три случая:

$$\text{а)}\ D_{1(6)} \neq 0, \quad D_{2(6)} = 0, \quad (8)$$

тогда $D_{(6)} \neq 0$ при любом значении r, т. е. решение, безусловно, существует.

$$\text{б)}\ D_{2(6)} \neq 0,$$

тогда
$$D_{(6)} \neq 0 \text{ при } r \neq \frac{D_{1(6)}}{D_{2(6)}} \quad (9)$$

и
$$D_{(6)} = 0 \text{ при } r = \frac{D_{1(6)}}{D_{2(6)}}, \quad (10)$$

т. е. решение существует, если плоскость действия внешних сил не определяется значением r по (10). (Плоскость нагрузки, определяемую значением $r = \frac{D_{1(6)}}{D_{2(6)}}$, в дальнейшем будем называть «критической» в том смысле, что система (6) при этом решения не имеет).

$$\text{в)}\ D_{1(6)} = D_{2(6)} = 0. \quad (11)$$

В этом случае решение системы (6) не существует.

Если σ_x определено уравнением (1), то значения $D_{1(6)}$ и $D_{2(6)}$ зависят лишь от геометрических характеристик поперечного сечения стержня. До сих пор на вид сечения не накладывалось никаких ограничений, кроме отмеченной выше симметрии, следовательно, нельзя сказать, какой именно из случаев (8), (9), (11) будет иметь место. Поэтому приведенный анализ может оказаться полезным при решении конкретных задач.

Легко заметить, однако, что новая гипотеза не связана с каким-либо определенным выражением для σ_x. Существенным в (1) с точки зрения (5) является лишь количество неизвестных — a_i; переменные же y, s, s^3 могут быть заменены другими, с некоторыми весьма общими ограничениями.

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ σ_x.

Подобно выражению (1) и (2) для σ_x и q мы можем написать:

$$\sigma_x = a_1 u + a_2 v + a_3 w, \quad (12)$$

$$q = \frac{da_1}{dx}(\overline{S}_u - S_u) + \frac{da_2}{dx}(\overline{S}_v - S_v) + \frac{da_3}{dx}(\overline{S}_w - S_w), \quad (13)$$

где u, v, w — произвольные нечетные функции от различных комбинаций координат (s, y, z; w).

Из условий (3), (4), (5) для σ_x по (12) составим аналогичную (6) систему уравнений и условия существования ее решения:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{da_1}{dx}K_{yu}+\dfrac{da_2}{dx}K_{yv}+\dfrac{da_3}{dx}K_{yw}=\dfrac{dM_z}{dx} \\ \dfrac{da_1}{dx}(\overline{K}_{zu}-r\overline{S}_u)+\dfrac{da_2}{dx}(\overline{K}_{zv}-r\overline{S}_v)+\dfrac{da_3}{dx}(\overline{K}_{zw}-r\overline{S}_w)=0 \\ \dfrac{da_1}{dx}K_{\omega u}+\dfrac{da_2}{dx}K_{\omega v}+\dfrac{da_3}{dx}K_{\omega w}=Q_y e \end{array}\right\}. \tag{14}$$

Система (14) имеет решение, если $D_{(14)}\neq 0$.

$$D_{(14)}=\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yv}K_{yw} \\ \overline{K}_{zu}\overline{K}_{zv}\overline{K}_{zw} \\ K_{\omega u}K_{\omega v}K_{\omega w}\end{vmatrix}-r\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yv}K_{yw} \\ \overline{S}_u\overline{S}_v\overline{S}_w \\ K_{\omega u}K_{\omega v}K_{\omega w}\end{vmatrix}=D_{1(14)}-rD_{2(14)}\neq 0. \tag{15}$$

Очевидно, и в этом случае остаются в силе условия (8), (9), (11):

$$D_{1(14)}\neq 0,\ D_{2(14)}=0; \tag{16}$$

$$D_{2(14)}\neq 0; \tag{17}$$

$$D_{1(14)}=D_{2(14)}=0; \tag{18}$$

но теперь эти условия могут быть использованы для выбора функций u, v, w. Условия (16), в частности, позволяют подобрать функции u, v, w таким образом, чтобы решение системы (14) существовало при любом r. Условия (17) позволяют отодвинуть «критическую плоскость» на баданное расстояние от зоны практически возможного месторасположения нагрузки, а условия (18) служат критерием для отбраковывания видов u, v, w, неприемлемых для образования основного тензора напряжений по ранее принятой гипотезе.

1) Некоторые общие свойства функций u, v, w, вытекающие из условий (16).

Раскрывая $D_{1(14)}$ и $D_{2(14)}$ по элементам средней строки, получим:

$$D_{1(14)}=-\overline{K}_{zu}M_{\rm I}+\overline{K}_{zv}M_{\rm II}-\overline{K}_{zw}M_{\rm III},$$
$$D_{2(14)}=-\overline{S}_u M_{\rm I}+\overline{S}_v M_{\rm II}-\overline{S}_w M_{\rm III},$$

где

$$M_{\rm I}=\begin{vmatrix} K_{yv}K_{yw} \\ K_{\omega v}K_{\omega w}\end{vmatrix},\quad M_{\rm II}=\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yw} \\ K_{\omega u}K_{\omega w}\end{vmatrix},\quad M_{\rm III}=\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yv} \\ K_{\omega u}K_{\omega v}\end{vmatrix}.$$

Тогда (16) можно записать так:

$$D_{1(14)}=-\overline{K}_{zu}M_{\rm I}+\overline{K}_{zv}M_{\rm II}-\overline{K}_{zw}M_{\rm III}\neq 0, \tag{19}$$

$$D_{2(14)}=-\overline{S}_u M_{\rm I}+\overline{S}_u M_{\rm II}-\overline{S}_w M_{\rm III}=0. \tag{20}$$

Для выполнения (19) достаточно существования одного из шести неравенств:

$$\overline{K}_{zu}M_{\rm I}\neq 0,\ \overline{K}_{zv}M_{\rm II}\neq 0,\ \overline{K}_{zw}M_{\rm III}\neq 0,$$
$$-\overline{K}_{zu}M_{\rm I}+\overline{K}_{zv}M_{\rm II}\neq 0,\ \overline{K}_{zv}M_{\rm II}-\overline{K}_{zw}M_{\rm III}\neq 0,\ \overline{K}_{zu}M_{\rm I}-\overline{K}_{zw}M_{\rm III}\neq 0.$$

Условие (5) теряет свой смысл, если все интегралы $\overline{S}_u$, $\overline{S}_v$, $\overline{S}_w$ одновременно обратятся в нуль. Поэтому уравнение (20) можно удовлетворить, приняв равными нулю либо два любых минора, например, $M_{\rm I}$, $M_{\rm II}$ и интеграл $\overline{S}_w$, либо два интеграла, например, $\overline{S}_v$, $\overline{S}_w$ и минор $M_{\rm I}$.

В этом случае вместо (20) получим:

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_u &\neq 0\\ \overline{S}_w &= 0\\ M_{\mathrm{I}} &= 0\\ M_{\mathrm{II}} &= 0\end{aligned}\right\}, \quad (21) \qquad \text{или} \qquad \left.\begin{aligned}\overline{S}_u &\neq 0\\ \overline{S}_v &= 0\\ \overline{S}_w &= 0\\ M_{\mathrm{I}} &= 0\end{aligned}\right\}. \quad (22)$$

Необходимо помнить, что функции u, v, w должны быть линейно-независимыми. Действительно, если $w = nu + mv$, то $D_{1(14)} = D_{2(14)} = 0$, так как у каждого из них третий столбец есть сумма n первых и m вторых столбцов.

2) Пример выбора функций u, v, w по условиям (16).

а) Воспользуемся условиями (21). Пусть $u = y$, $v = \omega$, тогда

$$\begin{aligned}&\overline{S}_u = \overline{S}_y \neq 0,\\ &M_{\mathrm{I}} = K_{yv}K_{\omega w} - K_{yw}K_{\omega v} = K_{y\omega}K_{\omega w} - K_{yw}K_{\omega\omega} = -K_{\omega\omega}K_{yw},\\ &M_{\mathrm{II}} = K_{yu}K_{\omega w} - K_{yw}K_{\omega u} = K_{yy}K_{\omega w},\\ &M_{\mathrm{III}} = K_{yu}K_{\omega v} - K_{yv}K_{\omega u} = K_{yy}K_{\omega\omega} \neq 0.\end{aligned}$$

$K_{y\omega} = \int\limits_S y\omega\delta ds = 0$, так как ω — главная секториальная координата.

Оставшиеся условия (21) сводятся к трем однородным алгебраическим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{S}_w = 0\\ &K_{yw} = 0\\ &K_{\omega w} = 0, \text{ так как } K_{yy} = I_z \neq 0;\ K_{\omega\omega} = I_\omega \neq 0\end{aligned}\right\}. \quad (23)$$

Поэтому для получения нетривиального решения достаточно задать функцию w при помощи четырех параметров[1].

Пусть $w = k_1 y + k_2\omega + k_3 y^3 + k_3 s^3$, тогда

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_w &= k_1\overline{S}_y + k_2\overline{S}_\omega + k_3\overline{S}_{y^3} + k_4\overline{S}_{s^3} = 0\\ K_{yw} &= k_1 K_{yy} + k_2 K_{y\omega} + k_3 K_{yy^3} + k_4 K_{ys^3} = 0\\ K_{\omega w} &= k_1 K_{\omega y} + k_2 K_{\omega\omega} + k_3 K_{\omega y^3} + k_4 K_{\omega s^3} = 0\end{aligned}\right\}. \quad (24)$$

Решая (24), получим: $k_i = \alpha_i k_n$; $w = k_n(\alpha_1 y + \alpha_2\omega + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 s^3)$,

$$\sigma_x = a_1 y + a_2\omega + a_3 k_n(\alpha_1 y + \alpha_2\omega + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 s^3)$$

или

$$\sigma_x = a_1' y + a_2'\omega + a_3'(\alpha_3 y^3 + \alpha_4 s^3), \quad (25)$$

где α_i — известные коэффициенты, удовлетворяющие условиям (24).

Полученное выражение для σ_x отличается от (1) по существу лишь членом $a_3'(\alpha_3 y^3 + \alpha_4 s^3)$, так как ω почти всегда линейно выражается через s и y, но зато решение системы (14) свободно от понятия «критическая плоскость», если $\overline{K}_{zw} \neq 0$.

---

[1] Число параметров можно уменьшить, если сам вид функции w удовлетворяет одному или нескольким уравнениям (23). Так, например, если w задать в виде

$$w = \sum_{i=1}^{i=n} k_i \sin\frac{2\pi i}{p}s,$$

то $\overline{S}_w = 0$ при любом значении i. В этом случае достаточно трех параметров.

б) Воспользуемся условиями (22). Пусть $u=y$, тогда

$$\overline{S}_u=\overline{S}_y\neq 0,$$
$$M_1=K_{yv}K_{\omega w}-K_{yw}K_{\omega v}=0, \text{ если } K_{yv}=K_{yw}=0,$$

и вместо (22) получаем две независимые однородные системы:

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_v=0\\ K_{yv}=0\end{aligned}\right\}, \quad (26) \qquad \left.\begin{aligned}\overline{S}_w=0\\ K_{yw}=0\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Системы (26) и (27) содержат по два уравнения, поэтому функции v и w должны иметь по три параметра.

Пусть $v=k_1y+k_2\omega+k_3y^3,$
$w=k_4y+k_5\omega+k_6s^3,$

тогда

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_v=k_1\overline{S}_y+k_2\overline{S}_\omega+k_3\overline{S}_{y^3}=0\\ K_{yv}=k_1K_{yy}+k_2K_{y\omega}+k_3K_{yy^3}=0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_w=k_4\overline{S}_y+k_5\overline{S}_\omega+k_6\overline{S}_{s^3}=0\\ K_{yw}=k_4K_{yy}+k_5K_{y\omega}+k_6K_{ys^3}=0\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Решая (28) и (29), получим:

$$k_i=\alpha_ik_{vn},\ k_q=\alpha_qk_{wm},$$
$$v=k_{vn}(\alpha_1y+\alpha_2\omega+\alpha_3y^3),$$
$$w=k_{wm}(\alpha_4y+\alpha_5\omega+\alpha_6s^3),$$
$$\sigma_x=a_1y+a_2k_{vn}(\alpha_1y+\alpha_2\omega+\alpha_3y^3)+a_3k_{wm}(\alpha_4y+\alpha_5\omega+\alpha_6s^3), \tag{30}$$

где α_i, α_q — известные коэффициенты, удовлетворяющие соответственно системам (28), (29).

Выражения для σ_x (25) и (30) содержат одни и те же комбинации координат (s, y, z, ω), имеют одинаковое число произвольных постоянных, поэтому принципиально совпадают друг с другом. Для получения нового вида σ_x нужно взять другие комбинации координат (s, y, z, ω) и воспользоваться любым из условий (21), (22).

3) Пример выбора функций u, v, w по условиям (17)

Пусть u, v, w такие, что

$$\left.\begin{aligned}M_{\rm I}=0\\ M_{\rm II}=0\\ \overline{S}_w\neq 0\\ M_{\rm III}\neq 0\end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

Тогда на основании (19), (20) и (15) имеем:

$$D_{1(14)}=-\overline{K}_{zw}M_{\rm III},$$
$$D_{2(14)}=-\overline{S}_wM_{\rm III}\neq 0,$$
$$D_{(14)}=-M_{\rm III}(\overline{K}_{zw}-r\overline{S}_w).$$

В этом случае «критическая плоскость» существует и удалена от плоскости XOY на расстояние r_1, если

$$\overline{K}_{sw}-r_1\overline{S}_w=0. \tag{32}$$

Функции u, v, w еще не определены, поэтому положение «критической плоскости» может заранее быть задано (величиной и знаком r_1)

таким образом, чтобы она была достаточно удалена от зоны приложения нагрузок. Объединяя (31) и (32), получим искомую систему для определения функций u, v, w по условиям (17):

$$\left.\begin{array}{c} M_{\mathrm{I}}=0 \\ M_{\mathrm{II}}=0 \\ \overline{K}_{zw}-r_1\overline{S}_w=0 \\ \overline{S}_w\neq 0 \\ M_{\mathrm{III}}\neq 0 \\ K_{zw}\neq 0 \end{array}\right\}. \tag{33}$$

Если функции u, v, w принять в виде

$$\begin{aligned} u&=y, \\ v&=\omega, \\ w&=k_1y+k_2\omega+k_3y^3+k_4s^3 \end{aligned}$$

и проделать выкладки, аналогичные приведенным в пункте 2, то получим для σ_x выражение, подобное (25):

$$\sigma_x=b_1y+b_2\omega+b_3k_n(\beta_{1r}y+\beta_{2r}\cdot\omega+\beta_{3r}y^3+\beta_{4r}s^3),$$

или

$$\sigma_x=b'_1y+b'_2\omega+b'_3(\beta_{3r}y^3+\beta_{4r}s^3). \tag{34}$$

В формуле (34), однако, коэффициенты β_{ir}, в отличие от коэффициентов α_i в формуле (25), зависят от величины и знака r_1.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХЧЛЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ σ_x

При нагружении стержня чистым изгибом $\frac{dM_z}{dx}=0$, $Q_y=0$, и система (14) становится однородной. Если $D_{(14)}\neq 0$, то

$$\frac{da_1}{dx}=\frac{da^2}{dx}=\frac{da_3}{dx}=0.$$

Это означает, что касательные напряжения отсутствуют, уравнение равновесия (4) выполняется тождественно и, следовательно, отпадает надобность в трехчленной формуле для σ_x.

Пусть

$$\sigma_x=a_1u+a_2v. \tag{35}$$

Раскрывая (3) и (5), получим:

$$\left.\begin{array}{l} a_1K_{yu}+a_2K_{yv}=M_z \\ a_1(\overline{K}_{zu}-r\overline{S}_u)+a_2(\overline{K}_{zv}-r\overline{S}_v)=0 \end{array}\right\}. \tag{36}$$

Тогда

$$D_{(36)}=\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yv} \\ \overline{K}_{zu}\overline{K}_{zv}\end{vmatrix}-r\begin{vmatrix} K_{yu}K_{yv} \\ \overline{S}_u\overline{S}_v\end{vmatrix}=D_{1(36)}-rD_{2(36)}\neq 0 \text{ при любом } r,$$

если $D_{1(36)}\neq 0$, $D_{2(36)}=0$.

Положив $u=y$, найдем, что $D_{2(36)}=K_{yu}\overline{S}_v-K_{yv}\overline{S}_u=K_{yy}\overline{S}_v-K_{yv}\overline{S}_y=$ $=0$, если

$$\left.\begin{array}{r} K_{yv}=0 \\ \overline{S}_v=0 \end{array}\right\}. \tag{37}$$

так как $K_{yy}=I_z\neq 0$, $\overline{S}_v\neq 0$.

Если v удовлетворяет (37), то из (36) следует:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{M_z}{K_{yy}} \\ a_2 &= -\frac{M_z}{K_{yy}} \cdot \frac{\overline{K}_{zy} - r\overline{S}_y}{\overline{K}_{zv}} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

и

$$\sigma_x = a_1 y + a_2 v = \frac{M_z}{K_{yy}}\left(y - \frac{\overline{K}_{zy} - r\overline{S}_y}{\overline{K}_{zv}} v\right). \tag{39}$$

Система (37) состоит из двух уравнений, поэтому функция v должна иметь три параметра. Пусть $v = k_1 y + k_2\omega + k_3 y^3$. Тогда, разрешив систему (28), получим:

$$\begin{gathered} k_i = \alpha_i k_{vn}, \\ v = k_{vn}(\alpha_1 y + \alpha_2\omega + \alpha_3 y^3), \\ \sigma_x = a_1 y + a_2 k_{vn}(\alpha_1 y + \alpha_2\omega + \alpha_3 y^3). \end{gathered} \tag{40}$$

где a_1, a_2 определены по (38).

III. О ВОЗМОЖНОМ ИЗМЕНЕНИИ СОСТАВА ОСНОВНОГО ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Закон распределения σ_x по периметру поперечного сечения стержня, как это следует из изложенного выше, зависит не только от плоскости действия внешних сил, но и от рода нагрузки. Так, например, закон распределения σ_x определяется формулой (40), когда изгибающий момент приложен в виде пары, и формулой (30), когда изгибающий момент создан поперечной силой. Если в обоих случаях предположить одинаковый закон распределения нормальных напряжений и в качестве такового принять формулу (35), то, очевидно, при нагружении поперечной силой уравнение (4) выполняться не будет. Получающийся неуравновешенный крутящий момент можно уничтожить, если расширить состав основного тензора напряжений. Однако сделать это можно лишь за счет таких компонентов, присутствие которых в основном тензоре не сказалось бы на выполнении остальных уравнений равновесия и условия (5).

Для стержней без связей такими компонентами могут служить компоненты свободного кручения, для стержней со связями — компоненты стесненного кручения. Ниже приведена схема определения компонентов тензора напряжений измененного состава, построенного по гипотезе (5) с учетом дополнительного предположения об одинаковом законе распределения нормальных напряжений по периметру поперечного сечения тонкостенного стержня при изгибе парой и поперечной силой.

А. Изгиб парой.

1. Определение σ_x по (39).

Б. Изгиб поперечной силой.

1. Расчет σ_x по (39).
2. Определение потока касательных усилий по формуле

$$q = \frac{da_1}{dx}(\overline{S}_y - S_y) + \frac{da_2}{dx}(\overline{S}_v - S_v),$$

где a_1, a_2 определены по (38).

3. Вычисление неуравновешенного крутящего момента M'_x:

$$M'_x = \frac{da_2}{dx} K_{\omega v} - Q_y e.$$

4. Определение остальных компонентов основного тензора напряжений от действия крутящего момента M'_x;

1) в случае стержней без связей по законам свободного кручения;

2) в случае стержней со связями по законам стесненного кручения.

IV. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

В данной работе:

1) Исследованы условия существования основного тензора напряжений, определяемого гипотезой о плоскости действия внутренних сил.

2) Найден способ построения основного тензора напряжений, свободного от понятия «критическая плоскость».

3) Найден способ построения основного тензора напряжений, у которого «критическая плоскость» сдвинута на заданное расстояние от зоны приложения нагрузок.

4) Предложена схема определения компонентов основного тензора напряжений, основанная на дополнительном предположении об одинаковом законе распределения нормальных напряжений по периметру поперечного сечения тонкостенного стержня при изгибе парой и при изгибе поперечной силой.