ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 22 1963

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Л. Н. Борисенко

Наряду с обычными (или точечными) координатами в геометрии широко используются так называемые тангенциальные координаты. Кривая при этом рассматривается не как непрерывная совокупность образующих ее точек, а как огибающая непрерывной совокупности касающихся ее прямых. Поэтому тангенциальные координаты особенно удобны для решения тех задач, где ищутся огибающие семейства кривых или прямых. Задачи такого типа встречаются и в теории механизмов и машин. Так, например, в кулачковом механизме профиль кулачка ищется как огибающая некоторого семейства окружностей или прямых, однако тангенциальные координаты до сих пор не нашли здесь применения.

Ниже рассмотрена задача синтеза шарнирных четырехзвенных механизмов по заданным положениям прямой, неизменно связанной с шатунной плоскостью. Задача сведена к решению системы алгебраических уравнений, содержащих (в случае шарнирного черырехзвенника) 9 неизвестных параметров, определяющих размеры механизма, расположение его стойки, а также положение прямой, скрепленной с шатуном, относительно шатуна. Из этого следует, что если задать не более девяти прямых в неподвижной плоскости, то, вообще говоря, можно найти шарнирный четырехзвенник, при движении которого прямая, неизменно связанная с шатуном, совпадет с каждой из заданных прямых.

Рассматриваемая задача аналогична решенной З. Ш. Блохом задаче о синтезе шарнирного четырехзвенника (или кривошипно-шатунного механизма) по 4 положениям шатунной плоскости, каждое из которых определено прямой и точкой на этой прямой, четыре положения которой в неподвижной плоскости лежат на окружности (либо прямой) [1]. Если формулировать эту задачу как задачу синтеза по положениям прямой шатунной плоскости, то заданными являются ее 4 положения, центр вращения ведущего звена, а также его длина; прямая, скрепленная с шатуном, проходит через шарнирную точку на конце ведущего звена. Приведенное в настоящей заметке решение не требует предварительного задания параметров механизма; все 9 параметров могут быть найдены решением системы алгебраических уравнений, если она имеет действительные корни.

Для того чтобы составить эту систему уравнений, найдено уравнение линейно огибающей шатунной кривой в тангенциальных координатах. Уравнение такой кривой в точечных координатах было получено И. И. Артоболевским [2], [3]. Заметим, что применение тангенциальных координат упрощает как нахождение уравнений огибающей, так и составление системы уравнений, определяющей параметры механизма.

Синтез шарнирного четырехзвенника

Пусть дан шарнирный четырехзвенник (рис. 1), длины звеньев которого a, $в$, c, d известны; неподвижная шарнирная точка А имеет координаты x_0, y_0; углы, составляемые продольными осями звеньев с

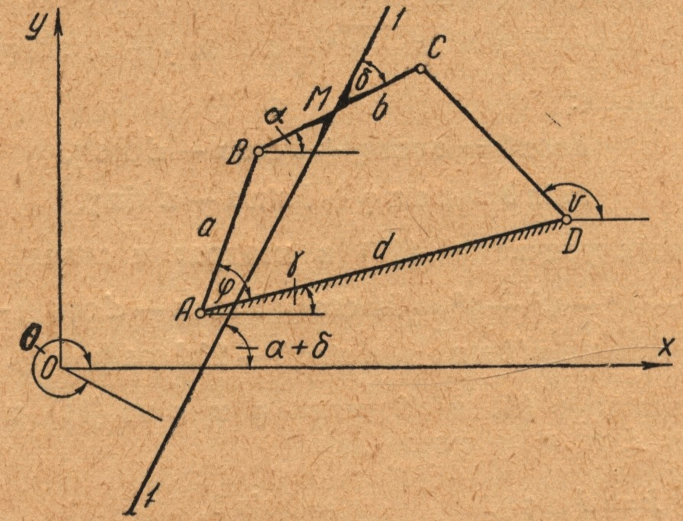

Рис. 1

осью Ox — φ, α, ϑ, γ. На расстоянии $BM = e$ от шарнирной точки B с шатуном неизменно связана прямая *1—1*, составляющая угол δ с продольной осью шатуна. Уравнение прямой *1—1* запишем в виде

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{1}$$

Найдем уравнение огибающей прямых (1)

$$\varphi(u, v) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, прямая касается кривой, если ее координаты u и v удовлетворяют уравнению (2), которое называется уравнением кривой в тангенциальных координатах (см. [4]).

Если записать уравнение прямой (1) в нормальной форме:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0, \tag{3}$$

где Θ — угол, образованный осью Ox с перпендикуляром к касательной, опущенным из начала координат, p — длина этого перпендикуляра, то, сравнивая (1) и (3), получим:

$$\sin\theta = -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \cos\theta = -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}. \tag{4}$$

Как видно из рис. 1, угол, составляемый прямой 1—1 с осью Ox, равен $\alpha + \delta = \theta - 270°$.

Из (4) получим:

$$\sin(\alpha+\delta) = -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \cos(\alpha+\delta) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}. \tag{5}$$

Отсюда

$$\sin\alpha = -\frac{n\cos\delta + v\sin\delta}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{v\cos\delta - u\sin\delta}{\sqrt{u^2+v^2}}. \tag{6}$$

Координаты точки M равны:

$$x_м = x_0 + a\cos\varphi + e\cos\alpha,$$
$$y_м = y_0 + a\sin\varphi + e\sin\alpha, \tag{7}$$

и удовлетворяют уравнению (1):

$$u(x_0 + a\cos\varphi + e\cos\alpha) + v(y_0 + a\sin\varphi + e\sin\alpha) + 1 = 0. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (8), получим:

$$1 + ux_0 + vy_0 - e\sin\delta\sqrt{u^2+v^2} + au\cos\varphi + av\sin\varphi = 0 \tag{9}$$

Из рис. 1 имеем:

$$c\cos\vartheta = a\cos\varphi + b\cos\alpha - d\cos\gamma,$$
$$c\sin\vartheta = a\sin\varphi + b\sin\alpha - d\sin\gamma. \tag{10}$$

Возводя обе части уравнений (10) в квадрат и складывая, получим:

$$c^2 - a^2 - b^2 - d^2 = 2a\cos\varphi(b\cos\alpha - d\cos\gamma) +$$
$$+ 2a\sin\varphi(b\sin\alpha - d\sin\gamma) - 2bd\cos(\alpha - \gamma). \tag{11}$$

Исключая с помощью (6) и (9) углы φ и α из (11) и вводя новые параметры k, m l, r, s по формулам

$$k = d\cos\gamma, \qquad r = b\sin\delta,$$
$$m = d\sin\gamma, \qquad s = b\cos\delta,$$
$$l = e\sin\delta, \qquad A = c^2 - a^2 - b^2 - d^2, \tag{12}$$

получаем:

$$U\sqrt{u^2+v^2} = 4W, \tag{13}$$

где

$$U = (u^2+v^2)[A^2 - 4a^2s^2 + 4l^2(r^2+s^2+k^2+m^2) + 4Alr] + 4\,1 + ux_0 +$$
$$+ vy_0)^2(r^2+s^2+k^2+m^2) + 4[v(ks-mr) - u(ms+kr)]^2 - 4A(1+ux_0+$$
$$+ vy_0)(uk+vm) - 4a^2(vk-um)^2 + 8[v(ks-mr) - u(ms+$$
$$+ kr)][(2l-r)(1+ux_0+vy_0) + l(uk+vm)], \tag{14}$$

$$W = (u^2+v^2)\{l[2(1+ux_0+vy_0)(k^2+m^2+r^2+s^2) - A(uk+vm)] +$$
$$+ Ar(1+ux_0+vy_0) - 2a^2s(k-um)\} - [v(ks-mr) - u(ms+kr][(u^2+$$
$$+ v^2)(A+2lr-2l^2) - 2(1+ux_0+vy_0)(1+ux_0+vy_0+uk+vm)].$$

Итак, уравнение огибающей подвижной шатунной прямой в тангенциальных координатах имеет вид:

$$\varphi(u, v) = (u^2+v^2),\ U^2 - 16W^2 = 0.$$

Так как наибольшая сумма показателей при u и v равна шести и φ (u, v) — алгебраическая функция, то огибающая является алгебраической кривой 6 класса.

Точку касания прямой шатунной плоскости с огибающей легко найти из простых кинематических соображений: скорость этой точки, очевидно, должна быть направлена вдоль прямой $I—I$. Таким образом, точка касания является проекцией мгновенного центра вращения шатуна в данном положении на прямую $I—I$.

Уравнение огибающей содержит 9 параметров:

$$k,\ m,\ l,\ s,\ r,\ a,\ A,\ x_0,\ y_0. \tag{15}$$

Пусть в неподвижной плоскости имеется 9 прямых, каждая из которых задана парой величин u и v. Подставляя в (13) пары значений

$u_1, v_1, u_2\ v_2, \ldots, u_9, v_9$, получим систему 9 алгебраических уравнений с 9 неизвестными параметрами (15):

$$U_i\sqrt{u_i^2+v_i^2}=4W_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 9. \tag{16}$$

Решение системы (16) определяет размеры и расположение шарнирного четырехзвенника, шатунная прямая которого проходит через 9 заданных в неподвижной плоскости положений.

Уменьшение числа заданных в неподвижной плоскости прямых позволяет часть параметров (15) задать наперед. Очевидно, система (16) при этом упрощается. Рассмотрим следующие частные случаи.

а) Задано 8 прямых. Пусть расстояние $BM=e=0$; так как $l=e\sin\delta$, то, подставив (14) $l=0$, получим следующие формулы для вычисления U и W в (16):

$$U=(u^2+v^2)(A^2-4a^2s^2)+4\,(1+ux_0+vy_0)^2(r^2+s^2+k^2+m^2)+$$
$$+4\,[v\,(ks-mr)-u\,(ms+kr)]^2-4A\,(1+ux_0+vy_0)\,(uk+vm)-$$
$$-4a^2\,(vk-un)^2-8r\,[v\,(ks-mr)-u\,(ms+kr)]\,(1+ux_0+vy_0), \tag{17}$$
$$W=(u^2+v^2)\,[Ar\,(1+ux_0+vy_0)-2a^2s\,(vk-um)]-[v\,(ks-mr)-$$
$$-u\,(ms+kr)][A\,(u^2+v^2)-2\,(1+ux_0+vy_0)(1+ux_0+vz_0+uk+vm)].$$

б) Если задать направление продольной оси стойки $\gamma=0$ и положение неподвижной шарнирной точки A, $x_0=y_0=0$, т. е. уменьшить число задаваемых прямых (и определяемых параметров) до шести, то из (17) получим при $x_0=y_0=m=0$, $к=d$:

$$U=(u^2+v^2)\,[A^2-4a^2s^2+4l^2\,(r^2+s^2+d^2)+4\,Alr]+4\,(r^2+s^2+d^2)+$$
$$+4d^2\,(vs-ur)^2-4Adu-4a^2d^2v^2+8d\,(vs-ur)(2l-r+lud), \tag{18}$$
$$W=(u^2+v^2)\,\{\,l\,[2\,(r^2+s^2+d^2)-Aud\,]+Ar-2a^2sdv\,\}-$$
$$-d\,(vs-ur)\,(u^2+v^2)\,(A+2lr-2l^2)-2\,(1+ud)]^*.$$

в) При пяти заданных прямых, кроме направления продольной оси стойки $\gamma=0$, зададим также расстояние $BM=0$ и положение шарнирной точки A $(x_0=y_0=0)$, т. е. подставим в (18) $l=0$:

$$U=(u^2+v^2)(A^2-4a^2s^2)+4\,(r^2+s^2+d^2)+4d^2\,(vs-ur)^2-4Adu-$$
$$-4a^2d^2v^2-8rd\,(vs-ur), \tag{19}$$
$$W=(u^2+v^2)(Ar-2a^2dsv)-d\,(vs-ur)\,[A\,(u^2+v^2)-2\,(1+ud)].$$

г) Особенно простой вид имеет уравнение огибающей положений продольной оси шатуна $(\delta=0)$, если заданы также положение шарнирной точки A $(x_0=y_0=0)$ и направление продольной оси стойки $\gamma=0$; при этом число задаваемых в неподвижной плоскости прямых равно четырем.

Так как $\delta=0$, то $s=b$, $r=0$ и из (19) получаем U и W в (16).

$$U=(u^2+v^2)\,(A^2-4a^2b^2)+4\,(b^2+d^2)+4d^2v^2(b^2-a^2)-4Aud,$$
$$W=-bdv\,[u^2+v^2)\,(A+2a^2)-2\,(1+ud)]. \tag{20}$$

Этот случай также рассмотрен в [2].

---

* Уравнение огибающей шатунной кривой в точечных координатах с соответствующими рассмотренному случаю параметрами впервые получено И. И. Артоболевским [2].

Синтез кривошипно-шатунного механизма

Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (рис. 2), размеры которого *a, в, h* известны, а также задано положение неподвижной шарнирной точки A (x_0, y_0) и угол наклона γ направляющей ползуна к оси Ox. Пусть на расстоянии $BM=e$ от шарнирной точки B с шатуном неизменно скреплена прямая $1-1$ под углом δ к продольной оси шатуна. Обозначив через φ и α углы, составляемые продольными

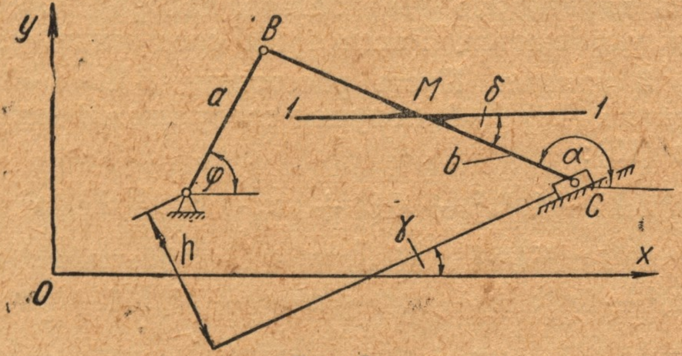

Рис. 2

осями соответственно кривошипа и шатуна с осью Ox, из рис. 2 получим:

$$a \sin(\varphi-\gamma)+h=b \sin(\alpha-\gamma). \tag{21}$$

Так как координаты точки M (7) и уравнение прямой $1-1$ (1) имеют тот же вид, что и в случае шарнирного четырехзвенника, то справедливо равенство (9). Исключая углы φ и α из (21) при помощи (6) и (9) и вводя новые параметры по формулам

$$r=b \sin\delta, \quad s=b\cos\delta, \quad l=e\sin\delta,$$

получим после некоторых преобразований: (22)

$$U\sqrt{u^2+v^2}=2W,$$

где

$$U=(u^2+v^2)(h^2+l^2)+[u(s\cos\gamma-r\sin\gamma)+v(r\cos\gamma+s\sin\gamma)]^2+$$
$$+(1+ux_0+vy_0)^2+2l(v\cos\gamma-u\sin\gamma)[u(s\cos\gamma-r\sin\gamma)+v(r\cos\gamma+s\sin\gamma)]-$$
$$-2h(1+ux_0+vy_0)(v\cos\gamma-u\sin\gamma)-a^2(u\cos\gamma+v\sin\gamma)^2, \tag{23}$$
$$W=(u^2+v^2)l[(1+ux_0+vy)-h(v\cos\gamma-u\sin\gamma)]+[u(s\cos\gamma-r\sin\gamma)+$$
$$+v(r\cos\gamma+s\sin\gamma)][(1+ux_0+vy_0)(v\cos\gamma-u\sin\gamma)-h(u^2+v^2)].$$

Итак, уравнение огибающей подвижной прямой шатунной плоскости кривошипно-шатунного механизма имеет вид:

$$(u^2+v^2)U^2=4W^2, \tag{24}$$

где U и W находятся по формулам (23). Огибающая является алгебраической кривой 6 класса.

Как в случае шарнирного четырехзвенника, точка касания прямой шатунной плоскости с огибающей (24) является проекцией мгновенного центра вращения шатуна в данном положении на эту прямую. К этому же результату прийдем, определяя положение точки касания аналитически.

Уравнение (24) содержит 8 параметров: h, a, r, s, x_0, y_0, γ, l, определяющих размеры и расположение механизма. Задавая в неподвижной плоскости 8 прямых, каждая из которых определена парой величин u и v, и подставляя эти величины в (22) и (23), получим систему уравнений:

$$U_i\sqrt{u_i^2+v_i^2}=2W_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ 8. \tag{25}$$

Если параметры механизма удовлетворяют (25), то прямая шатунной плоскости при движении кривошипно-шатунного механизма совместится с каждой из заданных прямых.

Приведем формулы для вычисления U и W в уравнении огибающей (24) и системе (25), если число заданных в неподвижной плоскости прямых, а, следовательно, и параметров, уменьшить.

а) Зададим направление движения ползуна C, т. е., положив в (23) $\gamma=0$, уменьшим число неизвестных параметров (и задаваемых прямых) до семи. Тогда из (23), при $\gamma=0$, имеем:

$$U=u^2(h^2+l^2-a^2)+(lv+us+vr)^2+(1+ux_0+vy_0-vh)^2,$$

$$W=l(u^2+v^2)(1+ux_0+vy_0-vh)+(us+vr)[(1+ux_0+vy_0)v-h(u^2+v^2)]. \tag{26}$$

б) Задавая, кроме $\gamma=0$, положение неподвижной шарнирной точки A $(x_0=y_0=0)$, т. е. уменьшая число параметров до пяти, получим из (26):

$$U=u^2(h^2+l^2-a^2)+(lv+us+vr)^2+(1-vh)^2,$$

$$W=l(u^2+v^2)(1-vh)+(us+vr)[v-h(u^2+v^2)]. \tag{27}$$

в) Уравнение огибающей положений продольной оси шатуна, если задано положение неподвижной шарнирной точки A и направление движения ползуна C, получим, подставляя в (24) следующие значения U и W: (из (27) при $\delta=0$, т. е. $l=0$, $r=0$, $s=в$):

$$U=u^2(h^2+b^2-a^2)+(1-vh)^2,\quad W=bu[v-h(u^2+v^2)]. \tag{28}$$

г) В заключение найдем U и W для центрального кривошипно-шатунного механизма, если задано положение неподвижной шарнирной точки A $(x_0=y_0=0)$ и направление движения ползуна C $(\gamma=0)$; прямая 1—1 проходит через шарнирную точку B $(l=0)$, что соответствует случаю, рассмотренному И. И. Артоболевским [3].

Из (27) имеем:

$$U=1-a^2u^2+(us+vr)^2,\quad W=v(us+vr). \tag{29}$$

Уравнение огибающей продольной оси шатуна в этом случае получим, подставив в (29) $r=0$, $s=в$:

$$(v^2+u^2)[1-u^2(a^2+b^2)]^2=4u^2v^2b^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболевский, З. Ш. Блох, В. В. Добровольский. Синтез механизмов, ГТТИ, 1944.

2. И. И. Артоболевский. Об одном классе шатунных кривых, ДАН, т. 132, 1960, № 1.

3. И. И. Артоболевский. Линейно огибающие шатунные кривые механизмов с поступательной парой, ДАН, т. 139, 1961, № 5.

4. Я. Л. Геронимус. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов, Физматгиз, М., 1962.