

## РАСЧЕТ НА ИЗГИБ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Ю. П. Петров

Основы теории анизотропных пластин были даны в работах М. М. Буссинеска; а приближенная теория их изгиба разработана; главным образом, в работах польского ученого М. Т. Губера.

Советский ученый С. Г. Лехницкий существенно развил как теорию анизотропных пластин, так и дал решение большого количества задач о их равновесии и устойчивости.

Вопросам теории анизотропных пластин и решению отдельных задач посвящены также труды отечественных ученых: Ростовцева Г. Г., Савина Г. Н., Михлина С. Г., Ченцова Г. Г., Шулежко П. Г.

Частным случаем анизотропной пластины является ортотропная пластина, которая широко распространена в различных отраслях строительства. Особенно это относится к пластинам с конструктивной ортотропией (подкрепленные пластины).

Ортотропные пластины рассматривались Папковичем П. Ф. [5], Локшиным А. С. [4], Резницким Л. Я. [8], Курдюмовым А. А. [3], Варваком П. М. и Губерманом И. О. [1], Гуменюком В. С. [2], Тренком К. [12] и рядом других авторов в Советском Союзе и за рубежом.

В работах польских ученых — Соколовского М. [9], Богуша В. [10], Новацкого В. [11] — был применен способ двухстадийного расчета на изгиб упругой ортотропной пластины. В основу его положено представление дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластины системой двух дифференциальных уравнений в частных производных, каждое из которых второго порядка. Такая замена позволяет успешно распространить дискретный метод и на ортотропные пластины в такой его форме, которая была изложена нами в работе [7].

### § 1. Системы дифференциальных уравнений дискретного метода для ортотропной пластины, сжатой в двух направлениях

Дифференциальное уравнение, описывающее изогнутую поверхность ортотропной пластины, сжатой (растянутой) в направлении осей  $x$  и  $y$  (рис. 1), имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \pm T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (1.1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — неизвестные (или известные) погонные силы, сжимающие (растягивающие) пластину в направлении осей  $x$  и  $y$ , соответственно;

$$D_1 = \frac{E_1 \delta^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad \text{и} \quad D_2 = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad -$$

цилиндрические жесткости пластины в направлении осей  $x$  и  $y$ ;

$$D_3 = D_1 \nu_1 + 2D_k, \quad D_k = \frac{G\delta^3}{12};$$

$G$  — модуль сдвига;  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона для направлений  $x$  и  $y$ ;  $\delta$  — толщина пластины;  $w(x, y)$  — функция прогибов пластины;  $q(x, y)$  — внешняя нагрузка на пластину.

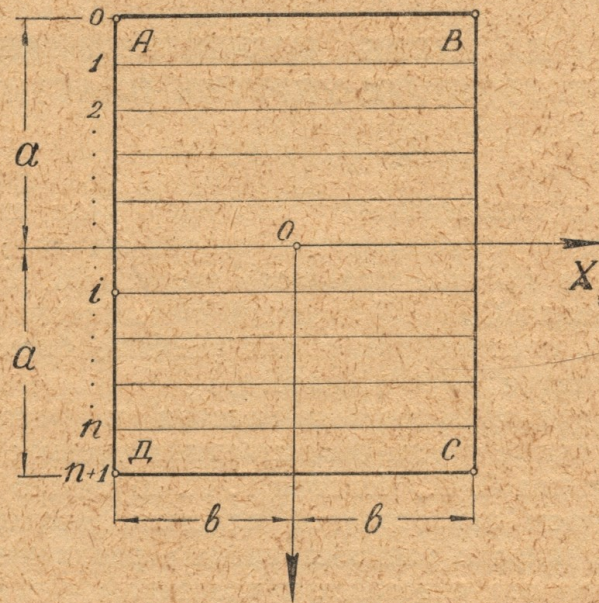


Рис. 1.

Для ортотропной пластины:

$$M_x = -D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = 2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

Дифференциальное уравнение (1.1) представим в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} &= \frac{1}{D_1} q(x, y) \pm \frac{T_1}{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm \frac{T_2}{D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= m \end{aligned} \right\}, \quad (1.2)$$

где коэффициенты  $\varepsilon$  и  $\rho$  являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 2 \frac{D_3}{D_1} z + \frac{D_2}{D_1} = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon = z_1 = \frac{1}{D_1} (D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_2 D_1}),$$

$$\rho = z_2 = \frac{1}{D_1} (D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_2 D_1}).$$

Они могут быть как действительными, так и комплексными числами, в зависимости от знака подкоренного выражения.

Возможны четыре случая:

- 1)  $D_3^2 > D_2 D_1$ ,  $-\varepsilon$  и  $\rho$  числа действительные;
- 2)  $D_3^2 = D_2 D_1$ ,  $-\varepsilon = \rho$ ;
- 3)  $D_1 = D_2 = D_3$ ,  $-\varepsilon = \rho = 1$ , т. е. имеем случай изотропной пластины;
- 4)  $D_3^2 < D_2 D_1$ ,  $-\varepsilon$  и  $\rho$  комплексные числа.

Ниже будет идти речь только о случае действительных  $\varepsilon$  и  $\rho$ .

Рассмотрим прямоугольную пластину размерами  $2a \times 2b$  (рис. 1), отнесенную к осям координат  $xoy$ , нагруженную произвольной внешней нагрузкой  $q(x, y)$ . Напряженно-деформированное состояние пластины считаем несимметричным относительно осей  $x$  и  $y$ . Параллельно оси  $x$  вводим  $n+2$  прямых с расстоянием между ними  $h = \frac{2a}{n+1}$  так, чтобы прямые 0 и  $n+1$  совпадали с гранями  $AB$  и  $CD$ .

Для рассматриваемого случая ортотропной пластины система дифференциальных уравнений дискретного метода может быть преобразована к виду (см. [6], [7]):

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V \mp \frac{T_1}{D_1} U'' \mp \frac{\alpha^2 T_2}{\varepsilon D_1} U &= \frac{1}{D_1} B \left[ Q + \frac{1}{12 + \lambda} (Q_0 + Q_{n+1}) \right] - \\ &- \frac{1}{12 + \lambda} B \left[ \psi'' + \frac{12\varepsilon}{h^2} \psi \mp \frac{T_1}{D_1} \varphi'' \mp \frac{T_2}{D_1} \frac{12}{h^2} \varphi \right] \\ U'' - \beta^2 U &= V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left[ \varphi'' + \frac{12\rho}{h^2} \varphi - \psi \right] \end{aligned} \right\}, \quad (1.3)$$

где  $-\alpha^2 = \frac{12\varepsilon\lambda}{h^2(12 + \lambda)}$ ,  $-\beta^2 = \frac{12\rho\lambda}{h^2(12 + \lambda)}$ , а  $\lambda$  — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_i = -2 \left( 1 + \cos \frac{\pi_i}{n+1} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$B$  — ортонормированное преобразование с элементами

$$b_{is} = (-1)^{i+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi_{is}}{n+1} \quad (i, s = 1, 2, \dots, n);$$

$$Q_0 = (q_0, 0, \dots, 0), \quad Q_{n+1} = (0, \dots, 0, q_{n+1}), \quad Q = (q_1, q_2, \dots, q_n);$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_{n+1}; \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_{n+1};$$

$$\psi_0 = (m_0, 0, \dots, 0), \quad \psi_{n+1} = (0, \dots, 0, m_{n+1});$$

$$\varphi_0 = (\omega_0, 0, \dots, 0), \quad \varphi_{n+1} = (0, \dots, 0, \omega_{n+1}) —$$

столбцевые матрицы;

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_n) \quad \text{и} \quad U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$$

$$\text{связаны с } M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \quad \text{и} \quad W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

посредством преобразования  $B$ :

$$V = BM, \quad U = BW.$$

Из второго дифференциального уравнения системы (1.3) следует:

$$V = U'' - \beta^2 U + \frac{1}{12 + \lambda} B \left[ \varphi'' + \frac{12\rho}{h^2} \varphi - \psi \right]. \quad (1.4)$$

Подставив (1.4) в первое дифференциальное уравнение системы (1.3), окончательно получим:

$$\begin{aligned} U^{IV} - 2\gamma^2 U'' + \gamma^4 U = & \frac{1}{D_1} B \left[ Q + \frac{1}{12 + \lambda} (Q_0 + Q_{n+1}) \right] - \\ & - \frac{1}{12 + \lambda} B \varphi^{IV} + \left( \frac{\alpha^2}{12 + \lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda} \right) B \varphi'' - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\lambda} \varphi + \frac{12}{12 + \lambda} \frac{\alpha^2}{\lambda} B \psi + \\ & + \frac{1}{12 + \lambda} B \left( \pm \frac{T_1}{D_1} \varphi'' \mp \frac{T_2}{D_1} \frac{12}{h^2} \varphi \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $-2\gamma^2 = \frac{12\lambda}{h^2(12 + \lambda)} 2 \frac{D_3}{D_1} \mp \frac{T_1}{D_1};$

$$\gamma^4 = \left[ \frac{12\lambda}{h^2(12 + \lambda)} \right]^2 \frac{D_2}{D_1} \mp \frac{T_2}{D_1}.$$

Из системы (1.5) следует ряд частных случаев:

$$1) T_1 = T_2, \quad 2) T_1 = 0, \quad 3) T_2 = 0, \quad 4) T_1 = T_2 = 0.$$

Последний случай соответствует простому изгибу ортотропной пластины.

При известных силах  $T_1$  и  $T_2$  система (1.5) соответствует задаче об изгибе упругой ортотропной пластины с учетом сил сжатия (растяжения). Если же  $T_1$  и  $T_2$  неизвестны, а  $q(x, y) = 0$  — имеем задачу устойчивости ортотропной пластины. Таким образом, дискретный метод может быть использован и при решении задачи об устойчивости ортотропной пластины.

Неизвестными системы (1.5) являются дискретные функции  $U_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Кроме того, ее правые части содержат четыре «контурные» функции:  $w_0(x)$ ,  $w_{n+1}(x)$ ,  $m_0(x)$  и  $m_{n+1}(x)$ . Последние зависят от граничных условий на гранях АВ и СД. Следовательно, вид системы (1.5) будет зависеть от граничных условий на этих гранях. Не останавливаясь на рассмотрении граничных условий на гранях АВ и СД отметим, что для ортотропной и изотропной [7] пластин «контурные» функции и условия закрепления пластины в угловых точках А, В, С и Д отличаются незначительно.

## § 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1.5)

Положим, что граничные условия на гранях АВ и СД таковы, что в систему (1.5) входят все четыре «контурные» функции. Чтобы проинтегрировать систему (1.5), представим их степенными полиномами:

$$\begin{aligned} w_0 \cong \tilde{w}_0 = \sum_{k=0}^k c_k^{(0)} x^k, \quad w_{n+1} \cong \tilde{w}_{n+1} = \sum_{k=0}^k c_k^{(n+1)} x^k, \\ m_0 \cong \tilde{m}_0 = \sum_{r=0}^r d_r^{(0)} x^r, \quad m_{n+1} \cong \tilde{m}_{n+1} = \sum_{r=0}^r d_r^{(n+1)} x^r \end{aligned}$$

с неизвестными коэффициентами:  $c_k^{(0)}$ ,  $c_k^{(n+1)}$ ,  $d_r^{(0)}$  и  $d_r^{(n+1)}$ .

Подставим полиномы  $\tilde{w}_0$ ,  $\tilde{w}_{n+1}$ ,  $\tilde{m}_0$  и  $\tilde{m}_{n+1}$  в правую часть системы (1.5) и сгруппируем все ее члены (кроме внешней нагрузки на пластину) относительно степеней  $x$ . Тогда система (1.5) компактно запишется так:

$$U^{IV} - 2\gamma^2 U'' + \gamma^4 U = \frac{1}{D_1} B \left[ Q + \frac{1}{12 + \lambda} (Q_0 + Q_{n+1}) \right] - \sum_{k=0}^k \xi_k x^k, \quad (2.1)$$

где элементы столбцов  $\xi_k$  являются линейными комбинациями коэффициентов  $c_k^{(0)}$ ,  $c_k^{(n+1)}$ ,  $d_r^{(0)}$  и  $d_r^{(n+1)}$ .

Решение (2.1) можно представить в виде:

$$\tilde{U} = U^{(0)} + \bar{U}^{(q)} - \bar{U}^{(*)}, \quad (2.2)$$

где  $U^{(0)}$  — столбец решений однородной системы;

$\bar{U}^{(q)}$  — столбец частных решений, зависящих от внешней нагрузки

$\bar{U}^{(*)}$  — столбец частных решений, зависящих от „контурных“ функций.

Характеристический полином однородного матричного дифференциального уравнения (2.1)

$$s^4 - 2\gamma^2 s^2 + \gamma^4 = 0$$

имеет корни:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - \eta^4}}, \quad s_{3,4} = \pm \sqrt{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 - \eta^4}}.$$

Обозначим

$$s_1 = \mu, \quad s_2 = -\mu,$$

$$s_3 = \vartheta, \quad s_4 = -\vartheta.$$

Тогда

$$U^{(0)} = \sum_{k=1}^4 B_k X_k, \quad (2.3)$$

где

$$X_1 = -\frac{1}{\mu^2 - \vartheta^2} [\vartheta^2 \operatorname{ch} \mu x - \mu^2 \operatorname{ch} \vartheta x],$$

$$X_2 = -\frac{1}{\mu^2 - \vartheta^2} \left[ \frac{\vartheta^2}{\mu} \operatorname{sh} \mu x - \frac{\mu^2}{\vartheta} \operatorname{sh} \vartheta x \right],$$

$$X_3 = \frac{1}{\mu^2 - \vartheta^2} [\operatorname{ch} \mu x - \operatorname{ch} \vartheta x],$$

$$X_4 = \frac{1}{\mu^2 - \vartheta^2} \left[ \frac{1}{\mu} \operatorname{sh} \mu x - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{sh} \vartheta x \right],$$

нормальные фундаментальные функции.

Последние позволяют достаточно просто учитывать самые разнообразные внешние нагрузки. В рассматриваемом случае

$$\bar{U}^{(q)} = \frac{1}{D_1} \int_0^x B \left\{ Q_0(t) + \frac{1}{12 + \lambda} [Q_0(t) + Q_{n+1}(t)] \right\} X_4(x-t) dt.$$

Частное решение  $U^{(*)}t$  может быть представлено либо в интегральной форме

$$\bar{U}^{(*)} = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^k \xi_k t^k \right) X_4(x-t) dt,$$

либо найдено способом неопределенных коэффициентов.

Получив решение дифференциального уравнения (2.1) и воспользовавшись дифференциальной зависимостью (1.4), найдем столбец функций  $V$ .

При  $T_1 = T_2 = 0$  система (1.3) приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= \frac{1}{D_1} B \left[ Q + \frac{1}{12 + \lambda} (Q_0 + Q_{n+1}) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{12 + \lambda} B \left[ \psi'' + \frac{12z}{h^2} \psi \right] \\ U''' - \beta^2 U &= V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left[ \varphi'' + \frac{12\rho}{h^2} \varphi - \psi \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

и допускает последовательное интегрирование: интегрируется первое матричное дифференциальное уравнение, в результате чего получается столбец решений  $\tilde{V}$ ; затем интегрируется второе матричное дифференциальное уравнение системы (2.4) после подстановки в него решения  $\tilde{V}$ .

### § 3. Определение постоянных интегрирования

Рассмотрим случай свободной грани АД.

На такой грани

$$M_x = 0 \text{ и } Q_x + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \left( \frac{4D_k}{D_1} + \nu_1 \right) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Из второго дифференциального уравнения системы (1,2) находим:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \left( m - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \text{ и } \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right).$$

С учетом этих выражений условия (3.1) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\nu_2}{\rho - \nu_2} m &= 0 \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{r}{\rho - r} \frac{\partial m}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где  $r = \frac{4D_k}{D_1} + \nu_1$ .

Записывая (2.3) дискретно, т. е. для каждой из точек пересечения вводимых прямых с гранью А, Д, и переходя, затем, от дискретных функций  $w_i$  и  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) к дискретным функциям  $U_i$  и  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) по формулам:

$$w_i = \sum_{s=1}^n b_{is} U_s \quad \text{и} \quad m_i = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

вместо (3. 2) получим для грани А, Д систему независимых дискретных граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} U_i'' + \frac{\nu_2}{\rho - \nu_2} V_i &= 0 \\ U_i''' + \frac{r}{\rho - r} V_i' &= 0 \end{aligned} \right\} \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

Подобным образом могут быть преобразованы любые граничные условия на гранях АД и ВС к системе независимых дискретных граничных условий. Следовательно, определение постоянных интегрирования в (2.2), при любых граничных условиях на гранях АД и ВС, может вестись отдельно, т. е. для каждого  $i$ -го решения. Поскольку система решений (2.2) отыскивается с помощью нормальных фундаментальных функций, две из четырех постоянных интегрирования для каждого  $i$ -го решения могут быть легко определены или из начальных условий, или из условий прямой (обратной) симметрии относительно оси  $y$ . Значит, определение остальных двух постоянных интегрирования будет сводиться к решению алгебраической системы с двумя неизвестными.

Решив  $n$  таких независимых систем алгебраических уравнений, в общем случае получим постоянные интегрирования  $A_1^{(i)}$ ,  $A_2^{(i)}$ ,  $A_3^{(i)}$  и  $A_4^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), линейно выраженными через внешнюю нагрузку на пластину и через коэффициенты  $c_k^{(0)}$ ,  $c_k^{(n+1)}$ ,  $d_r^{(0)}$  и  $d_r^{(n+1)}$  степенных полиномов, которыми представляются «контурные» функции. Эти коэффициенты определяются из граничных условий на гранях АВ и СД точно так же, как и в случае изотропной пластины [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Варварк П. М. и Губерман И. О. Приближенный расчет анизотропных пластинок и пластинок переменной толщины, Сб. трудов ин-та строительной механики АН УССР, № 17, 1952.
2. Гуменюк В. С. Приближенный расчет ортотропных пластинок, Сб. тр. ин-та строит. механики АН УССР, (Вопросы прочности и устойчивости строительных конструкций), № 21, 1956.
3. Курдюмов А. А. О совместной работе ребер и настила, Труды Ленинградского кораблестроительного ин-та, вып. 15, 1955.
4. Локшин А. С. К расчету пластинок, подкрепленных жесткими ребрами, ПММ, т. 2, вып. 2, 1935.
5. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, Судпромгиз, ч. 1, т. 2, 1947.
6. Петров Ю. П. Расчет на изгиб пластин с линейным изменением толщины дискретным методом, Тр. Харьковск. авиац. ин-та, вып. 18, 1961.
7. Петров Ю. П. Расчет на изгиб упругих прямоугольных пластин дискретным методом. Тр. Харьковск. авиац. ин-та, вып. 18, 1961.

8. Резницкий Л. Я. Приближенный метод расчета устойчивости перекрытий с учетом сопротивления балок кручению и влияния общего настила. Труды ВНИТОСС, т. 5, вып. 4, 1948.
  9. Sokolowski M. Dwustopniowy sposób obliczania pewnego typu płyt ortotropowych, *Rezpr. inż.*, 1954, 2, № 2, 215—230.
  10. Bogusz W. Z teorii płyt ortotropowych, *Rezpr. inż.*, 1954, 2, № 2, 193—200.
  11. Nowacki W. Beitrag zur Theorie ber orthotropen Platten, *Acta. techn. Acad. sci. hung.*, 1954, 8, № 1—2, 109—128.
  12. Trenks K. Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotropen Rechteckplatten, *Bauingenieur*, 1954, 29, № 10, 372—377.
-