

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ НА ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГАЙКИ

В. М. Рыдченко

Расчетное определение податливости промежуточных деталей резьбового соединения требует знания закона и зоны распределения давления по опорному торцу гайки и головки болта. Во всех известных решениях задачи по определению податливости соединяемых деталей давление принимается равномерно распределенным по всей площади основания гайки (головки болта), включая и площадь отверстия (И. А. Биргер, Е. Б. Виткуп), или же по кольцу, внутренний диаметр которого равен диаметру отверстия под болт (Д. Ю. Айзенберг и Г. С. Шапиро). В одной из работ Е. Б. Виткуп [1] отмечает, что распределение давления по опорной площади гайки неравномерно. Максимальное давление имеет место на контуре отверстия сжимаемой детали, и поэтому закономерно считать давление распределенным по закону треугольника по всей кольцевой площади торца гайки. Опытное или расчетное обоснование такого утверждения не приводится.

Целью настоящего теоретического исследования является определение размера действительной контактной площади и характера распределения давления по опорной поверхности гайки для случая, когда детали стянуты болтом.

Рассматривается упругое равновесие полубесконечного изотропного цилиндра, ограниченного коаксиальными круговыми цилиндрическими поверхностями радиусов a и b и плоскостью $z=0$; ось z совпадает с осью цилиндра. На боковой поверхности отверстия действуют касательные напряжения $\tau(z)$, возрастающие с увеличением z по закону гиперболического косинуса (рис. 1). Такое распределение $\tau(z)$ имеет место на боковой поверхности тела гайки (болта) в идеальном резьбовом соединении типа болт-гайка [2]. Определяются напряжения σ_z по горизонтальному сечению $z=H_1$, где H_1 — величина, соответствующая высоте гайки.

В случае осесимметричной деформации напряжения можно выразить через две бигармонические функции Б. Г. Галеркина [3] φ и ψ :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + 2(1-\mu) \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{2\varphi}{r^3} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \\ \sigma_z &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi, \\ \tau_{rz} &= -\frac{\partial}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + (1-\mu) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 \varphi - \frac{\varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi \right],\end{aligned}\tag{1}$$

$$\text{где } \varphi = [FmrI_0(mr) + EI_1(mr) + HmrY_0(mr) + \gamma Y_1(mr)] \cdot \text{sh } mz, \quad (2)$$

$$\psi = [-AI_0(\gamma r) - B\gamma r I_1(\gamma r) + CK_0(\gamma r) + D\gamma r K_1(\gamma r)] \cdot \cos \gamma z. \quad (3)$$

Закон распределения касательных напряжений по боковой поверхности отверстия выражается следующим образом:

$$\tau(z) = \frac{1}{2\pi b} \cdot \frac{Qm}{\text{sh } mH_1} \cdot \text{ch } mz. \quad (4)$$

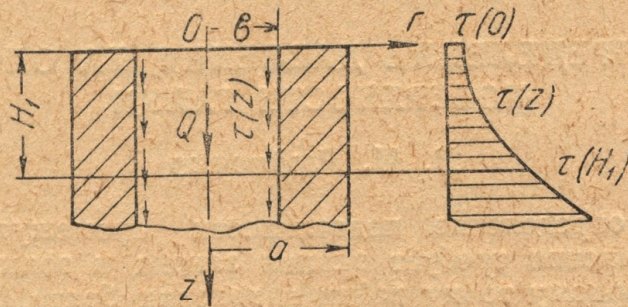


Рис. 1

В приведенных выражениях μ — коэффициент Пуассона, J_0, J_1 — функции Бесселя 1-го рода, Y_0, Y_1 — функции Бесселя 2-го рода, I_0, I_1 — модифицированные бesselовы функции 1-го рода, K_0, K_1 — модифицированные бesselовы функции 2-го рода, γ — произвольный параметр, Q — осевая нагрузка на витки резьбы, m — коэффициент, зависящий от материалов болта и гайки, геометрических параметров нарезки и всего соединения.

Подставив (2) и (3) в (1), получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r = m^3 \text{sh } mz \left\{ F \left[(1-2\mu) \left(2 \frac{J_1(mr)}{mr} - J_0(mr) \right) - mr J_1(mr) \right] + E \left[J_0(mr) - \frac{I_1(mr)}{mr} \right] + H \left[(1-2\mu) \left(2 \frac{Y_1(mr)}{mr} - Y_0(mr) \right) - mr Y_1(mr) \right] + G \left[Y_0(mr) - \frac{Y_1(mr)}{mr} \right] \right\} + \gamma^3 \sin \gamma z \left\{ -A \left[I_0(\gamma r) - \frac{I_1(\gamma r)}{\gamma r} \right] - B [(1-2\mu) I_0(\gamma r) + \gamma r I_1(\gamma r)] + C \left[K_0(\gamma r) + \frac{K_1(\gamma r)}{\gamma r} \right] - D [(1-2\mu) K_0(\gamma r) - \gamma r K_1(\gamma r)] \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = m^3 \text{sh } mz \{ F [mr J_1(mr) - 2(1+\mu) J_0(mr)] - EI_0(mr) + H [mr Y_1(mr) - 2(1+\mu) Y_0(mr)] - G Y_0(mr) \} - \gamma^3 \sin \gamma z \{ -AI_0(\gamma r) - B [2(2-\mu) I_0(\gamma r) + \gamma r I_1(\gamma r)] + CK_0(\gamma r) - D [2(2-\mu) K_0(\gamma r) - \gamma r K_1(\gamma r)] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = m^3 \text{ch } mz \{ F [mr J_0(mr) + 2\mu J_1(mr)] + EJ_1(mr) + H [mr Y_0(mr) + 2\mu Y_1(mr)] + G Y_1(mr) \} + \gamma^3 \cos \gamma z \{ -AI_1(\gamma r) - B [2(1-\mu) I_1(\gamma r) + \gamma r I_0(\gamma r)] - CK_1(\gamma r) + D [2(1-\mu) K_1(\gamma r) - \gamma r K_0(\gamma r)] \}. \end{aligned}$$

Потребуем удовлетворения следующих граничных условий на боковых поверхностях цилиндра:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_r = 0 \text{ и } \tau_{rz} = 0 \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r = 0 \text{ и } \tau_{rz} = \tau(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, подставив (5) в (6), получим две самостоятельные системы уравнений относительно F, E, H, G и A, B, C, D .

Из первой системы уравнений:

$$F \left[(1 - 2\mu) \left(2 \frac{J_1(ma)}{ma} - J_0(ma) \right) - maJ_1(ma) \right] + E \left[J_0(ma) - \frac{J_1(ma)}{ma} \right] + \\ + H \left[(1 - 2\mu) \left(2 \frac{Y_1(ma)}{ma} - Y_0(ma) \right) - maY_1(ma) \right] + \\ + G \left[Y_0(ma) - \frac{Y_1(ma)}{ma} \right] = 0, \\ F [maJ_0(ma) + 2\mu J_1(ma)] + EJ_1(ma) + H [maY_0(ma) + 2\mu Y_1(ma)] + \\ + GY_1(ma) = 0. \quad (7)$$

$$F \left[(1 - 2\mu) \left(2 \frac{J_1(mb)}{mb} - J_0(mb) \right) - mbJ_1(mb) \right] + E \left[J_0(mb) - \frac{J_1(mb)}{mb} \right] + \\ + H \left[(1 - 2\mu) \left(2 \frac{Y_1(mb)}{mb} - Y_0(mb) \right) - mbY_1(mb) \right] + G \left[Y_0(mb) - \frac{Y_1(mb)}{mb} \right] = 0, \\ F [mbJ_0(mb) + 2\mu J_1(mb)] + EJ_1(mb) + H [mbY_0(mb) + 2\mu Y_1(mb)] + \\ + GY_1(mb) = \frac{1}{2\pi b} \cdot \frac{Qm}{\text{sh } mH_1} \cdot \text{ch } mz.$$

Определяем постоянные F, E, H, G

$$F = \frac{\Delta_F}{\Delta}, \quad E = \frac{\Delta_E}{\Delta}, \quad H = \frac{\Delta_H}{\Delta}, \quad G = \frac{\Delta_G}{\Delta}, \quad (8)$$

где Δ — определитель системы; $\Delta_F, \Delta_E, \Delta_H, \Delta_G$ — дополнительные определители.

Вторая система уравнений после введения безразмерных координат $\rho = r/R$ и $\zeta = z/R$ (что диктуется удобством дальнейших преобразований) имеет следующий вид:

$$A \left[I_0(\alpha) - \frac{I_1(\alpha)}{\alpha} \right] + B [(1 - 2\mu)I_0(\alpha) + \alpha I_1(\alpha)] - C \left[K_0(\alpha) + \frac{K_1(\alpha)}{\alpha} \right] + \\ + D [(1 - 2\mu)K_0(\alpha) - \alpha K_1(\alpha)] = 0, \\ AI_1(\alpha) + B [2(1 - \mu)I_1(\alpha) + \alpha I_0(\alpha)] + CK_1(\alpha) - D [2(1 - \mu)K_1(\alpha) - \\ - \alpha K_0(\alpha)] = 0, \quad (9)$$

$$A \left[I_0(\beta) - \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right] + B [(1 - 2\mu)I_0(\beta) + \beta I_1(\beta)] - C \left[K_0(\beta) + \frac{K_1(\beta)}{\beta} \right] + \\ + D [(1 - 2\mu)K_0(\beta) - \beta K_1(\beta)] = 0,$$

$$AI_1(\beta) + B [2(1 - \mu)I_1(\beta) + \beta I_0(\beta)] + CK_1(\beta) - D [2(1 - \mu)K_1(\beta) - \beta K_0(\beta)] = 0.$$

Здесь $R = 1/2 (a + b)$ — средний радиус цилиндра;

$$1 - \lambda \leq \rho \leq 1 + \lambda \quad \text{или} \quad \rho = 1 + \lambda \eta \quad (-1 \leq \eta \leq 1);$$

$$0 \leq \zeta \leq \varepsilon \quad (\varepsilon = H/R);$$

$\lambda = \frac{a-b}{a+b}$ — половина относительной толщины стенки цилиндра;
 $\alpha = \delta(1+\lambda), \quad \beta = \delta(1-\lambda);$

$\delta = \gamma \cdot R$ — новое выражение произвольного параметра.

Используя приближенное решение В. К. Прокопова для осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра [4], из системы уравнений (9) получаем биквадратное уравнение для определения параметра δ :

$$\delta^4 + 4(1-\mu)\delta^2 + \frac{3(1-\mu^2)}{\lambda^2} = 0. \quad (10)$$

При $\mu = 0,3$ $\lambda < 0,907841$. Для данного случая все корни уравнения (10) комплексные. Полагая $\delta_k = \pm p \pm if$ ($k = 1, 2, 3, 4$), получим:

$$p = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{2}{3} \omega^2 \lambda\right), \quad f = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{2}{3} \omega^2 \lambda\right), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{3}{4}(1-\mu^2)} \quad (11)$$

Переход к вещественным выражениям дает окончательные формулы напряжений для нашего случая:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{m^3 \operatorname{sh} mz}{\Delta} \left\{ [2(1-2\mu)\Delta_F - \Delta_E] \frac{J_1(mr)}{mr} - [(1-2\mu)\Delta_F - \Delta_E] J_0(mr) - \right. \\ & - \Delta_F \cdot mr J_1(mr) + [2(1-\mu)\Delta_H - \Delta_G] \frac{Y_1(mr)}{mr} - [(1-2\mu)\Delta_H - \Delta_G] Y_0(mr) - \\ & \left. - \Delta_H mr Y_1(mr) \right\} + (Cr_1 + Dr_2) \sin p\zeta \cdot \operatorname{ch} f\zeta + (Dr_1 - Cr_2) \cos p\zeta \cdot \operatorname{sh} f\zeta, \\ \sigma_z = & \frac{m^3 \operatorname{sh} mz}{\Delta} \left\{ \Delta_F mr J_1(mr) - [2(1+\mu)\Delta_F + \Delta_E] J_0(mr) + \Delta_H mr Y_1(mr) - \right. \\ & \left. - [2(1+\mu)\Delta_H + \Delta_G] Y_0(mr) \right\} + (Cz_1 + Dz_2) \sin p\zeta \operatorname{ch} f\zeta + \\ & + (Dz_1 - Cz_2) \cos p\zeta \cdot \operatorname{sh} f\zeta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & \frac{m^3 \operatorname{ch} mz}{\Delta} \left\{ \Delta_F mr J_0(mr) + (2\mu\Delta_F + \Delta_E) J_1(mr) + \Delta_H mr Y_0(mr) + \right. \\ & \left. + (2\mu\Delta_H + \Delta_G) Y_1(mr) \right\} + \sqrt{\lambda} \left\{ (Dt_2 - Ct_1) \cos p\zeta \cdot \operatorname{ch} f\zeta + \right. \\ & \left. + (Dt_1 + Ct_2) \sin p\zeta \cdot \operatorname{sh} f\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$r_1 = -\lambda\eta(1-\eta^2), \quad r_2 = -2\omega^2 \frac{\lambda\mu}{1-\mu^2} (1-\eta^2);$$

$$z_1 = -2\lambda\eta(1+\eta^2), \quad z_2 = -\frac{2\omega^2}{1-\mu^2} \left\{ \frac{2-\mu}{3} \lambda - 2[1+(1-\mu)\lambda]\eta - \mu\lambda\eta^2 \right\};$$

$$t_1 = \frac{1}{2\omega} \left(1 - \frac{2}{3} \omega^2 \lambda\right) (1-\eta^2) \{3 + \lambda[3(1-\mu) - (1+\mu)\eta]\},$$

$$t_2 = \frac{1}{2\omega} \left(1 + \frac{2}{3} \omega^2 \lambda\right) (1-\eta^2) \{3 + \lambda[3(1-\mu) - (1+\mu)\eta]\}.$$

Постоянные C и D , входящие в выражения (12), определяем из граничных условий на торцах. Требуем, чтобы отсутствовали касательные усилия на торце цилиндра:

$$z=0 \int_0^b \tau_{rz} dr = 0 \quad (13)$$

и осевое усилие в сечении $z=H_1$ было равно и обратно по знаку осевой нагрузке:

$$z=H_1 \quad 2\pi \int_0^b \sigma_z r dr = -Q. \quad (14)$$

Последнее условие вызвано тем, что приближенное решение В. К. Прокопова дает дополнительную продольную силу, величина которой в некоторых случаях достигает 14% от действующей осевой нагрузки.

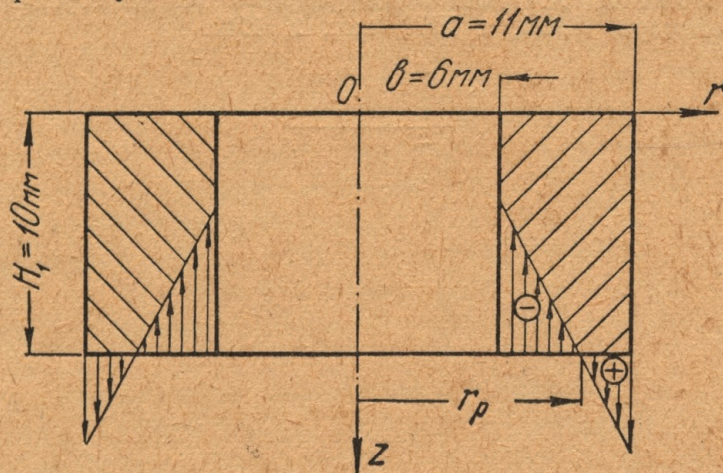


Рис. 2.

На верхнем торце цилиндра остаются касательные напряжения, которые, благодаря условию (13), приводятся к уравновешенной системе сил. Эти напряжения имеют лишь местное значение, и область влияния их, согласно принципу Сен-Венан, невелика.

Нами выполнено числовое определение σ_z на торце $z=H_1$ для шестигранной гайки М12, имеющей следующие геометрические параметры: высоту $H_1=10$ мм, диаметр эквивалентной по площади круглой гайки $a=22$ мм, диаметр отверстия $b=12$ мм, шаг резьбы $S=1,75$ мм. Подсчитанный для нее по формуле И. А. Биргера [2] коэффициент $m=0,221$.

На рис. 2 показана эпюра напряжений σ_z на торце $z=H_1$. В табл. 1 приведены значения напряжений, вычисленные для различных радиусов.

Таблица 1

Радиус, мм	6	7	8	9	10	11
Напряжение, усилие/см ²	-4,56Q	-3,24Q	-1,62Q	+0,10Q	+1,71Q	+3,00Q

(+) — растягивающие напряжения,
 (-) — сжимающие напряжения.

Из рис. 2. видно, что сжимающие напряжения распределены не по всей площади основания гайки. При $r > r_p \approx$ имеют место растягиваю-

щие напряжения. Поскольку гайка не представляет одно целое с деталью, на которую она опирается торцом, то при $r > r_p \approx 9$ мм происходит раскрытие стыка (образуется зазор между торцом гайки и деталью), заметно уменьшающее опорную площадь гайки. Кроме того, давление по действительной контактной поверхности распределено неравномерно. Большие его значения расположены у контура отверстия, что отмечено ранее Е. Б. Виткупом. Эти факторы сужают область упругих деформаций материала стянутых деталей и повышают их податливость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виткуп Е. Б. Упругие деформации в напряженных разъемных соединениях, «Вестник машиностроения», 1961, № 5.
2. Биргер И. А. Расчет резьбовых соединений, Оборонгиз, 1959.
3. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, 1952.
4. Прокопов В. К. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра, ПММ, т. XIII, вып. 2, 1949.