

Л. А. Малащенко

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Цель исследования

Вместо гипотезы плоских сечений применительно к тонкостенным стержням Л. П. Винокуров предложил основной тензор напряжений подбирать таким образом, чтобы плоскость равнодействующей внутренних усилий совпадала с плоскостью действия внешней нагрузки [1]. Тогда более точно удовлетворяются граничные условия тонкостенных стержней, что важно в связи с известными ограничениями принципа Сен-Венана для таких стержней.

Согласно новой гипотезе, которую будем называть гипотезой о плоскости действия сил, выражение нормальных напряжений в поперечном сечении стержня σ_x задается в виде¹

$$\sigma_x = a_2 f + a_3 \varphi + a_3 \psi + a_4 u + \dots, \quad (1)$$

где $f, \varphi, \psi, u, \dots$ — нечетные функции.

Коэффициенты a_i определяются из уравнений равновесия (рис. 1):

$$\int_s \sigma_x \delta ds = 0, \quad (2)$$

$$\int_s \sigma_x y \delta ds = M_z \quad (3)$$

с использованием условия совпадения плоскости равнодействующей внутренних нормальных напряжений с плоскостью действия внешних сил

$$\int_{s_1} \sigma_x (z - e) \delta ds = 0. \quad (4)$$

Кроме этого, для стержней открытого профиля привлекается условие совпадения плоскости равнодействующей внутренних поперечно-срезающих усилий с плоскостью внешних нагрузок

$$\int_s q \rho ds = Pe, \quad (5)$$

а для стержней закрытого профиля — условие неразрывности напряжений в точке O_1 (рис. 1)

$$\sigma_x(\bar{s}_1) = \sigma_x(\bar{s}_2). \quad (6)$$

Здесь \bar{s} — периметр средней линии сечения,

\bar{s}_1 — периметр средней линии сечения в растянутой зоне,

\bar{s}_2 — периметр средней линии сечения в сжатой зоне,

q — интенсивность внутренних срезающих сил,

¹ В случае нелинейного физического закона и неоднородного материала в таком виде записываются продольные перемещения, а нормальные напряжения σ_x определяются с использованием выражения физического закона.

ρ — плечо элементарной срезающей силы qds до точки моментов в плоскости сечения,
 P — внешняя поперечная нагрузка.

Связь между касательными и нормальными напряжениями находится, как обычно, из уравнения равновесия элемента срединной поверхности стержня

$$\frac{\partial (\rho \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \tau_{xz})}{\partial s} + p_x = 0, \quad (7)$$

где p_x — давление внешних поверхностных продольных сил.

В данной работе проводилась экспериментальная проверка изложенной теории.

В случае симметричных относительно оси z профилей выражение (1) записывалось в виде

$$\sigma_x = a_1 y + a_2 \omega + a_3 s \quad (8)$$

для открытого профиля и

$$\sigma_x = a_1 y + a_2 yz \quad (9)$$

для закрытого,

где yz — главные центральные оси,
 ω — главная секториальная координата,

s — координата средней линии профиля.

Начало отсчета совмещаем со серединой периметра. Тогда уравнения (2) и (6) тождественно удовлетворяются, а коэффициенты a_i определяются с использованием оставшихся уравнений (3) — (5).

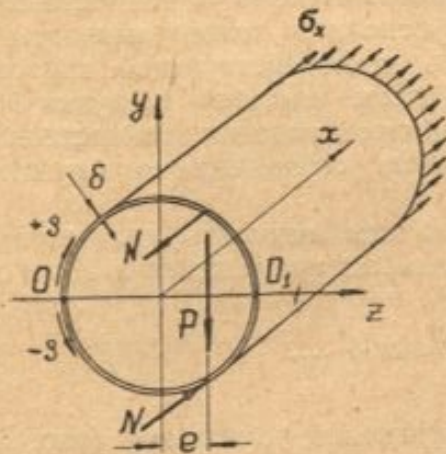


Рис. 1.

Для стержней открытого профиля

$$a_2 = M_z \frac{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3 + e (\alpha_2 l_z - \alpha_3 l_{zs})}{\alpha_1 \beta_2 l_{zs} - \alpha_1 \beta_2 l_z + \beta_1 (\alpha_2 l_z - \alpha_3 l_{zs})},$$

$$a_1 = \frac{\alpha_2 M_z + \alpha_3 \alpha_1 l_{zs}}{\alpha_2 l_z - \alpha_3 l_{zs}}, \quad a_3 = - \frac{\alpha_2 M_z + \alpha_3 \alpha_1 l_z}{\alpha_2 l_z - \alpha_3 l_{zs}}, \quad (10)$$

$$q = \frac{da_1}{dx} (S_z - S_{z(s)}) + \frac{da_2}{dx} (S_\omega - S_{\omega(s)}) + \frac{da_3}{dx} (S_s - S_{s(s)}), \quad (11)$$

где

$$\alpha_1 = I_{y\omega} - e S_\omega, \quad \alpha_2 = I_{yz} - e S_z, \quad \alpha_3 = I_{ys} - e S_s,$$

$$I_{y\omega} = \int_{s_1}^{s_2} z \omega^2 ds, \quad I_{yz} = \int_{s_1}^{s_2} y z^2 ds, \quad I_{ys} = \int_{s_1}^{s_2} z s^2 ds,$$

$$I_z = \int_{s_1}^{s_2} y^2 \delta ds, \quad I_{z\omega} = \int_{s_1}^{s_2} y \omega \delta ds = 0, \quad I_{zs} = \int_{s_1}^{s_2} y s \delta ds,$$

$$S_\omega = \int_{s_1}^{s_2} \omega \delta ds, \quad S_z = \int_{s_1}^{s_2} y^2 \delta ds, \quad S_s = \int_{s_1}^{s_2} s \delta ds,$$

$$\beta_1 = \int_{s_1}^{s_2} (S_\omega - S_{\omega(s)}) \rho ds, \quad \beta_2 = \int_{s_1}^{s_2} (S_z - S_{z(s)}) \rho ds,$$

$$\beta_3 = \int_{s_1}^{s_2} (S_s - S_{s(s)}) \rho ds.$$

При чистом изгибе, когда поперечная сила P отсутствует, в выражении (8) следует оставить только два первых члена, коэффициенты которых определяются из уравнений (3) и (4):

$$a_1 = \frac{M_z}{I_z}, \quad a_2 = -a_1 \frac{a_2}{a_1}. \quad (12)$$

При кручении коэффициенты a_1 и a_2 находятся из уравнений (3) и (5):

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{M_{кр}}{\beta_1} x. \quad (13)$$

Для стержней закрытого профиля

$$a_1 = M_z \frac{I_{yz} - eS_z}{I_z(I_{yz} - eS_z) - I_{zs}(I_{yz} - eS_z)},$$

$$a_2 = -M_z \frac{I_{yz} - eS_z}{I_z(I_{yz} - eS_z) - I_{zs}(I_{yz} - eS_z)}, \quad (14)$$

$$q = q_0 - \frac{da_1}{dx} S_{z(s)} - \frac{da_2}{dx} S_{s(s)}, \quad (15)$$

где q_0 — начальная интенсивность в точке $s=0$, определяемая из уравнения (5),

$$I_z = \int_{s_1} y^2 \delta ds, \quad I_{zs} = \int_{s_1} y^2 z \delta ds, \quad I_{yz} = \int_{s_1} yz \delta ds,$$

$$I_{yzs} = \int_{s_1} yz^2 \delta ds, \quad S_z = \int_{s_1} y \delta ds, \quad S_s = \int_{s_1} yz \delta ds.$$

Постановка эксперимента

Образцами служили стальной и дюралевый тонкостенные стержни швеллерообразного профиля с отогнутыми во внутрь полками (рис. 2). Задние стенки — съемные; когда они соединяются с отбортовкой открытого профиля винтами, то получается закрытый профиль.

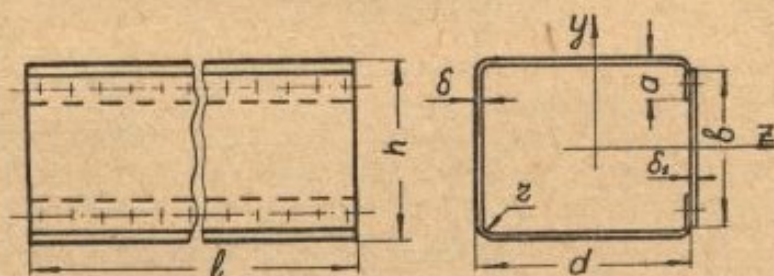


Рис. 2.

Геометрические размеры стержней:

а) стального

$l = 750$ мм, $h = 64$ мм, $d = 74$ мм, $a = 18$ мм, $b = 60$ мм,
 $\delta = \delta_1 = 1,5$ мм,

б) дюралевого (Д16АМ):

$l = 1200$ мм, $h = 140$ мм, $d = 150$ мм, $a = 20$ мм, $b = 120$ мм, $\delta = 2$ мм,
 $r = 10$ мм, $\delta_1 = 3$ мм.

Материал задней стенки — Д16АТ.

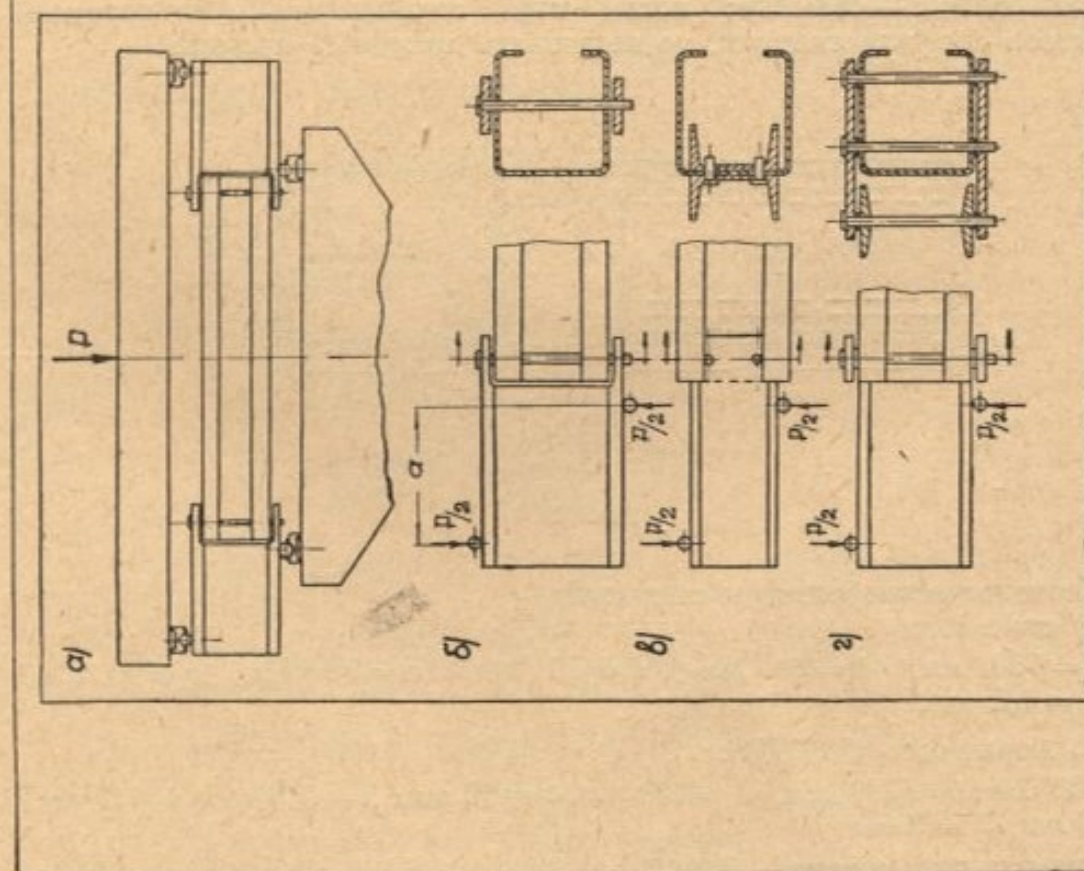


Рис. 3.

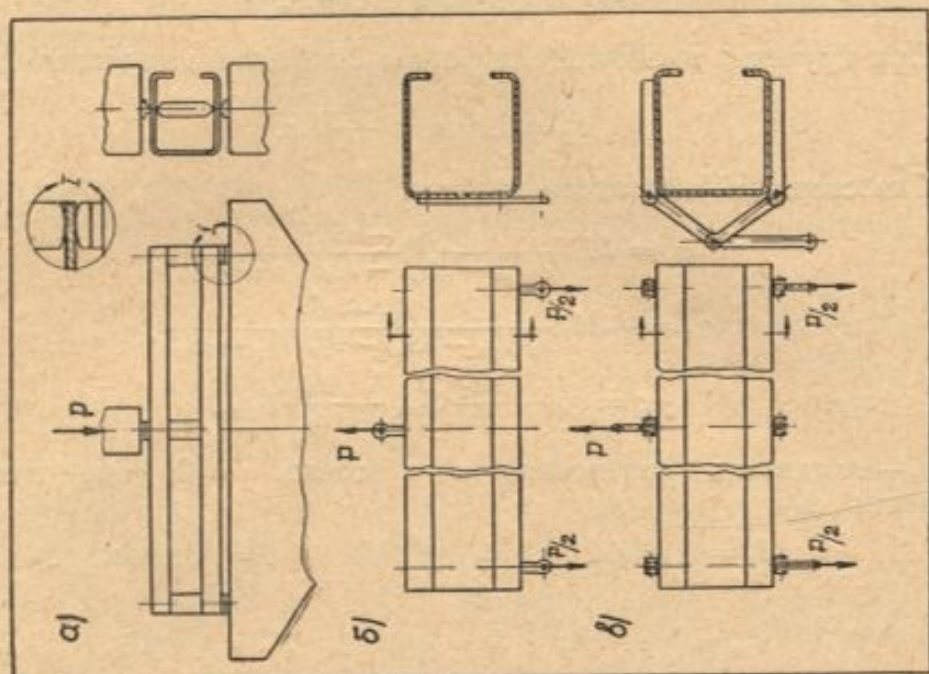


Рис. 4.

Нагружение испытываемых образцов проводилось на машине Р-5 в лаборатории механического испытания материалов Харьковского инженерно-строительного института. Благодаря специально изготовленным опорным узлам и отсутствию жестких диафрагм обеспечивалась свободная деформация, причем с достаточно определенной, заранее предусмотренной плоскостью действия внешних нагрузок.

Испытуемые стержни подвергались исследованию при чистом изгибе и изгибе поперечной силой для нескольких случаев положения плоскости внешней нагрузки.

Чистый изгиб осуществлялся следующим образом. Стержень с опорными узлами закладывался в испытательную машину. Сжимающая нагрузка передавалась на опорные узлы через вспомогательные балки,

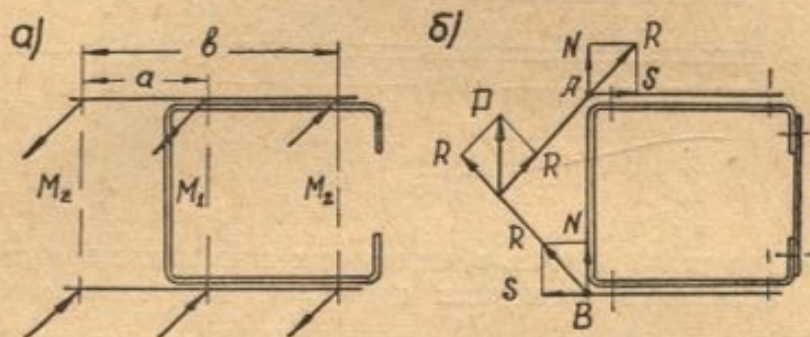


Рис. 5.

вызывая изгиб этих узлов и исследуемого стержня (рис. 3,а). Опорный узел соединялся валиками или непосредственно с полками испытываемого стержня (рис. 3,б), или со стенкой (рис. 3,в), или с полками с помощью специальных накладок (рис. 3,г). Величина изгибающего момента равна $M_z = \frac{P}{2} a$.

В случае поперечной силы испытываемый стержень изгибался как балка на двух опорах. Нагрузка на стержень передавалась или через опорные шайбы и стойки, свободно объединяющие полки (рис. 4,а), или через тяги, связанные непосредственно со стенкой стержня (рис. 4,б), или через тяги, связанные с полками стержня (рис. 4,в).

Эти опорные приспособления сохранялись для случаев открытого и закрытого профилей.

Коэффициенты a_p , а следовательно, и напряжения σ_x зависят нелинейно от положения внешней нагрузки e (10, 12, 14). Поэтому внешние силы, расположенные в разных плоскостях, нельзя заменить равнодействующей. Надо учитывать конкретные условия передачи нагрузки непосредственно на поверхность стержня.

При действии изгибающего момента M_z (рис. 5,а) полное напряженное состояние определяется суммой двух напряженных состояний от составляющих $M_1 = M_z \frac{b}{b-a}$ и $M_2 = -M_z \frac{a}{b-a}$, ибо только эти составляющие приложены непосредственно к стержню.

При изгибе поперечной силой общая внешняя нагрузка P раскладывается на составляющие N и S (рис. 5,б). Составляющие N вызывают изгиб, составляющие S — кручение. Окончательные напряжения равны сумме напряжений от изгиба и кручения.

Продольная линейная деформация определялась с помощью проводочных датчиков омического сопротивления. Измерение осуществлялось электронным измерителем деформаций. Тензодатчики и ЭИД были изготовлены в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ).

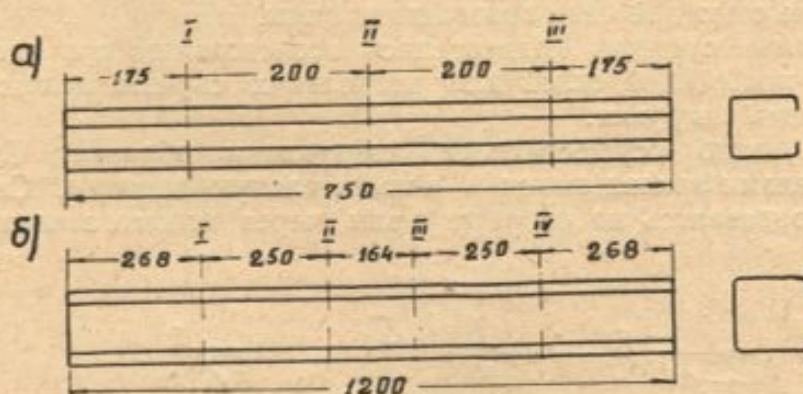


Рис. 6.

Деформация исследовалась в нескольких сечениях стержня (на рис. 6 эти сечения обозначены римскими цифрами): для стального — в трех

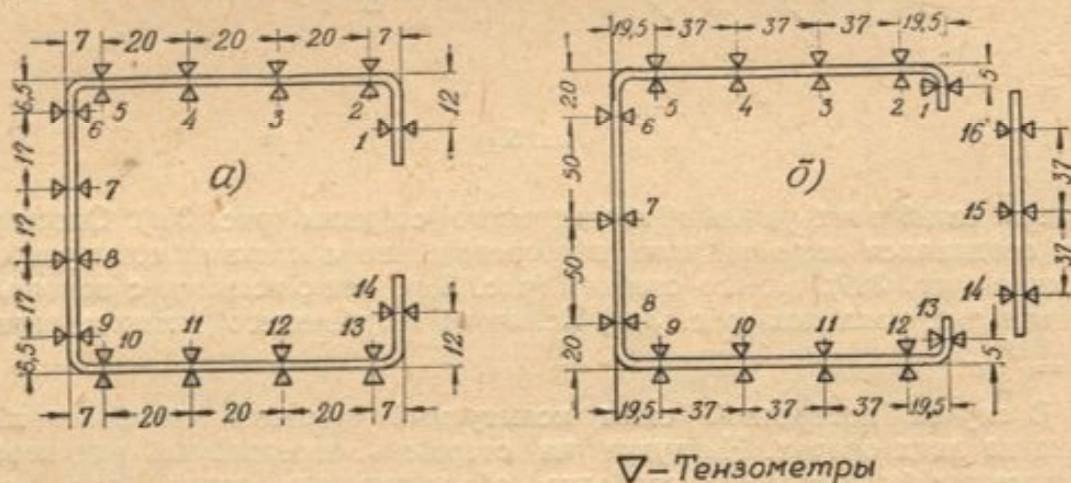


Рис. 7.

(рис. 6,а), для дюралевого — в четырех (рис. 6,б). В каждом сечении деформация измерялась в 14 точках для стального стержня открытого и закрытого профилей (рис. 7,а, точки обозначены арабскими цифрами), дюралевого — в 13 для открытого и в 16 для закрытого (рис. 7,б). В каждой точке тензодатчики наклеивались с внешней и с внутренней сторон контура и показания осреднялись.

Анализ экспериментальных данных

Результаты экспериментальных исследований приведены на рис. 8 и 10 для стального стержня, на рис. 9 и 11 — для дюралевого. По нормали к средней линии поперечного сечения отложены значения или нормальных напряжений σ_x (рис. 8 и 9), или их отношений к изгибающему моменту в данном сечении (рис. 10,а), причем положительные нормаль-

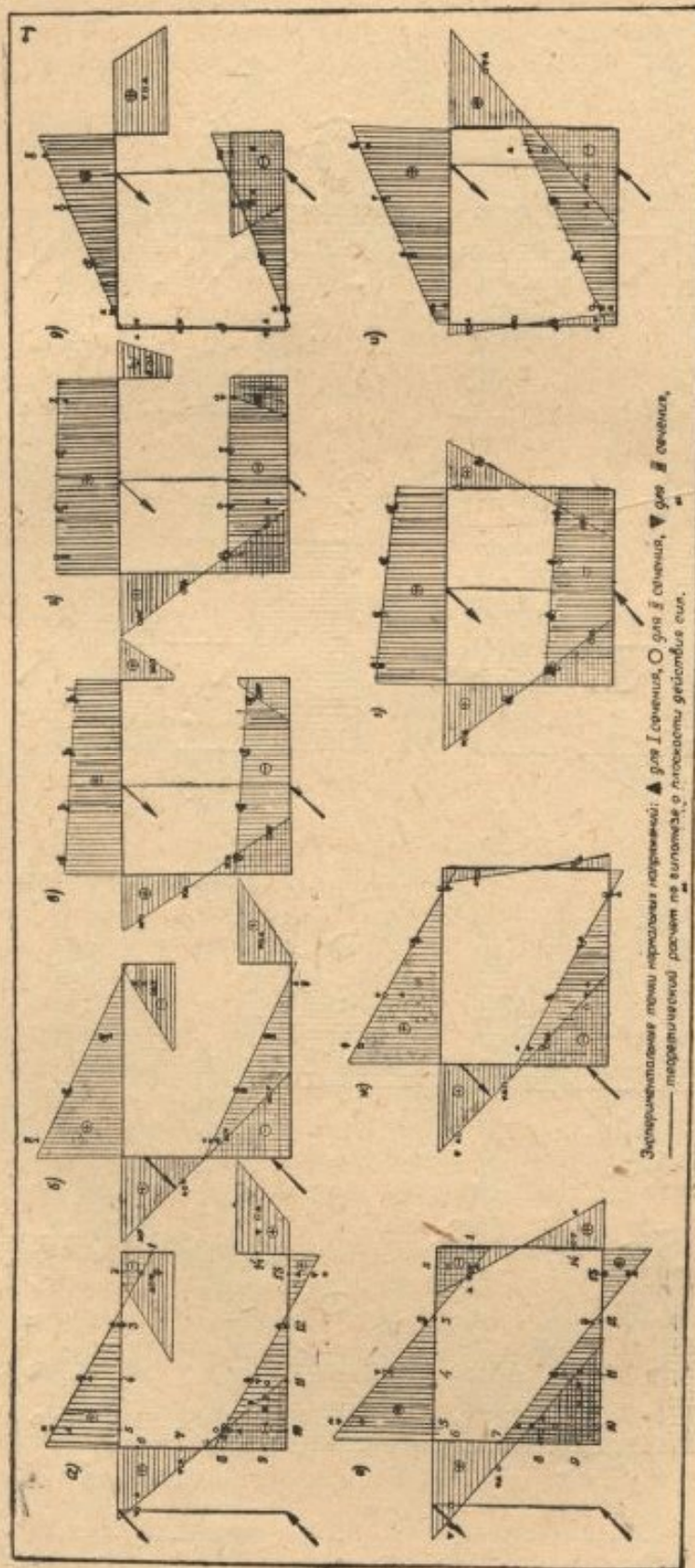
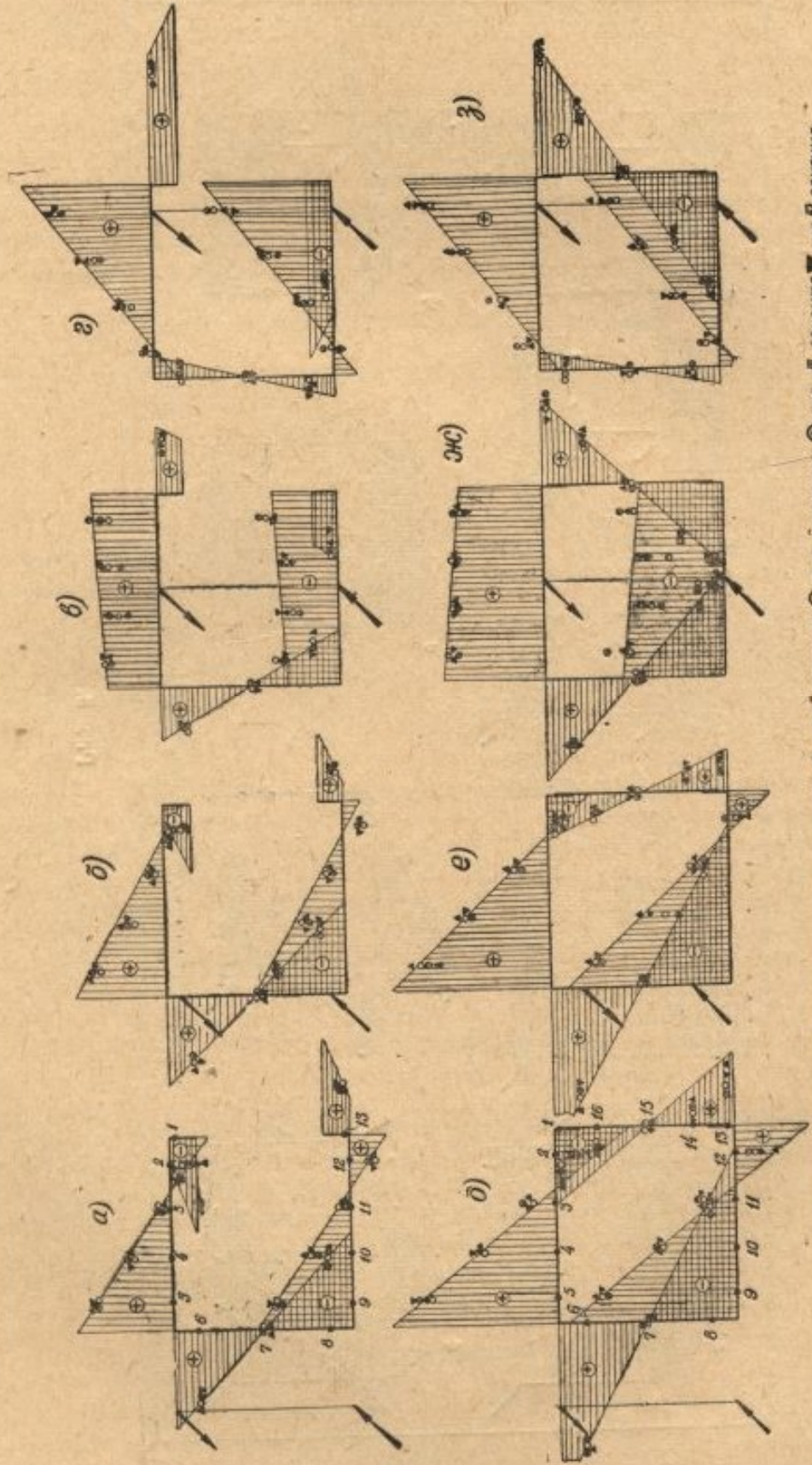


Рис. 8.



Экспериментальные точки нормальных напряжений: ▲ для I сечения, ○ для II сечения, ⊙ для III сечения, ▼ для IV сечения, ▽ для V сечения, ⊕ для VI сечения, ⊗ для VII сечения, ⊙ для VIII сечения, ⊙ для IX сечения, ⊙ для X сечения, ⊙ для XI сечения, ⊙ для XII сечения, ⊙ для XIII сечения, ⊙ для XIV сечения, ⊙ для XV сечения, ⊙ для XVI сечения.

Рис. 9.

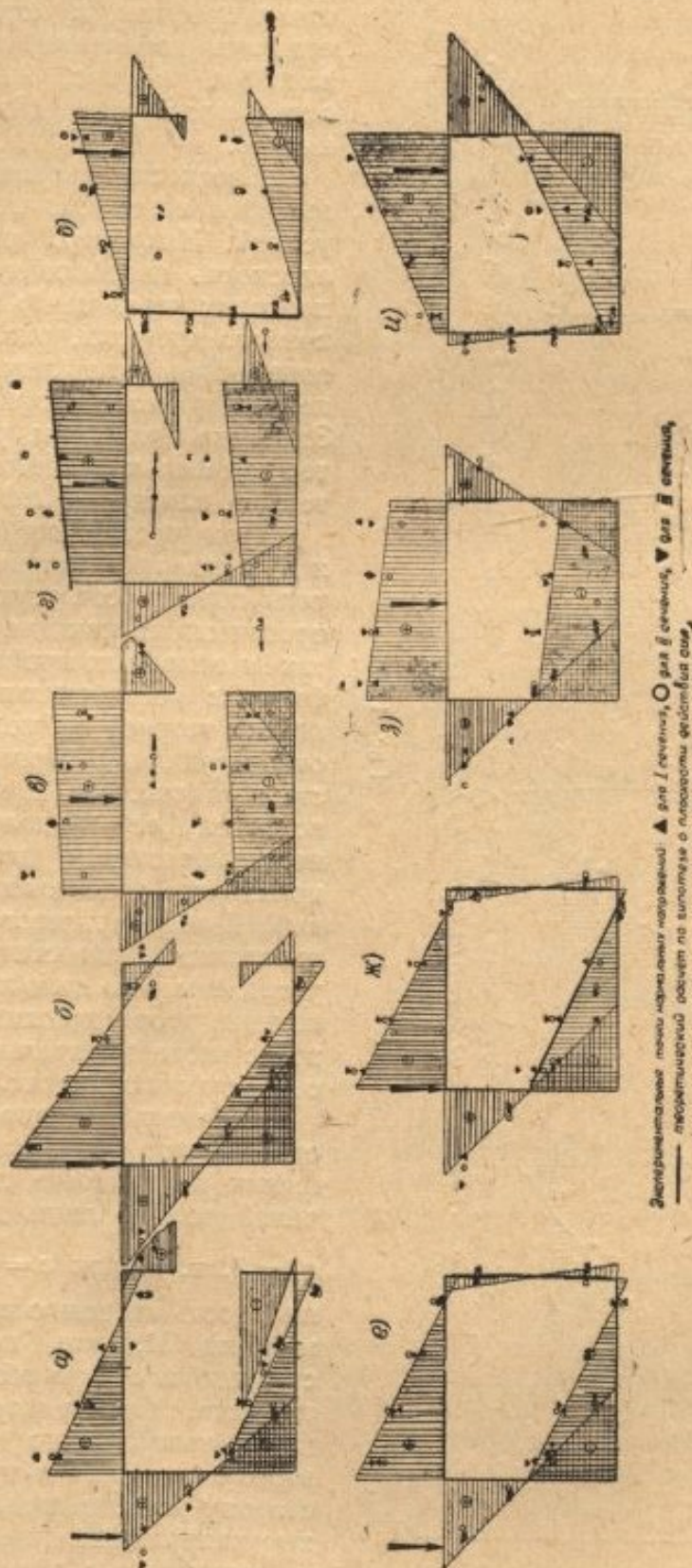


Рис. 10.

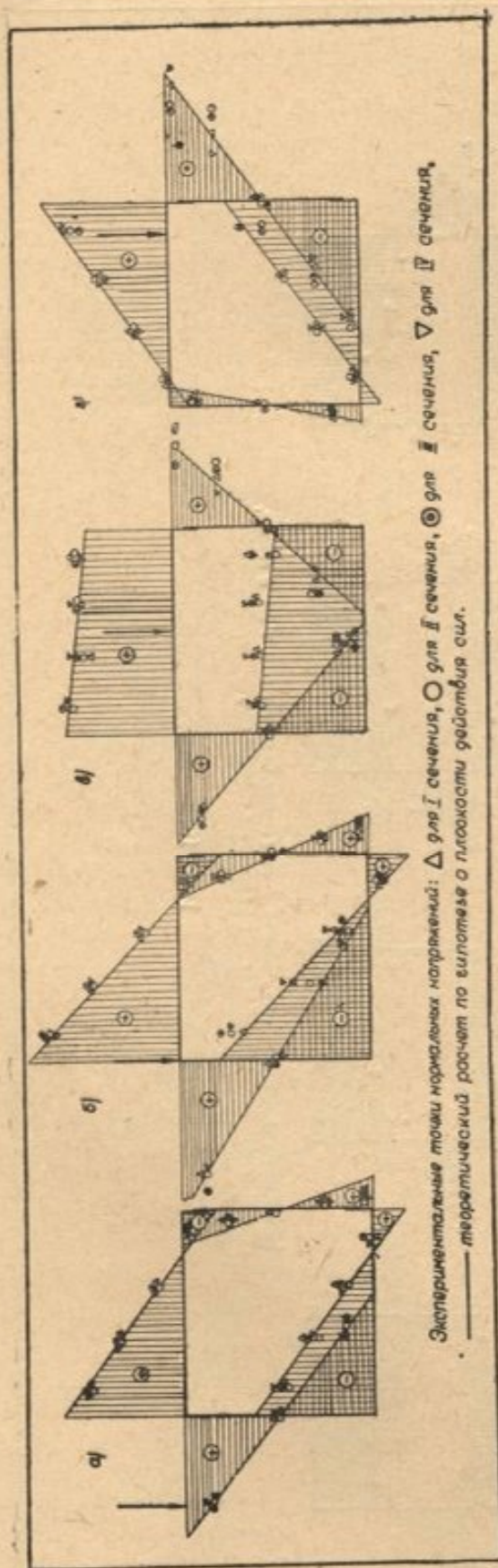


Рис. 11.

ные напряжения отложены наружу контура, отрицательные — во внутрь. Цифрами отмечены точки профиля, в которых проводились измерения, только на рис. 8,а, е, рис. 9,а, д, для остальных случаев они не изменялись.

Плоскость внешних нагрузок указана схемой приложения усилий. Например, рис. 8,а — плоскость изгибающего момента проходит через центр изгиба открытого профиля, рис. 10,в, г — поперечная сила лежит вблизи центра тяжести профиля и т. д. Здесь же приведены результаты теоретических расчетов по гипотезе о плоскости действия сил.

При чистом изгибе (рис. 8 и 9) экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими как для открытых, так и закрытых профилей. Наибольшие расхождения эксперимента с теорией наблюдаются для отбортовки открытого стального стержня (рис. 8,а, в, д). Это объясняется ее технологическими несовершенствами (местные искривления, непостоянство ширины). Для дюралевого стержня указанные недостатки были устранены, что дало лучшее совпадение теоретических напряжений с экспериментальными и для отбортовки полки (рис. 9, а, б, в, е).

Нормальные напряжения соответствуют элементарному решению по гипотезе плоских сечений только лишь для случая $a_2 = 0$, т. е. при $e = \frac{I_{y_2}}{S_2}$. Тогда плоскость внешнего изгибающего момента M_z для исследуемых стержней проходит вблизи центра тяжести. При удалении плоскости изгибающего момента от этого положения в ту или иную сторону максимальные нормальные напряжения увеличиваются по сравнению с элементарными.

Например, если плоскость M_z проходит через центр изгиба открытого профиля, то максимальные напряжения превышают элементарные в 4,5 раза (рис. 8,а, е и рис. 9,а, д).

Результаты экспериментальных исследований и теоретических рас-

четов при изгибе поперечной силой приведены на рис. 9 для стального и на рис. 10 для дюралевого стержней.

Так же как и при чистом изгибе экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими. Лишь в случае изгиба стержня открытого профиля, когда плоскость внешней нагрузки находится в пределах полки стержня (рис. 9, в, г, д), замечаются расхождения. Это можно объяснить тем, что нагрузка прикладывается непосредственно к полкам профиля (рис. 4, а), вызывая их местный изгиб.

Как и при чистом изгибе, вид эпюр σ_x стержней открытого и закрытого профилей одинаков и значительно изменяется с изменением положения плоскости внешней нагрузки.

При удалении поперечной силы от положения, близкого для исследуемых стержней к центру тяжести, наибольшие нормальные напряжения σ_x возрастают по сравнению с элементарными. Например, если поперечная сила в данном сечении проходит через центр изгиба открытого профиля, то максимальные нормальные напряжения превышают элементарные более чем в 2 раза (рис. 10, а, е и рис. 11, а).

Анализ проведенных экспериментальных исследований подтверждает справедливость основной гипотезы о совпадении плоскостей равнодействующих внутренних и внешних усилий. В то же время полученные нами экспериментальные данные в ряде случаев значительно расходятся с данными теоретических расчетов по другим известным методам.

Для сравнения на рис. 12 и 13 приведены результаты теоретических расчетов нормальных напряжений для стального стержня по гипотезам: плоских сечений, о плоскости действия сил, В. З. Власова для открытого профиля, А. А. Уманского — для закрытого.

Расчет производился для тех же положений плоскостей внешних нагрузок, что и в случае экспериментальных исследований. На рис. 12 и 13 эти положения указаны схемой передачи усилий на стержень. Например, рис. 12, е — плоскость изгибающего момента проходит по стенке, рис. 13, в — поперечная сила лежит вблизи центра тяжести профиля и т. д.

По гипотезе плоских сечений

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (16)$$

по В. З. Власову [2]

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega. \quad (17)$$

В нашем случае при изгибе поперечной силой

$$B_\omega = - \frac{Pr}{2k} \frac{\operatorname{sh} k(l-x)}{\operatorname{ch} kl}.$$

Здесь r — расстояние от центра изгиба до внешней поперечной силы в данном сечении.

Теоретические значения нормальных напряжений σ_x по (16) и (17) значительно отличаются от полученных нами экспериментальных данных, которые хорошо согласуются с расчетом по гипотезе о плоскости действия сил [1]. Например, если поперечная сила проходит через центр изгиба (рис. 12, а), то нормальные напряжения по [2] совпадают с элементарными, в то время как по [1] превышают элементарные более чем в 2 раза.

Когда поперечная сила лежит вблизи центра тяжести исследуемого профиля (рис. 12, в), $\sigma_{x \max}$ по [1] почти совпадают с элементарными, $\sigma_{x \max}$ по [2] — превышают их более чем в 2 раза. Таким образом, расчет по гипотезе о плоскости действия сил дает значительную экономию

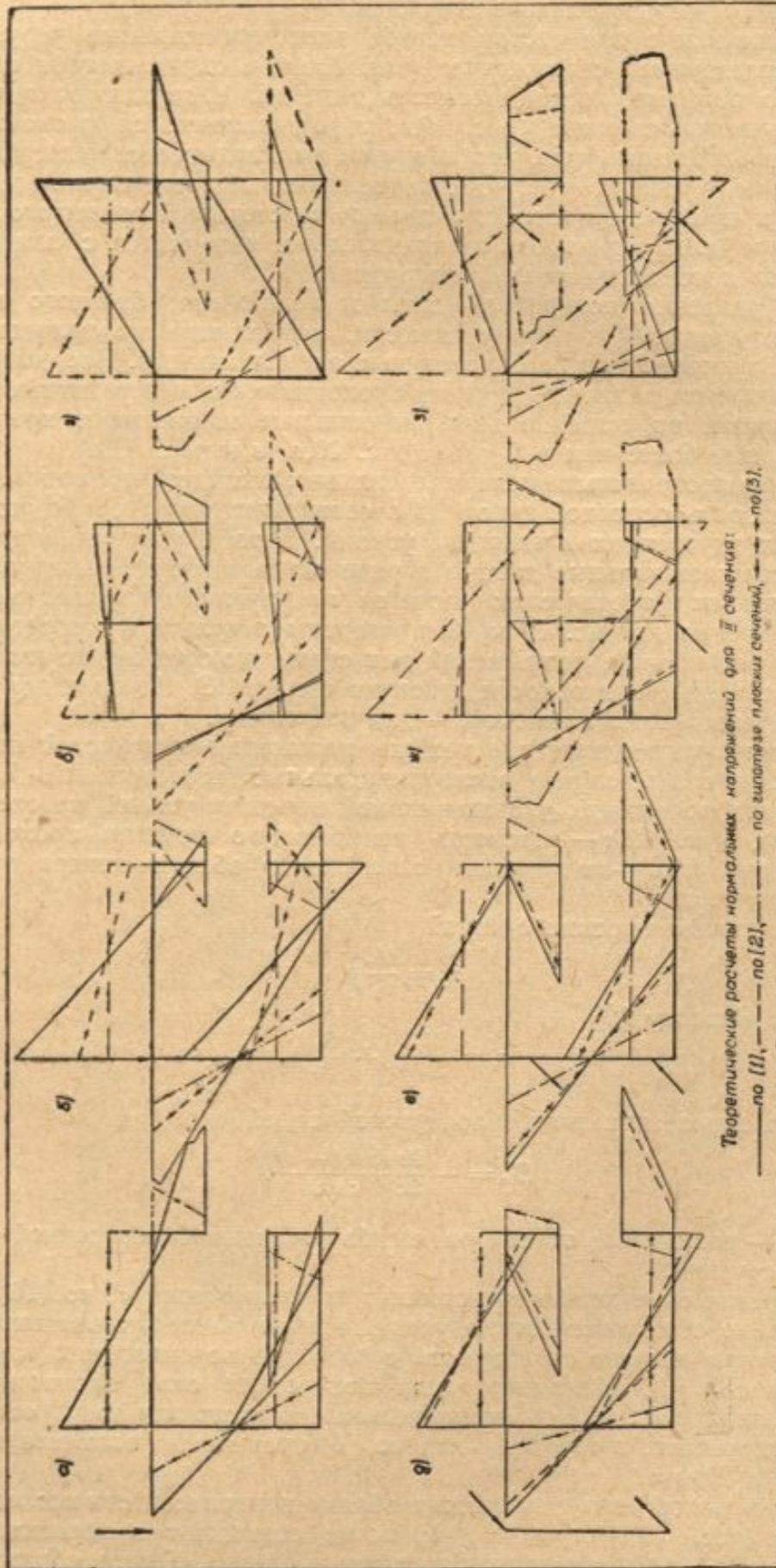


Рис. 12.

металла, если поперечная нагрузка лежит вблизи центра тяжести исследуемого профиля.

При чистом изгибе тонкостенного стального стержня открытого профиля (рис. 12, д, е, ж, з) нормальные напряжения σ_x , согласно [2], определялись по формуле (17), только здесь

$$B_\infty = B_0 \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} kl}, \quad B_0 = \Sigma P_i \omega_i. \quad (18)$$

По методу, приведенному в книге Д. В. Бычкова и А. К. Мроцинского [3],

$$B_\infty = -M_2 r \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} kl}. \quad (19)$$

Теоретический расчет по [2] хорошо совпадает с расчетом по гипотезе о плоскости действия сил. Однако последний метод лучше соответствует эксперименту, особенно при удалении плоскости M_2 вправо от центра тяжести (рис. 8, д и рис. 12, з).

Расчет напряжений σ_x по (17) с учетом (19) значительно отличается от расчета по [1]. Бимомент B_∞ равен нулю только в случае, если плоскость изгибающего момента проходит через центр изгиба (19). При удалении от центра изгиба он возрастает, увеличиваются и максимальные нормальные напряжения, что расходится с расчетом по [1] и не отвечает полученным нами экспериментальным данным. В книге В. З. Власова [2] особо подчеркивается, что бимомент B_∞ вычисляется по (19), если изгибающий момент образован поперечными силами; если же он образован продольными силами, то B_∞ следует определять по (18). В книге [3] этого отличия нет, что и привело к таким большим расхождениям с экспериментом.

Проведенные экспериментальные исследования чистого изгиба стержней открытого профиля опровергают предположение К. С. Завриева [4, 5] о том, что положение плоскости внешней пары не имеет значения для нормальных напряжений. Однако утверждение Завриева К. С. об экономии металла по сравнению с расчетом по (19) оправдывается в свете гипотезы о плоскости действия сил. Если плоскость внешней пары проходит вблизи центра тяжести справа от него (рис. 8, з), то напряжения σ_x соответствуют элементарному расчету, что утверждается и в [5].

При изгибе поперечной силой тонкостенного стального стержня закрытого профиля теоретический расчет нормальных напряжений σ_x по [1] сравнивался с элементарным расчетом по выражению (16) и с расчетом по А. А. Уманскому [6] (рис. 13, а, б, в, з). Расчет напряжений σ_x по [6] проводился по формуле, аналогичной (17), где

$$B_\infty = -M_0 \frac{\mu}{k} \frac{\operatorname{sh} k(l-x)}{\operatorname{ch} kl}, \quad M_0 = \frac{P}{2} r. \quad (20)$$

Так как исследуемое поперечное сечение относится к числу малоискажающихся ($\mu = 0,0289$), то при изгибе поперечной силой влияние секториальных нормальных напряжений пренебрежимо мало. Тогда нормальные напряжения σ_x практически равны элементарным, что значительно расходится с расчетом по [1] и с полученными нами экспериментальными данными (рис. 10, е, ж, з, и).

При чистом изгибе напряжения σ_x определялись по (17) и (20), только здесь, согласно физическому смыслу бимоента,

$$M_0 = M_2 r. \quad (21)$$

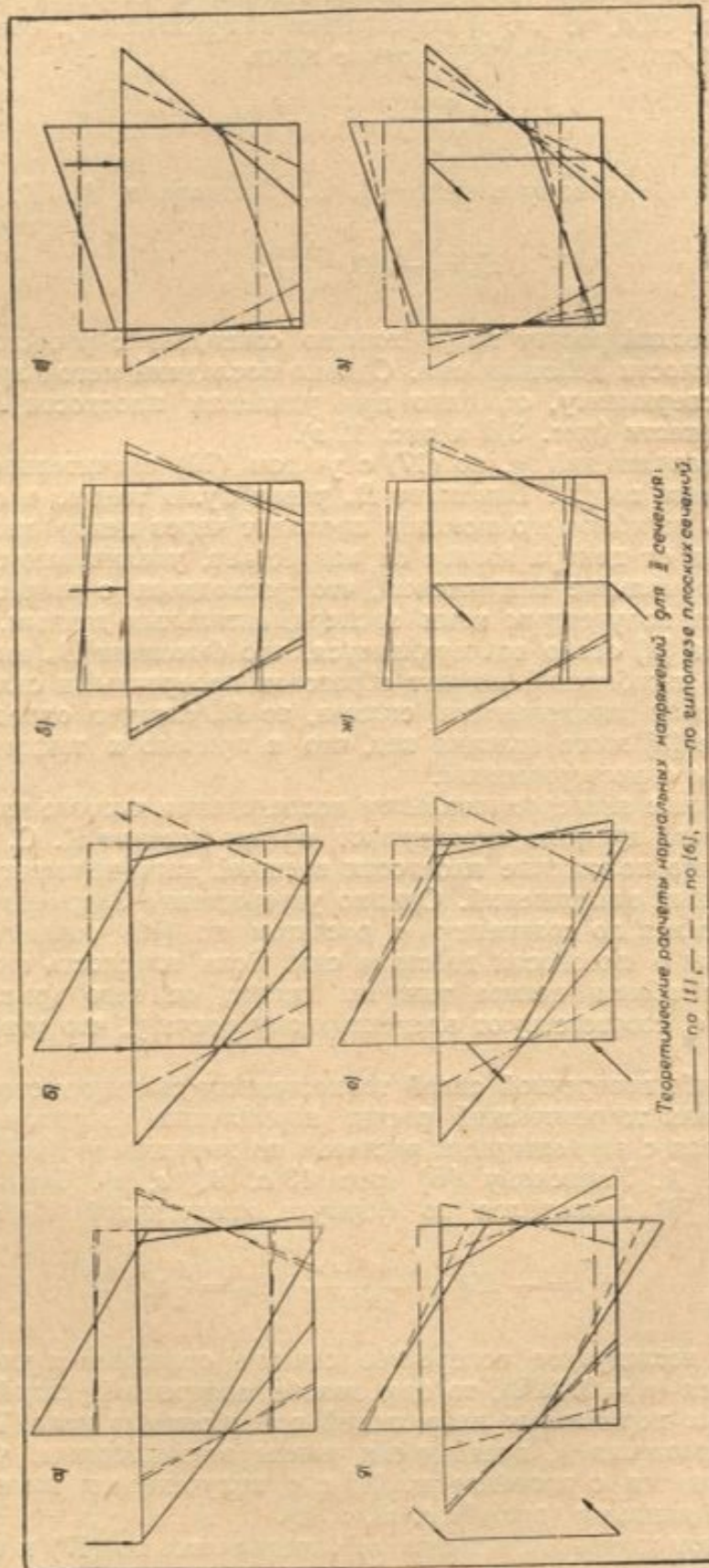


Рис. 13.

В этом случае (рис. 13, *д, е, ж, з*) расчет по [6] хорошо совпадает с расчетом по гипотезе о плоскости действия сил.

Таким образом, учет плоскости действия внешних усилий позволяет достаточно полно выявить напряжения тонкостенных стержней как открытого, так и закрытого профилей в случае их общей деформации от поверхностной нагрузки. В ряде примеров это оказывается достаточным для окончательного расчета напряжений. При наличии связей, создающих стеснения перемещениям точек стержня (наличие поперечных диафрагм, тех или иных опорных закреплений сечений стержня и др.), возникают дополнительные напряжения, которые не могут быть определены из одних условий равновесия. Они требуют для своего определения привлечения условий совместности деформаций. В дальнейшем предполагается выявить эти дополнительные напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винокуров Л. П. О внесении коррективов в гипотезу плоских сечений для тонкостенных стержней. Доклад на Межвузовской научно-технической конференции, посвященной расчету на прочность оболочек типа авиаконструкций, МАИ, кафедра строительной механики самолета, 1959.
2. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни, Гос. изд-во физ.-матем. лит., М. 1959.
3. Бычков Д. В. и Мрощинский А. К. Кручение металлических балок, Стройиздат, 1944.
4. Завриев К. С. К расчету тонкостенных стержней на изгиб, «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 4.
5. Завриев К. С. Действие изгибающих моментов на тонкостенные балки в связи с теорией центра изгиба, «Сообщение АН ГССР», т. XXI, № 4, 1958.
6. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Москва, Оборонгиз, 1939.