МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

75-річчю ХАІ присвячується

Ю.К. Чернишов, Г.М. Жолткевич,
В.О. Халтурін, О.В. Ярова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2004

УДК 681.3.06 + 519.6

Теорія ймовірностей. Приклади розв'язання задач/ Ю.К. Чернишов, Г.М. Жолткевич, В.О. Халтурін, О.В. Ярова. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2004. - 154 с.

Посібник складено на базі лекцій з теорії ймовірностей. Він висвітлює головні питання з даного курсу, які мають місце при розв'язанні практичних задач, пов'язаних з автоматичним керуванням, обробкою експериментальних даних, установленням їх точності. Основну увагу приділено розв'язанню прикладів. У кожному підрозділі подано коротку довідкову інформацію та розглянуто велику кількість прикладів.

Для студентів II і III курсів університету.

Іл. 83. Бібліогр.: 6 назв

Р е ц е н з е н т и : д-р техн. наук, проф. В.О. Краснобаєв,
канд. фіз.-мат. наук, доц. І.Т. Зарецька

1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Алгебра подій

Теорія ймовірностей тісно пов’язана з логікою. Логіка оперує висловами та зв’язками між ними. Основне положення логіки – правило “виключеного третього”: кожний вислів може бути або вірним, або невірним.

Системи зв’язку між висловами можуть бути введені різними способами. Найпоширенішою є система зв’язків, які відповідають сполучникам “і”, “або”, “ні”.

Сумою, або диз’юнкцією двох висловів *A* та *B* є вислів *C*, вірний у тому разі, якщо вірним є вислів *A*, або *B*, або обидва вислови *A* і *B* одночасно. Позначення: $C = A + B$, $C = A \bigcup B$.

Добутком, або кон’юнкцією двох висловів є вислів, вірний лише тоді, коли вірними є обидва вислови *A* і *B* одночасно. Позначення: $C = A \cdot B$, $C = A \bigcap B$.

Запереченням вислову A є вислів, вірний тоді, коли невірним є вислів *A*. Позначення: $\neg A$, $\overline{A}$.

Впровадження операцій додавання, добутку та заперечення (яке можна трактувати як аналог віднімання) на множині висловів означає, що на цій множині введено алгебру; у даному разі – алгебру логіки.

Розглянемо деякий експеримент, який може привести до того чи іншого наслідку або тієї чи іншої події. З кожною подією можна зіставити деякий вислів, який описує цю подію. На множині подій автоматично виникає алгебра, яка є аналогічною до алгебри логіки.

Серед подій можна відокремити “елементарні події”. Вони відповідають поняттю точки в геометрії. В геометрії поняття точки не має визначення; для елементарної події також не має визначення. Однак на практиці це не заважає приписати елементарним подіям деякий імовірнісний зміст (як і в геометрії, наприклад, знаходять точку перетину ліній). До елементарних подій належить “неможлива подія”. Її позначення – $\varnothing$.

Всі можливі наслідки ймовірнісного експерименту утворюють подію, яка має назву “незаперечної події”. Позначення для неї – $\dot{I}$ (аналог одиниці). Всі інші наслідки цього експерименту належать до $\dot{I}$, точніше, має місце такий логічний зв’язок: $A \to \dot{I}$, якщо *A* – якась із подій; тобто якщо вірним є вислів $\{A\}$, який описує подію *A*, то вірним є вислів: {подія *A* є однією з усіх можливих за умов експерименту, що розглядається}. Якщо подію $\dot{I}$ відобразити як прямокутник, то будь-яка подія *A* відобразиться у вигляді множини точок, які належать до цього прямокутника.

Діаграми такого вигляду мають назву діаграм Венна (рис. 1.1):

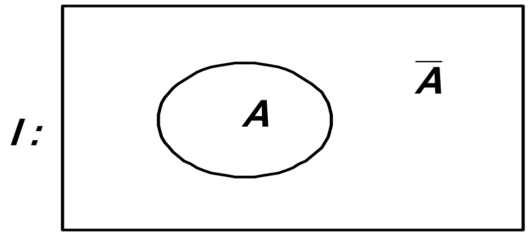
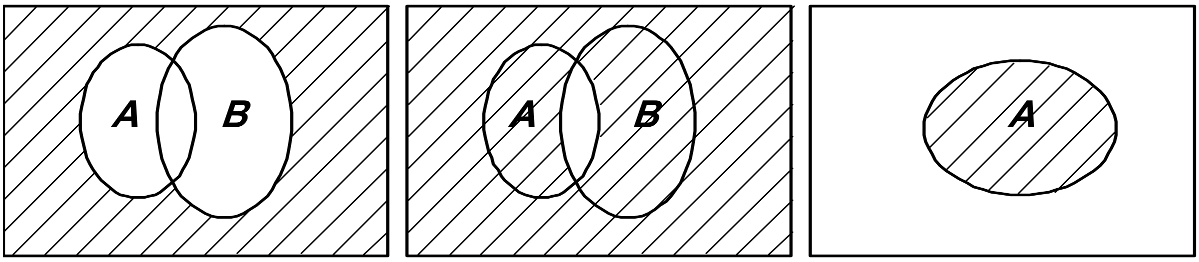


Рис. 1.1

Таким чином, ймовірнісні події утворюють системи підмножин деякої абстрактної множини. На рис. 1.2 зображені операції над подіями.



$A+B$ $\qquad$ $A \cdot B$ $\qquad$ $\overline{A}$

Рис. 1.2

Якщо подія A має місцє, то подія B не може відбутися, і навпаки. Такі події мають назву несумісних: {A і B несумісні} $\Leftrightarrow$ $A \cdot B = \varnothing$. Діаграма Венна для несумісних подій показана на рис. 1.3.

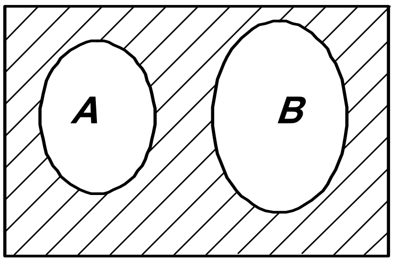


Рис. 1.3

Наприклад, несумісні події: {кількість очок на гральній кості парна} та {кількість очок непарна}. Несумісними також є всі елементарні події.

Припустимо, що відносно подій A та B відомим є таке: якщо відбулася подія A, то відбулася і подія B: $A \to B$. Наприклад, подія {кількість очок є парною} має місце, якщо вірною є подія {випало два очки}. Відносно такого зв'язку кажуть, що подія B є наслідком події A. На діаграмі Венна це відповідає операції включення $A \subset B$ (рис. 1.4).

За допомогою діаграм Венна можна встановити такі факти: $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – правила Де-Моргана; $A + \overline{A} = \dot{I}$; $\overline{\varnothing} = \dot{I}$; $\overline{\dot{I}} = \varnothing$; $A \cdot \dot{I} = A$; $A + \varnothing = A$; $A = A \cdot \overline{B} + A \cdot B$; $A + B = A \cdot \overline{B} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$ і багато інших. На рис. 1.4 розглянуто

$A \to B$, $A \subset B$

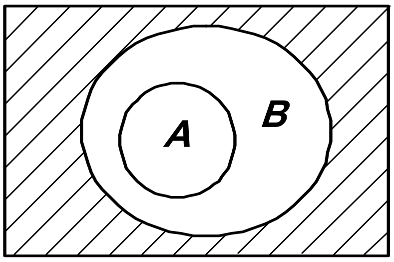


Рис. 1.4

1.2. Вимірювання множин

Виміряти множину (або підмножину) – це означає поставити цій множині у відповідність деяке число, яке можна назвати мірою цієї множини. Таким чином, міра – це числова функція, аргументами якої є множини. Якщо розглядати ймовірнісні події як множини, елементами яких є елементарні події, то виникає можливість виміряти ймовірнісні події або вислови, які їх описують.

Не будь-яку функцію від множини слід вважати мірою. Перш за все, мірою об′єднання двох множин, які не мають перетину, повинна бути сума мір окремих додатків. Це є властивість, яка називається адитивністю. Далі зазвичай розглядають невід′ємні міри. Система множин, на якій можливим є введення без суперечливості міри, називається системою, що вимірюється. Якщо така система має серед своїх елементів множину $\dot{I}$, яка характеризується властивістю: $\dot{I} \cdot A = A$, $\dot{I} + A = \dot{I}$, то множина $\dot{I}$ відіграє роль одиниці, а вся система – системи множин з одиницею. Різних мір, які можна ввести на системі множин (якщо ця система взагалі вимірюється), – нескінченна кількість, як і “звичайних” функцій числового аргументу.

Розглянемо множину із скінченною кількістю елементів. Найпростішим способом ввести на цій множині міру – це поставити у відповідність кожній підмножині кількість елементів, які належать до цієї підмножини. Наприклад, одній череді з 20 корів поставити у відповідність число 20: $\mu(A) = 20$; другій череді з 30 корів – число 30: $\mu(B) = 30$. Якщо ці череди об′єднати, то $\mu(A + B) = 20 + 30 = 50$. Однак можна виміряти ці череди і інакше, а саме – за загальною вагою корів цих черед: $\mu_1(A)$ – загальна вага корів череди *A*, $\mu_1(B)$ – вага корів череди *B*. Для цієї міри (яка відрізняється від першої) також виконується властивість адитивності: $\mu_1(A + B) = \mu_1(A) + \mu_1(B)$. Нарешті, кожній з корів можна поставити у відповідність кількість молока, яке вона дає, це породжує ще одну міру і т.д.

Якщо розглядають ймовірнісний експеримент, який полягає в киданні гральної кості, то кожному елементарному наслідку такого експерименту можна поставити у відповідність число 1. Серед можливих наслідків є такий: {кількість очок парна}. Це означає, що цьому наслідку, або ймовірнісній події, відповідає число 3, як кількість елементарних подій, що входять у розглянуту подію. Ймовірнісними подіями є також такі: {випало 7 очок}; {кількість очок перевищує 3}; {кількість очок менша за 8}. Відповідні міри: 0, 3, 6. Але кожній з елементарних подій не обов'язково ставити у відповідність число 1; на цьому шляху виникають інші міри.

1.3. Ймовірнісна міра

Припустимо, що міра несуперечної події (тобто множини, яка відіграє роль одиниці в системі множин) скінченна. Тоді водночас з мірою $\mu(A)$ мірою є також будь-яка інша, яка відрізняється числовим множником: $\mu_1(A) = c \cdot \mu(A)$. Наприклад, довжини скінченних відрізків можна задавати в сантиметрах. Якщо ж поділити число, якому дорівнює довжина кожного з відрізків, на сто, то виникає нова міра – в метрах.

Ймовірнісною мірою, або ймовірністю деякої події, є відношення міри цієї події до міри несуперечної події: $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\dot{I})}$.

Трійка $(\dot{I}, B, P)$, де $\dot{I}$ – множина всіх елементарних подій (тобто несуперечна подія), B – система підмножин множини елементарних подій, P – ймовірнісна міра, – має назву ймовірнісного простору. (Можливими є й інші позначення для об'єктів, які входять у трійку).

Базові властивості ймовірності, які приймають за аксіоми, такі:

1. $P(\dot{I}) = 1$.
2. $P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$,

якщо всі події A_1, $A_2, \ldots$, A_n, … є попарно несумісними: $A_i \cdot A_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$.

Виходячи з цих аксіом можна одержати величезну кількість властивостей ймовірності.

1. $P(\varnothing) = 0$. Дійсно, $P(\varnothing + \dot{I}) = P(\dot{I})$, $P(\varnothing) + P(\dot{I}) = P(\dot{I})$, і тоді $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Дійсно, $P(A + \overline{A}) = P(\dot{I})$, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, і тоді $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

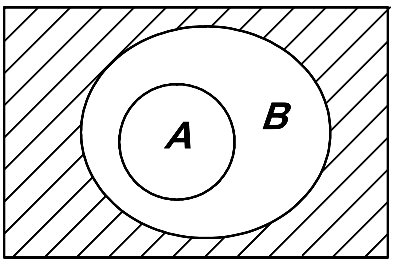


Рис. 1.5

3. Якщо $A \to B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Для доведення розглянемо таку діаграму Венна (рис 1.5):

$B = A + \overline{A} \cdot B$, $A \cdot (\overline{A} \cdot B) = \varnothing$. Тоді $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cdot B) \geq P(A)$.

Оскільки для будь-якої події A виконується співвідношення: $A \to \dot{I}$, то $0 \leq P(A) \leq 1$.

1.4. Ймовірність суми подій

В даному підрозділі виводять формулу для $P(A+B)$. Здавалося б, за другою аксіомою $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Але це, взагалі кажучи, не так. Наприклад, якщо ймовірність влучити в ціль одним пострілом дорівнює 0,8 і зроблено два постріли, то ймовірність влучити в ціль хоча б в одному з них не дорівнює 0,8+0,8=1,6 (?). Це тому, що $P(A+B)=P(A)+P(B)$ лише тоді, коли A і B є несумісними. Розглянемо діаграму Венна для суми сумісних подій A+B (рис. 1.6):

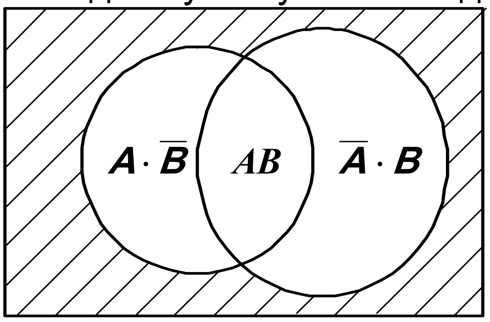


Рис. 1.6

$A+B=A\cdot\overline{B}+A\cdot B+\overline{A}\cdot B, (A\cdot\overline{B})\cdot(A\cdot B)=(\overline{A}\cdot B)\cdot(A\cdot B)=$
$(A\cdot\overline{B})\cdot(\overline{A}\cdot B)=\varnothing$.

Тому $P(A+B)=P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)$. З іншого боку, $P(A)=P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B), P(B)=P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)$, а

$P(A)+P(B)=P(A\cdot\overline{B})+2P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)=$
$=\left(P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)\right)+P(A\cdot B)=P(A+B)+P(A\cdot B)$. З цього випливає, що

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Використовуючи знайдену формулу, можна вивести також формули для ймовірностей сум і більшої кількості додатків. Наприклад, $P(A+B+C)=P[A+(B+C)]=P(A)+P(B+C)-$
$-P[A\cdot(B+C)]=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cdot C)-P(AB+AC)=$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cdot C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)=$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)$. (Використано властивості алгебри множин: $A\cdot B\cdot A\cdot C=A\cdot A\cdot B\cdot C=(A\cdot A)\cdot B\cdot C=A\cdot B\cdot C$).

1.5. Умовна ймовірність. Незалежні події

Розглянемо таку діаграму (рис. 1.7): $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(I)}$, $P(B)=\dfrac{\mu(B)}{\mu(I)}$. Припустимо, що подія B відбулася. Це означає, що вона є несуперечною (в нових обставинах). Тому подія $A\cdot\overline{B}$ є неможливою, а подія $A\cdot B$ –

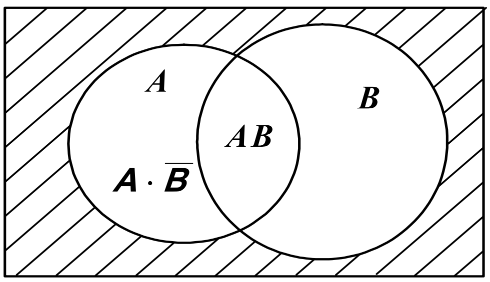


Рис. 1.7

можлива, і ймовірність події A може змінитися. Ця нова ймовірність позначається як $P(A/B)$ і має назву ймовірності події A за умови, що подія B відбулася. Згідно із загальним означенням ймовірності, $P(A/B)=\dfrac{\mu(A\cdot B)}{\mu(B)}$. Оскільки $\mu(A\cdot B)=P(A\cdot B)\cdot\mu(\dot{I})$, $\mu(B)=P(B)\cdot\mu(\dot{I})$, то $P(A/B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$. (Звісно, що ця формула має місце лише тоді, коли $P(B)\neq 0$).

За допомогою умовної ймовірності можна обчислити ймовірність добутку подій

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Якщо множників більше, то ймовірність добутку обчислюють так:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A\cdot B)\cdot P(C/A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cdot B).$$

Оскільки послідовність множників у добутку подій є несуттєвою, то можна навести цю ймовірність в аналогічних виглядах, які відрізняються послідовністю подій.

Може статися, що ймовірність події A після того, як відбулася подія B, не змінилася: $P(A)=P(A/B)$. У такому разі кажуть, що подія A не залежить від події B. Придивимося до наслідків незалежності A від B:

а) $P(A)=P(A/B)\Rightarrow P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B)$;

б) $P(A)=P(A/B)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow P(B)=P(B/A)$.

Таким чином, якщо A не залежить від B, то і B не залежить від A. У разі незалежності подій A і B виконується рівність $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. Якщо маємо сукупність подій A_1, A_2, …, A_n, кожна з яких не залежить від жодної з інших, то ймовірність добутку подій A_i дорівнює добутку ймовірностей окремих подій: $P\left(\bigcap\limits_i A_i\right)=\prod\limits_i (A_i)\cdot$

Несумісні події завжди залежні: $P(A\cdot B)=P(\varnothing)=0\neq P(A)\cdot P(B)$.

Якщо події лише попарно незалежні, то це ще не означає, що вони незалежні в сукупності. Свого часу великий подив математиків викликав простий, але дотепний приклад, наведений С.Н.Бернштейном на доказ цього твердження.

Розглянемо тетраедр, на трьох гранях якого нанесені синій, червоний та жовтий кольори, а на четвертій – три смужки тих же кольорів. Позначимо C={на грані, яка випадково випала, є синій колір}, $Ч$={червоний колір}, $Ж$={жовтий колір}. Якщо тетраедр симетричний, то $P(C)=P(Ч)=P(Ж)=\dfrac{1}{2}$; $P(C\cdot Ч)=P(C\cdot Ж)=P(Ч\cdot Ж)=\dfrac{1}{4}$; $P(C\cdot Ч\cdot Ж\cdot)=\dfrac{1}{4}$. Таким чином, $P(C)\cdot P(Ч)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}=P(C\cdot Ч)$;

$P(С \cdot Ж) = P(С) \cdot P(Ж)$, $P(Ч \cdot Ж) = P(Ч) \cdot P(Ж)$, тобто події *С*, *Ч*, *Ж* попарно незалежні. В той же час

$P(С) \cdot P(Ч) \cdot P(Ж) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(С \cdot Ч \cdot Ж)$, тобто ці події в сукупності залежні.

Якщо *А* не залежить від *В*, то $\overline{A}$ також не залежить від *В*. Дійсно, $P(\dot{I} / B) = \frac{P(\dot{I} / B)}{P(B)} = 1$, $P(A + \overline{A} / B) = P(\dot{I} / B) = 1$,

$$P(A + \overline{A} / B) = \frac{P((A + \overline{A}) \cdot B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cdot B)}{P(B)} = P(A / B) + P(\overline{A} / B) = 1,$$ і

тому $P(\overline{A} / B) = 1 - P(A / B) = 1 - P(A) = P(\overline{A})$.

Приклад 1.1. Двоє стрільців стріляють у ціль одночасно. Ймовірність влучити для першого з них дорівнює 0,8, для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що ціль не залишиться неушкодженою.

Розв'язання. Введемо в розгляд події: A_1={перший із стрільців влучив}, A_2={другий влучив}, *В*={є хоча б одне влучення}. Тоді $B = A_1 + A_2$ (ця рівність є центральною в усіх міркуваннях щодо даної задачі). Дійсно, $A_1 + A_2$ – це така подія: {або влучив перший, або влучив другий, або влучили обидва}={є хоча б одне влучення}=*В*. Далі, $P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$. Оскільки A_1 та A_2 незалежні, то $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. Таким чином, $P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 + 0,8 - 0,64 = 0.96.$

Відповідь: 0,96.

Приклад 1.2. Кожен із десяти мисливців, які незалежно один від одного стріляють у зайця, з ймовірністю 0,1 влучають у ціль. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення.

Розв'язання. Позначимо A_i подію: {мисливець за номером *i, i*=*1*, *2*, … …, *10* влучив}; *В* – {є хоча б одне влучення}. $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}$; $P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10})$. Можна розписати цю ймовірність, скориставшись загальною формулою суми декількох додатків. Але це призводить до дуже складних обчислень. Тому має сенс розглянути задачу з іншого боку, а саме поставити питання протилежної події: чому дорівнює ймовірність того, що всі мисливці схиблять? Це еквівалентно питанню про $P(\overline{B})$. $\overline{B} = \overline{(A_1 + A_2 + \ldots + A_{10})} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{10}$ (за правилом Де-Моргана); $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{10}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_{10}) = 0,9^{10}$ (оскільки події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_{10}$ незалежні, як і незалежні A_1, A_2, …, A_{10}). Далі

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}9^{10} = 1 - 0{,}81^5 = 1 - 0{,}6561^2 \cdot 0{,}81 = 1 -$
$- 0{,}43046721 \cdot 0{,}81 \cong 0{,}6$.

Відповідь: 0,6.

Зауваження

$$1 - 0{,}9^{10} = 1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} = \frac{2{,}71828 - 1}{2{,}71828} =$$
$$= \frac{1{,}71828}{2{,}71828} \cong 0{,}6.$$

Приклад 1.3. Літак, який несе сім бомб, проводить бомбардування. Ймовірність p влучити в ціль при скиданні однієї бомби дорівнює 0,8. Після першого ж влучення бомбардування припиняється. Знайти ймовірність того, що з усього запасу бомб залишаться невикористаними не менше двох бомб.

Розв'язання. Позначимо подію задачі A; влучення i-ю за рахунком бомбою – a_i. Тоді

$$A = a_1 + \overline{a}_1 \cdot a_2 + \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 \cdot a_3 + \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 \cdot a_4 + \overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 \cdot \overline{a}_4 \cdot a_5;$$
$$P(A) = p + q \cdot p + q^2 \cdot p + q^3 \cdot p + q^4 \cdot p = p\frac{1-q^5}{1-q} = p\frac{1-q^5}{p} = 1 - q^5.$$

Таким чином, $P(A) = 1 - 0{,}2^5 = 1 - 0{,}00032 = 0{,}99968$.

Відповідь: 0,99968.

Приклад 1.4. Стріляють по цілі, яка віддаляється. При першому пострілі ймовірність влучити дорівнює $p = 0{,}5$. З кожним пострілом ймовірність зменшується в два рази. Мають чотири набої. Визначити ймовірність того, що всі набої будуть використані.

Розв'язання. Позначимо символами A_i події: $A_i =${при i-му пострілі відбулося влучення в ціль}. Тоді подію A задачі можна уявити у вигляді $A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Відбудеться чи ні подія A_4, не є суттєвим для виконання події A.

$P(\overline{A}_1) = 0{,}5$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{1}{2}p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$; $P(\overline{A}_3) =$
$= 1 - P(A_3) = 1 - \frac{1}{2}P(A_2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$. Таким чином, $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}875 = 0{,}328125$.

Відповідь: 0,328125.

Приклад 1.5. Двоє спортсменів грають у теніс (тобто нічиїх в окремих партіях немає). Сили їх однакові, тобто ймовірність виграти для будь-якого з них дорівнює 0,5. Матч відбувається до того моменту, коли кількість перемог одного з них перевищить на два кількість перемог іншого. Знайти ймовірність того, що в матчі буде зіграно не більше 6 партій.

Розв'язання. Позначимо подію задачі A; a={в окремій партії виграв перший гравець}, $в$={виграв другий}. Схематично подію $\boldsymbol{A}$ можна уявити так:
$A=(aa+bb)+(ab+ba)(aa+bb)+(ab+ba)(ab+ba)(aa+bb)$. Тому
$$P(A)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2\right)=\frac{7}{8}.$$

Відповідь: $\frac{7}{8}$.

<u>Узагальнення</u>**.** Якщо сили гравців не однакові, тобто $p=P(a)\neq\frac{1}{2}$, а також у разі питання задачі про $2m$ партій $P(A)=(p^2+q^2)\frac{1-(2pq)^m}{1-2pq}$; але $q=1-p$, і тому $p^2+q^2=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1; 1-2pq=1-$ $-2p(1-p)=1-2p+2p^2$. Тому $P(A)=1-(2pq)^m$.

Приклад 1.6. Електричне коло має такий вигляд (рис. 1.8). Ймовірність вийти з ладу (що призводить до розриву кола) елемента 1 дорівнює p_1, для елемента 2 – p_2. Знайти ймовірність того, що коло буде розірвано, якщо елементи 1 та 2 виходять (або не виходять) з ладу незалежно один від одного.

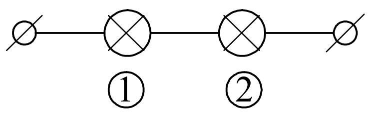


Рис. 1.8

Розв'язання. Позначимо A_1 ={перший елемент вийшов з ладу}, $A_2=$ {другий елемент вийшов з ладу}, B – коло розірвано. Тоді $B=A_1+A_2$;
$$P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=p_1+p_2-p_1\cdot p_2.$$

Відповідь: $p_1+p_2-p_1p_2$.

Приклад 1.7. Коло має вигляд (рис. 1.9). За умов задачі 1.6 знайти ймовірність того, що коло буде розірвано.

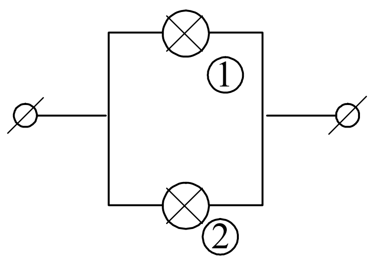


Рис. 1.9

Розв'язання. $B=A_1\cdot A_2$, тобто {коло розірвано}={вийшов з ладу елемент 1} і {вийшов з ладу елемент 2}. $P(B)=P(A_1\cdot A_2)=p_1\cdot p_2$.

Відповідь: $p_1\cdot p_2$.

Приклад 1.8. Коло має вигляд (рис. 1.10). Відповідні ймовірності вийти з ладу елементів 1, 2, 3 дорівнюють p_1, p_2, p_3. Знайти

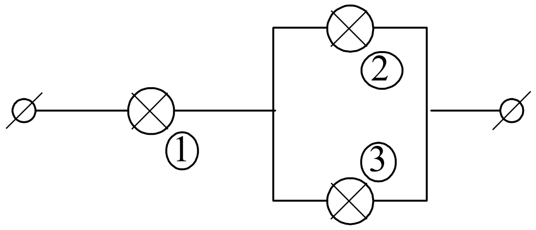


Рис. 1.10

ймовірність того, що коло буде розірвано.

Розв'язання. Нехай A_i ={вийшов з ладу елемент *i*}, *B*={коло розірвано}. Тоді *B* має місце, якщо або здійснилася подія A_1, або обидві події A_1 та *C* одночасно, де *C*={вийшов з ладу елемент 2} і {вийшов з

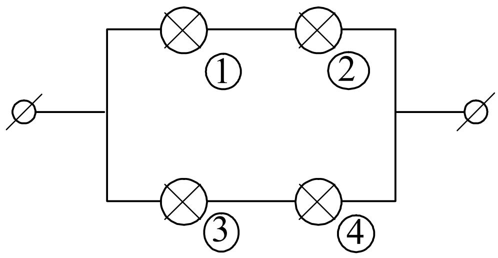


Рис. 1.11

ладу елемент 3}: $B = A_1 + A_2 \cdot A_3$.

Тому

$$P(B) = P(A_1 + A_2 \cdot A_3) = P(A_1) + P(A_2 \cdot A_3) - $$
$$- P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = p_1 + p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3.$$

Відповідь: $p_1 + p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$.

Приклад 1.9. Коло має вигляд (рис. 1.11). Ймовірність виходу з ладу елементів 1, 2, 3, 4 дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайти ймовірність того, що коло буде розірвано.

Розв'язання. Нехай $A_i =${елемент за номером *i* вийшов з ладу}; $P(A_i) = p_i = \frac{1}{2}$; *B*={коло буде розірвано}. $B = (A_1 + A_2) \cdot (A_3 + A_4)$;

$$P(B) = P\big((A_1 + A_2) \cdot (A_3 + A_4)\big) = P(A_1 +$$
$$+ A_2) \cdot P(A_3 + A_4) = \big(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)\big) x$$
$$x\big(P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 \cdot A_4)\big) =$$
$$= (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2)(p_3 + p_4 - p_3 \cdot p_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Відповідь: $\frac{9}{16}$.

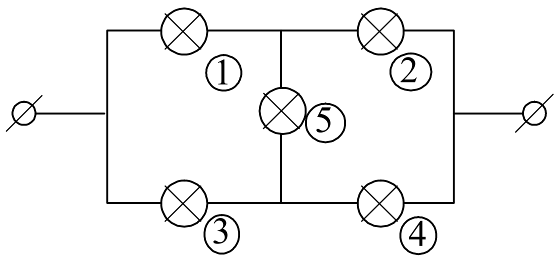


Рис. 1.12

Приклад 1.10. Коло має такий вигляд (рис. 1.12). Ймовірності виходу з ладу елементів 1, 2, 3, 4, 5 дорівнюють $\frac{1}{2}$. Знайти ймовірність того, що коло буде розірвано.

Розв'язання

$B = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_4 \cdot A_5 + A_2 \cdot A_3 \cdot A_5 = C_1 + A_5 \cdot C_2$, де

$C_1 = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_4$, $C_2 = A_1 \cdot A_4 + A_2 \cdot A_3$,

$P(C_1) = P(A_1 \cdot A_3) + P(A_2 \cdot A_4) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = p_1 p_3 + p_2 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4$ і

$P(C_2) = P(A_1 \cdot A_4) + P(A_2 \cdot A_3) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = p_1 p_4 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 p_4$.

Далі $C_1 \cdot C_2 = A_1 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_4 + A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = D_1 + D_2$,

де $D_1 = A_1 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $D_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_4 + A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$,
$P(D_1) = p_1 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 p_4$, $P(D_2) = p_1 p_2 p_4 +$
$+ p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4$; $D_1 \cdot D_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 +$
$+ A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$.

Тому $P(C_1 \cdot C_2) = P(D_1) +$
$+ P(D_2) - P(D_1 \cdot D_2) = p_1 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_4 +$
$+ p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 = p_1 p_2 p_3 p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - 3 \right)$.

Нарешті,
$P(B) = P(C_1) + P(A_5)P(C_2) - P(A_5)P(C_1 \cdot C_2) = p_1 p_3 + p_2 p_4 -$
$- p_1 p_2 p_3 p_4 + p_5 (p_1 p_4 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 p_4) - p_5 p_1 p_2 p_3 p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \right.$
$\left. + \frac{1}{p_4} - 3 \right) = p_1 p_2 p_3 p_4 \left(\frac{1}{p_1 p_3} + \frac{1}{p_2 p_4} - 1 + p_5 \left(\frac{1}{p_1 p_3} + \frac{1}{p_2 p_4} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \right.\right.$
$\left.\left. - \frac{1}{p_4} + 2 \right)\right)$.

Якщо $p_i = \frac{1}{2}$, то $P(B) = \frac{1}{16}\left(4 + 4 - 1 + \frac{1}{2}(4 + 4 - 2 - 2 - 2 - 2 + 2) \right) = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

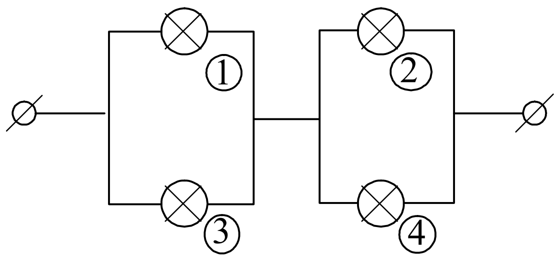


Рис. 1.13

<u>Зауваження.</u> Умова прикладу 1.9 відповідає випадку, коли $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{2}$, а $p_5 = 1$ (тобто елемент 5 вийшов з ладу з ймовірністю 1, і завдяки цьому його можна просто вилучити з кола). Тоді $P(B) = \frac{1}{16}(4 + 4 - 1 + 1 \cdot (4 + 4 - 2 - 2 - 2 - 2 + 2)) = \frac{9}{16}$, що збігається з відповіддю прикладу 1.6. Якщо ж елемент абсолютно надійний, тобто $p_5 = 0$, то $P(B) = \frac{7}{16}$. До такої ж відповіді приводить міркування, що коло у цьому випадку є еквівалентним зображеному на рис. 1.13, для якого $P(B) = P(A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_4) = = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$.

У розглянутих прикладах під час алгебричних перетворень були використані деякі правила дій над подіями: $A + A = A$, $A \cdot A = A$. В такому разі, наприклад,
$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot (A_1 \cdot A_2 \cdot A_4) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_4 = (A_1 \cdot A_1)\times$

$x(A_2 \cdot A_2) \cdot A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$;

$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, і т.п.

В подальших прикладах використовують деякі результати теорії степенних рядів. Найпростішим з них є нескінченна геометрична прогресія: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p^i = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots$. Якщо $0 < p < 1$, то сума такого ряду дорівнює $\frac{1}{1-p}$. Степеневі ряди на відрізку (в колі) збіжності можна почленно диференціювати, тобто ряд із похідних збігається до похідної суми початкового ряду. Тому степеневий ряд можна диференціювати скільки завгодно раз. Цю властивість використовують для пошуку сум різних рядів, виконуючи відповідні алгебричні перетворення.

Наприклад, $p + 2^2 p^2 + 3^2 p^3 + 4^2 p^4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 p^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]p^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2 p^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} p = p^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)'' + p\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)' =$$

$$= p^2\left(\frac{1}{1-p}\right)'' + p\left(\frac{1}{1-p}\right)' = \frac{2p^2}{(1-p)^3} + \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{2p^2 + p - p^2}{(1-p)^3} = \frac{p(p+1)}{q^3}.$$

Приклад 1.11. Два спортсмени, A та B, грають у теніс (тобто нічиїх у кожній партії немає). Ймовірність p виграти в кожній партії для гравця A дорівнює 0,6. Переможцем вважають того, хто одержить дві перемоги у партіях поспіль. Знайти ймовірність виграти матч в цілому для кожного із спортсменів.

Розв'язання. Позначимо подію A = {загальну перемогу одержав A}; a = {перемогу в партії одержав A}. Тоді подію A можна уявити як дві нескінченні суми:

$A = aa + a\bar{a}aa + a\bar{a}a\bar{a}aa + \ldots + \bar{a}aa + \bar{a}a\bar{a}aa + \bar{a}a\bar{a}a\bar{a}aa + \ldots$. $P(a) = p$, $P(\bar{a}) = q$; $\quad P(A) = p^2 + p^3 q + p^4 q^2 + \ldots + p^2 q + p^3 q^2 + p^4 q^3 + \ldots =$

$= \frac{p^2}{1-pq} + \frac{p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}$. Таким чином, $P(A) = \frac{0{,}6^2(1+0{,}4)}{1-0{,}24} \approx 0{,}6631$,

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{q^2(1+p)}{1-pq} \approx 0{,}3368.$$

Відповідь: 0,6631; 0,3368.

Приклад 1.12. Три спортсмени, які мають однакову силу, грають у теніс "навиліт" (нічиїх немає, той, хто програє, віддає чергу). Переможцем вважають того, хто виграє дві партії поспіль. Починають A та B. Знайти ймовірність перемоги для кожного із спортсменів.

Розв'язання. Позначимо подію A = {спортсмен A переміг}; a_b ={A

виграв у B партію}; $a_c=${A виграв у C партію} і т.д. Подію A можна уявити у вигляді таких нескінченних сум: $A=a_b a_c+a_b c_a b_c a_b a_c+a_b c_a b_c a_b c_a b_c a_b a_c+$

$+\ldots+b_a c_b a_c a_b+b_a c_b a_c b_a c_b a_c a_b+b_a c_b a_c b_a c_b a_c b_a c_b a_c a_b+\ldots..$

Тоді $P(A)$ є сумою двох геометричних прогресій: $P(A)=p_{ab}p_{ac}+(p_{ab}p_{ca}p_{bc})p_{ab}p_{ac}+$

$+(p_{ab}p_{ca}p_{bc})^2 p_{ab}p_{ac}+\ldots+p_{ba}p_{cb}[p_{ac}p_{ab}+(p_{ac}p_{ba}p_{cb})p_{ac}p_{ab}+$
$+(p_{ac}p_{ba}p_{cb})^2\times p_{ac}p_{ab}+\ldots]=$

$=p_{ab}p_{ac}\left(\dfrac{1}{1-p_{ab}p_{ca}p_{bc}}+\dfrac{p_{ba}p_{cb}}{1-p_{ac}p_{ba}p_{cb}}\right)$. Згідно з умовою,

$p_{ab}=p_{ba}=p_{ac}=p_{ca}=p_{cb}=p_{cb}=\dfrac{1}{2}$.

$P(A)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{8}}+\dfrac{1}{4\left(1-\frac{1}{8}\right)}\right)=\dfrac{5}{14}$; $P(B)=P(A)=\dfrac{5}{14}$. Подію C={спортсмен C переміг} також можна уявити у вигляді двох нескінченних сум: $C=a_b c_a c_b+a_b c_a b_c a_b c_a c_b+\ldots+b_a c_b c_a+$

$+b_a c_b c_a+b_a c_b a_c b_a c_b c_a+\ldots$;

$$P(C)=p_{ca}p_{cb}\left(\frac{p_{ab}}{1-p_{ca}p_{bc}p_{ab}}+\frac{p_{ba}}{1-p_{cb}p_{ac}p_{ba}}\right);$$

$$P(C)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{8}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{8}\right)}\right)=\frac{2}{7}.$$

Відповідь: $P(A)=P(B)=\dfrac{5}{14}$, $P(C)=\dfrac{2}{7}$; $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

1.6. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Розглянемо таку діаграму Венна (рис. 1.14), на якій зображено повну групу подій.

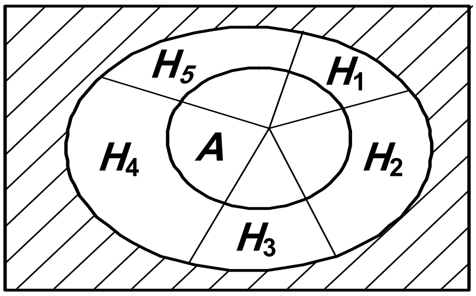


Рис. 1.14

Події H_1, H_2, …, H_n попарно несумісні: $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$. Крім того, $A \to H_1 + H_2 + \ldots + H_n$. За таких обставин події H_1, H_2, …, H_n утворюють так звану повну групу подій відносно події *A*, або гіпотези.

Розглянемо тотожність

$A = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$,

$(A \cdot H_i) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing$, $i \neq j$ (рис. 1.15).

З наведеної тотожності випливає, що

$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots$

$\ldots + P(A \cdot H_n) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) +$

$+ P(H_2) \cdot P(A / H_2) + \ldots + P(H) P(A / H_n)$.

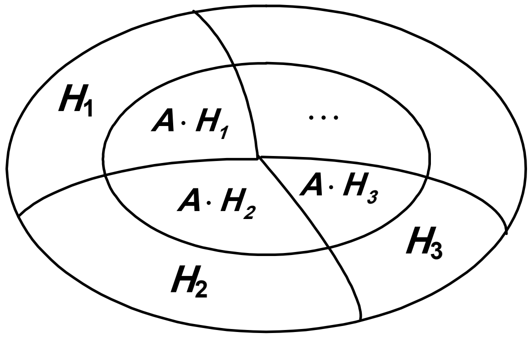


Рис. 1.15

Скорочено: $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$.

Ця формула має назву формули повної ймовірності.

Припустимо, що відомими є ймовірності гіпотез H_1, H_2, …, H_n, які мають назву апріорних ймовірностей (рис. 1.16). Відомо також, що мала місце подія *A* (рис. 1.17).

Таку подію $A \to H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ називають результатом перевірного експерименту. Ймовірності $P(H_1 / A)$, $P(H_2 / A)$, …, $P(H_n / A)$ називають апостеріорними. Для їх обчислення скористаємося означенням повної ймовірності $P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i \cdot A)}{P(A)} = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}$.

Це є формула Байєса $P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}$, або

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A / H_k)}.$$

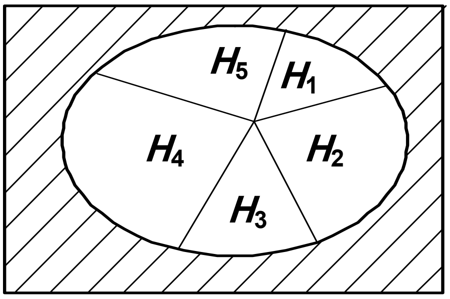


Рис. 1.16

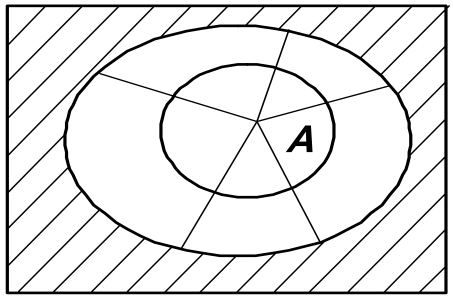


Рис. 1.17

Приклад 1.13. Ймовірність влучення в перший блок танка – 0,3; в другий – 0,2; в третій – 0,1. Якщо є влучення в перший блок, то танк виходить з ладу з ймовірністю 0,2; при влученні в другий блок – танк виходить з ладу з ймовірністю 0,5; в третій – 0,9. Знайти ймовірність виходу танка з ладу.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези:

$H_1 =${влучили в перший блок}; $P(H_1) = 0,3$;

$H_2 =${ влучили в другий блок }; $P(H_2) = 0,2$;

$H_3 =${ влучили в третій блок }; $P(H_3) = 0,9$.

Позначимо A подію: {танк вийшов з ладу}. $P(A/H_1) = 0,2$; $P(A/H_2) = 0,5$; $P(A / H_3) = 0,9$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2)$$
$$P(A / H_2) + P(H_3) P(A / H_3) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,25.$$

Відповідь: 0,25.

Приклад 1.14. За тих же умов відомо, що танк вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що влучення відбулося в перший блок.

Розв'язання. Згідно з формулою Байєса

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,25} = \frac{6}{25} = 0,24.$$

Відповідь: 0,24.

Приклад 1.15. Під час обстрілу влучення у відсіки *А*, *Б*, *В* несумісні. Ймовірність влучення у відсік *А* – 0,2, у відсік *Б* – 0,1, у відсік *В* – 0,05. При влученні у відсік *А* ціль виявляється виведеною з ладу з ймовірністю 0,5, при влученні в *Б* – 0,3, після влучення у відсік *В* ціль виведена з ладу з ймовірністю одиниця. Зроблено постріл, після якого ціль вийшла з ладу. Чому дорівнює ймовірність того, що влучення відбулося у відсік *В*?

Розв'язання. Гіпотези *А*, *Б*, *В* влучили в *А*, *Б* та *В* відповідно. Подію {вихід з ладу} позначимо *С*. Згідно з формулою повної ймовірності $P(C)=P(A)P(C/A)+P(Б)P(C/Б)+P(B)P(C/B)=0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}05\cdot 1=$ $=0{,}18$. Нарешті, за формулою Байєса

$$P(B/C)=\frac{P(B)P(C/B)}{P(C)}=\frac{0{,}05\cdot 1}{0{,}18}=\frac{5}{18}.$$

Відповідь: $\frac{5}{18}$.

Приклад 1.16. Ймовірності влучення в ціль при одному пострілі для трьох стрільців дорівнюють відповідно $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. При одночасному пострілі всіх трьох стрільців виявилося, що влучень було два. Знайти ймовірність того, що не влучив другий стрілець.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези:

$H_1=${влучили перший і другий, схибив третій};

$H_2=${ влучили перший і третій, схибив другий};

$H_3=${ влучили другий і третій, схибив перший}, *А* – подія задачі.

$$P(H_1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3};\ P(H_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3};\ P(H_3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3};$$

$$P(A/H_1)=P(A/H_2)=P(A/H_3)=1.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{26}{60}.$$

За формулою Байєса

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{26}{60}\right)}=\frac{4}{13}.$$

Відповідь: $\frac{4}{13}$.

Приклад 1.17. Ймовірності перегоряння першої, другої та третьої ламп дорівнюють відповідно 0,1, 0,2 та 0,3. Ймовірності виходу приладу з ладу при перегорянні тільки однієї, тільки двох і всіх трьох ламп дорівнюють відповідно 0,1, 0,2 та 1. Відомо, що прилад залишився працездатним. Знайти ймовірність того, що перегоріли дві лампи.

Розв'язання. Введемо в розгляд гіпотези:

$H_0=${не перегоріла жодна лампа};

H_1 ={перегоріла одна лампа};

H_2 ={перегоріли дві лампи}.

Сконструюємо їх за допомогою незалежних подій a_i={перегоріла лампа за номером *i*}: $H_0 = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3$; $P(H_0) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7$; $P(\bar{A}/H_0) = 1$; $H_1 = a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_1 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 + \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3$; $P(H_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3$; $P(\bar{A}/H_1) = 0{,}1$; $H_2 = a_1 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 + a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 + \bar{a}_1 \cdot a_2 \cdot a_3$; $P(H_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3$; $P(\bar{A}/H_2) = 0{,}2$.

Згідно з формулою повної ймовірності $P(\bar{A}) = \frac{1}{10000}(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10 + (1 \cdot 8 \cdot 7 +$
$+ 9 \cdot 2 \cdot 7 + 9 \cdot 8 \cdot 3) \cdot 1 + (1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2) = \frac{543}{1000}$.

Обчислимо, нарешті, ймовірність задачі: $P(H_2/\bar{A}) = \frac{P(H_2) \cdot P(\bar{A}/H_2)}{P(\bar{A})} = \frac{398}{5430} \cong 0{,}0733$.

Відповідь: 0,0733.

1.7. Статистичне означення ймовірності

Як було зазначено, ймовірність – це міра події, але не було вказано, яку саме ймовірність треба зіставити з елементарною подією (чи їх об′єднанням). Це питання з точки зору аксіоматичної побудови ймовірності, якої ми дотримуємось, принципово не має однозначного розв'язку, оскільки навіть сама елементарна подія не має визначення. Для того ж, щоб одержувати практичні результати, які б вірно описували ймовірнісні експерименти, для визначення ймовірності треба підходити саме з боку практики, тобто експерименту. Розглянемо серію з *n* таких експериментів за одних і тих же умов і підрахуємо кількість *m* з них, таких, в яких відбулася подія *A*. Число $\frac{m}{n}$ має назву частоти події *A*: $\mu_n(A) = \frac{m}{n}$. Згідно зі статистичним визначенням ймовірності ймовірністю $P(A)$ події *A* називається межа частоти, якщо *n* прямує у нескінченність: $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$. Після того, як усі елементарні події експерименту одержують міру, обчислену за наведеним правилом, за допомогою аксіом і теорем теорії ймовірності, розглянутих вище, виникає можливість обчислення якихось більш складних подій. Таким чином, виникає можливість надихнути життя в аксіоматику. Єдиний недолік статистичного означення ймовірності полягає в нереалізовності її обчислення, тому що $n \to \infty$.

1.8. Класичне означення ймовірності

Класична ймовірність оперує скінченною кількістю елементарних подій (в крайньому разі – з такою їхньою кількістю, для якої з кожною подією можна зіставити число натурального ряду, хоч як завгодно велике, тобто з обчисленими множинами). Припустимо, що ймовірнісний експеримент має n різних наслідків, кожен із яких можна вважати рівним з точки зору міри іншим. Нехай, далі, m з таких наслідків приводять до появи події A, а інші $(n-m)$ – не приводять. Тоді за ймовірність $P(A)$ події A пропонують приймати відношення кількості елементарних подій, "сприятливих" відносно A, до загальної кількості подій:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Теорія ймовірності як така й почалася з наведеного означення. Але воно є ідеалізацією, тобто математичною моделлю реальних явищ. Наприклад, для обчислення ймовірності випадання герба при киданні монети маємо дві елементарні події, з яких одна є сприятливою до події {з′явився герб}, і тому приписуємо цій події ймовірність $\frac{1}{2}$, виходячи з того, що випадання герба та решки "рівноможливі". Але ж це в дійсності не так, бо кожна реальна монета має якусь асиметрію, хоч майже непомітну.

Приклад 1.18. Кидають гральну кість. Знайти ймовірність того, що кількість одержаних очок парна.

Розв'язання. Вважаємо, що випадання будь-якої кількості очок від 1 до 6 рівноможливі. Тоді кількість всіх елементарних подій дорівнює 6: $n=6$. Кількість сприятливих з них – 3: $m=3$.

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, де $A=${кількість очок парна}.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 1.19. Кидають дві гральні кості. Знайти ймовірність того, що сума очок не перевищує 5.

Розв'язання. Рівноймовірними елементарними подіями в даному випадку є пари чисел: $(1, 1)$; $(1, 2)$; …; $(1, 6)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; …; $(6, 6)$, де перше з чисел – кількість очок, що випали на першій кості, друге – кількість очок на другій. Цих пар – 36; $n=36$. Сприятливі події: $(1, 1)$; $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(2, 1)$; $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$. Їхня кількість $m=10$. Тому $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, де $A=${сума очок не перевищує п'яти}.

Відповідь: $\frac{5}{18}$.

Приклад 1.20. Кидають монету й гральну кість. Якщо випав герб, то вважають, що маємо 1 очко, в іншому разі – 0 очок. Знайти ймовірність того, що загальна кількість очок ділиться на 3.

Розв'язання. Спочатку підрахуємо загальну кількість можливих елементарних подій: $(0, 1)$; $(0, 2)$; …; $(0, 6)$, $(1, 1)$; $(1, 2)$; …; $(1, 6)$: $n = 12$. Сприятливі події: $(0, 3)$; $(0, 6)$; $(1, 2)$; $(1, 5)$: $m = 4$. Таким чином, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 1.21. Кидають три гральні кості. Знайти ймовірність того, що на якій-небудь кості кількість очок перевищуватиме суму очок, які випали на двох інших.

Розв'язання. Розглянемо такі випадки:

A_1 ={кількість очок на першій кості більше суми очок на другій і третій};

A_2 ={кількість очок на другій кості більше суми очок на першій і третій};

A_3 ={кількість очок на третій кості більше суми очок на першій і другій}.

Випадок задачі: або A_1, або A_2, або A_3. Випадки A_1, A_2, A_3 несумісні. Тому $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Кості однакові, тому $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$, $P(A) = 3P(A_1)$. Загальна кількість рівноможливих випадків – $n = 6 \cdot 6 \cdot 6$. Сприятливі відносно A_1 випадки такі: $\{3; 1, 1\}$; $\{4; 1, 1\}$; $\{4; 1, 2\}$; $\{4; 2, 1\}$; $\{5; 1, 1\}$; $\{5; 1, 2\}$; $\{5; 2, 1\}$; $\{5; 1, 3\}$; $\{5; 2, 2\}$; $\{5; 3, 1\}$; $\{6; 1, 1\}$; $\{6; 1, 2\}$; $\{6; 2, 1\}$; $\{6; 1, 3\}$; $\{6; 2, 2\}$; $\{6; 3; 1\}$; $\{6; 1, 4\}$; $\{6; 2, 3\}$; $\{6; 3, 2\}$; $\{6; 4, 1\}$. Їх загальна кількість $m = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20$.

Таким чином, ймовірність події задачі обчислюють так: $P(A) = 3\frac{20}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{18}$.

Відповідь: $\frac{5}{18}$.

Приклад 1.22. У шапці знаходяться дві монети по 5 копійок та три по 10 копійок. Двоє гравців по черзі виймають монету навмання, кожний – два рази. Знайти ймовірність того, що той, хто розпочне, збере більшу суму, ніж другий.

Розв'язання. Нехай $A_i=${перший вийняв і-го разу монету по 10 коп.}; $B_i=${другий витягнув *i*-го разу монету по 10 коп.}. Тоді $\overline{A_i}=${перший витягнув *i*-го разу монету по 5 коп.}; $\overline{B_i}=${другий витягнув *i*-го разу монету по 5 коп.}.

Подія задачі: $C=A_1\cdot B_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4+A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot B_4+A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4$;

$P(C)=P(A_1\cdot B_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4)+P(A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot B_4)+P(A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4)$;

$P(A_1\cdot B_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4)=$

$=P(A_1)P(B_2/A)P(A_3/A_1\cdot B_2)P(\overline{B}_4/A_1\cdot B_2\cdot A_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$;

аналогічно $P(A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot B_4)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$,

$P(A_1\cdot\overline{B}_2\cdot A_3\cdot\overline{B}_4)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$.

Таким чином, $P(C)=3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

Відповідь: $\frac{3}{10}$.

Приклад 1.23. Мішають чотири картки з номерами від 1 до 4. Потім проводять витягування з поверненням, порівнюючи номер картки з номером витягування. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз ці номери збігаються.

Розв'язання. Розглянемо події: $A_i=${номер на картці збігається з номером витягування}. Ці події незалежні. Подія, протилежна події *C* задачі, формулюється так: {першою витягнули картку з номером не першим} і {другою витягнули картку з номером не другим} і ...: $\overline{C}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4$. Ймовірність кожного з множників дорівнює $\frac{3}{4}$.

Тому $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{175}{256}$.

Відповідь: $\frac{175}{256}$.

Узагальнення. Якщо карток *n*, то $P(C)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. За умови $n>>1$ (тобто *n* багато більше одиниці, наприклад, $n=10$) $P(C)\cong 1-\frac{1}{e}$, де $e=2{,}718281828\ldots$. Цікаво, що ця ймовірність майже не залежить від кількості карток.

Приклад 1.24. В урні знаходяться три кулі, занумеровані цифрами

1, 2, 3. Проводять чотири витягування по одній кулі з поверненням. Знайти ймовірність того, що жодного разу не буде витягнутою поспіль два рази куля з одним номером.

Розв'язання. Розглянемо такі випадкові події:

$A_1 =${під час другого витягування номер другої кулі не збігається з номером першої};

$A_2 =${під час третього витягування номер третьої кулі не збігається з номером другої} і т.д.

Подія C задачі: $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_i незалежні. Тому $P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$.

Відповідь: $\frac{16}{27}$.

Узагальнення**.** Нехай куль – n, витягувань – $n+1$. Тоді з ймовірністю $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ жодного разу не з'явиться поспіль два рази одна і та ж куля. Якщо n – досить велике число, то ця ймовірність приблизно дорівнює $\frac{1}{e}$.

Приклад 1.25. В урні три білі, дві сині й три червоні кулі. Виймають без повернення кулі по одній. Знайти ймовірність того, що червона куля буде витягнутою раніше білої.

Розв'язання. Схематично подію A задачі можна записати так: $A = ч + сч + ссч$. Оскільки окремі події $ч$, $сч$ і $ссч$ несумісні з іншими, то $P(A) = P(ч) + P(сч) + P(ссч)$. Окремі множники двох останніх подій залежать один від інших. Тому $P(сч) = P(с)P(ч/с)$, $P(ссч) = P(с)P(с/с)P(ч/сс)$. Таким чином,

$$P(A) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Узагальнення**.** Припустимо, що в урні m білих, n синіх і s червоних куль. Тоді подію задачі (для n синіх куль) можна подати у вигляді $A = ч + с \cdot A$; $P(A) = P(ч) + P(с) \cdot P(A/с)$. Але $P(A/с)$ збігається з ймовірністю події задачі, якщо синіх куль – $n-1$. Останню рівність можна записати у рекурентній формі: $P_n = \frac{s}{m+n+s} + \frac{n}{m+n+s} P_{n-1}$. Застосуємо метод математичної індукції. $P_0 = \frac{s}{m+s}$; $P_1 = \frac{s}{m+1+s} + \frac{1}{m+1+s} \cdot \frac{s}{m+s} = \frac{s}{m+1+s} \cdot \left(1 + \frac{1}{m+s}\right) = \frac{s}{m+s}$. Висловимо гіпотезу: $P_n = \frac{s}{m+s}$. Обчислимо її для $(n+1)$-ї синьої кулі: $\frac{s}{m+(n+1)+s} + \frac{n+1}{m+(n+1)+s} \cdot \frac{s}{m+s} = \frac{s}{m+(n+1)+s} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{m+s}\right) = \frac{s}{m+s}$.

Гіпотеза підтвердилася. Таким чином, $P(A) = \frac{s}{m+s}$. Цікаво, що ця ймовірність не залежить від кількості синіх куль.

Приклад 1.26. В урні три білі, дві сині й три червоні кулі. Виймають без повернення кулі по одній. Знайти ймовірність того, що спочатку будуть витягнуті кулі одного кольору, потім – другого і, нарешті, – третього.

Розв'язання. Подію A задачі схематично можна записати так:

$A =$ *бббссччч* $+$ *бббчччсс* $+$ *ссбббччч* $+$ *ссчччббб* $+$ *чччбббсс* $+$ *чччссббб* .

Тоді $P(A) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3}{280}$.

Відповідь: $\frac{3}{280}$.

Приклад 1.27. В урні три однакові кулі, занумеровані цифрами 1, 2, 3. Проводять п′ять витягувань по одній кулі з поверненням. Знайти ймовірність того, що жодного разу не буде витягнута два рази поспіль куля з номером 1.

Розв'язання. З кожним способом витягування куль можна зіставити двійкове число з п'яти цифр 0 та 1, де номер позиції, відведеної для одиниці, відповідає номеру того витягування, коли з′являється куля з номером 1. Подію задачі A можна уявити у вигляді такої суми подій:

$$A = \{00000\} + \{10000\} + \{01000\} + \{00100\} + \{00010\} +$$
$$+ \{00001\} + \{10100\} + \{10010\} +$$
$$+ \{10001\} + \{01010\} + \{01001\} + \{00101\} + \{10101\}.$$

$$P(A) = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5 \cdot \frac{2^4}{3^5} + 6 \cdot \frac{2^3}{3^5} + 1 \cdot \frac{2^2}{3^5} = \frac{164}{243}.$$

Відповідь: $\frac{164}{243}$.

Приклад 1.28. У двох урнах знаходяться кулі, які відрізняються лише кольором. В першій урні 5 білих, 11 синіх і 8 червоних куль; в другій – відповідно, 10, 8 і 6. З обох урн виймають навмання по одній кулі. Яка ймовірність того, що кулі одного кольору?

Розв'язання. Подію A задачі можна подати у вигляді $A =$ *бб* $+$ *сс* $+$ *чч* .

Множники у кожному додатку – незалежні події. Тому $P(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} +$

$$+\frac{11}{24}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{24}\cdot\frac{6}{24}=\frac{31}{96}.$$

Відповідь: $\frac{31}{96}$.

Приклад 1.29. Студент знає відповіді на 15 запитань з 30. Якщо на екзамені відомими є відповіді на чотири питання, то він одержує "відмінно"; якщо відомі відповіді на три запитання з чотирьох, – "добре", на два або один, – "задовільно". Для того, щоб одержати "задовільно" у разі, якщо на жодне запитання студент не може дати відповіді, йому ставлять ще одне запитання. Якщо і на це запитання відповіді немає, він одержує "незадовільно". Знайти ймовірності отримання "відмінно", "добре", "задовільно" та "незадовільно".

Розв'язання. Розглянемо події:

{"відмінно"}=$A_{4/4}$={з 4 білетів відповіді є на 4};

{"добре"}$=A_{3/4}=${з 4 білетів відповіді є на 3};

{"незадовільно"}$=A_{5/0}=${з 5 білетів немає відповідей на жоден};

$a_i=${відповідь є на *і*-й білет}.

$$P(A_{4,4})=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4,\qquad P(A_{4,4})=\frac{15}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{12}{27}=\frac{13}{261}\approx 0{,}05;$$

$$P(A_{4,3})=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\overline{a}_4+a_1\cdot a_2\cdot\overline{a}_3\cdot a_4+a_1\cdot\overline{a}_2\cdot a_3\cdot a_4+\overline{a}_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4,$$

$$P(A_{4,3})=\frac{15}{30}\ \frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{15}{27}\cdot 4=\frac{65}{261}\approx 0{,}25;\ P(A_{5,0})=\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2\cdot\overline{a}_3\cdot\overline{a}_4\cdot\overline{a}_5,$$

$$P(A_{5,0})=\frac{15}{30}\cdot\frac{14}{29}\cdot\frac{13}{28}\cdot\frac{12}{27}\cdot\frac{11}{26}\approx 0{,}021.$$

Тепер зауважимо, що P("задовільно")=1; *P*("відмінно") –

– *P*("добре") – *P*("незадовільно") = $1-\frac{13}{26}-\frac{65}{261}-\frac{11}{261\cdot 2}=\frac{355}{522}\approx 0{,}68$

Відповідь: *P*("відмінно") = 0,05; *P*("добре") = 0,25; *P*("задовільно") = = 0,68; *P*("незадовільно") = 0,02.

Приклад 1.30. В урні знаходяться три кулі, кожна з яких з однаковою ймовірністю може бути білою, або синьою, або червоною. Навмання виймають дві кулі, які виявилися білими. Знайти ймовірність того, що й та куля, яка залишилася, також біла.

Розв'язання. До початку ймовірнісного експерименту відносно складу куль можна висловити такі припущення (тобто гіпотези):

$$H_{ббб}=б_1б_2б_3;P(H_{ббб})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27};\ P(H_{ббс})=\frac{3}{27};$$

$$H_{ббч}=б_1б_2ч_3+б_1ч_2б_3+ч_1б_2б_3;\ P(H_{ббч})=\frac{3}{27}.$$

Позначимо *A* = {витягли дві білі кулі}. Спочатку знайдемо повну ймовірність цієї події;

$$P(A)=P(H_{ббб})P(A/H_{ббб})+P(H_{ббс})P(A/H_{ббс})+$$
$$+P(H_{ббч})P(A/H_{ббч})=\frac{1}{27}\cdot 1+\frac{3}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{9}.$$

Згідно з формулою Байєса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{27}\right)\cdot 1}{\left(\frac{1}{9}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 1.31. Маємо три групи деталей по 20 деталей в кожній. Кількості стандартних деталей в першій, другій і третій групах відповідно дорівнюють 20, 15 та 10. З навмання вибраної групи навмання беруть деталь, яка виявляється стандартною. Деталь повертають у групу і знову з тієї ж групи навмання беруть деталь, яка знову виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були взяті з третьої групи.

Розв'язання. Гіпотези: $H_i=${було вибрано групу з номером i}. $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$. Оскільки витягнута деталь повертається в сукупність, то ймовірність витягти як першого, так і другого разу стандартну деталь однакова і дорівнює одиниці для першої групи, $\frac{15}{20}$ – для другої та $\frac{10}{20}$ – для третьої. Тому $P(A/H_1)=1$, $P(A/H_2)=\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $P(A/H_3)=\frac{1}{4}$.

Повна ймовірність витягти дві стандартні деталі: $P(A)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{29}{48}$.

За формулою Байєса $P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{29}{48}\right)}=\frac{4}{29}$.

Відповідь: $\frac{4}{29}$.

Приклад 1.32. В трьох урнах – по дві білі та три чорні кулі. З другої урни в першу навмання переклали одну кулю. Потім з навмання вибраної урни навмання беруть кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези:

$H_{1б}$ = {вибрано першу урну і перекладено білу кулю};

$H_{1ч}$ = {вибрано першу урну і перекладено чорну кулю};

$H_{2б}$ = {вибрано другу урну і перекладено білу кулю};

$H_{2ч}$ = {вибрано другу урну і перекладено чорну кулю};

$H_{3б}$ = {вибрано третю урну і перекладено білу кулю};

$H_{3ч}$ = {вибрано третю урну і перекладено чорну кулю}.

$P(H_{iб}) = P(h_i)P(б)$, де h_i = {вибрано урну з номером *i*}, $б$ = {з другої урни в першу перекладено білу кулю}; $P(h_i) = \dfrac{1}{3}$ – за умов задачі; $P(б) = \dfrac{2}{5}$, $P(ч) = \dfrac{3}{5}$.

Таким чином, $P(H_{1б}) = P(H_{2б}) = P(H_{3б}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$; $P(H_{1ч}) = P(H_{2ч}) = P(H_{3ч}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{15}$. Розглянемо поодинці умовні ймовірності:

$P(A/H_{1б}) = \dfrac{3}{6}$; $P(A/H_{1ч}) = \dfrac{2}{6}$;

$P(A/H_{2б}) = \dfrac{1}{4}$; $P(A/H_{2б}) = \dfrac{2}{4}$;

$P(A/H_{3б}) = \dfrac{2}{5}$; $P(A/H_{3ч}) = \dfrac{3}{5}$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_{iб})P(A/H_{iб}) + P(H_{iч}) \cdot P(A/H_{iч}) =$$

$$\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{25}.$$

Відповідь: $\dfrac{11}{25}$.

1.9. Елементи комбінаторики

Головна трудність при розв'язанні задач, пов'язаних з класичною схемою, полягає в обчисленні кількості наслідків експерименту. Введемо в розгляд таку модель. Маємо *n* однакових, але пронумерованих предметів, наприклад, куль або карток. Будемо витягувати ці предмети й розташовувати їх в позиціях, які також пронумеровано. В деяких випадках ці предмети повертають, але запам'ятовують їх номери ("вибірка з поверненням"). Результат цього процесу, який повторюють *m* разів, називають впорядкованою вибіркою (з поверненням чи без нього, залежно від конкретної задачі). Прикладом є будь-яке число з m цифр (впорядкована вибірка з поверненням довжини m).

Розміщення без повторення

Це є вибірка без повернення довжини m з n предметів. Їх кількість A_n^m підраховують так. Для того, щоб розмістити в першій з позицій який-небудь з n предметів, маємо n різних можливостей. Після цього залишається $(n-1)$ предмет; у другій позиції можна розташувати один із них. Таким чином, різних способів розташувати два предмети з n у двох перших позиціях маємо $n(n-1)$. Аналогічно для трьох позицій – $n(n-1)(n-2)$, і т.д., нарешті $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Наприклад, із чотирьох цифр, записаних на картках, можна утворити $4\cdot 3$ двозначних чисел, а саме: 12; 13; 14; 21; 23; 24; 31; 32; 34; 41; 42; 43, – всього чисел – 12.

Перестановки

Перестановкою називається розміщення з n предметів по n. Їх кількість позначається P_n, причому

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n!$$

Сполучення

Розглянемо розміщення з n предметів по m, які відрізняються лише чергуванням предметів (або їх номерів) по різних позиціях. Кожний такий набір утворює клас розміщень, який має назву сполучення.

Наприклад, у розглянутому прикладі сполучення з чотирьох предметів по два будуть такі: {12; 21}; {13; 31}; {14; 41}; {23; 32}; {24; 42}; {34; 43}.

Як бачимо, їх менше, ніж A_4^2, у стільки разів, скільки є різних розміщень з двох предметів по два, тобто різних перестановок з двох предметів.

У загальному випадку кількість сполучень C_n^m обчислюють так:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Із числами C_n^m пов'язана величезна кількість алгебричних тотожностей і формул. Відмітимо найпростіші з них: $C_n^m = C_n^{n-m}$; $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$ $(0! \equiv 1)$.

Розміщення з повтореннями

Розглянемо таку процедуру: з n занумерованих карток беруть одну, і її номер записують у першу позицію, а картку повертають. Потім знову вибирають навмання картку, її номер записують у другій позиції, а картку повертають, і т.д. – m повторень процедури. Послідовність номерів, яка виникає, має назву розміщення з n предметів по m з повтореннями. Для того, щоб підрахувати їх кількість $\overline{A}_n^m$, відзначимо, що для заповнення першої позиції є n можливостей, другої – також n, і т.д. Таким чином, $\overline{A}_n^m = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$.

Приклад 1.33. Скільки різних літеросполучень із п'яти літер можна одержати з літер слова "ПАПУГА"? (літери записані на картках).

Розв'язання. Пронумеруємо картки літер цього слова. Літери на картках з номерами 1 і 3 однакові; це ж відноситься і до карток з номерами 2 і 5. Загальна кількість літеросполучень, які відрізняються номерами на картках, збігається з кількістю перестановок п'яти речей, тобто дорівнює $5! = 120$. Але серед них однаковими будуть ті, які відрізняються лише взаємним розташуванням карток із номерами 1 і 3 (а також 2 і 5). Таким чином, різних літеросполучень буде менше в $2 \cdot 2$ рази, тобто їх буде 30.
Відповідь: 30.

Приклад 1.34. П'ять пронумерованих карток розкладують навмання в рядок із п'яти позицій. Чому дорівнює ймовірність того, що на другій та четвертій позиціях будуть знаходитися картки з номерами 2 і 4?

Розв'язання. Різних розташувань $n = 5!$. Ті з них, для яких картки з номерами 2 і 4 знаходяться на другій та четвертій позиціях, відрізняються розташуванням карток на інших трьох позиціях; їх кількість $m = 3!$. Тому ймовірність, про яку йдеться в умові, дорівнює $\frac{m}{n} = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$.

Відповідь: $\frac{1}{20}$.

Приклад 1.35. П'ять мотузок однакової довжини складено так, що всі кінці спрямовані в один бік. Знайти ймовірність того, що вибрані навмання два кінці належать одній мотузці.

Розв'язання. Нехай n – загальна кількість рівноможливих випадків. Вона дорівнює кількості способів витягти два кінця з десяти, тобто кількості сполучень з 10 по 2: $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Кількість сприятливих випадків дорівнює загальній кількості пар кінців, що належать до тієї самої мотузки, тобто кількості мотузок: $m = 5$. Ймовірність події, про яку йдеться в умові задачі, дорівнює $\frac{m}{n} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

Відповідь: $\frac{1}{9}$.

Приклад 1.36. Знайти ймовірність того, що серед 25 студентів однієї групи хоча б для двох із них день народження припадає на один день року (вважаємо, що в році 365 днів).

Розв'язання. Виходимо з того, що день народження є рівноможливим з 365 для кожного студента. Занумеруємо студентів і підрахуємо кількість всіх можливих комбінацій днів народження. Для першого з них – 365 можливостей, для другого – також 365, і т.д. Таким чином, загальну кількість n всіх рівноможливих комбінацій обчислюють так: $n = 365^{25}$. Позначивши подію задачі A, обчислимо кількість комбінацій, сприятливих відносно протилежної події $\overline{A}$. Для першого із студентів кількість можливостей 365. Цей день треба викреслити, і тоді для другого буде 364 можливості. Викреслюючи і цей день, для третього отримуємо 363 можливості і т.д. :

$$m = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - 25 + 1) = A_{365}^{25},$$

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 341}{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365} = 0{,}431303.$$

Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}5686997$.

Відповідь: $P(A) = 0{,}5686997$.

Зауваження**.** Ця задача належить до численних парадоксів теорії ймовірностей, для яких інтуїтивно очікувані й обчислені результати різко відрізняються.

Приклад 1.37. В урні знаходяться шість однакових пронумерованих куль. Проводиться послідовне виймання навмання чотирьох куль без повернення. Чому дорівнює ймовірність того, що послідовність номерів куль буде зростаючою ?

Розв'язання. Загальна кількість рівноможливих послідовностей n дорівнює кількості A_6^4 розміщень із шести предметів по чотири: $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Прийнятні випадки схематично можна зобразити так: {1, 2, 3, 4}; {1, 2, 3, 5}; {1, 2, 3, 6}; {1, 2, 4, 5}; {1, 2, 4, 6}; {1, 2, 5, 6}; {1, 3, 4, 5}; {1, 3, 4, 6}; {1, 3, 5, 6}; {1, 4, 5, 6}; {2, 3, 4, 5}; {2, 3, 4, 6}; {2, 3, 5, 6}; {2, 4, 5, 6}; {3, 4, 5, 6}.

Їх загальна кількість $m = 15$.

Ймовірність, про яку йдеться в умові, – $\frac{15}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{24}$.

Відповідь: $\frac{1}{24}$.

Приклад 1.38. На першому поверсі одинадцятиповерхового будинку до ліфта заходять семеро чоловік, кожен з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому з наступних поверхів. Чому дорівнює ймовірність того, що на п'ятому поверсі вийдуть два пасажири?

Розв'язання. Пронумеруємо пасажирів. Для кожного з них існують десять рівних можливостей вийти на другому, третьому і т.д. поверхах. Таким чином, загальна кількість рівноможливих комбінацій – десять у сьомому степені.

Виберемо яку-небудь пару пасажирів. Це можна зробити $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \;= 21$ способами. Для кожної пари є один спосіб вийти на п'ятому поверсі, але для інших п'ятьох сприятливих відносно події задачі є 9^5 способів.

Ймовірність задачі: $\frac{C_7^2 \cdot 1 \cdot 9^5}{10^7} = 0{,}1240029\ldots$.

Відповідь: 0,124.

Приклад 1.39. Мішають чотири картки з номерами від 1 до 4. Потім проводять витягування без повернення, порівнюючи номер на картці з номером витягування. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз ці номери будуть збігатися.

Розв'язання. Розглянемо події: $A_i =$ {номер на картці збігається з номером витягування}. Ці події залежать одна від одної. Подія *C* пов'язана з введеними подіями за допомогою сполучника "або": $\mathrm{C} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_4$.

$P(C) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_1 A_4) -$
$- P(A_2 A_3) - P(A_2 A_4) - P(A_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_4) + P(A_1 A_3 A_4) +$
$+ P(A_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3 A_4)$ (формула "включення – виключення").

$$P(A_i) = \frac{3!}{4!};\; P(A_i A_j) = \frac{2!}{4!};\; P(A_i A_j A_k) = \frac{1!}{4!};\; P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{0!}{4!}.$$

Тому $P(C) = C_4^1 \cdot \frac{3!}{4!} - C_4^2 \cdot \frac{2!}{4!} + C_4^3 \cdot \frac{1!}{4!} - C_4^4 \cdot \frac{0!}{4!}$. Зауважимо, що $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $0! \equiv 1$. Формулу для $P(C)$ можна записати так:

$$P(C) = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{3!}{4!} - \; - \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{4!} + \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{1!}{4!} - \frac{4!}{0!4!} \cdot \frac{0!}{4!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{5}{8}.$$

Відповідь: $\frac{5}{8}$.

<u>Узагальнення</u>**.** Якщо карток *n*, то

$P(C) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} \cong 1 - \frac{1}{e}$, як і у випадку вибірок з поверненням.

Приклад 1.40. З урни, в якій знаходяться вісім білих і три чорні кулі, виймають кулі поодинці без повернення, доки не будуть витягнуті всі чорні кулі. Знайти ймовірність того, що кількість витягнутих куль не перевищує шести.

Розв'язання. Розглянемо подію $\overline{A}$, протилежну події задачі, а також події *б* і *ч* – виймання білої та чорної куль. $\overline{A} = B_0 + B_1 + B_2$, де B_i – за шість виймань серед куль було *і* чорних, а інші – білі.

$B_0 = бббббб$; $B_1 = чббббб + бчбббб + ббчббб + \ldots + бббббч$ (всього $C_6^1 = 6$ членів); $B_2 = ччбббб + чбчббб + \ldots + ббббчч$ (всього $C_6^2 = 15$).

$P(B_0) = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$; $P(B_1) = 6 \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6}$;

$P(B_2) = 15 \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6}$;

$$P(\overline{A}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}(4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 4 + 15 \cdot 3 \cdot 2) = \frac{29}{33}.$$

У такому разі $P(A) = \frac{4}{33}$.

Відповідь: $\frac{4}{33}$.

Приклад 1.41. В три урни навмання кидають три чорні кулі і три білі. Знайти ймовірність того, що в першій урні буде знаходитися одна біла і одна чорна кулі.

Розв'язання. Для кожної з куль ймовірність потрапити в першу урну дорівнює $p = \frac{1}{3}$. Подія *А* задачі здійсниться, якщо здійсниться подія *В*={одна з трьох білих куль потрапить у першу урну} і подія *С*={одна з трьох чорних куль потрапить у першу урну}: $A = B \cdot C$. Події *В* і *С* незалежні; ймовірність А підраховують за формулою $P(A) = \left(C_3^1 p^1 q^2\right)^2 = = \left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$.

Відповідь: $\frac{16}{81}$.

Приклад 1.42. У першій урні дві білі, одна синя та дві червоні кулі; в другій – дві білі, одна синя та дві червоні. З другої урни в першу перекладають навмання три кулі, після цього з першої урни навмання беруть три кулі. Чому дорівнює ймовірність того, що всі вони – різного кольору?

Розв'язання. Введемо в розгляд такі гіпотези: $H_1 = \{2б,\ 1с\}$; $H_2 = \{2б,\ 1ч\}$; $H_3 = \{1б,\ 1с,\ 1ч\}$; $H_4 = \{1б,\ 2ч\}$; $H_5 = \{1с,\ 2ч\}$. Для підрахування ймовірностей гіпотез визначимо спочатку загальну кількість *п* способів взяти три кулі з наявних п'яти: $n = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. Кількості сприятливих випадків для кожної з гіпотез такі: $m_1 = C_2^2 C_1^1 = 1$; $m_2 = C_2^2 C_2^1 = 2$; $m_3 = C_2^1 C_1^1 C_2^1 = 4$; $m_4 = C_2^1 C_2^2 = 2$; $m_5 = C_1^1 C_2^2 = 1$. Тому апріорні ймовірності мають такі значення: $P(H_1) = \frac{1}{10}$; $P(H_2) = \frac{2}{10}$; $P(H_3) = \frac{4}{10}$; $P(H_4) = \frac{2}{10}$; $P(H_5) = \frac{1}{10}$. Якщо виконалася гіпотеза H_1, то в першій урні білих куль стало чотири, синіх – дві, чорних – дві, і ймовірність витягти кулі різного кольору дорівнює $\frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{C_8^3} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{56}$; $P(A/H_1) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{56}$. Аналогічно $P(A/H_2) = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{56}$; $P(A/H_3) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{56}$; $P(A/H_4) = \frac{3 \cdot 1 \cdot 4}{56}$; $P(A/H_5) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{56}$.

Згідно з формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(H_i)P(A/H_i)$,

$$P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{56}(1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4) = \frac{19}{70}.$$

Відповідь: $\frac{19}{70}$.

Приклад 1.43. Серед 12 лотерейних білетів три – виграшні. Купують чотири білети. Знайти ймовірність того, що серед них два білети – виграшні.

Розв'язання. Всіх різних можливих випадків витягти чотири білети $n = C_{12}^4$. Припустимо, що два з них – виграшні. Це означає, що ці два білети взято серед чотирьох виграшних. Різних способів це реалізувати – C_4^2. Інші два з чотирьох, що купили, взято серед восьми невиграшних. Різних комбінацій для цього – C_8^2. Тому загальна кількість комбінацій з двох виграшних і двох невиграшних – $C_4^2 C_8^2 = m$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 C_8^2}{C_{12}^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{56}{165}.$$

Відповідь: $\frac{56}{165}$.

Узагальнення**.** Якщо всіх білетів $N + M$, серед яких M виграшних, і купують $n + m$ білетів, то ймовірність того, що серед них m виграшних і n невиграшних, дорівнює $\frac{C_N^n \cdot C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}$.

Приклад 1.44. Серед 12 білетів два білети дають виграш в 2 грн., три – в 1 грн. і сім – без виграшу. Купують чотири білети. Знайти ймовірність того, що виграш буде дорівнювати 4 грн.

Розв'язання. Подію задачі A можна уявити як суму подій B і C, де $B=$\{витягнули два білети в 2 грн. та два невиграшні\}, $C=$\{витягнули один білет в 2 грн., два в 1 грн. та один невиграшний\}.

Тому

$$P(A)=\frac{\left(C_2^2C_7^2+C_2^1C_3^2C_7^1\right)}{C_{12}^4}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}\left(\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{1}\right)=\frac{7}{55}.$$

Відповідь: $\frac{7}{55}$.

Приклад 1.45. В десять комірок навмання кидають три кулі, але так, що в кожній комірці може знаходитися не більше однієї кулі. Знайти кількість способів це зробити.

Розв'язання. Кожній з комірок надамо свого номеру. Тоді кожному способу відповідає сполучення з трьох номерів із десяти. Таким чином, кількість способів – $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$.

Відповідь: 120.

Узагальнення 1. Якщо всіх комірок n, а куль – m, то загальна кількість способів розташування їх у комірках така, щоб у кожній з комірок було не більше однієї кулі, – дорівнює C_n^m.

Узагальнення 2. Розглянемо всі двійкові числа, які в своєму запису мають m одиниць і загальна довжина яких не більше n, і поставимо питання про їх кількість. З кожним із чисел можна зіставити n пронумерованих комірок, в яких одиниці відповідає заповнення кулькою, а нулю – пуста комірка. Тому таких чисел – C_n^m.

Узагальнення 3. Всіх трійкових чисел довжини n, які мають у своєму запису m_1 одиниць і m_2 двійок (інші – нулі) –

$$C_n^{m_1}C_{n-m_1}^{m_2}=\frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\times\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}=\frac{n!}{m_1!m_2!(n-m_1-m_2)}.$$

Якщо позначити $n-m_1-m_2=m_0$, то одержану кількість трійкових чисел можна записати так: $\frac{(m_0+m_1+m_2)!}{m_0!m_1!m_2!}$.

Приклад 1.46. Із кулі навмання кидають у дві комірки. Знайти загальну кількість розташувань куль у комірках.

Розв'язання. 1-й спосіб: пронумерувати комірки як першу та другу. Тоді всі способи можна перелічити як пари чисел: (3, 0); (2, 1); (1, 2); (0, 3). Таким чином, відповідь задачі – чотири способи.

2-й спосіб: з кожним із варіантів заповнення кулями комірок зіставимо двійкові числа так, що цифрі відповідає стільки ж одиниць, а комі – 0: (1 1 1 0); (1 1 0 1); (1 0 1 1); (0 1 1 1). Таких чисел $C_4^3 = 4$.

Відповідь: 4.

<u>Узагальнення</u>**.** Припустимо, що куль – m, комірок – n; кулі навмання кидають у ці комірки. Скільки є різних варіантів заповнення? Використаємо ідею, наведену в другому способі. Загальна довжина кожного з двійкових чисел, які зіставляються з варіантами заповнення, дорівнює $m+n-1$, тому що всіх одиниць стільки, скільки куль, а нулів – скільки ком, тобто $n-1$. Тому загальна кількість варіантів – C_{m+n-1}^{m}. Це є кількість так званих сполучень із повторенням.

1.10. Геометрична ймовірність

Задачі, пов'язані з геометричною ймовірністю, відзначаються нескінченною, навіть незліченною кількістю елементарних подій, які, так би мовити, "рівноможливі", що дозволяє ввести міру, яка відповідає "звичайній" довжині, або площі, або об'єму і т.д.

Приклад 1.47. Відрізок довжиною 7 од. ламають у точці, вибраній навмання. Знайти ймовірність того, що різниця довжин одержаних відрізків перевищує 2.

Розв'язання. Розташуємо відрізок вздовж осі OX так, щоб лівий кінець зайняв положення початку осі координат, а правий – точки з координатою 7. Тоді з точкою, в якій ламають відрізок, можна зіставити число x, як її координату. Довжинам відрізків у цьому разі будуть відповідати числа x та $7-x$, а їхній різниці $|x-(7-x)|$, тобто $|2x-7|$. Подія задачі еквівалентна події: $\{|2x-7| \geq 2\}$. Ймовірність останньої обчислюють як відношення міри (в даному разі загальної довжини) області, для якої виконується подія $\{|2x-2| \geq 2\}$, до міри несуперечної події, яка дорівнює 7. Розв'язуємо нерівність

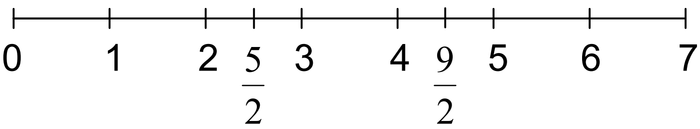


Рис. 1.18

$$|2x-7| \geq 2 \to (2x-7 \geq 2) \cup (2x-7 \leq -2) \to \left(x \geq \frac{9}{2}\right) \cup \left(x \leq \frac{5}{2}\right).$$

$$P(A) = \frac{2{,}5+2{,}5}{7} = \frac{5}{7} \text{ (рис. 1.18).}$$

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

Приклад 1.48. Відрізок AB точками C і D поділений на три так, що довжина AC дорівнює 0,25, довжина CD – 0,25, довжина DB – 0,5. На відрізок AB навмання кидають три точки. Знайти ймовірність того, що на кожному з відрізків AC, CD і DB буде знаходитися по одній точці.

Розв'язання. Влучення кожною окремою точкою в якийсь відрізок не залежить від того, куди влучили інші точки. Нехай AC - перший з відрізків, CD - другий та DB - третій. Позначимо a_{ij} подію: i-ю точкою влучили в j-й відрізок. Подія задачі F може бути сконструйована таким чином:

$$F = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} +$$

$+ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$. $P(a_{i1}) = \frac{1}{4}$; $P(a_{i2}) = \frac{1}{4}$; $P(a_{i3}) = \frac{1}{2}$, i=1, 2, 3.

Тому $P(F) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$.

Відповідь: $\frac{3}{16}$.

Приклад 1.49. Відрізок довжиною 5 од. ламають в навмання вибраній точці. Знайти ймовірність того, що найбільший з уламків має довжину, меншу, ніж 3 од.

Розв'язання. Подія задачі еквівалентна такій: {кожен з уламків має довжину, меншу, ніж 3}={лівий уламок, менший за 3} і {правий уламок, менший за 3}: $A = \{x \le 3\} \cdot \{5 - x \le 3\}$, тобто $A = \{2 \le x \le 3\}$.

Тому $P(A) = \frac{1}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

Приклад 1.50. Відрізок довжиною 9 од. ламають у точці, вибраній навмання. Знайти ймовірність того, що довжина найбільшого перевищує довжину меншого більш ніж у два рази.

Розв'язання. Запишемо подію A у вигляді логічного виразу $A =$ $= \left\{(0 \le x \le 9 - x) \cap \left(\frac{9-x}{x} \ge 2\right)\right\}$ або $\left\{(0 \le 9 - x \le x) \cap \left(\frac{x}{9-x}\right) \ge 2\right\}$, що є еквівалентним двом системам нерівностей

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{9}{2}, \\ 9 \ge 3x, \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{9}{2} \le x \le 9, \\ 3x \ge 18 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 3] \cup [6; 9].$$

Тому $P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 1.51. Відрізок довжиною 1 од. ламають в навмання вибраній точці. Знайти ймовірність того, що з одержаних уламків і ще одного відрізка довжини $\frac{1}{3}$ можна побудувати трикутник.

Розв'язання. Розташуємо відрізок на осі OX так, щоб один кінець зайняв положення початку координат. Подію задачі A, враховуючи те, що сума довжин будь-яких двох сторін трикутника повинна бути не меншою, ніж третя, можна записати як перетин відповідних подій: $A = \left\{ \left(x + 1 - x \ \geq \frac{1}{3} \right) \bigcap \left(x + \frac{1}{3} \geq 1 - x \right) \bigcap \left(1 - x + \frac{1}{3} \geq x \right) \right\}$. Їй відповідає розв'язання системи нерівностей

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1, \\ 1 \geq \frac{1}{3}, \\ x \geq \frac{1}{3}, \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right].$$

Міра відповідної області дорівнює $\frac{1}{3}$; міра несуперечної події в даних умовах дорівнює одиниці. Тому ймовірність події задачі дорівнює $\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 1.52. Відрізок довжиною 1 од. ламають у навмання вибраній точці. Знайти ймовірність того, що найменший з уламків може бути стороною трикутника, дві інші сторони якого мають довжини 0,4 та 0,5.

Розв'язання. Події задачі відповідає така логічна структура:

$$A = (x \geq 0) \bigcap (x \leq 1) \bigcap \left(\begin{array}{l} \{(x \leq 1 - x) \bigcap (x + 0{,}4 \geq 0{,}5) \bigcap \\ \bigcap (x + 0{,}5 \geq 0{,}4) \bigcap (0{,}5 + 0{,}4 \geq x)\} \bigcap \end{array} \right.$$

$$\left. \bigcap \{(1 - x \leq x) \bigcap (1 - x + 0{,}4 \geq 0{,}5) \bigcap (1 - x + 0{,}5 \geq 0{,}4) \bigcap (0{,}5 + 0{,}4 \geq 1 - x)\} \right),$$ яку можна записати у вигляді двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x \leq 1 - x, \\ x + 0{,}4 \geq 0{,}5, \\ x + 0{,}5 \geq 0{,}4, \\ 0{,}4 + 0{,}5 \geq x, \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x \leq x, \\ 1 - x + 0{,}4 \geq 0{,}5, \\ 1 - x + 0{,}5 \geq 0{,}4, \\ 0{,}4 + 0{,}5 \geq x \end{cases} \sim (0{,}1 \leq x \leq 0{,}5) \bigcup (0{,}5 \leq x \leq 0{,}9) \sim x \in [0{,}1;\ 0{,}9].$$

Таким чином, $P(A) = \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8$.

Відповідь: 0,8.

Приклад 1.53. Відрізок довжиною 4 од. ламають у двох точках, вибраних навмання. Знайти ймовірність того, що довжина кожного з уламків не менша, ніж 1 од.

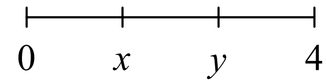


Рис. 1.19

Розв'язання. Одній з точок нехай відповідає її відстань від лівого кінця, яку позначимо символом x, а другій – також відстань від лівого кінця, яку позначимо y (рис. 1.19). Число x може бути як більшим, так і меншим, ніж y.

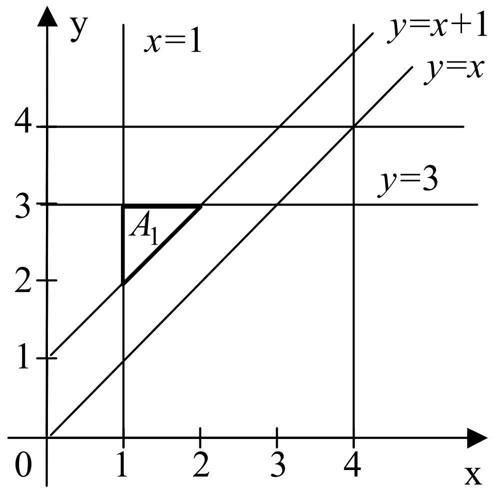


Рис. 1.20

Події A задачі відповідає такий логічний вираз: $\{(0 \le x \le y \le 4) \cap (x \ge 1) \cap \cap (y - x \ge 1) \cap (4 - y \ge 1)\}$ або $\{(0 \le \le y \le x \le 4) \cap (y \ge 1) \cap (x - y \ge 1) \cap \cap (4 - x \ge 1)\}$. Для графічного відображення будемо відкладати x на осі OX, y – на осі OY (рис. 1.20).

$A = A_1 + A_2$, подія A_2 симетрична A_1 відносно прямої y=x.

Міра події A_1, в даному разі площа, дорівнює 0,5. Міра несуперечної події є площа квадрата зі стороною 4, тобто 16.

Тому $P(A) = \dfrac{0{,}5 + 0{,}5}{16} = \dfrac{1}{16}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{16}$.

Приклад 1.54. Відрізок довжиною 4 од. ламають у двох точках, вибраних навмання. Знайти ймовірність того, що з лівого, правого уламків і ще одного відрізка довжини 1 можна побудувати трикутник.

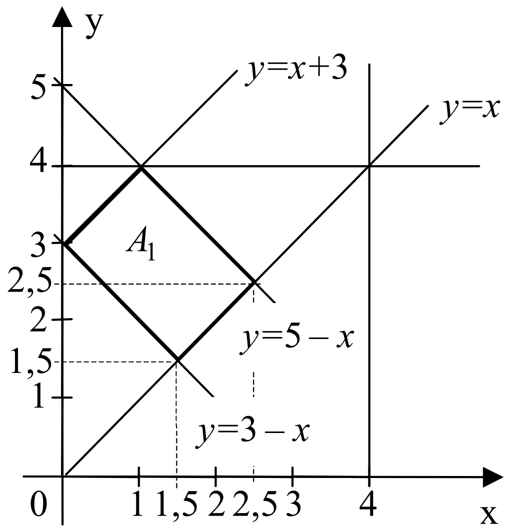


Рис. 1.21

Розв'язання. Поставимо у відповідність двом точкам два числа x і y (рис. 1.21). Подію A задачі запишемо у вигляді логічного виразу, використовуючи нерівності трикутника

$A = \{(0 \le x \le y \le 4) \cap \cap (x + 4 - y \ge 1) \cap (x + 1 \ge 4 - y) \cap (4 - y + + 1 \ge x)\}$ або $\{(0 \le y \le x \le 4) \cap (y + 4 - - x \ge 1) \cap (y + 1 \ge 4 - x) \cap (4 - x + 1 \ge y)\} = = A_1 + A_2$.

$A_1 = (0 \le x \le y \le 4) \cap (y \le x + 3) \cap \cap (y \ge 3 - x) \cap (y \le 5 - x)$. Подія A_2 відображається симетрично відносно прямої y=x.

Міра A_1: $S_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} = 3$.

Таким чином, $P(A) = \frac{3+3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Відповідь: $\frac{3}{8}$.

Приклад 1.55. На колі навмання вибирають три точки, які є вершинами трикутника. Знайти ймовірність того, що цей трикутник гострокінцевий.

Розв'язання. Розташуємо коло так, щоб його центр знаходився в початку координат, а одну з трьох точок – у точці з координатами $(R; 0)$. Кожній з інших двох вершин відповідає центральний кут, позначимо їх φ_1 та φ_2. Будемо вимірювати їх проти ходу годинникової стрілки від 0 до 2π радіан (рис. 1.22). Несуперечній події відповідає квадрат зі стороною 2π (рис. 1.23).

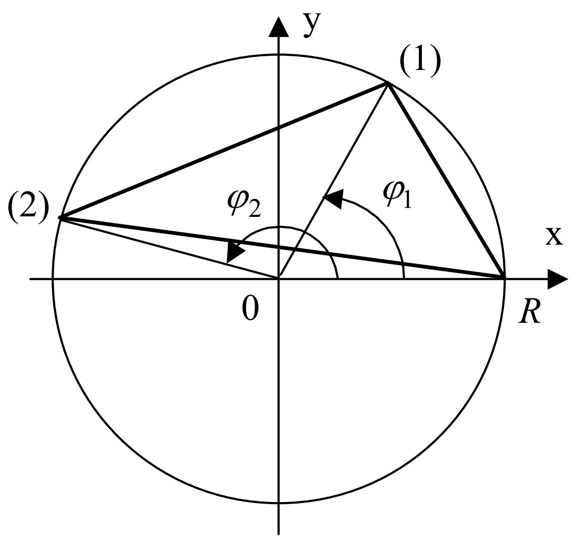


Рис. 1.22

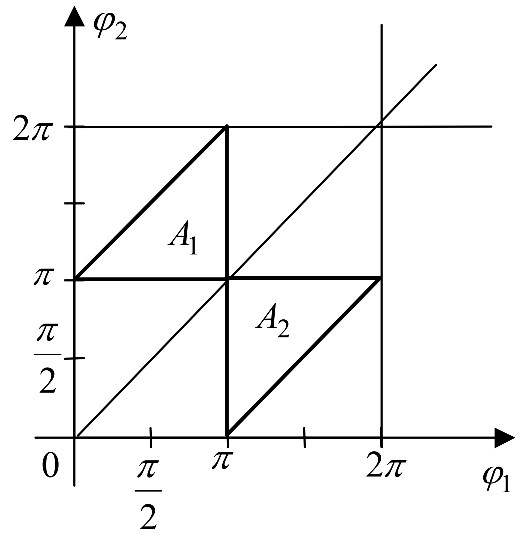


Рис. 1.23

Розглянемо ту частину квадрата, в якій $\varphi_2 \geq \varphi_1$. Трикутник буде гострокінцевим, якщо $\varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$, $\varphi_1 \leq \pi$ і $\varphi_2 \geq \pi$. Подія A_2, яка відповідає випадку $\varphi_1 \geq \varphi_2$, розташується симетрично. Таким чином, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Приклад 1.56. Два відрізки довжиною по 1 од. ламають кожен у точці, вибраній навмання. Знайти ймовірність того, що сума довжин найдовших уламків перевищує 1,5.

Розв'язання. Розташуємо кожен із відрізків на осях *OX* та *OY* (рис. 1.24). Тоді точці, в якій переламано перший відрізок, відповідає число $x \in [0; 1]$, а точці переламування другого – число y. Події задачі ставиться у відповідність точка з координатами $(x; y)$. Всі такі точки заповнюють квадрат, міра якого дорівнює одиниці.

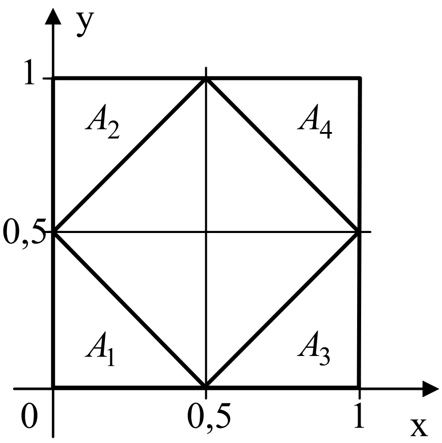


Рис. 1.24

Події задачі A відповідає область, яка є об'єднанням областей A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A=\{(0\le x\le 0{,}5)\cap(0\le y\le 0{,}5)\cap(1-x+1-y\ge 1{,}5)\}\cup\{(0\le x\le 0{,}5)\cap(0{,}5\le y\le 1)\cap(1-x+y\ge 1{,}5)\}\cup\{(0{,}5\le x\le 1)\cap(0\le y\le 0{,}5)\cap(x+1-y\ge 1{,}5)\}\cup\{(0{,}5\le x\le 1)\cap(0{,}5\le y\le 1)\cap x+y\ge 1{,}5)\}.$$

Таким чином, $P(A)=4\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 1.57. Перший відрізок ламають у точці, вибраній навмання; таким же чином ламають другий. Знайти ймовірність, що сума довжин двох найдовших уламків більше ніж вдвічі перевищує суму довжин коротких.

Розв'язання. Поставимо у відповідність події задачі точку $(x; y)$.

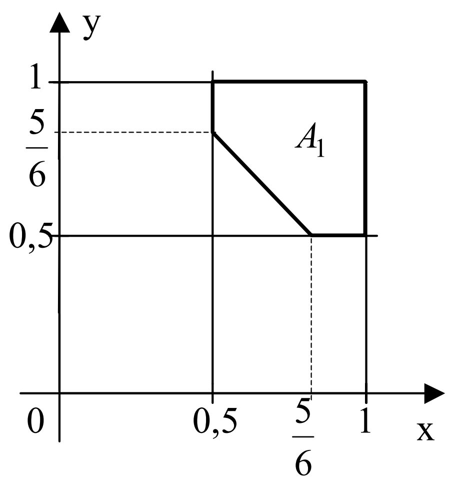


Рис. 1.25

Розглянемо подію

$$A_1=\left\{(0{,}5\le x\le 1)\cap(0{,}5\le y\le 1)\cap\left(\frac{x+1}{1-x+1-y}\ge 2\right)\right\},$$ тобто $\{(x\in[0{,}5;\,1])\cap(y\in[0{,}5;\,1]\cap\cap\left(x+y\ge\dfrac{4}{3}\right)\}$. $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{36}$ (рис. 1.25); $P(A)=\dfrac{\left(4\cdot\dfrac{7}{36}\right)}{1}=\dfrac{7}{9}$.

Відповідь: $\dfrac{7}{9}$.

Приклад 1.58. Відрізок довжиною 3 од. ламають у двох точках, вибраних навмання. Чому дорівнює ймовірність того, що сума довжин лівого та правого уламків не перевищує 2 од.?

Розв'язання. Подія A задачі є сумою подій A_1 та A_2 (рис.1.26): $A_1=\{(0\le x\le y\le 3)\cap(x+3-y\le 2)\}$; $A_2=\{(0\le y\le x\le 3)\cap(y+3-x\le 2)\}$.

$S_1 + S_2 = 2 \cdot 2$; $S_A = 3 \cdot 3$; $P(A) = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

Відповідь: $\frac{4}{9}$.

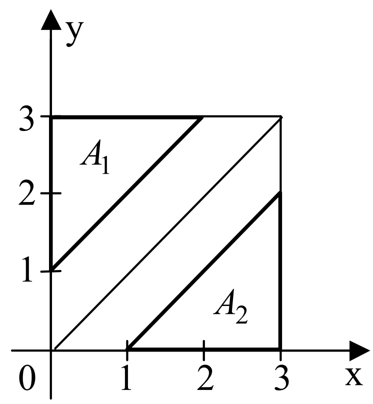


Рис. 1.26

Приклад 1.59. Відрізок ламають у двох точках, вибраних навмання. Знайти ймовірність того, що різниця довжин крайніх уламків перевищує довжину середнього.

Розв'язання. Припустимо, що довжина відрізка – l. Тоді

$A_1 = \{(0 \le x \le y \le l) \bigcap (|x - l + y| \ge y - x)\}$,

$A_2 = \{(0 \le y \le x \le l) \bigcap (|y - l + x| \ge x - y)\}$.

Побудуємо області в площині (XOY), які відповідають подіям A_1 і A_2 (рис. 1.27).

$A_1 = A_{11} + A_{12}$, $A_2 = A_{21} + A_{22}$, $P(A) = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

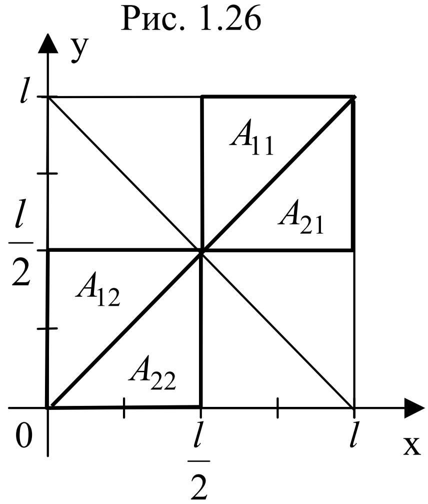


Рис. 1.27

Приклад 1.60. Супутник подає сигнали впродовж однієї хвилини через кожні п'ять хвилин. Приймальний пристрій включають на хвилину прийому також через кожні п'ять хвилин. У полі чутливості супутник знаходиться десять хвилин. Знайти ймовірність того, що сигнал буде прийнятий, вважаючи, що моменти початку передачі та початку прийому ніяк не узгоджені.

Розв'язання. З моментом початку передачі супутником сигналу можна зіставити число x, а з моментом початку прийому – число y. Оскільки ці моменти періодичні, то насправді з всіма такими моментами можна зіставити $x \pm k \cdot 5$, $y \pm l \cdot 5$, де k, l – цілі числа. Умовою здійснення прийому є виконання нерівності $|x + k \cdot 5 - y \cdot l \cdot 5| \le 1$.

Таким чином, у системі координат виникає сім'я смуг, яким відповідає подія задачі (рис. 1.28). Квадрату зі стороною 10 відповідає множина моментів часу, коли

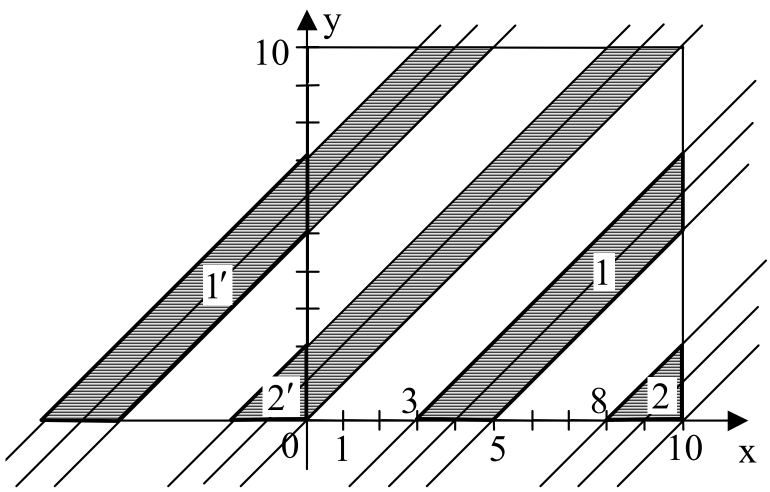


Рис. 1.28

супутник знаходиться в полі чутливості. Порівнюючи області 1 і $1'$ та 2 і $2'$, переконуємося, що вони є попарно рівні, і тому площа закреслених смуг, розташованих у межах квадрата, дорівнює $2\cdot 2\cdot 10=40$. Ймовірність події задачі є число $\frac{40}{100}=0{,}4$.

Відповідь: 0,4.

Приклад 1.61. Двоє домовилися про зустріч таким чином: перший з'являється між одинадцятою та дванадцятою годинами в будь-який момент і чекає на іншого не більше десяти хвилин, але не пізніше дванадцятої уходить. Це ж відноситься і до другого, але він чекає не більше двадцяти хвилин. Підрахувати ймовірність того, що зустріч відбудеться.

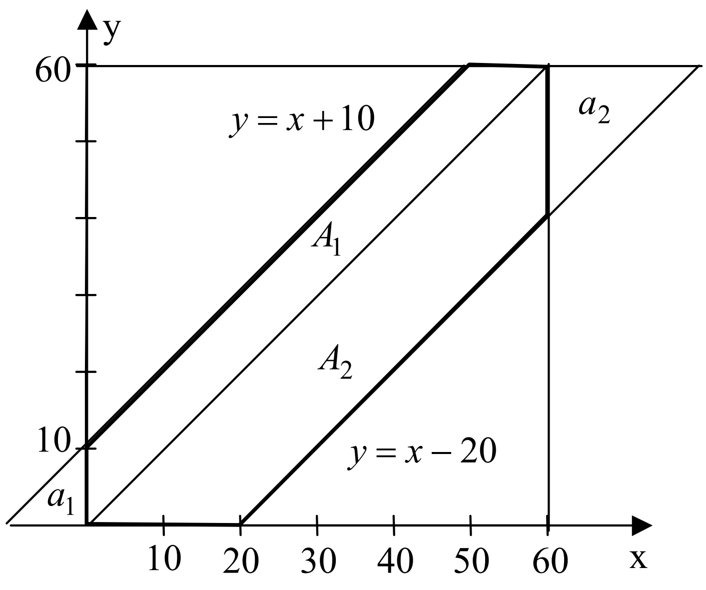


Рис. 1.29

Розв'язання. Нехай моменту появи першого відповідає число *x*, а другого – *y*. Зустріч відбудеться, якщо буде виконано одну з умов: $10 \ge y - x \ge 0$, або $20 \ge x-y \ge 0$, але при цьому $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$.

$S_{A1}=10\cdot 60 - S_{a1} = 10\cdot 60 - \frac{1}{2}\cdot 10^2$;

$S_{A2}=20\cdot 60 - S_{a2} = 20\times 60 - \frac{1}{2}\cdot 20^2$ (рис. 1.29).

Тоді $P(A_1+A_2)=\frac{S_{A1}+S_{A2}}{60\cdot 60} = =\frac{1}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{31}{72}$.

Відповідь: $\frac{31}{72}$.

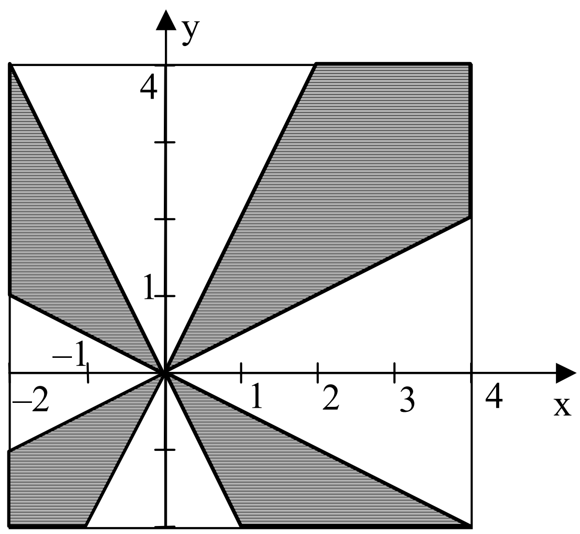


Рис. 1.30

Приклад 1.62. На відрізку [–2; 4] навмання взяті два числа. Знайти ймовірність того, що квадрат одного з них більш ніж в чотири рази перевищує квадрат іншого.

Розв'язання. Подію *A* задачі можна подати як суму двох подій:

$A = ((x^2 \ge 4y^2) \cup (y^2 \ge 4x^2)) \cap$ $\cap ((x \in [-2;4]) \cup (y \in [-2;4]))$.

Події задачі відповідає не закреслена частина квадрата (рис. 1.30).

$S_A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 20$, $S_i = 6 \cdot 6 = 36$.

Таким чином, $P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Відповідь: $\frac{5}{9}$.

Приклад 1.63. Відрізок довжиною 1 од. ламають у двох навмання взятих точках. Знайти ймовірність того, що довжина найбільшого з уламків перевищує довжину найменшого більш ніж в t разів.

Розв'язання. З подією задачі зіставимо точку в правильному трикутнику висотою 1, яка віддалена від однієї сторони на x, від другої – на y, від третьої – на z, де x, y, z – довжини лівого, середнього та правого уламків (рис. 1.31).

Події $\{x \le y < z\} \cap \left\{\frac{z}{x} > t\right\}$ відповідає область $ADKB_1$, де $\frac{DA_1}{DM} = t$. Обчислимо площу ΔODK:

$S_{\Delta ODK} = \frac{OK}{OB_1} \cdot \frac{OD}{OA} \cdot S_{\Delta AOB_1}$, $\frac{KB_1}{KL} = \frac{1}{t}$,

$KB_1 + 2 \cdot KL = 1 \Rightarrow KB_1 = \frac{1}{1+2t}$,

$OK = \frac{1}{3} - KB_1 = \frac{2(t-1)}{3(1+2t)}$, $\frac{OK}{OB_1} = \frac{2(t-1)}{1+2t}$;

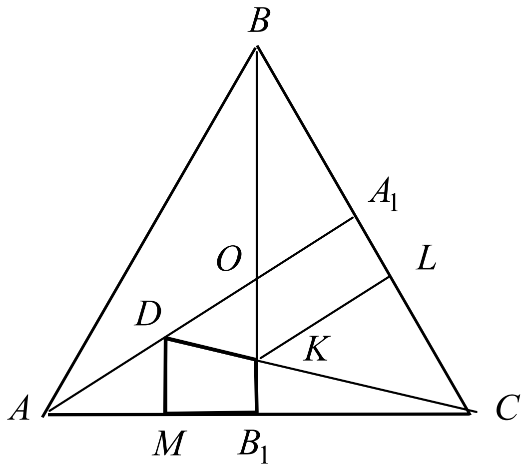


Рис. 1.31

$AD = 2DM$, $AD + DA_1 = 1$, $\frac{DA_1}{DM} = t \Leftrightarrow AD = \frac{2}{2+t}$, $OD = \frac{2}{3} - AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{t-1}{2+t}$.

Тому $S_{\Delta ODK} = \frac{2(t-1)^2}{(1+2t)(2+t)} \cdot \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$.

З точки зору симетрії $P(\overline{A}) = 6\frac{S_{\Delta ODK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2(t-1)^2}{(1+2t)(2+t)}$,

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{9t}{(1+2t)(2+t)}$, $t > 1$.

Відповідь: $\frac{9t}{(1+2t)(2+t)}$, $t > 1$.

2. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Розглянемо серію ймовірнісних експериментів, кожен з яких незалежно від інших може мати наслідком або подію A з ймовірністю p, або подію $\overline{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$.

2.1. Формула Бернуллі

Вона дає відповідь на запитання: чому дорівнює ймовірність P_n^m того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів? Пронумеруємо випробування; зіставимо з подією A число 1, з відсутністю її – число 0. Тоді кількість різних серій n випробувань з m "успіхами" дорівнює кількості двійкових чисел довжини n з m одиницями. Ця кількість, як було доведено, дорівнює C_n^m. Кожна з серій не сумісна з іншою і має вигляд добутку незалежних подій A_i чи $\overline{A}_j$, де i, j – номери випробувань. Ймовірність кожної з серії тому є просто добутком m множників p і $(n-m)$ множників q.

Таким чином, відповідь для P_n^m така: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Приклад 2.1. Двоє кидають м'яч у баскетбольний кошик. Ймовірність влучення під час кожного кидка для першого – $p_1 = 0{,}84$, для другого – $p_2 = 0{,}5$. Перший кидає м'яч три рази, другий – п'ять. Переможцем є той, хто більше разів влучив; нічия також можлива. Знайти ймовірності перемоги кожного з гравців, а також ймовірність нічиєї.

Розв'язання. Позначимо $A =${перемога першого з гравців}, $B =${перемога другого з гравців}, $D =${нічия}, $A_3^i =${перший влучив i разів}, $B_5^i =$ другий влучив i разів}. Сконструюємо подію A:

$A = A_3^1 \cdot B_5^0 + A_3^2 \cdot (B_5^0 + B_5^1) + A_3^3 \cdot (B_5^0 + B_5^1 + B_5^2)$.

$P(A_3^0) = C_3^0 p_1^0 q_1^3 \cong 0{,}008$; $\quad P(B_5^0) = C_5^0 p_2^0 q_2^5 = \dfrac{1}{32}$;

$P(A_3^1) = C_3^1 p_1^1 q_1^2 \cong 0{,}096$; $\quad P(B_5^1) = C_5^1 p_2^1 q_2^4 = \dfrac{5}{32}$;

$P(A_3^2) = C_3^2 p_1^2 q_1^1 \cong 0{,}384$; $\quad P(B_5^2) = C_5^2 p_2^2 q_2^3 = \dfrac{10}{32}$;

$P(A_3^3) = C_3^3 p_1^3 q_1^0 \cong 0{,}512$; $\quad P(B_5^3) = C_5^3 p_2^3 q_2^2 = \dfrac{10}{32}$;

$P(B_5^4) = C_5^4 p_2^4 q_2^1 = \dfrac{5}{32}$;

$P(B_5^5) = C_5^5 p_2^5 q_2^0 = \dfrac{1}{32}$.

Таким чином,

$$P(A) = 0{,}096\frac{1}{32} + 0{,}384\left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32}\right) + 0{,}512\left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32}\right) \cong 0{,}331.$$

Далі $B = B_5^1 \cdot A_3^0 + B_5^2 \cdot (A_3^0 + A_3^1) + B_5^3 \cdot (A_3^0 + A_3^1 + A_3^2) + B_5^4 + B_5^5$. У двох останніх додатках немає множника $A_3^0 + A_3^1 + A_3^2 + A_3^3$, тому що він є несуперечною подією, а $B \cdot I = B$. Обчислення показують, що

$P(B) = 0{,}37375$.

Оскільки $A + B + D = I$ і події A, B і D несумісні, то $P(D) = 1 - P(A) - - P(B) = 1 - 0{,}33100 - 0{,}37375 \cong 0{,}29525$.

Відповідь: $P(A) \cong 0{,}331$; $P(B) \cong 0{,}37375$; $P(D) = 0{,}29525$.

Приклад 2.2. Мішень є системою двох концентричних кіл. Радіус зовнішнього в два рази перевищує радіус внутрішнього. Рівноможливим є влучити в будь-яку точку мішені. За влучення в мале коло стрілець одержує два очки, за влучення в кільце – одно очко. Знайти ймовірність того, що за п'ять пострілів буде отримано вісім очок.

Розв'язання. Вісім очок можуть бути отримані лише тоді, коли буде два влучення в кільце та три в коло. Це означає, що події $A =${отримано 8 очок} та $B =${2 влучення в кільце і 3 – в коло} еквівалентні: $A \to B \cap B \to A \Rightarrow A = B$. Тому $A = B$. Означимо ймовірність влучити в коло символом p. Тоді ймовірність q протилежної події є ймовірністю влучення в кільце. Ймовірність p обчислюють як відношення міри (в даному разі площини) внутрішнього кола до міри всієї мішені: $p = \frac{1}{4}$, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$. Подальші обчислення виконують за формулою Бернуллі $P(A) = P(B) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} = \frac{45}{256}$.

Відповідь: $\frac{45}{256}$.

2.2. Поліномний розподіл

Узагальнити формулу Бернуллі можна в різних напрямках. Розглянемо той випадок, коли в кожному окремому випробуванні можливі три наслідки – A_1, A_2, A_3 так, що $A_1 + A_2 + A_3 = I$, $A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_3 = \varnothing$, $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Для серії з n незалежних випробувань можна поставити питання про ймовірність того, що подія A_1 відбудеться m_1 разів, подія A_2 – m_2 разів, A_3 – m_3 разів, причому $m_1 + m_2 + m_3 = n$.

Відповідна формула має вигляд

$$P_n^{m_1, m_2, m_3} = \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}.$$

Якщо можливих наслідків не три, а k, то

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k} m_i!} \prod_{j=1}^{k} p_j^{m_j}, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

Ця формула й задає так званий поліномний розподіл ймовірностей.

Приклад 2.3. Відрізок *AB* точками *C* і D ділять на відрізки: AC довжини 1, CD довжини 2 та DB довжини 2. На відрізок навмання кидають п'ять точок. Знайти ймовірність того, що на кожному з відрізків AC, CD і DB буде не менше однієї точки.

Розв'язання. Позначимо $a_{1,1,3}$ подію: {на *AC* – одна точка; на CD – одна; на DB – три}. Аналогічно введемо в розгляд події: a_{131}, a_{311}, a_{122}, a_{212}, a_{221}. Подія задачі B є сумою цих подій: $B = a_{113} + a_{131} + a_{311} + a_{122} + a_{212} + a_{221}$. Ймовірність для окремої точки влучити в *AC* дорівнює $\frac{1}{5}$, у *CD* – $\frac{2}{5}$, *DB* – $\frac{2}{5}$, тобто $p_1 = \frac{1}{5}$, $p_2 = \frac{2}{5}$, $p_3 = \frac{2}{5}$. Обчислимо ймовірності окремих подій a_{ijk}:

$$P_5^{113} = P_5^{131} = \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{4}{5^4}\cdot 2^4 = \frac{2^6}{5^4};$$

$$P_5^{311} = \frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{5^4}\cdot 2^2 = \frac{2^4}{5^4};$$

$$P_5^{122} = \frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{5^4}\cdot 2^4 = 6\frac{2^4}{5^4};$$

$$P_5^{212} = P_5^{221} = \frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{5^4}\cdot 2^3 = 3\frac{2^4}{5^4};$$

$$P(B) = \frac{2^4}{5^4}(4+1+6+3) = \frac{14\cdot 2^4}{5^4} = \frac{224}{625}.$$

Відповідь: $\frac{224}{625}$.

2.3. Формула Пуассона

Припустимо, що кількість випробувань дуже велика; наприклад більша ніж 10. Нехай також ймовірність появи події в кожному випробуванні дуже мала. Тоді обчислення за формулою Бернуллі дуже ускладнюються. Припустимо, що $n\cdot p = \lambda$ – число порядку одиниці. Спрямуємо $n\to\infty$, замінивши $p = \frac{\lambda}{n}$, $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$.

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\times$$

$$\times\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Якщо $n \to \infty$, а число m – скінченне, то межа добутку скінченної кількості множників 1, $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, …, $\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$ буде дорівнювати одиниці. Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=1$, оскільки степінь m – скінченний. Але $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\neq 1$. Ця межа – одна з двох "чудових" меж: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}$.

Таким чином, у разі виконання умов $n \to \infty$, $m \sim 1$, $n \cdot p = \lambda \sim 1$ ймовірність появи m "успіхів" приблизно дорівнює такому числу: $P_m = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$. Це є формула Пуассона. Число λ – середня кількість успіхів.

Приклад 2.4. По ворожому літаку випустили з кулемета 100 куль, кожна з яких з ймовірністю 0,02 влучає в літак. Знайти ймовірність збити літак, якщо для цього вистачає трьох влучень (влучення вважають незалежними).

Розв'язання. Мова йде відносно події $A = A_{100}^3 + A_{100}^4 + A_{100}^5 + \ldots + A_{100}^{100}$. У такому вигляді обчислення практично нездійсненні. Розглянемо протилежну подію: $\overline{A} = A_{100}^0 + A_{100}^1 + A_{100}^2$ (влучень було менше ніж три). Але і в цьому разі застосування формули Бернуллі пов'язано зі складними розрахунками, адже треба обчислити вирази типу $P(A_{100}^2) = C_{100}^2 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98}$.

Відзначимо, що в даному випадку кількість випробувань велика, а ймовірність успіху в одному випробуванні маленька. Обчислимо $\lambda = p \cdot n = 0{,}02 \cdot 100 = 2$ і застосуємо формулу Пуассона $P(\overline{A}) = \frac{2^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{2^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{2^2}{2!}e^{-\lambda} = 5 \cdot e^{-2}$.

Тоді ймовірність задачі $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \cong 0{,}311$.

Відповідь: 0,311.

Приклад 2.5. За добу в ремонтній конторі електромережі одержують в середньому 48 дзвінків від споживачів електрики. Чому дорівнює ймовірність того, що за годину буде три дзвінки?

Розв'язання. Для 24 годин у середньому – 48 дзвінків, для однієї години в середньому – два дзвінки. Тому $\lambda = 2$, $P_3 = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = \frac{4}{3e^2} \cong 0{,}180447$.

Відповідь: 0,180447.

Приклад 2.6. На 20 сторінок друкарка робить у середньому 20 помилок. Знайти ймовірність того, що на 9-й сторінці будуть дві помилки.

Розв'язання. Для 20 сторінок $\lambda_0 = 20$. Тоді для однієї сторінки $\lambda = \frac{\lambda_0}{20} = \frac{20}{20} = 1$. За формулою Пуассона $P_2 = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2e}$.

Відповідь: $\frac{1}{2e} \cong 0{,}183940$.

2.4. Локальна та інтегральна теореми Маувра-Лапласа

Розглянемо випадок, коли великими є як кількість випробувань, так і кількість "успіхів". Ймовірності p та $q = 1 - p$ – не малі (порядку одиниці). Для спрощення обчислення (наближеного) ймовірності P_n^m проведемо необхідні перетворення для $C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$. Перш за все, скористаємося формулою Стірлінга $n! \cong \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$, $m! \cong \sqrt{2\pi m}\, e^{-m} m^m$, $(n-m)! = \sqrt{2\pi(n-m)}\, e^{-n+m} (n-m)^{n-m}$:

$$P_n^m \cong \frac{\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^{n-m+m}}{\sqrt{2\pi m}\, e^{-m} m^m \sqrt{2\pi(n-m)}\, e^{-n+m} (n-m)^{n-m}} p^m q^{n-m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \times$$

$$\times \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Замість двох останніх множників розглянемо їх логарифм $a = ln\left[\left(\frac{np}{m}\right)^m \times \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\right] = m\, ln\frac{np}{m} + (n-m)\, ln\frac{nq}{n-m}$ та введемо змінну x за правилом: $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

m та $(n-m)$ пов'язані з x таким чином: $m = np + x\sqrt{npq}$; $n - m = n - pn - x\sqrt{npq} = nq - x\sqrt{npq}$.

Тоді $a = -\left(np + x\sqrt{npq}\right) ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - \left(nq - x\sqrt{npq}\right) ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$.

Скориставшись формулою Тейлора $ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$, приблизно обчислимо a:

$$a \cong -\left(np + x\sqrt{npq}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - x^2\frac{q}{2np} + \frac{x^3 q}{3np}\sqrt{\frac{q}{np}} - \ldots\right) -$$

$$-\left(nq - x\sqrt{npq}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - x^2\frac{p}{2nq} - \frac{x^3p}{3nq}\sqrt{\frac{p}{nq}} - \ldots\right) = x\left(-\sqrt{npq} + \sqrt{npq}\right) +$$

$$+x^2\left(+\frac{q}{2} - q + \frac{p}{2} - p\right) + x^3\left(+\frac{q}{2np}\sqrt{npq} - \frac{q}{3np}\sqrt{npq} - \frac{p}{2nq}\sqrt{npq} + \frac{p}{3pq}\sqrt{npq}\right) + \ldots =$$

$= -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{\sqrt{n}}\left(+\dfrac{q}{6}\sqrt{\dfrac{q}{p}} - \dfrac{p}{6}\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right) + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, де $o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ – нескінченно мала виличина порядку, більшого, ніж $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Таким чином, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ n-m\to\infty}} \left[a / \left(-\dfrac{x^2}{2}\right)\right] = 1$, $e^a \approx e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Далі,

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi\left(np + x\sqrt{npq}\right)\left(nq - x\sqrt{npq}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

Таким чином, $P_n^m \cong \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Це і є так звана локальна теорема Маувра-Лапласа.

Дуже поширеною ймовірнісною задачею є така: знайти ймовірність того, що кількість “успіхів” m в n незалежних випробуваннях задовольняє нерівність: $m_1 \le m < m_2$. Якщо n, m, $n - m$ – дуже великі числа (наприклад, більші, ніж 10), а p і $q \sim 1$, то можна скористатися знайденою формулою, якщо кожному значенню m поставити у відповідність числа $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, причому $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

Тоді $P(m_1 \le m < m_2) \cong$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{m=m_1}^{m=m_2-1} e^{-\frac{x_m^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=m_1}^{m=m_2-1} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{m_1}}^{x_{m_2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Таким чином, $P(a \le m < b) \cong \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, або

$P(a \le m < b) = \Phi\left(\dfrac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Ця функція має назву функції Лапласа. Таблицю значень $\Phi(x)$ наведено в багатьох підручниках, причому можливі різні варіанти для означення функції Лапласа та, відповідно, таблиці значень.

Приклад 2.7. Монету кидають 20 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде 10 разів.

Розв'язання. $n = 20$, $m = 10$, $n - m = 10$, $p = q = \frac{1}{2}$.

$$P(m = 10) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{10 - 20 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0,$$

$$P(m = 10) \cong \frac{1}{\sqrt{10\pi}} = 0{,}17841241162\ldots.$$

Відповідь: 0,17841241162….

Зауваження**.** Цю ймовірність ще можна обчислити і за стандартною методикою:

$$P_{20}^{10} = C_{20}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \cdot \frac{1}{2^{20}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{1}{2^{20}} =$$

$= 0{,}17619705200$. Відносна помилка дорівнює 1,2573%.

Приклад 2.8. Ймовірність народження хлопчика – 0,511, дівчинки – 0,489. Знайти ймовірність того, що з 1000 народжених кількість хлопчиків становить від 500 до 522.

Розв'язання. $a = 500$, $b = 522$, $n = 1000$, $p = 0{,}511$, $q = 0{,}489$. $\sqrt{npq} =$
$= \sqrt{1000 \cdot 0{,}511 \cdot 0{,}489} \cong 15{,}807561$;

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{522 - 511}{15{,}807561} \cong 0{,}6958695;$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 511}{15{,}807561} \cong -0{,}695695.$$

$x_2 = -x_1$, тому

$$P(500 \le m < 522) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \Phi(x_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(x_2).$$

За таблицею знаходимо значення функції Лапласа, а потім і ймовірність події задачі: $P(500 \le m < 522) \cong 0{,}516$.

Відповідь: 0,516.

Приклад 2.9. Ймовірність появи позитивного результату в кожному з випробувань дорівнює 0,8. Скільки треба провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,98 можна було б очікувати, що не менше ніж у 100 випробуваннях із них матиме місце подія, якою цікавляться?

Розв'язання. Припустимо, що цих випробувань n. Умову задачі можна записати так: $P(m \geq 100) = 0{,}98$. За формулою Лапласа $P(m \geq 100) = \Phi(\infty) -$

$$-\Phi\left(\frac{100-np}{\sqrt{npq}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{100-0{,}8\cdot n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{100-0{,}8\cdot n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{250-2n}{\sqrt{n}}\right).$$

Одержали рівність $1-\Phi\left(\frac{250-2n}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}98$, тобто $\Phi\left(\frac{250-2n}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}02$. За таблицею знаходимо відповідне значення аргументу $\frac{250-2n}{\sqrt{n}} = -2{,}05$; $2n - 2{,}05\sqrt{n} - 250 = 0$. Якщо позначити $\sqrt{n} = z$, то для z отримуємо квадратне рівняння $z^2 - 1{,}025z - 125 = 0$. Його позитивний розв'язок – 11,70429, звідси $n = [z^2] + 1 = 137$.

Відповідь: 137.

Приклад 2.10. Ймовірність появи події *A* в кожному окремому випробуванні дорівнює 0,5. Знайти кількість випробувань, при яких з ймовірністю 0,9 можна очікувати, що вираз $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ буде менший, ніж 0,01.

Розв'язання. Перетворимо умову задачі так, щоб можна було скористатися інтегральною теоремою Мавура-Лапласа: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}01\right) =$

$$= P\left(-0{,}01 < \frac{m}{n} - p < 0{,}01\right) = P(-n\cdot 0{,}01 < m - np < n\cdot 0{,}01) = P(n(p-0{,}01) <$$

$< m < n\cdot(p+0{,}01)) = P(m_1 < m < m_2)$, де $m_1 = n(p-0{,}01)$, $m_2 = n(p+0{,}01)$, тобто $m_1 = n\cdot 0{,}49$, $m_2 = n\cdot 0{,}51$.

Далі

$$P(m_1 < m < m_2) \cong \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{n(p+0{,}01)-np}{\sqrt{npq}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{n(p-0{,}01)-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}01n}{\sqrt{n\cdot 0{,}25}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}01n}{\sqrt{n\cdot 0{,}25}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}02n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}02n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$= \Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-0{,}02\sqrt{n}\right) = 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) - 1$, тобто $\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) \geq 0{,}95$. Відповідно до значення 0,95 знаходимо за таблицями відповідне значення аргументу: $0{,}02\sqrt{n} \ge 1{,}645$; $\sqrt{n} \ge 82{,}725$, $n \ge 6844$.

Відповідь: $n \ge 6844$.

Узагальнення. Якщо йдеться про пошук такого числа випробувань n, при якому $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta\right) \ge 0{,}9$, то $n \ge \left[pq \cdot \left(\frac{1{,}645}{\delta}\right)^2\right]$ Для кожного $\delta > 0$ існує відповідне n.

3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Означення та найпростіші приклади

Розглянемо ймовірнісний простір ($\dot{I}$, Φ, P). Випадковою величиною називають числову функцію, аргументами якої є випадки з алгебри Φ (і яку до того ж можна виміряти). На одному й тому ж ймовірнісному просторі можна ввести, таким чином, скільки завгодно різних випадкових величин.

Приклади випадкових величин:

1) відстань, яку пролетить снаряд при пострілі з гармати;
2) розмір виграшу в лотереї;
3) кількість очок, які випали на верхньому боці куба;
4) кількість викликів від абонентів АТС за означений інтервал часу;
5) відстань від довільно вибраної точки внутрішньої області кола до його центра;
6) номер взуття випадкового покупця взуттєвої крамниці.

3.2. Означення функції розподілу. Класифікація випадкових величин

Випадкові величини звичайно позначають або великими літерами X, Y, Z і т.д., або літерами грецької абетки: ξ (“ксі”), η (“ета”), ζ (“дзета”). Випадкова величина свого значення набуває на числовій осі. Цю вісь звичайно називають як OX, $OУ$, OZ і т.п. Таким чином, випадкова величина ξ може набувати значення, наприклад, на осі OX.

Випадкові величини з точки зору їх кількісного опису однозначно можна поставити у відповідність з їх функціями розподілу.

Функцією розподілу випадкової величини ξ є ймовірність виконання події: $P(\xi < x)$:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x).$$

Розглядають лише такі випадкові величини, для яких $P(\xi < \infty) = 1$; їх називають власними.

З означення функції розподілу та аксіом і теорем ймовірності випливають такі наслідки:

1. $F_{\xi}(\infty) = 1$; $F_{\xi}(-\infty) = 0$.

2. $x_2 > x_1 \Rightarrow F_\xi(x_2) \geq F_\xi(x_1)$. Дійсно,

$F_\xi(x_2) = P(\xi < x_2) = P(\{\xi < x_1\} +$
$\{x_1 \leq \xi < x_2\}) = F_\xi(x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2) \geq F_\xi(x_1)$.

3. Функція розподілу неперервна зліва: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$.

Існують три групи випадкових величин, на які розподіляють їх загальну множину (а також їх суміші):

1) в.в. (тобто випадкові величини) дискретного типу; для цих в.в. функція розподілу має вигляд сходинок;

2) в.в. неперервного типу; для таких в.в. їх функції розподілу диференційовані майже всюди;

3) сингулярні в.в.; для них функції розподілу неперервні, але недиференційовані майже всюди.

Кожна випадкова величина або є величиною одного з цих типів, або складається з них.

У практичних застосуваннях розглядають тільки в.в. перших двох типів.

Якщо для якоїсь в.в. відомою є її функція розподілу, за її допомогою можливим стає обчислення великої кількості подій з початкової алгебри подій Φ. Наприклад,

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1).$$

Ця ймовірність збігається з ймовірністю об'єднання всіх тих елементарних подій, які є аргументами для тих значень в.в. (як функції від елементарних подій), які задовольняють нерівності $x_1 \leq \xi < x_2$.

3.3. Дискретні розподіли

Почнемо з прикладу побудови функції розподілу випадкової величини, пов'язаної з киданням монети так: з випаданням герба зіставляють цифру 1, випаданням решки – цифру 3. Для всіх інших чисел на числовій осі у відповідність ставлять як аргумент неможливу подію.

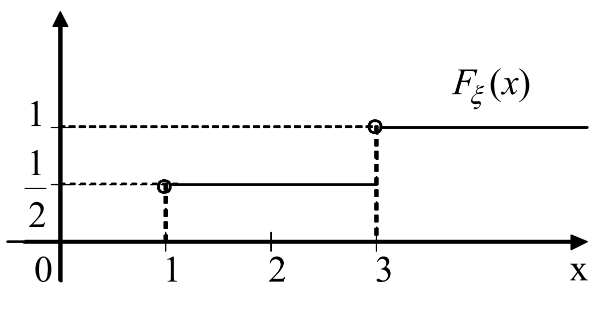


Рис. 3.1

Якщо $x \leq 1$, то $P(\xi < x) = 0$;

якщо $x = 1 + \varepsilon$, де ε – мале позитивне число, то $P(\xi < 1 + \varepsilon) = \dfrac{1}{2}$, оскільки події {випав герб} відповідають саме всі події $\{\xi < 3\}$; якщо ж $x = 3 + \varepsilon$, то $P(\xi < 3 + \varepsilon) = 1$ для яких завгодно великих позитивних значень ε (рис. 3.1).

Таким чином, $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le x < 3; \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$

У загальному випадку кожній сходинці функції розподілу в.в. дискретного типу відповідає її висота, яка дорівнює ймовірності того, що відбулася елементарна подія, що відобразилася за допомогою даної випадкової величини у відповідну абсцису сходинки (рис. 3.2).

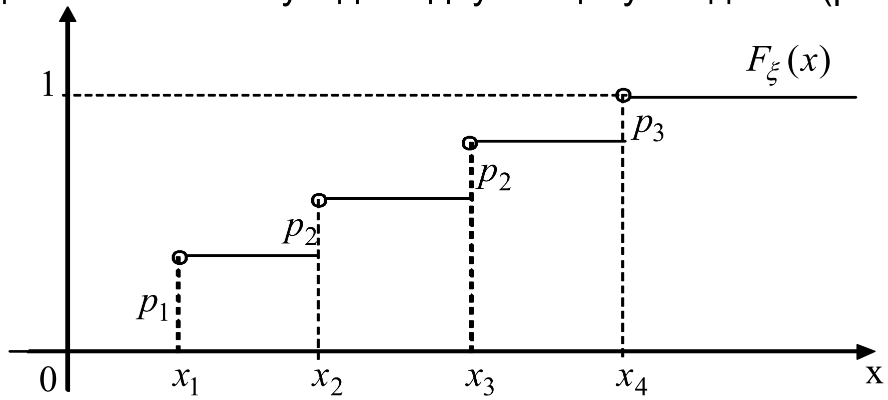


Рис. 3.2

Для дискретних в.в. є ще одна еквівалентна можливість опису – за допомогою ряду розподілу:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

.

Нарешті, існує і явне аналітичне завдання функції розподілу дискретної в.в., яке базується на використанні так званої одиничної функції Хевісайда $\eta(x)$, що дорівнює нулю для $x \le 0$ та одиниці при $x > 0$:

$F_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta(x - x_i)$, де n – кількість подій, які відображаються за допомогою випадкової величини ξ в точках x_1, x_2, …, x_n, а p_i – ймовірності випадкової величини ξ прийняти значення x_i.

Приклад 3.1. Мають картку з номером 1, іншу з номером 2 та ще одну з номером 3. Виймають з поверненням по одній картці три рази, а номер картки запам'ятовують. Знайти розподіл суми номерів.

Розв'язання. Позначимо випадкову суму номерів літерою z:

$\{z = 3\} = \{1, 1, 1\}$; $P(z = 3) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z = 4\} = \{1, 1, 2\} + \{1, 2, 1\} + \{2, 1, 1\}$; $P(z = 4) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z = 5\} = \{1, 1, 3\} + \{1, 3, 1\} + \{3, 1, 1\} + \{1, 2, 2\} + \{2, 1, 2\} + \{2, 2, 1\}$;

$P(z = 5) = 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z=6\}=\{2,2,2\}+\{1,2,3\}+\{3,1,2\}+\{2,3,1\}+\{1,3,2\}+\{2,1,3\}+\{3,2,1\}$;

$P(z=6)=7\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z=7\}=\{2,2,3\}+\{2,3,2\}+\{3,2,2\}+\{1,3,3\}+\{3,1,3\}+\{3,3,1\}$;

$P(z=7)=6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z=8\}=\{3,3,2\}+\{3,2,3\}+\{2,3,3\}$; $P(z=8)=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$;

$\{z=9\}=\{3,3,3\}$; $P(z=9)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$.

Відповідь:

z	3	4	5	6	7	8	9
P	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$6\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$7\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$6\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Приклад 3.2. За умови попередньої задачі обчислити ймовірність подій: *а*) сума номерів ділиться на два, *б*) ділиться на три, *в*) ділиться на чотири, *г*) ділиться на п’ять, *д*) ділиться на шість, *е*) ділиться на сім.

Розв’язання. Скориставшись розподілом випадкової суми номерів, знайденим у попередній задачі, обчислюємо ймовірності подій, про які йдеться в цій задачі:

P\{сума номерів є парною\} $=P(\{z=4\}+\{z=6\}+$

$+\{z=8\})=P\{z=4\}+P\{z=6\}+P(z=8)=(3+7+3)\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{13}{27}$;

P\{сума номерів ділиться на три\} =

$=P(z=3)+P(z=6)+P(z=9)=(1+7+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{3}$;

P\{сума номерів ділиться на чотири\}$=P(z=4)+P(z=8)=\dfrac{2}{9}$;

P\{сума номерів ділиться на п’ять\}$=P(z=5)=\dfrac{2}{9}$;

P\{сума номерів ділиться на шість\} $=P(z=6)=\dfrac{7}{27}$;

P\{сума номерів ділиться на сім\}$=P(z=7)=\dfrac{2}{9}$.

Відповідь: $\dfrac{13}{27}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2}{9}$; $\dfrac{2}{9}$; $\dfrac{7}{27}$; $\dfrac{2}{9}$.

Приклад 3.3. Серед десяти лотерейних білетів є три, які дають виграш у 2 гривні, та один виграшний в 3 гривні. Кожен білет коштує одну гривню. Купують три білети. Знайти ймовірність того, що покупець не програє, тобто сума виграшу буде не менша ніж 3 гривні.

Розв’язання. Введемо в розгляд випадкову величину X, яка набуває значення сумарного виграшу. Вона може дорівнювати числам від 3 до 4 грн. Кожне можливе значення є функцією від відповідних подій: {X = –3} = {всі три невиграшні}; { X = –1} = {серед білетів один дає виграш в 2 грн., два – пустих}; { X = 0} = {один виграш в 2 грн., два пустих}; { X = 1} = {два виграшних в 2 грн., один пустий}; { X = 2} = {один виграш в 2 грн., один виграш в 3 грн., один пустий}; { X = 3} = {три виграші по 2 грн.}; { X = 4} = {два виграші по 2 грн., один виграш в 3 грн.}.

Маємо такий ряд розподілу в.в. X:

X	$x_1=-3$	$x_2=-1$	$x_3=0$	$x_4=1$	$x_5=2$	$x_6=3$	$x_7=4$
P	$\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_3^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_1^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_3^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_3^1\cdot C_1^1\cdot C_6^1}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}$	$\dfrac{C_3^2\cdot C_1^1}{C_{10}^3}$,

X	-3	-1	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{20}{120}$	$\dfrac{45}{120}$	$\dfrac{15}{120}$	$\dfrac{18}{120}$	$\dfrac{18}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{3}{120}$.

Подія задачі $\{X\geq 0\}$. Тому $P(X\geq 0)=\sum\limits_{x_i\geq 0} p_i=\dfrac{15}{120}+\dfrac{18}{120}+\dfrac{18}{120}+\dfrac{1}{120}+$

$+\dfrac{3}{120}=\dfrac{11}{24}$.

Відповідь: $\dfrac{11}{24}$.

Приклад 3.4. Серед десяти лотерейних білетів є три пустих, п’ять приносять виграш в 1 грн., два – виграш в 2 грн. кожний. Купують три білети; кожен білет коштує 1 гривню. Знайти ймовірність того, що покупець не програє.

Розв’язання. $\{X=-3\}=${три невиграшні білети}; $\{X=-2\}=${два невиграшні та один виграшний в 1 грн.}; $\{X=-1\}=${один невиграшний та два виграшні в 1 грн.} + {два невиграшних та один виграшний в 2 грн.}; $\{X=0\}=${три виграшні в 1 грн. + {один невиграшний, один виграшний в 1 грн., один виграшний в 2 грн.}; $\{X=1\}=${два виграшні в 1 грн., один виграшний в 2 грн.} + {один невиграшний, два виграшні в 2 грн.}; $\{X=2\}=${один виграшний в 1 грн.} + {два виграшні в 2 грн.}.

$$P(X=-3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3};\ P(X=-2)=\frac{C_3^2\cdot C_5^1}{C_{10}^3};$$

$$P(X=-1)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2}{C_{10}^3}+\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3};\ P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}+\frac{C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3};$$

$$P(X=1)=\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}+\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3};\ P(X=2)=\frac{C_5^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3};$$

X	-3	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{23}{120}$	$\frac{5}{120}$

$$P(X \geq 0) = \frac{40+23+5}{120} = \frac{17}{30}.$$

Відповідь: $\frac{17}{30}$.

<u>Зауваження</u>**.** Цікавим є те, що в цій лотереї ймовірність не програти більше, ніж ймовірність програти.

3.4. Неперервні розподіли. Щільність розподілу

В додаток до функції розподілу, введеної в розгляд в п. 3.2, можна ввести так звану щільність розподілу $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ за правилом

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

Зворотний зв'язок: $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(z)dz$.

Властивості щільності розподілу:

1) $p_\xi(x) \geq 0$, оскільки $F_\xi(x)$ не зменшується із зростанням аргументу x;

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$ (умова нормування);

2) $F_\xi(\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$.

Ймовірність того, що випадкова величина ξ знаходиться в проміжку $[x_1; x_2)$, можна обчислити так: $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx$.

Розглянемо інтервал $[x; x+dx)$; тоді $P(x \leq \xi < x+dx) = \Delta F_\xi(x) = = F_\xi(x+dx) - F_\xi(x)$. Лінійну (відносно dx) частину приростання $\Delta F_\xi(x)$ можна назвати диференціалом ймовірності $P_\xi(dx) \cong dF_\xi(x) = p_\xi(x) \cdot dx$. У багатьох фізичних задачах для встановлення розподілу в цілому виходять з вигляду диференціала ймовірності.

Дискретні розподіли також можна розглядати як неперервні, якщо ввести до вживання похідну до функції Хевісайда. Така функція має назву дельта-функції Дірака:

$$\delta(x) = \eta'(x).$$

Дельта-функція є представником узагальнених функцій. Основні її властивості:

1) $\delta(-x) = \delta(x)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$; $\int\limits_{a}^{b} \delta(x)dx = 0$, якщо $0 \notin (a;\ b)$; $\int\limits_{a}^{b} \delta(x)dx = 1$, якщо $a < 0 < b$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x)dx = f(0)$; $\int\limits_{a}^{b} f(x-c) \cdot \delta(x)dx = f(c)$, якщо $a < c < b$.

Щільність розподілу в.в. дискретного типу, таким чином, можна записати у такому вигляді:

$$p_{\xi}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \eta(x - x_k) \right)' = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k).$$

Якщо в.в. ξ є неперервного типу, то

$$P(\xi = x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x_i - \Delta x \le \xi < x_i + \Delta x) = \lim_{dx \to 0} 2p_{\xi}(x)dx = 0.$$

Якщо ж в.в. ξ належить до дискретного типу, то

$$P(\xi = x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x_i - \Delta x \le \xi < x_i + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \int\limits_{x_i - \Delta x}^{x_i + \Delta x} \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_i)dx =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} p_k \int\limits_{x_i - \Delta x}^{x_1 + \Delta x} \delta(x - x_k)dx = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Приклад 3.5. На відрізку [a; b] навмання вибирають точку. Знайти розподіл випадкової довжини лівого з відрізків, на які поділяє початковий відрізок ця точка.

Розв’язання. Термін “навмання” означає той факт, що ймовірність випадкової точки влучити у відрізок $[x;\ x + dx)$ не залежить від x, де x – абсциса цієї точки, якщо відрізок $[a;\ b]$ розташувати на осі OX так, щоб точка a злилася з початком координат. Це означає, що $dF_{\xi}(x) = const \cdot dx$ для $x \in [a;\ b]$; якщо ж $x \notin [a;\ b]$, то $dF_{\xi}(x) \equiv 0$.

Таким чином, $dF_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)dx = const \cdot dx$, або ж $p_{\xi}(x) = const = p$ для $x \in [a;\ b]$, $p_{\xi}(x) = 0$ для $x \notin [a;\ b]$. З умови нормування

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx = \int\limits_{a}^{b} p_{\xi}(x)dx = p\int\limits_{a}^{b} dx = p(a-b) = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{b-a} \Rightarrow p_{\xi}(x) = \frac{1}{b-a},$$

$x \in [a;\ b]$; $F_{\xi}(x) = 0$, якщо $x \le a$,

$F_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_{\xi}(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{a} p_{\xi}(x)dx + \int\limits_{a}^{x} p_{\xi}(z)dz$, якщо $x \in [a;\ b]$, тобто в цьому разі $F_\xi(x) = \int\limits_a^x \frac{dz}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$. Якщо ж $x \ge b$, то $F_\xi(x) = 1$ (рис. 3.3 – щільність рівномірного розподілу, рис. 3.4 – функція розподілу в.в., рівномірно розподіленої на [*a*; *b*]).

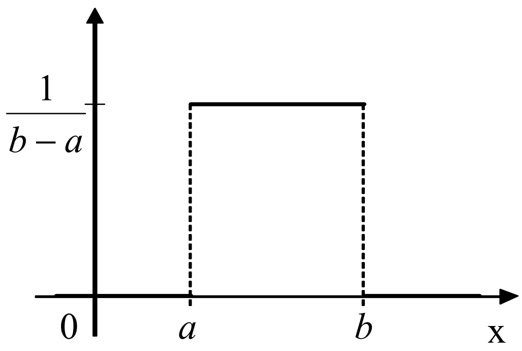


Рис. 3.3

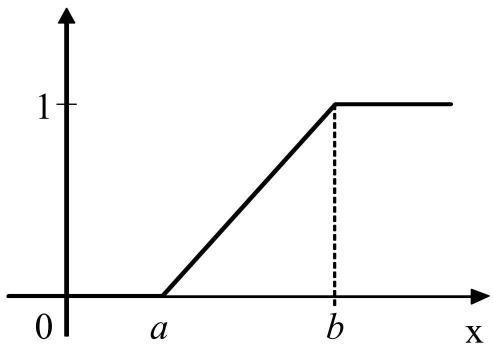


Рис. 3.4

Відповідь: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;\, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;\, b]; \end{cases}$ $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a;\, b], \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$

Приклад 3.6. Випадкова величина ξ набуває своїх значень на відрізку $[0;\,3]$. Її функція розподілу неперервна на цьому відрізку, а $p_\xi(x)$ – в точці $x = 1$. На інтервалі $[0;\,1]$ вона лінійна, а на інтервалі $[1;\,3]$ – квадратична. $P(\xi < 2) = \frac{1}{2}$. Знайти $F_\xi(x)$.

Розв'язання. $F_\xi(x) = a + bx$, якщо $x \in [0;\,1]$. $F_\xi = 0$, якщо $x \le 0$.

Згідно з умовою неперервності $a + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$. Таким чином,

$F_\xi(x) = bx$, $x \in [0;\,1]$. Якщо $x \in [1;\,3]$, то $F_\xi(x) = c(x-1)^2 + d(x-1) + e$.

Але $c(1-1)^2 + d(1-1) + e = b \cdot 1 \Rightarrow e = b$. Далі

$F_\xi(3) = 1 \Rightarrow c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + b = 1$, тобто $4c + 2d + b = 1$. З умови

$P(\xi < 2) = F_\xi(2) = \frac{1}{2}$ випливає, що $c + d + b = \frac{1}{2}$. Неперервність

щільності в точці $x = 1$ приводить до такої рівності: $F'_\xi(x)\Big|_{x = 1 - 0} =$

$= F'_{\xi}(x)\Big|_{x=1+0} \Rightarrow b = 2\cdot c\cdot 0 + d$. Маємо систему рівнянь:

$\begin{cases} 4c+2d+b=1, \\ c+d+b=\dfrac{1}{2}, \\ \quad b=d. \end{cases}$ Її розв'язок: $b=\dfrac{1}{5}$, $c=\dfrac{1}{10}$, $d=\dfrac{1}{5}$.

Відповідь: $F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{5}, & 0\le x\le 1, \\ \dfrac{x^2+1}{10}, & 1\le x\le 3, \\ 1, & 3\le x; \end{cases}$ $\quad p_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{5}, & 0<x\le 1, \\ \dfrac{x}{5}, & 1<x\le 3, \\ 0, & 3<x. \end{cases}$

Приклад 3.7. Щільність розподілу випадкової величини ξ на відрізку $(0;1]$ постійна. На відрізку $(2;3]$ – лінійна; в інших точках осі OX вона дорівнює нулю. $P\left(\xi<\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$, $P\left(\xi<\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$. Знайти розподіл ξ.

Розв'язання. $p_{\xi}(x)=a$, $x\in(0;1]$; $p_{\xi}(x)=b+cx$, $x\in(2;3]$.
$P\left(\xi<\dfrac{3}{2}\right)=P(\xi<1)+P\left(1\le\xi<\dfrac{3}{2}\right)=P(\xi<1)+0$. Таким чином,
$P(\xi<1)=\int_0^1 a\cdot dx = a=\dfrac{1}{3}$.

Далі, $P(\xi<3)=1=P(0\le\xi<1)+P(2\le\xi<3)=\dfrac{1}{3}+$

$+\int_2^{\frac{5}{2}}(b+cx)dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{9}{8}c=\dfrac{2}{3}$.

Приходимо до системи лінійних рівнянь:

$\begin{cases} b+\dfrac{5}{2}c=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{9}{8}c=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow c=0,\ b=\dfrac{2}{3}$.

Тому $p_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{3}, & 0<x\le 1, \\ 0, & 1<x\le 2, \\ \dfrac{2}{3}, & 2<x\le 3, \\ 0, & 3<x. \end{cases}$

На інтервалі $(2; 3]$ щільність розподілу виявляється також постійною.

Користуючись формулою $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(z)dz$, знаходимо функцію розподілу.

Відповідь: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{3}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{3}x - 1, & 2 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x; \end{cases}$ $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{3}, & 2 < x \le 3, \\ 0, & 3 < x. \end{cases}$

Приклад 3.8. Деякий пристрій виготовлений в момент часу $t = 0$. В подальшому ймовірність вийти з ладу за час $[t;\ t + dt]$, якщо пристрій не вийшов з ладу до моменту t, не залежить від часу t, а лише від протягу часу dt. Знайти розподіл випадкової величини ξ – часу безаварійної роботи пристрою.

Розв'язання. Йдеться про $P(\xi < t)$, тобто про ймовірність події {за час t пристрій не зламався}. В умові ж відзначається, що $P(t \le \xi < t + dt / \xi \ge t) = \lambda dt$, де λ – константа. З формули $P(A / B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ випливає, що

$$P(t \le \xi < t + dt / \xi \ge t) = \frac{P(\{t \le \xi < t + dt\} \cdot \{\xi \ge t\})}{P(\xi \ge t)} = \frac{P(t \le \xi < t + d)}{1 - P(\xi < t)} =$$

$$= \frac{F(t + dt) - F(t)}{1 - F(t)} \cong \frac{dF}{1 - F} = \lambda dt .$$

Для функції розподілу одержали диференціальне рівняння

$$\frac{dF}{1 - fF} = \lambda dt ,\ F(0) = 0 .$$

Після інтегрування випливає, що $ln(1 - F) = -\lambda t + ln\,C$, $1 - F = Ce^{-\lambda t}$, $F(t) = 1 - Ce^{-\lambda t}$.

За рахунок того, що $F(0) = 0$, обчислюємо константу інтегрування C: $F(0) = 1 - C \Rightarrow C = 1$.

Відповідь: $F_\xi(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$; $p_\xi(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$ (див. рис. 3.5 – – функція розподілу за експоненціальним законом, рис.3.6 – щільність експоненціального розподілу).

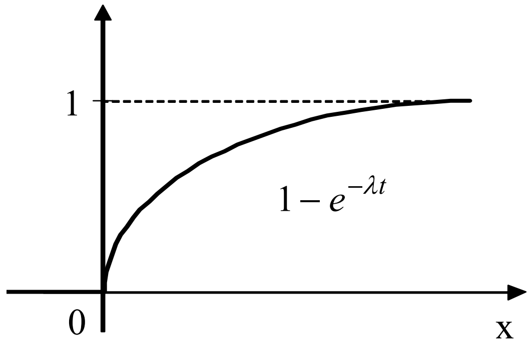


Рис. 3.5

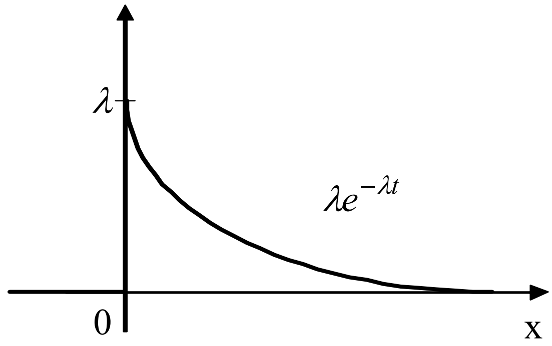


Рис. 3.6

Зауваження**.** За експоненціальним законом розподіленим є час до перегоряння, наприклад, звичайної електричної лампи, та переважної кількості електронних і механічних пристроїв.

Приклад 3.9. Припустимо, що ймовірність вийти з ладу за час $[t;\, t+dt]$ є пропорційною часу t. Знайти розподіл випадкової величини ξ – часу безаварійної роботи.

Розв'язання. Розмірковуючи, як і в попередньому прикладі, одержуємо диференціальне рівняння $\dfrac{dF}{1-F}=\lambda t dt$, $F(0)=0$.

$$ln(1-F)=-\lambda\frac{t^2}{2}+lnC,\ F_\xi(t)=1-Ce^{-\lambda\frac{t^2}{2}},\ C=1;\ p_\xi(t)=\lambda e^{-\lambda\frac{t^2}{2}},\ t\ge 0.$$

Відповідь: $F_\xi(t)=1-e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}$, $p_\xi(t)=\lambda e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}$, $t\ge 0$.

Зауваження**.** Знайдений розподіл має назву розподілу Релея. За цим законом розподілений, наприклад, час, протягом якого можна вживати торт або інші їстівні продукти, в яких із перебігом часу розпочинаються внутрішні руйнівні процеси (це ж стосується й життя людини, але в цьому разі залежність від часу складніша).

Приклад 3.10. За 1 секунду частинку штовхають інші частинки вліво та вправо n разів. Після кожного поштовху частинка переміщується направо на відстань $\dfrac{V_0}{\sqrt{n}}$ з ймовірністю $\dfrac{1}{2}$ або вліво на ту ж відстань з тією ж ймовірністю. Знайти розподіл випадкової величини ξ – відхилення частинки від початкового положення.

Розв'язання. Координату положення частинки будемо позначати V. Якщо всіх поштовхів направо буде m, то

$\xi = m\frac{V_0}{\sqrt{n}} - (n-m)\frac{V_0}{\sqrt{n}} = (2m-n)\frac{V_0}{\sqrt{n}}$. Вважаючи, що кількість поштовхів n, а також числа m і $n-m$ великі, скористаємося інтегральною теоремою Маувра-Лапласа $P(\xi < V) =$

$$= P\left((2m-n)\frac{V_0}{\sqrt{n}} < V\right) = P\left(2m - n < \frac{V_0}{V}\sqrt{n}\right) = P\left(m < \frac{n}{2} + \frac{V_0}{V}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \cong$$

$$\cong \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} + \frac{V_0}{V}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) = \Phi\left(\frac{V_0}{V}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{V}{V_0}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Відповідь: $F_\xi(V) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{V}{V_0}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, $p_\xi(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_0}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}$.

Зауваження**.** 1. Знайдений розподіл має назву нормального. 2. Відхилення частинки від початкового положення за одну секунду є швидкістю частинки. В розглянутій моделі швидкість частинки виявляється випадковою величиною, яка розподілена за нормальним законом.

Приклад 3.11. Гра полягає в киданні монети. Якщо випадає герб, то гравцю дають вибрати навмання точку в колі радіусом 10 см, і виграш становить r коп., де r – відстань від центра, см. Перед початком гри гравець вносить 5 коп. Знайти розподіл загального виграшу.

Розв'язання. Позначимо загальний виграш як ξ. Він може набувати значення від –5 коп. до 5 коп. $P(\xi < -5) = 0$. $P(\xi = -5) = \frac{1}{2}$ відповідає тому, що випала решка, або випав герб, та відстань від центру дорівнює нулю. Розглянемо подію $\{\xi < x\} = \{\xi < -5\} + \{\xi = -5\} + \{-5 < \xi < x\}$, де $x \in (-5;\ 5]$. $\{-5 < \xi < x\} =$ {випав герб} та {вибрано точку на відстані, меншій, ніж $(x+5)$ від центра}.

Ймовірність влучити в коло радіусом $x+5$ (рис. 3.7) дорівнює $\frac{S}{S} = \frac{\pi(x+5)^2}{\pi 10^2} = \left(\frac{x+5}{10}\right)^2$. Тому $P(\xi < x)\Big|_{x\in(-5;\ 5]} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+5}{10}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Якщо ж $x > 5$, то $P(\xi < x) = 1$.

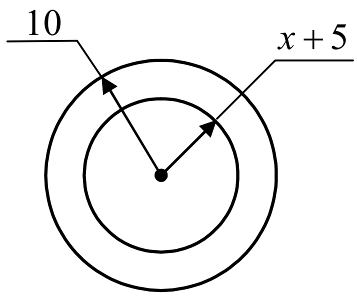


Рис. 3.7

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<-5,\\ \dfrac{1}{2}, & x=-5,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+5}{10}\right)^2, & -5<x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

Знайдену функцію розподілу можна уявити як зважену суму двох функцій розподілу різних типів: $F_\xi(x)=\alpha_1F_1(x)+\alpha_2F_2(x)$, де $\alpha_1+\alpha_2=1$ (у даному разі $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$); $F_1(x)=\eta(x+5)$;

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ \left(\dfrac{x+5}{10}\right)^2, & -5\le x<5,\\ 1, & 5\le x.\end{cases}$$

Відповідно, $p_\xi(x)=\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)$; $p_1(x)=\delta(x+5)$;

$$p_2(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ \dfrac{1}{50}(x+5), & -5\le x<5,\\ 0, & 5\le x.\end{cases}$$

Відповідь: розподіл є сумішшю розподілів дискретного та неперервного типів: $F_\xi(x)=\dfrac{1}{2}F_1(x)+\dfrac{1}{2}F_2(x)$ (рис. 3.8);

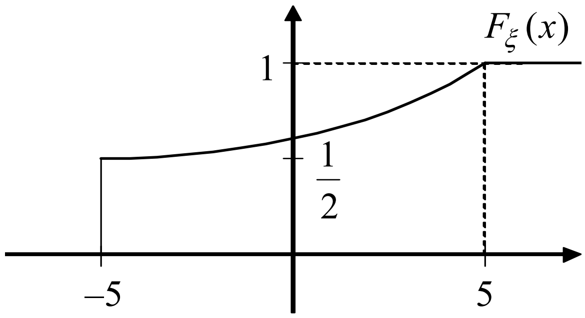


Рис. 3.8

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ 1, & -5<x;\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x<-5,\\ \left(\dfrac{x+5}{10}\right), & -5<x\le 5,\\ 1, & 5<x.\end{cases}$$

4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Мода, медіана, квантилі

Модою розподілу є таке значення аргументу щільності розподілу, в якому щільність має максимум (локальний). Якщо ж розподіл дискретний, то модою позначають таке значення x_i, для якого

$P(\xi = x_i) \geq P(\xi = x_{i+1})$, $P(\xi = x_i) \geq P(\xi \geq x_{i-1})$.

У разі існування єдиної моди розподіл має назву одномодального (або унімодального). Розподіл може мати дві моди і більше. Прикладом може служити випадковий зріст випадкового перехожого: адже він може бути і чоловіком, і жінкою. Тому графік щільності розподілу, як суміші розподілів зросту чоловіків і жінок, має два горби (рис.4.1): $p_\xi(x) = \alpha_1 p_ж(x) + \alpha_2 p_ч(x)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

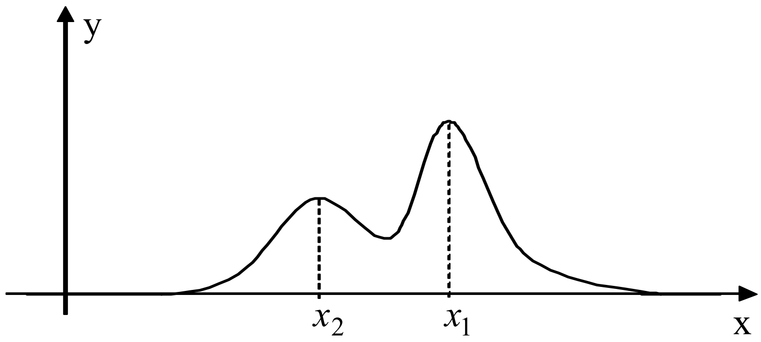


Рис. 4.1

Медіаною розподілу ξ є таке число m (якщо воно існує), для якого $P(\xi < m) = \dfrac{1}{2}$ (і тому $P(\xi \geq m) = \dfrac{1}{2}$). Для того, щоб знайти медіану, треба розв'язати рівняння $F_\xi(x) = \dfrac{1}{2}$ (воно може і не мати розв'язку, і тоді медіани немає). Аналогічно вводять у розгляд і квантилі ліві та праві, $m_{\lambda+}$, $m_{\lambda-}$, як розв'язки рівнянь: $F(m_{\lambda-}) = \lambda$, $F(m_{\lambda+}) = 1 - \lambda$, $\lambda = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$ і т.д.

4.2. Інтегрування на ймовірнісних просторах

Припустимо, що кожній елементарній події поставлено у відповідність якесь число. Це означає, що на множині елементарних подій введено числову функцію $f(\omega)$. Розіб'ємо числову вісь, на якій набуває своїх значень $f(\omega)$, на інтервали Δf_i точками f_0, f_1, …, f_n. Ті події, для яких $f_i \leq f(\omega) < f_{i+1}$, об'єднаємо в подію $\Delta\omega_i$. Мірою такого об'єднання є $P(\Delta\omega_i)$. Після цього побудуємо інтегральну схему такого вигляду: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i P(\Delta\omega_i)$.

Спрямуємо $max(f_{i+1} - f_i) \to 0$. Якщо при цьому існує межа $S = \lim_{\max \Delta f_i \to 0} S_n$, то функцію $f(\omega)$ вважають такою, що має інтеграл, а межа S має назву інтегралу від функції $f(\omega)$ на ймовірнісному просторі:

$$S = \int\limits_{(\dot{I},\, \Phi,\, P)} f(\omega)P(d\omega).$$

Якщо введено випадкову величину ξ з функцією розподілу $F_\xi(x)$, то інтеграл S набуває такого вигляду:

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_\xi(x).$$

Такий інтеграл має назву Стілтьєса.

Оскільки f є функцією від подій ω, як і випадкова величина ξ, то f є функцією від випадкової величини $\xi : f = f(\xi)$. Інтеграл S, розглянутий у такому аспекті, має назву математичного сподівання функції $f(\xi)$, або середнього значення цієї функції:

$$M[f(\xi)] = \bar{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_\xi(x).$$

Для дискретних розподілів $M[f(\xi)] = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)p_i$, для неперервних – $M[f(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\xi(x)dx$.

4.3. Математичні сподівання випадкових величин

Розглянемо ймовірнісний простір $(\dot{I},\, \Phi,\, P)$ і випадкову величину ξ на ньому. Інтеграл від цієї в.в. має назву середнього значення, або математичного сподівання (м.с.) в.в. ξ. Позначення: $M[\xi]$, $\bar{\xi}$.

$$M[\xi] = \int\limits_{(\dot{I},\, \Phi,\, P)} \xi(\omega)P(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x).$$

Властивості математичного сподівання:

1. $M[C] = C$; дійсно, $M[C] = \int CP(d\omega) = C\int P(d\omega) = CP(\dot{I}) = C$.
2. $M[\alpha\xi] = \alpha M[\xi]$: $M[\alpha\xi] = \int \alpha\xi(\omega)P(d\omega) = \alpha\int \alpha\xi(\omega)P(d\omega) = \alpha\bar{\xi}$.
3. $M[\xi_1 + \xi_2] = M[\xi_1] + M[\xi_2]$: $M[\xi_1 + \xi_2] = \int (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega))P(d\omega) =$
$= \int \xi_1(\omega)P(d\omega) + \int \xi_2(\omega)P(d\omega) = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2$.

Середнє значення випадкової величини – це дуже важлива числова характеристика розподілу. В багатьох практичних задачах взагалі обмежуються саме середнім значенням в.в., не вдаючись до подробиць типу функцій та щільностей розподілу. Обчислення м.с., таким чином, є змістом великої кількості ймовірнісних задач.

Приклад 4.1. В урні п’ять куль з номерами 1, 3, 3, 2, 6. Навмання виймають дві кулі. Знайти середнє значення добутку номерів цих куль.

Розв’язання. Додамо кожній кулі ще один номер, щоб їх відрізняти;

таким чином, на першій кулі – номер 1, другій – 3, третій – 3, четвертій – 2, п'ятій – 6. Розглянемо різні комбінації по дві кулі і добуток номерів на них: $(1, 2): 1\cdot 3 = 3$; $(1, 3): 1\cdot 3 = 3$; $(1, 4): 1\cdot 2 = 2$; $(1, 5): 1\cdot 6 = 6$; $(2, 3): 3\cdot 3 = 9$; $(2, 4): 3\cdot 2 = 6$; $(2, 5): 3\cdot 6 = 18$; $(3, 4): 3\cdot 2 = 6$; $(3, 5): 3\cdot 6 = 18$; $(4, 5): 2\cdot 6 = 12$.

Таким чином, випадкова величина Z умови задачі набуває значень $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 6$, $z_4 = 9$, $z_5 = 12$, $z_6 = 18$.

Ряд її розподілу має такий вигляд:

z	2	3	6	9	12	18
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

.

$$M[z] = \frac{2+3\cdot 2+6\cdot 3+9+12+18\cdot 2}{10} = 8{,}3.$$

Відповідь: 8,3.

Приклад 4.2. Є чотири набої. Проводять обстріл цілі до першого влучення. Ціль віддаляється, і з кожним пострілом ймовірність влучити зменшується в два рази. Ймовірність влучити першим пострілом дорівнює 0,5. Знайти середнє значення використаних набоїв.

Розв'язання. Випадкова величина Z – кількість використаних набоїв. Позначимо як a_i подію: {*i*-м пострілом влучили в ціль}.

$$\{z=1\} = a_1; \qquad p_1 = p(a_1) = \frac{1}{2};$$

$$\{z=2\} = \bar{a}_1\cdot a_2; \qquad p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$\{z=3\} = \bar{a}_1\cdot\bar{a}_2\cdot a_3; \qquad p_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{64};$$

$$\{z=4\} = \bar{a}_1\cdot\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3; \qquad p_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{21}{64};$$

$$M[z] = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{3}{64} + 4\cdot\frac{21}{64} = \frac{141}{64} = 2{,}203125.$$

Відповідь: 2,203125.

Приклад 4.3. Гравець А має три монети по 1 коп. кожна. Гравець Б має шість таких же монет. Кидають всі монети й підраховують загальну кількість гербів. Якщо вона перевищує п'ять, то всі монети забирає А. В іншому разі всі монети забирає Б. Визначити математичні сподівання загального виграшу для кожного з гравців.

Розв'язання. Позначимо Z_A випадкову величину виграшу гравця А. Вона набуває значень $z_1 = 6$ і $z_2 = -3$. Нехай також m – випадкова величина, яка набуває значень кількості гербів. Події: $\{z=6\}$ та $\{m>5\}$ еквівалентні: $\{z=6\} = \{m>5\}$, – їхні ймовірності збігаються.

$P(m>5)=$

$$=P(m=6)+P(m=7)+P(m=8)+P(m=9)=C_9^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9+C_9^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9+C_9^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9+$$

$$+C_9^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{2^9}\left(\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}+\frac{9\cdot8}{1\cdot2}+\frac{9}{1}+1\right)=\frac{130}{512};$$

$$P(m\le5)=1-P(m>5)=\frac{382}{512}.$$

Ряд розподілу Z_A має такий вигляд:

Z_A	-3	6
p	$\frac{382}{512}$	$\frac{130}{512}$

.

$$M[Z_A]=\frac{-3\cdot382+6\cdot130}{512}=-\frac{183}{256}\cong-0{,}72 \text{ коп.};\ M[Z_B]=-M[Z_A]=0{,}72 \text{ коп.}$$

Відповідь: $M[Z_A]=-0{,}72$; $M[Z_B]=0{,}72$.

Приклад 4.4. Гравець А має шість монет по 2 коп. кожна; Б – дві монети по 5 коп. Кожний кидає свої монети і підраховує суму, яка випала. Якщо сума, яка випала у А, перевищує суму Б, то всі монети забирає А; у протилежному випадку (тобто сума Б перевищує суму А або дорівнює їй) гравець Б забирає всі монети . Обчислити середні значення виграшів А та Б.

Розв'язання. Позначимо подію: {у гравця А випало цифрою *i* монет; у гравця Б випало цифрою j монет} як $\{i,\ j\}$. Випадкова величина Z_A виграшу гравця А може набувати значень $z_1=-12$ і $z_2=10$.

$\{Z_A=-12\}=\{0,\ 0\}+\{5,\ 2\}+\{0,\ 1\}+\{1,\ 1\}+\{2,\ 1\}+\{0,\ 2\}+\{1,\ 2\}+\{2,\ 2\}+$ $+\{3,\ 2\}+\{4,\ 2\}$. Окремі ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі

$$P(\{0,\ 2\}+\{1,\ 2\}+\{2,\ 2\}+\{3,\ 2\}+\{4,\ 2\}+\{5,\ 2\})=\left(1-\frac{1}{2^6}\right)\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{2^6-1}{2^8}=\frac{63}{2^8}.$$

$$P(\{0,\ 0\}+\{0,\ 1\}+\{1,\ 1\}+\{2,\ 1\})=\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{2}{2^2}+\frac{6}{2^6}\cdot\frac{2}{2^2}+\frac{15}{2^6}\cdot\frac{2}{2^2}=\frac{45}{2^8}.$$

$$P(Z_A=-12)=\frac{63}{2^8}+\frac{45}{2^8}=\frac{27}{64}.$$

$$P(Z_A)=10=1-P(Z_A=-12)=\frac{37}{64}.$$

$$M[Z_A]=-12\cdot\frac{27}{64}+10\cdot\frac{37}{64}=\frac{23}{32};\ M[Z_Б]=-M[Z_A]=-\frac{23}{32}.$$

Відповідь: $\overline{Z}_A=\frac{23}{32}$; $\overline{Z}_Б=-\frac{23}{32}$.

Приклад 4.5. Гравець А має 20 монет по 1 копійці, гравець Б – 40 таких же монет. Кидають всі монети та перелічують загальну кількість гербів. Якщо вона менша ніж 36, то всі монети забирає А, інакше їх забирає Б. Обчислити математичне сподівання сумарного виграшу для кожного з гравців.

Розв'язання. Точно підрахувати ймовірності виграшу для кожного з гравців у даному випадку практично неможливо. Тому треба скористатися інтегральною теоремою Муавра-Лапласа. Введемо в розгляд випадкову величину $Z_A =${сумарний виграш гравця А}. Вона може набувати значень: $z_1 = -20$, $z_2 = 40$.

$P(z = z_1) = P${кількість гербів m менша 36}.

Згідно з формулою Муавра-Лапласа спочатку треба обчислити такі величини:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{15}\,; \quad x_2 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 60 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{15}} = \frac{5}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{5}{3}}\,;$$

$$x_1 = \frac{0 - np}{\sqrt{15}} = \; = -\frac{30}{\sqrt{15}} = -6\sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

Тоді $P(0 \le m \le m_1) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \cong \Phi(1{,}291) - 0 =$ $= 0{,}917$.

Випишемо ряд розподілу для випадкової величини Z_A:

Z_A	-20	40
p	0,083	0,917

; $\overline{Z}_A = -20 \cdot 0{,}083 + 40 \cdot 0{,}917 = 35{,}02$.

Для випадкової величини $Z_Б$ ряд розподілу виглядає так:

$Z_Б$	20	-40
p	0,083	0,917

.

Тому $\overline{Z}_Б = -\overline{Z}_A = -305{,}02$.

Відповідь: 35,02 коп. та –35,02 коп.

<u>Зауваження.</u> Відповідь виглядає дещо парадоксально. Виявляється, що межа в 36 гербів не забезпечує "справедливості". Можна показати, що $-\overline{Z}_A = \overline{Z}_Б \approx 0$, якщо межею буде 28 гербів.

Приклад 4.6. Мають 13 лотерейних білетів, з яких на два припадає виграш по 2 грн., на один – 3 грн. і на один – 4 грн.. Кожен білет коштує 1 грн. Купують три білети. Знайти середнє значення сумарного виграшу (тобто треба врахувати сплачену суму).

Розв'язання. Перш за все, треба знайти ряд розподілу випадкової суми виграшу, яка позначається, наприклад, Z. Вона може набувати таких значень:

$\{z_1 = -3\} = \{$всі три білети невиграшні$\}$;

$\{z_2 = -2\} = \{$один білет – виграш у 2 грн., два – невиграшні$\}$;

$\{z_3 = 0\} = \{$один білет – виграшний в 3 грн., два – невиграшні$\}$;

$\{z_4 = 1\} = \{$один білет – виграшний в 4 грн., два – невиграшні$\}$ або $\{$два – виграшні по 2 грн., один – невиграшний$\}$;

$\{z_5 = 2\} = \{$один – виграшний в 2 грн., один – в 3 грн., один – невиграшний$\}$;

$\{z_6 = 3\} = \{$один – виграшний в 2 грн., один – в 4 грн., один – невиграшний$\}$;

$\{z_7 = 4\} = \{$один – виграшний в 3 грн., один – в 4 грн., один – невиграшний$\}$ або $\{$два – виграшні в 2 грн., один – в 4 грн.$\}$;

$\{z_8 = 6\} = \{$один – виграшний в 2 грн., один – в 3 грн., один – в 4 грн.$\}$.

Позначимо $P_i = P\{z = z_i\}$. Кількість варіантів комбінацій з трьох білетів дорівнює $C_{13}^3 = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Кількість m_1 комбінацій, сприятливих відносно події $\{z = -3\}$, дорівнює $C_9^3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Відносно події $\{z = -2\}$ – $C_2^1 C_9^2 = 2 \cdot \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$ Далі $m_3 = C_1^1 C_9^2 = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$; $m_4 = C_1^1 C_9^2 + C_2^2 C_9^1 = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} + 9$; $m_5 = C_2^1 C_1^1 C_9^1 = 18$; $m_6 = C_2^1 C_1^1 C_9^1 = 18$; $m_7 = C_1^1 C_1^1 C_9^1 + C_2^1 C_1^1 = 11$; $m_8 = C_2^1 C_1^1 C_1^1 = 2$. Запишемо ряд розподілу Z, маючи на увазі, що $P_i = \dfrac{m_i}{n}$.

Z	-3	-2	0	1	2	3	4	6
p	$\frac{84}{286}$	$\frac{72}{286}$	$\frac{36}{286}$	$\frac{45}{286}$	$\frac{18}{286}$	$\frac{18}{286}$	$\frac{11}{286}$	$\frac{2}{286}$

За формулою $\overline{Z} = \sum\limits_{i=1}^{8} z_i p_i$ обчислюємо $\overline{Z}$:

$$\overline{Z} = \frac{1}{286}(-3 \cdot 84 - 2 \cdot 72 +$$

$$+ 0 \cdot 36 + 1 \cdot 45 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 11 + 6 \cdot 2) = -\frac{205}{286} \approx -72 \text{ коп.}$$

Відповідь: –72 коп.

Приклад 4.7. В урні п’ять білих і п’ять чорних куль. Під час одного експерименту витягують навмання одну кулю. Якщо вона біла, то її повертають в урну, чорну відкладають. Знайти середню кількість експериментів до одержання двох чорних куль.

Розв’язання. Введемо випадкову величину Z, яка набуває значення кількості потрібних експериментів, наприклад набувати значення $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, …, $z_n = n+1$, ….

$\{z = n+1\} = A_n \cdot a_{n+1}$, де A_n ={в n експериментах витягнули одну чорну кулю}, a_{n+1} ={в $(n+1)$-у експерименті витягнули чорну кулю}.

$P_n = P(z = z_n) = P(A_n \cdot a_{n+1}) = P(A_n)P(a_{n+1} / A_n)$.

Розглянемо по черзі A_n:

$A_1 = a_1$; $P(A_1) = \dfrac{5}{10}$;

$A_2 = a_1 \cdot \overline{a}_2 + \overline{a}_1 \cdot a_2$; $P(A_2) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{10} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^2 \left(\dfrac{9}{10} + \left(\dfrac{9}{10}\right)^2\right)$;

$A_3 = a_1 \cdot \overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 + \overline{a}_1 \cdot a_2 \cdot \overline{a}_3$;

$$P(A_3) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \left(\frac{5}{9}\right)^3 \times$$

$$\times \left[\left(\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3\right] \text{ і т.д.}$$

$$P(A_n) = \left(\frac{5}{9}\right)^n \left[\left(\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^n\right] = \left(\frac{5}{9}\right)^n \frac{\frac{9}{10}\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}{1 - \left(\frac{9}{10}\right)} = 9\left[\left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{10}\right)^n\right]$$

; $P(a_{n+1} / A_n) = \dfrac{4}{9}$; нарешті, $P_n = 4\left[\left(\dfrac{5}{9}\right)^n - \left(\dfrac{5}{10}\right)^n\right]$.

$$M[Z] = \sum_{n=1}^{\infty} z_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot 4\left[\left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{10}\right)^n\right] = 4\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) q_1^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) q_2^n,$$

де $q_1 = \dfrac{5}{9}$, $q_2 = \dfrac{5}{10}$.

Позначимо $f(q)$ суму нескінченної геометричної прогресії: $f(q) =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n+1} = \dfrac{q^2}{1-q}$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) q^n = f'(q) = \dfrac{2q - q^2}{(1-q)^2}$.

$$M[Z] = 4\left\{\frac{2q_1 - q_1^2}{(1-q_1)^2} - \frac{2q_2 - q_2^2}{(1-q_2)^2}\right\} = \frac{17}{4} = 4{,}25.$$

Відповідь: 4,25.

Приклад 4.8. В урні 15 куль з номерами від 1 до 15. Навмання беруть дві кулі. Знайти середнє значення модуля різниці номерів витягнутих куль.

Розв'язання. Позначимо Z випадкову величину, про яку йдеться в умові. Вона може набувати таких значень:

$z_1 = 14$, якщо витягнули кулі з номерами 1 та 15 (одна пара);

$z_2 = 13$, якщо витягнули кулі з номерами 1 та 14 або 2 та 15 (дві пари);

$z_3 = 12$ – (1, 13), (2, 14), (3, 15) (три пари);

$z_4 = 11$ – (1, 12), (2, 13), (3, 14), (4, 15) (чотири пари);

$z_5 = 10$ – (1, 11), (2, 12), (3, 13), (4, 14), (5, 15) (п’ять пар);

$z_6 = 9$ – (1, 10), (2, 11), (3, 12), (4, 13), (5, 14), (6, 15) (6 пар);

$z_7 = 8$ – (1, 9), (2, 10), (3, 11), (4, 12), (5, 13), (6, 14), (7, 15) (7 пар);

$z_8 = 7$ – (1, 8), (2, 9), (3, 10), (4, 11), (5, 12), (6, 13), (7, 14), (8, 15) (8 пар);

$z_9 = 6$ – (1, 7), (2, 8), (3, 9), $\dots$ (всього 9 пар);

$z_{10} = 5$ – 10 пар; $z_{11} = 4$ – 11 пар; $z_{12} = 3$ – 12 пар; $z_{13} = 2$ – 13 пар; $z_{14} = 1$ – 14 пар.

Ймовірність витягнути кожну окрему пару – $\dfrac{1}{C_{15}^2} = \dfrac{1}{105}$.

Випишемо ряд розподілу Z:

Z	1	2	3	4	…	13	14
p	$\frac{14}{105}$	$\frac{13}{105}$	$\frac{12}{105}$	$\frac{11}{105}$	…	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{105}$

Нарешті,

$$M[Z] = \sum_{i=1}^{14} z_i p_i = \frac{1}{105}(14 \cdot 1 + 13 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 6 +$$

$$+ 8 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 14) = \frac{8}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{8}{3}$.

Приклад 4.9. У кожній окремій партії гравець А виграє у Б з ймовірністю $P_A = 0{,}4$, програє йому з ймовірністю $P_Б = 0{,}2$. Ймовірність нічиєї $P_н = 0{,}4$. Грають до першої перемоги якогось із гравців, який і оголошується переможцем. При перемозі гравця А гравець Б сплачує йому 1 гривню. При перемозі Б гравець А сплачує Б 2 грн.. Знайти математичні сподівання виграшів А та Б.

Розв’язання. Введемо в розгляд випадкову величину Z_A, яка може набувати значення $z_1 = -2$, $z_2 = 1$.

$$\{Z_A = 1\} = a_1 + н_1 \cdot a_2 + н_1 \cdot н_2 \cdot a_3 + \dots;$$

$$P_1 = P(Z_A = 1) = P_A(1 + P_н + P_н^2 + P_н^3 + \dots) = \frac{P_A}{1 - P_н} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3};$$

$$\{Z_A = -2\} = b_1 + н_1 \cdot b_2 + н_1 \cdot н_2 \cdot b_3 + \dots;$$

$$P_2 = P(Z_A = -2) = P_Б(1 + P_н + P_н^2 + P_н^3 + \dots) = \frac{P_Б}{1 - P_н} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}.$$

У такому разі $M[Z_A] = -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = 0$; $M[Z_Б] = 0$.

Відповідь: $\overline{Z}_A = \overline{Z}_Б = 0$.

Приклад 4.10. В урні шість білих і дві чорні кулі. Гравець А виймає навмання дві кулі і не повертає їх в урну. Після цього гравець Б також виймає дві кулі. Якщо вони того ж кольору, що й ті, які витягнув А, то гравець А сплачує Б три грн.. Якщо це не так, то гравець Б сплачує А одну гривню. Визначити математичні сподівання виграшів для кожного з гравців.

Розв'язання. Нехай Z_A – випадкова величина виграшу гравця А. Вона може набувати значення $z_1 = -3$, $z_2 = 1$, $P_1 = P(Z_A = -3) =${кольори куль у перший та другий рази збігаються}. Для обчислення цієї ймовірності введемо в розгляд гіпотези:

$H_1 =${А витяг 2б кулі}; $P(H_1) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7}$;

$H_2 =${А витяг 1б і 1ч кулі}; $P(H_2) = \frac{C_6^1 C_2^1}{C_8^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7}$;

$H_3 =${А витяг 2ч кулі}; $P(H_3) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{2}{8 \cdot 7}$.

Тоді $$P_1 = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 1 \cdot 2}{6 \cdot 5} + \frac{2}{8 \cdot 7} \cdot \frac{0}{6 \cdot 5} = \frac{5}{14},$$

$$P_2 = P(Z_A = 1) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

Таким чином, $M[Z_A] = -3 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{9}{14} = -\frac{3}{7} \cong -43$ коп.; $M[Z_Б] \cong 43$ коп.

Відповідь: $M[Z_A] = -43$ коп.; $M[Z_Б] = 43$ коп.

Зауваження. Гра була б "справедливою", якщо у випадку збігу кольорів двох пар куль гравець А сплачував би гравцю Б 1 грн. 80 коп., а не 3 грн..

Приклад 4.11. Грають двоє шахістів, які мають однакову силу. Ймовірність нічиєї в одній партії дорівнює 0,6. Виграє матч той з шахістів, хто перший набере два очки. Знайти середню кількість партій матчу.

Розв'язання. Введемо позначення: P_A – ймовірність виграти в одній партії гравця А; P_B – ймовірність виграти в одній партії гравця Б (у даному разі $P_A = P_B = 0{,}2$); q – ймовірність нічиєї в одній партії

($q=1-P_A-P_B=0{,}6$); $C_n=${в n партіях одна перемога у гравця А, одна – у гравця Б}; $A_n=${в n партіях один раз переміг А, жодного – Б}; $B_n=${в n партіях один раз переміг Б, жодного – А}; $a_n=${в n-й партії переміг А}; $b_n=${в n-й партії переміг Б}; $c_n=${в n-й партії нічия}. Введемо випадкову величину Z, яка набуває значення кількості зіграних у матчі партій. Сконструюємо подію $\{Z=n\}$: $\{Z=n\}=A_{n-1}\cdot a_n+B_{n-1}\cdot b_n+C_{n-1}\cdot(a_n+b_n)$. $A_n=a_1c_2c_3\ldots c_n+$ $+c_1a_2c_3\ldots c_n+c_1c_2\ldots c_{n-1}a_n$; $P(A_n)=n\cdot P_A\cdot q^{n-1}$. Аналогічно $P(B_n)=n\cdot P_B\cdot q^{n-1}$. C_n – це сума добутків, які складаються з $n-2$ множників c, одного a та одного b. Загальна їх кількість – $2C_n^2$; ймовірність кожного з них – $q^{n-2}\cdot P_A\cdot P_B$. Таким чином, $P(C_n)=2\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^{n-2}\cdot P_A\cdot P_B$.

$$P(Z=n)=(n-1)P_A\cdot q^{n-2}\cdot P_A+(n-1)P_B\cdot q^{n-2}\cdot P_B+(n-1)(n-2)q^{n-3}\times$$
$$\times(P_A+P_B)\cdot P_A\cdot P_B;$$

$$M[Z]=\sum nP(Z=n)=(P_A^2+P_B^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}+(P_A+$$

$$+P_B)P_AP_B\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)q^{n-3}=(P_A^2+P_B^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)''+(P_A+P_B)P_AP_B\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)'''=(P_A^2+P_B^2)\left(\frac{1}{1-q}\right)''+(P_A+P_B)P_AP_B\left(\frac{1}{1-q}\right)'''=(P_A^2+P_B^2)\times$$

$$\times\frac{2}{(1-q)^3}+(P_A+P_B)P_AP_B\frac{6}{(1-q)^4}=\frac{2(P_A^2+P_B^2)}{(1-q)^3}+\frac{6P_AP_B}{(1-q)^3}=$$

$$=\frac{2(P_A^2+P_B^2+3P_AP_B)}{(P_A+P_B)^3}=\frac{2\left[(P_A+P_B)^2+P_AP_B\right]}{(P_A+P_B)^3}=\frac{2}{1-q}+\frac{2P_AP_B}{(1-q)^3}.$$

Якщо $P_A=P_B=\dfrac{1-q}{2}$, то $M[Z]=\dfrac{5}{2(1-q)}$. За умови $q=0{,}6$, і тому

$$M[Z]=\frac{5}{2\cdot 0{,}8}=6{,}25.$$

Відповідь: $M[Z]=6{,}25$.

Приклад 4.12. На п’яти картках – номери від одного до п’яти. Виймають з поверненням по одній картці два рази. Знайти середнє значення випадкової величини, яка є найменшим з номерів на витягнутих картках.

Розв’язання. Позначимо $Z=\min(X_1,X_2)$, де X_1 і X_2 – номери на картках першій та другій. Випадкова величина Z набуває значення 1, 2,…, 5. $Z=1$, якщо $\{X_1=1, X_2=1\}$ або $\{X_1=1, X_2=2\}$ або … $\{X_1=1, X_2=5\}$ або $\{X_1=2, X_2=1\}$ або $\{X_1=3, X_2=1\}$ або … $\{X_1=5, X_2=1\}$ – всього 9 сприятливих подій.

$Z=2$, якщо $\{X_1=2, X_2=2\}$ або $\{X_1=2, X_2=3\}$ або … $\{X_1=2, X_2=5\}$ або $\{X_1=3, X_2=2\}$ або $\{X_1=4, X_2=2\}$ або $\{X_1=5, X_2=2\}$ – всього 7 сприятливих подій.

Для $\{Z=3\}$ – 5, $\{Z=4\}$ – 3, $\{Z=5\}$ – 1 сприятлива подія. Будуємо ряд розподілу для Z:

Z	1	2	3	4	5
p	$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$

.

$$M[Z]=\frac{1}{25}(1\cdot 9+2\cdot 7+3\cdot 5+4\cdot 3+5\cdot 1)=\frac{11}{5}=2{,}2.$$

Відповідь: 2,2.

<u>Зауваження.</u> Оскільки $Z=\min(X_1, X_2)$, то $P(Z>k)=P(\{X_1>k\}$ і $\{X_2>k\})=P(X_1>k)\cdot P(X_2>k)$. Враховуючи, що $P(X_1>k)=P(X_2>k)$, то $P(Z>k)=P^2(X_1>k)$. Далі $\{Z>k-1\}=\{Z=k\}+\{Z>k\}$, і тому $P(Z=k)=P(Z>k-1)-P(Z>k)=P^2(X_1>k-1)-P^2(X_1>k)$; наприклад,
$$P(Z=3)=P^2(X_1>2)-P^2(X_1>3)=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{5}{25}\text{ і т.д.}$$

Приклад 4.13. На п’яти картках – номери від одного до п’яти. Виймають з поверненням по одній картці m разів. Знайти середнє значення випадкової величини, яка є найменшою з номерів на витягнутих картках.

Розв’язання. Згідно із зауваженням до попереднього прикладу $P(Z=k)=P^m(X_1>k-1)-P^m(X_1>k)=\left(\frac{5-(k-1)}{5}\right)^m-\left(\frac{5-k}{5}\right)^m$. Будуємо ряд розподілу:

Z	1	2	3	4	5
p	$\left(\frac{5}{5}\right)^m-\left(\frac{4}{5}\right)^m$	$\left(\frac{4}{5}\right)^m-\left(\frac{3}{5}\right)^m$	$\left(\frac{3}{5}\right)^m-\left(\frac{2}{5}\right)^m$	$\left(\frac{2}{5}\right)^m-\left(\frac{1}{5}\right)^m$	$\left(\frac{1}{5}\right)^m-\left(\frac{0}{5}\right)^m$

$$M[Z]=1\cdot\left(\frac{5}{5}\right)^m-1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^m+2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^m-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^m+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^m-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^m+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^m-$$
$$-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^m+5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^m-5\cdot\left(\frac{0}{5}\right)^m=\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+5^m}{5^m}.$$ Якщо

$m = 2$, то $M[Z] = 2{,}2$.

Відповідь: $M[Z] = \sum_{k=1}^{5} \frac{k^m}{5^m}$.

<u>Узагальнення.</u> Якщо карток n, то $M[Z] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^m}{n^m}$.

Приклад 4.14. За один день безаварійної роботи механізму фірма-замовник сплачує фірмі-виготовлювачу 120 доларів премії. За той день, коли трапляється відмова, фірма-виготовлювач сплачує штраф в 10000 доларів. Визначити математичне сподівання прибутків фірми-виготовлювача за період, коли трапляється п'ять відмов, якщо відмова має ймовірність 0,01 (за один день).

Розв'язання. Позначимо $a_i = \{i$-го дня механізм працював безаварійно$\}$; $A_n = \{$за n днів роботи було чотири відмови$\}$; Z – випадкову величину, яка набуває значення кількості днів, останнім з яких є день п'ятої відмови. $\{Z = n\} = A_{n-1} \cdot \overline{a}_n$; $P_n = P(Z = n) = P(A_{n-1})P(\overline{a}_n) = C_{n-1}^4 p^{n-5} q^4 q = C_{n-1}^4 p^{n-5} q^5$, де $p = P(a_i) = 0{,}99$, $q = 1 - p = 0{,}01$. Нехай також V – випадкова величина прибутків фірми-виготовлювача. Згідно з умовою $V = (Z - 5) \cdot 120 - 5 \cdot 10000 = 120Z - 56000$.

$$M[V] = \sum_{n=5}^{\infty} V_n P_n = 120 \sum_{n=5}^{\infty} Z_n P_n - 56000 \sum_{n=5}^{\infty} P_n = 120 \sum_{n=5}^{\infty} n C_{n-1}^4 p^{n-5} q^5 - 1 \cdot 56000 =$$

$$= 120 \cdot q^5 \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot p^{n-5} - 56000 = 5q^5 \frac{d^5}{dp^5} \left(\sum_{n=5}^{\infty} p^n \right) -$$

$$- 56000 = 5q^5 \frac{d^5}{dp^5} \sum_{n=0}^{\infty} p^n - 56000 = 5q^5 \frac{d^5}{dp^5} \left(\frac{1}{1-p} \right) - 56000 = 5q^5 \cdot \frac{5!}{(1-p)^6} -$$

$$- 56000 = 5 \cdot 120 \frac{q^5}{q^6} - 56000 = \frac{600}{q} - 56000 = \frac{600}{0{,}01} - 56000 = 60000 - 56000 =$$

$$= 4000.$$

Відповідь: $M[V] = 4000$ доларів.

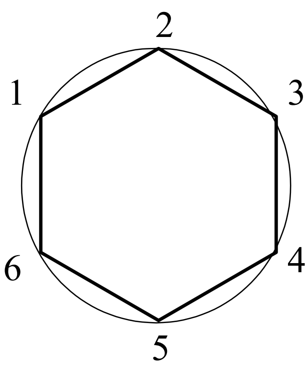


Рис. 4.2

Приклад 4.15. У правильному шестикутнику навмання вибирають дві різні вершини. Знайти середню відстань між ними.

Розв'язання. Нехай сторона шестикутника дорівнює a. Занумеруємо вершини (рис. 4. 2). Випадковий вибір двох вершин є еквівалентним випадковому вибору двох предметів (у даному випадку – номерів) із шести. Загальна кількість

варіантів – $C_6^2 = 15$. Введемо в розгляд випадкову величину Z – відстань між вершинами. Вона може набувати таких значень: $z_1 = a$, $z_2 = \sqrt{3} \cdot a$, $z_3 = 2a$. Позначимо $\{i,\ j\}$ подію: вибрали вершини з номерами i та j. Тоді $\{Z = a\} = \{1, 2\} + \{2, 3\} + \{3, 4\} + \{4, 5\} + \{5, 6\} + \{6, 1\}$ (шість сприятливих випадків);
$\{Z = \sqrt{3} \cdot a\} = \{1, 3\} + \{2, 4\} + \{3, 5\} + \{4, 6\} + \{5, 1\} + \{6, 2\}$ (також шість випадків); $\{Z = 2a\} = \{1, 4\} + \{2, 5\} + \{3, 6\}$ (три випадки). Тому

$$P(Z = a) = \frac{6}{15};\ P(Z = \sqrt{3} \cdot a) = \frac{6}{15};\ P(Z = 2a) = \frac{3}{15}.$$

Ряд розподілу Z виглядає так:

Z	a	$\sqrt{3} \cdot a$	$2a$
p	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

.

$$M[Z] = a\frac{6}{15} + \sqrt{3} \cdot a\frac{6}{15} + 2a\frac{3}{15} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{5}a \approx 1{,}492a.$$

Відповідь: $1{,}492a$.

Приклад 4.16. На відрізку довжиною 1 од. навмання вибирають дві точки. Знайти середнє значення суми довжин лівого та правого відрізків.

Розв'язання. Зіставимо з кожною подією задачі точку в квадраті (рис. 4.3). Для того, щоб знайти щільність розподілу випадкової величини Z, про яку йдеться в задачі, треба знайти ймовірність $P(\text{л. відр.} + \text{пр. відр.} < Z)$, $Z \in [0; 1]$. Якщо $x \le y$, то $z = x + 1 - y$, якщо $x \ge y$, то $z = y + 1 - x$. Події $\{Z < z\}$ відповідає область з межею: $(x - y = z - 1,\ x \le y) \cup (y - x = z - 1,\ x \ge y)$, відзначену закресленням. Тому $P(Z < z) = z^2$, $z \in [0; 1]$.

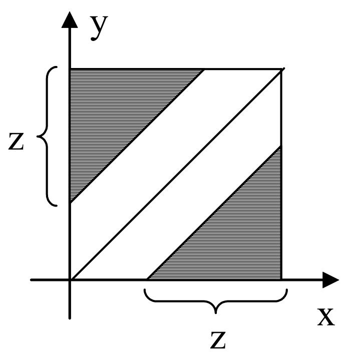


Рис. 4.3

Функцію розподілу записують так: $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z^2, & 0 \le z \le 1, \\ 1, & 1 \le z. \end{cases}$

Щільність розподілу є похідною від $F_Z(z)$: $p_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 2z, & 0 \le z \le 1, \\ 0, & 1 \le z. \end{cases}$

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z) dz = \int_0^1 2z^2 dz = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 4.17. Дві точки, вибрані навмання на інтервалі $[0; 1]$, поділяють його на три відрізки. Знайти середнє значення лівого з них.

Розв'язання. Для того, щоб знайти розподіл випадкової величини Z задачі, треба знайти $P(\text{лівий відрізок} < Z)$, $Z \in [0, 1]$. З подією задачі зіставимо точку в квадраті (рис. 4.4). Подія $\{Z < z\}$ еквівалентна сумі: $\{Z < z\} = \{x < y\} \cdot \{x < z\} + \{y < x\} \cdot \{y < z\}$.

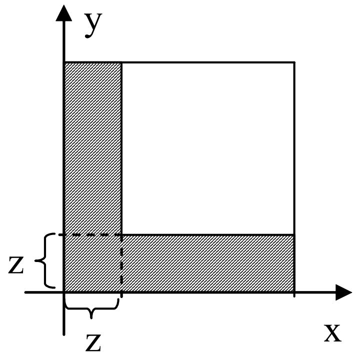


Рис. 4.4

$$P(Z < z) = 1 - (1 - z)^2 = 2z - z^2.$$

Тоді $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2z - z^2, & 0 \le z < 1, \\ 1, & 1 \le z. \end{cases}$

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 2(1 - z), & 0 \le z < 1, \\ 0, & 1 \le z. \end{cases}$$

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z p(z) dz = \int_0^1 2(1 - z) z dz = 2\int_0^1 z dz - 2\int_0^1 z^2 dz = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 4.18. У кільці з внутрішнім радіусом 1 і зовнішнім 2 навмання беруть точку. Знайти середню відстань від неї до найближчої точки на внутрішньому колі.

Розв'язання. Введемо в розгляд випадкову величину Z, яка набуває значення відстані до внутрішнього кола, Її межі зміни – від 0 до 1. Для того, щоб знайти функцію розподілу, треба обчислити $P(Z < z)$, де $z \in [0, 1]$. З геометричних міркувань випливає, що ця ймовірність є відношення площі кільця з внутрішнім радіусом 1, зовнішнім $z+1$ до площі всього кільця: $P(Z < z) = \frac{\pi(z+1)^2 - \pi}{4\pi - \pi} = \frac{z^2 + 2z}{3}$

$(0 \le z \le 1)$.

Таким чином, $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{z^2+2z}{3}, & z\in[0;\,1],\\ 1, & z\ge 1;\end{cases}$ $P_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{2}{3}(z+1), & z\in[0;\,1],\\ 0, & z>1.\end{cases}$

$$M[Z]=\int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz=\int_0^1 \frac{2}{3}(z+1)dz=\frac{5}{9}.$$

Відповідь: $\dfrac{5}{9}$.

Приклад 4.19. У квадраті зі стороною 1 навмання беруть точку. Знайти середнє значення відстані від неї до найближчої сторони.

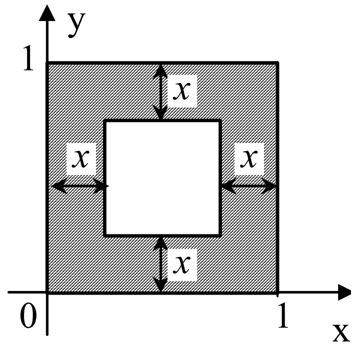


Рис. 4.5

Розв'язання. Позначимо випадкову відстань від довільної точки квадрата до найближчої сторони як X (рис. 4.5). Ця величина змінюється в межах $\left[0;\,\frac{1}{2}\right]$. Для обчислення функції розподілу треба знайти $P(X<x)$. З геометричних міркувань випливає, що $P(X<x)=F(x)=1-(1-2x)^2$,

$\left(x\in\left[0;\,\frac{1}{2}\right]\right)$. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 4(1-2x), & x\in\left[0;\,\frac{1}{2}\right],\\ 0, & \frac{1}{2}<x.\end{cases}$

$$M[X]=4\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)dx=\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{6}$.

<u>Узагальнення</u>**.** Нехай точку беруть як довільну в n-вимірному кубі. Тоді $P(X<x)=F(x)=1-(1-2x)^n$, $p(x)=2n(1-2x)^{n-1}$, $x\in[0;\,1]$.

$$M[X]=2n\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)^{n-1}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}} xd(1-2x)^n=-x(1-2x)^n\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)^n dx=$$

$=-\dfrac{1}{2(n+1)}(1-2x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2(n+1)}$. Для відрізка $(n=1)$ $\overline{X}=\dfrac{1}{4}$; для тривимірного куба $(n=3)$ $\overline{X}=\dfrac{1}{8}$.

Приклад 4.20. На відрізку $[0;3]$ навмання вибирають дві точки. Знайти функцію, щільність розподілу та середнє значення довжини найменшого з уламків.

Розв'язання. З кожним способом розбиття можна взаємно-однозначно зіставити точку в правильному трикутнику з висотою 3, для якої відстані до сторін дорівнюють довжинам лівого, середнього та правого відрізків.

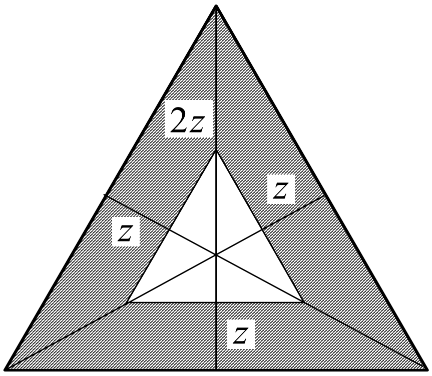


Рис. 4.6

Закреслимо ту множину точок (рис. 4.6), для яких найменша відстань до сторін, тобто довжина найменшого з відрізків, менша за z. Очевидно, $P(Z<z)=1-(1-z)^2$, $z\in[0,1]$, оскільки сторона закресленого трикутника дорівнює $3-3z$, а площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів.

$$F_{(\text{лів., сер., пр.})}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-(1-z)^2, & 0<z\le 1,\\ 1, & 1<z.\end{cases}$$

$$p(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 2(1-z), & 0<z\le 1,\\ 0, & 1<z.\end{cases}$$

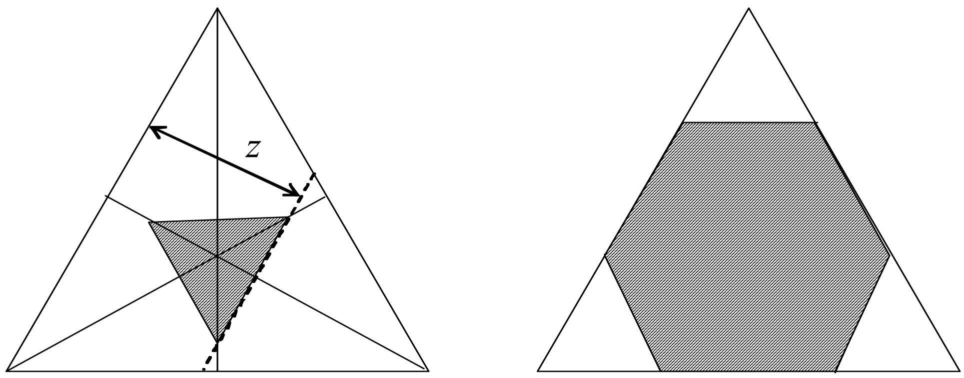
$$M[z]=\int_0^1 xdF = xF\Big|_0^1-\int_0^1 Fdx=1-\int_0^1(1-(1-z)^2)dz=\int_0^1 z^2dz=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Узагальнення. Якщо точок $n-1$, а довжина початкового відрізка – n, то $F(z)=1-(1-z)^{n-1}$, $M[Z]=\frac{1}{n}$.

Приклад 4.21. На відрізку $[0;3]$ навмання вибирають дві точки. Знайти функцію, щільність розподілу та середнє значення довжини найбільшого з уламків.

Розв'язання. Згідно з попереднім прикладом треба обчислити площу області, для якої найбільша з відстаней до сторін буде меншою за z (рис. 4.7). У даному випадку $z\in[1;3]$, причому для $z\in\left[1;\ \frac{3}{2}\right]$ буде одна аналітична залежність, а для $z\in\left[\frac{3}{2};\ 3\right]$ – інша.



а *б*

Рис. 4.7

З геометричних міркувань випливає, що

$$F_{max}(z)=\begin{cases}0, & z\le 1,\\ (z-1)^2, & z\in\left[1;\ \dfrac{3}{2}\right],\\ 1-\dfrac{(3-z)^2}{2}, & z\in\left[\dfrac{3}{2};\ 3\right],\\ 1, & z>3;\end{cases}\qquad p(z)=\begin{cases}0, & z\le 1,\\ 2(z-1), & z\in\left[1;\ \dfrac{3}{2}\right],\\ \dfrac{3}{2}(3-z), & z\in\left[\dfrac{3}{2};\ 3\right],\\ 0, & z>3.\end{cases}$$

$$M[Z]=\int_1^3 zp(z)dz=2\int_1^{\frac{3}{2}} z(z-1)dz+\frac{2}{3}\int_{\frac{3}{2}}^{3} z(3-z)dz=\frac{11}{6}.$$

Відповідь: $\frac{11}{6}$.

Приклад 4.22. Елементи *A* та *B* поєднані паралельно. Випадкове підвищення напруги призводить до виходу з ладу елемента *A* з ймовірністю $q_A=0{,}1$, а елемента *B* – з ймовірністю $q_B=0{,}2$. Визначити середню кількість стрибків напруги, при якій відбудеться розрив мережі.

Розв'язання. Позначимо $A_n=${за *n* стрибків напруги елемент *A* не перегорів}, $B_n=${за *n* стрибків напруги елемент *B* не перегорів}, $C_n=${за *n* стрибків напруги мережу не розірвало}. $P(A_n)=p_A^n$, $P(B_n)=p_B^n$. Оскільки елементи *A* і *B* поєднані паралельно, то $C_n=A_n+B_n$; $P(C_n)=P(A_n)+P(B_n)-P(A_n)P(B_n)=p_A^n+p_B^n-(p_Ap_B)^n$. Позначимо як X випадкову величину кількості стрибків напруги, за яку мережу розірвано. Події C_n і $\{X>n\}$ еквівалентні: $C_n=\{X>n\}$. Тому $P(X>n)=P(C_n)$. Для обчислення середньої величини $M[X]$ треба знайти ряд розподілу, тобто $P(X=n)$.

Розглянемо рівність $\{X>n-1\}=\{X=n\}+\{X>n\}$. $P(X>n-1)=$ $=P(X=n)+P(X>n)$, звідки $P(X=n)=P(X>n-1)-P(X>n)=P(C_{n-1})-$

$-P(C_n) = p_A^{n-1} + p_B^{n-1} - (p_A p_B)^{n-1} - p_A^n - p_B^n + (p_A p_B)^n = p_A^{n-1} q_A + p_B^{n-1} q_B -$
$-(p_A p_B)^{n-1}(1 - p_A p_B)$.

$$M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = q_A \sum_{n=1}^{\infty} np_A^{n-1} + q_B \sum_{n=1}^{\infty} np_B^{n-1} - (1 - p_A p_B) \sum_{n=1}^{\infty} n(p_A p_B)^{n-1} =$$

$$= q_A \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_A^n \right)'_{p_A} + q_B \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_B^n \right)'_{p_B} - (1 - p_A p_B) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (p_A p_B)^n \right)'_{(p_A p_B)} =$$

$$= \frac{q_A}{(1 - p_A)^2} + \frac{q_B}{(1 - p_B)^2} - \frac{1 - p_A p_B}{(1 - p_A p_B)^2} = \frac{1}{q_A} + \frac{1}{q_B} - \frac{1}{q_A + q_B - q_A q_B}.$$

За умов задачі $M[X] = \frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}02} = \frac{80}{7}$.

Відповідь: $\frac{80}{7} \approx 11{,}43$.

Узагальнення**.** Якщо елементів три, то $M[X] = \frac{1}{1-p_A} + \frac{1}{1-p_B} + \frac{1}{1-p_C} -$
$- \frac{1}{1 - p_A p_B} - \frac{1}{1 - p_A p_C} - \frac{1}{1 - p_B p_C} + \frac{1}{1 - p_A p_B p_C}$. Таким чином, є можливість узагальнити відповідь. Якщо всі елементи однакові, то $M[X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{1 - p^k} C_n^k$.

4.4. Дисперсія випадкової величини. Нерівність Чебишева

Дисперсія розподілу в.в. – це середнє значення квадрата відхилення випадкової величини від її середнього значення:

$$D[\xi] = M\left[(\xi - M[\xi])^2\right].$$

Середньоквадратичне відхилення – це корінь з дисперсії:

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}.$$

Користуючись властивостями математичного сподівання, формулу для дисперсії можна записати і в такому вигляді: $D[\xi] = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2$.

Дійсно,

$$M\left[(\xi - M[\xi])^2\right] = M\left[\xi^2 - 2M[\xi]\xi + M^2[\xi]\right] = \overline{\xi^2} - 2\overline{\xi}^2 + \overline{\xi}^2 =$$
$$= \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2.$$

Властивості дисперсії випадкової величини:

$D[\xi] \geq 0$;

$D[\alpha\xi + \beta] = \alpha^2 D[\xi]$;

$D[const] = 0$.

Дисперсія фігурує в так званій нерівності Чебишева.

Розглянемо ряд перетворень:

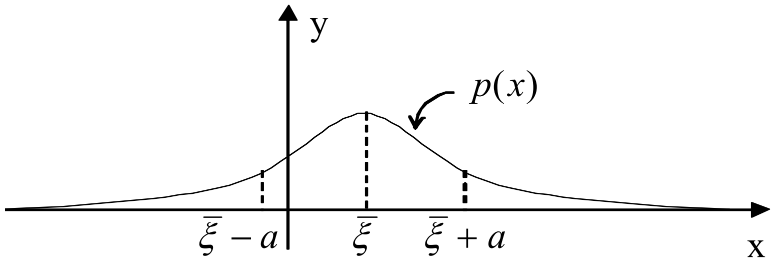


Рис. 4.8

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{\xi})^2dF(x)=\int_{-\infty}^{\bar{\xi}-a}+\int_{\bar{\xi}-a}^{\bar{\xi}+a}+\int_{\bar{\xi}+a}^{\infty}\geq\int_{-\infty}^{\bar{\xi}-a}a^2dF+\int_{\bar{\xi}+a}^{\infty}a^2dF=a^2P(|\xi-\bar{\xi}|>a),$$

звідки $P(|\xi-\bar{\xi}|>a)<\dfrac{D[\xi]}{a^2}$. Це і є нерівність Чебишева. Щільність розподілу показано на рис. 4.8.

Приклад 4.23. Випадкову величину ξ задано її рядом розподілу (див. приклад 3.1):

ξ	3	4	5	6	7	8	9
p	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$6\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$7\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$6\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Знайти $\bar{\xi}$, $D[\xi]$, $\sigma[\xi]$.

Розв'язання. $\bar{\xi}=3\left(\frac{1}{3}\right)^3+4\cdot3\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\cdot6\left(\frac{1}{3}\right)^3+6\cdot7\left(\frac{1}{3}\right)^3+7\cdot6\left(\frac{1}{3}\right)^3+$
$+8\cdot3\left(\frac{1}{3}\right)^3+9\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{162}{27}=6$.

$$D[\xi]=(3-6)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+(4-6)^2 3\left(\frac{1}{3}\right)^3+(5-6)^2 6\left(\frac{1}{3}\right)^3+(6-6)^2 7\left(\frac{1}{3}\right)^3+$$
$$+(7-6)^2 6\left(\frac{1}{3}\right)^3+(8-6)^2 3\left(\frac{1}{3}\right)^3+(9-6)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=(9+12+6+0+6+12+9)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=2.\ \sigma[\xi]=\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\bar{\xi}=6$; $D[\xi]=2$; $\sigma[\xi]=\sqrt{2}$.

Приклад 4.24. В квадраті зі стороною 1 од. навмання беруть точку. Знайти середньоквадратичне відхилення випадкової відстані ξ від точки до найближчої сторони (див. приклад 4.19).

Розв'язання. $p_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 4(1-2x), & x\in\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right],\\ 0, & \dfrac{1}{2}<x.\end{cases}$ $\overline{\xi}=\dfrac{1}{6}$.

Цих даних вистачає для обчислення $D[\xi]$:

$$D[\xi]=\overline{\xi^2}-\overline{\xi}^2=4\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^2\cdot(1-2x)dx-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{24}.$$

У такому разі $\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Відповідь: $\sigma[\xi]=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Приклад 4.25. Випадкову величину ξ задано її функцією розподілу ймовірностей (див. приклад 3.11): $F_{\xi}(x)=\dfrac{1}{2}F_1(x)+\dfrac{1}{2}F_2(x)$,

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ 1, & -5<x;\end{cases}\quad F_2(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ \left(\dfrac{x+5}{10}\right)^2, & -5<x\le 5,\\ 1, & 5<x.\end{cases}$$

Знайти $\overline{\xi}=6$, $D[\xi], \sigma[\xi]$.

Розв'язання. Частину $F_1(x)$ загальної функції розподілу можна уявити у вигляді функції Хевісайда: $F_1(x)=\eta(x+5)$, тому $dF_1(x)=\delta(x+5)dx$.

$$M[\xi]=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdF_1(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdF_2(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\delta(x+5)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-5}^{5}xd\left(\frac{x+5}{10}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}(-5)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\left(x(x+5)^2\Big|_{-5}^{5}-\int\limits_{-5}^{5}(x+5)^2dx\right)=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2\cdot 100}\left(5\cdot 100-\frac{1}{3}\cdot 1000\right)=$$

$$=-\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=-\frac{5}{3};\ \overline{\xi^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF_1(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF_2(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\delta(x+5)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-5}^{5}x^2d\left(\frac{x+5}{10}\right)^2=\frac{1}{2}25+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}\int\limits_{-5}^{5}x^2(x+5)dx=\frac{25}{2}+\frac{25}{6}=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}.$$

$D[\xi]=\overline{\xi^2}-\overline{\xi}^2=\dfrac{50}{3}-\dfrac{25}{9}=\dfrac{125}{9}$. $\sigma[\xi]=\dfrac{5}{3}\sqrt{5}$.

Відповідь: $\overline{\xi}=-\dfrac{5}{3}$; $D[\xi]=\dfrac{125}{9}$; $\sigma[\xi]=\dfrac{5}{3}\sqrt{5}$.

4.5. Характеристична й твірна функції

Цими термінами позначають математичні сподівання функцій $e^{it\xi}$ та t^{ξ}, де t – числовий параметр:

$\varphi(t) = M\left[e^{it\xi}\right]$ (характеристична функція);

$\chi(t) = M\left[t^{\xi}\right]$ (твірна функція).

Кожному розподілу $F_{\xi}(x)$ як функції від змінної x відповідають за наведеними формулами функції від параметра t. Існують і обернені відповідності. За їх допомогою досить просто обчислюють числові характеристики, такі, як $\bar{\xi}$, $D[\xi]$, та інші. Характеристичні функції здебільшого застосовують при вивченні неперервних розподілів, а твірні – дискретних.

Властивості характеристичних функцій:

$\varphi(0) = 1$;

$\varphi'\Big|_{0} = iM[\xi]$, $\varphi''\Big|_{0} = -M[\xi^2]$ і т.д. – якщо відповідні математичні сподівання існують (це відповідає можливості диференціювання за параметром t під знаком інтеграла).

Властивості твірної функції:

$\chi(1) = 1$;

$\chi'(1) = M[\xi]$; $\chi''(1) = M[\xi^2] - M[\xi]$ і т.д. І в цьому разі треба слідкувати за можливістю диференціювання під знаком інтеграла.

5. Найважливіші розподіли теорії ймовірності

5.1. Рівномірний розподіл

$p_{\xi}(x) = \dfrac{1}{b-a}$, якщо $x \in [a;\ b]$, і $p_{\xi}(x) = 0$, якщо $x \notin [a;\ b]$.

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b \le x. \end{cases}$$

$\varphi_{\xi}(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \int_a^b \dfrac{e^{it\xi}}{b-a}dx = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$; $\lim_{t\to 0}\varphi_{\xi}(t) = 1$. Після деяких перетворень $\varphi_{\xi}(t) = 2\dfrac{e^{it\frac{a+b}{2}}}{t(b-a)}\sin\left(t\dfrac{b-a}{2}\right)$.

Якщо $-b = +a$, то $\varphi_{\xi}(t) = \dfrac{\sin(bt)}{bt}$.

$$M[\xi]=\int_b^a \frac{xdx}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{a+b}{2};$$

$$M[\xi^2]=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}=\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2);$$

$$D[\xi]=\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma[\xi]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Використовувати характеристичну функцію в даному випадку для обчислення $\bar{\xi}$, $D[\xi]$ та $\sigma[\xi]$ недоцільно.

Позначення того факту, що в.в. ξ рівномірно розподілена на [*a*; *b*]: $\xi : R(a; b)$.

5.2. Експоненціальний розподіл

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\end{cases} \quad F_\xi(x)\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$\varphi_\xi(t)=M\left[e^{it\xi}\right]=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-it)x}dx=\frac{1}{1-i\left(\frac{t}{\lambda}\right)}; \quad \varphi'_\xi(t)=\frac{i}{\lambda}\frac{1}{\left(1-i\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)^2};$$

$\varphi'_\xi(0)=\frac{i}{\lambda}$. Якщо згадати, що $\varphi'_\xi(0)=iM[\xi]$, то одержуємо $M[\xi]=\frac{1}{\lambda}$.

Аналогічно $\varphi''_\xi(t)=-\frac{2}{\lambda^2}\frac{1}{\left(1-i\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)^3}$ і $M[\xi^2]=\frac{2}{\lambda^2}$.

Таким чином, $D[\xi]=\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma[\xi]=\frac{1}{\lambda}$. Позначення: $\xi : E(\lambda)$.

5.3. Гамма-розподіл

Це розподіл, який узагальнює експоненціальний:

$$P_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\end{cases}$$

константу A знаходять з умови нормування: $A=\frac{1}{\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx}=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, де $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ – гамма-функція Ейлера.

Позначення: $\xi : \Gamma(\lambda, \alpha)$ (тобто в.в. ξ розподілена за законом гамма з параметрами λ, α).

Якщо $\alpha = 1$, то одержимо експоненціальний розподіл

$\varphi_{\xi}(t) = A\int_{0}^{\infty} e^{itx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = A\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda - it)x} dx$. Якщо зробити заміну: $(-\lambda - it)x = z$, то $\varphi_{\xi}(t) = \dfrac{1}{(\lambda - it)^{\alpha}} AA_1$, де $A_1 = \int_{0}^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$.

Тому $\varphi_{\xi}(t) = \dfrac{1}{\left(1 - i\dfrac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}}$.

За допомогою одержаного виразу для характеристичної функції обчислюємо $\bar{\xi}$, $\overline{\xi^2}$ та $D[\xi]$, $\sigma[\xi]$, використовуючи операцію диференціювання замість інтегрування (в цьому і полягає корисність характеристичної функції):

$$iM[\xi] = \varphi'(0) = i\frac{\alpha}{\lambda} \Rightarrow \bar{\xi} = \frac{\alpha}{\lambda}; -M[\xi^2] = \varphi''(0) = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \Rightarrow \overline{\xi^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2};$$

$$D[\xi] = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2};\ \sigma[\xi] = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$

<u>Зауваження</u>**.** Іноді під гамма-розподілом розуміють розподіл з такою щільністю: $p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^{\alpha_1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$

Легко бачити, що це відповідає зв'язку $\alpha_1 = \alpha - 1$.

5.4. Нормальний розподіл

Це, мабуть, найважливіший розподіл теорії ймовірностей. Щільність нормального розподілу має вигляд так званої функції Гаусса:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\};$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} exp\left\{-\frac{(z - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}dz = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right).$$

Позначення: $\xi : N(\bar{x}, \sigma)$.

Для того, щоб мати можливість обчислити числові характеристики нормального розподілу, треба скористатися формулою Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$M[\xi] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\, exp\left\{-\dfrac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}dx$. Зробимо заміну: $\dfrac{x - \bar{x}}{\sigma\sqrt{2}} = z$. Тоді $dx = \sigma\sqrt{2}dz$, $x = \bar{x} + \sigma z\sqrt{2}$; $M[\xi] = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\bar{x} + \sigma z\sqrt{2})e^{-z^2} dz = \bar{x}$;

$$D[\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2\sigma^2 z^2 e^{-z^2}dz =$$

$= \dfrac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz$. Виходячи з інтеграла Пуассона, обчислимо такий інтеграл: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$. Якщо замінити $\sqrt{\alpha}x = t$, то $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$.

Продиференціюємо одержану рівність за змінною α:

$\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx\right)'_{\alpha} = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\right)'_{\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$, а потім покладемо $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Це приводить до рівності $D[\xi] = \dfrac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2$, $\sigma[\xi] = \sigma$.

Таким чином, параметри розподілу $\bar{x}$ і σ відіграють роль середнього значення та середньоквадратичного відхилення відповідно.

При обчисленні характеристичної функції з метою спрощення будемо всі константи "переганяти" в константу нормування:

$$\varphi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2-2x\bar{x}+\bar{x}^2}{2\sigma^2}}; dx = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2it\sigma^2 x-2x\bar{x}+\bar{x}^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(\bar{x}+it\sigma^2)+\bar{x}^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Виділимо в показнику повний квадрат: $x^2 - 2x(\bar{x}+it\sigma^2) + (\bar{x}+it\sigma^2) - (\bar{x}+it\sigma^2) + \bar{x}^2 = (x-\bar{x}-it\sigma^2)^2 - \bar{x}^2 - 2it\bar{x}\sigma^2 + t^2\sigma^4 + \bar{x}^2 = (x-\bar{x}-it\sigma^2)^2 + \sigma^2(-2it\bar{x} + t^2\sigma^2)$;

$M\left[e^{it\xi}\right] = Ae^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}+it\bar{x}}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x}-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx$. Якщо позначити $x - \bar{x} - it\sigma^2 = z$, то $dx = dz$, а контур інтегрування зсунеться в комплексній площині, але при цьому значення інтеграла, як показує більш детальне вивчення, не зміниться, і його можна включити в константу A: $\varphi(t) = Ae^{it\bar{x}-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Оскільки $\varphi(0) = 1$, то $A = 1$. Нарешті, $\varphi(t) = \exp\left(it\bar{x} - \dfrac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.

Беручи відповідні похідні від $\varphi(t)$ в точці $t = 0$, ще раз можна переконатися, що $M[\xi] = \bar{x}$, $D[\xi] = \sigma^2$.

Стандартним нормальним розподілом називається такий, при якому $\bar{x} = 0$, $\sigma = 1$, тобто $N(0, 1)$:

$$\xi : N(0,1) \Rightarrow p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).$$

5.5. Розподіл Коші

Відповідає такій щільності розподілу: $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Функція розподілу має вигляд
$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} arctg\ z\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctg\, x + \frac{\pi}{2}\right),$ і, нарешті, $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\ x$.

Характеристична функція $\varphi(t)$ має такий вигляд: $\varphi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx$. Замикаючи контур по півколу з $R \to \infty$ у верхній півплощині для $t > 0$ і користуючись лемою Жордана, одержуємо $\varphi(t)\Big|_{t>0} = \frac{1}{\pi}2\pi i\frac{e^{itz}}{2z}\Big|_{z=i} = e^{-t}$. Якщо ж $t < 0$, то замикати треба на нижню півплощину, і результат буде інший: $\varphi(t)\Big|_{t<0} = e^{t}$. Обидва випадки об'єднуються рівністю $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Характеристична функція розподілу Коші не має похідної при $t = 0$. Це означає, що немає і математичного сподівання (а також дисперсії і т.д.). Але це випливає і з того, що інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ розходиться.

5.6. Геометричний розподіл

Це є розподіл дискретної випадкової величини, пов'язаний з геометричною прогресією:

ξ	1	2	3	…	n	…
p	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

, де $p + q = 1$.

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'_q = p\left(\frac{1}{1-q}\right)'_q = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p};$$

$$M[\xi^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(k^2 - k + k)q^{k-1} = p\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} +\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\Bigg\} = p\left\{q\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)'_q\right\} = p\left\{q\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)''_q + \left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)'_q\right\} =$$

$$= p\left\{q\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\right\} = \frac{p}{p^3}(2q+1-q) = \frac{q+1}{p^2};$$

$$D[\xi] = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Знайдемо твірну функцію цього розподілу:

$$\chi(t) = M\left[t^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}t^k pq^{k-1} = \frac{pt}{1-tq} \text{ (якщо } |tq|<1).$$

$$\chi'(t) = \frac{p-tpq+ptq}{(1-tq)^2} = \frac{p}{(1-tq)^2};\ \chi'(1) = \frac{p}{(1-q^2)} = \frac{1}{p} = \overline{\xi}.$$

$$\chi''(t) = \frac{2pq}{(1-tq)^3};\ \chi''(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2} = \overline{\xi^2} - \overline{\xi} \Rightarrow \overline{\xi^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2};$$

$$D[\xi] = \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q-q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Як бачимо, числові характеристики цього розподілу знаходити за допомогою твірної функції дещо легше, ніж безпосередньо виходячи з ряду розподіл.

5.7. Біномний розподіл

Заданий таким рядом розподілу $P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $0 \le m \le n$.

Знайдемо твірну функцію:

$$\chi(t) = M\left[t^{\xi}\right] = \sum_{m=0}^{n}t^m C_n^m p^m q^{n-m} = (pt+q)^n.$$

$\chi'(t) = np(pt+q)^{n-1}$; $\chi'(1) = M[\xi] = np$; $\chi''(t) = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2}$; $\chi''(1) = n(n-1)p^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}$; тому $\overline{\xi^2} = n(n-1)p^2 + np$;

$$D[\xi] = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 =$$

$$= np(1-p) = npq;\ \sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{npq}.$$

5.8. Розподіл Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda};\ m \ge 0.$$

Знайдемо твірну функцію $\chi(t) = M\left[t^{\xi}\right] = \sum_{m=0}^{\infty}t^m \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$.

За її допомогою одержуємо вирази для $\overline{\xi}$, $D[\xi]$ і т.п.:

$\chi'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$; $\overline{\xi} = \chi'(1) = \lambda$; $\chi''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$; $\chi''(1) = \lambda^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}$;

$D[\xi] = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$; $\sigma[\xi] = \sqrt{\lambda}$.

Розподіл Пуассона є граничним для розподілу Бернуллі за умови $np = \lambda$, $n \to \infty$. В такому разі $p = \frac{\lambda}{n}$;

$\chi_Б(t) = \left(q + \frac{\lambda}{n}t\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}t\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n \to e^{\lambda(t-1)}$, якщо $n \to \infty$.

Приклад 5.1. Відносно в.в. ξ відомими є її математичне сподівання 7 та дисперсія 48. Обчислити межі інтервалу $[a;\ b]$, якщо ξ : $R[a;\ b]$, $(b > a)$.

Розв'язання. Виходимо з системи рівнянь $\begin{cases} M[\xi] = \dfrac{a+b}{2}, \\ D[\xi] = \dfrac{(b-a)^2}{12} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 7, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 14, \\ b-a = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5, \\ b = 19. \end{cases}$$

Відповідь: $a = -5$; $b = 19$.

Приклад 5.2. Довести, що для випадкової величини $\xi : E(\lambda)$ ймовірність перевищити її математичне сподівання не залежить від параметра λ.

Розв'язання. Функція розподілу для $E(\lambda)$ має такий вигляд: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $F(x) = 0$ для $x \le 0$. Оскільки $F(x) = P(\xi < x)$, то $P(\xi \ge x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Математичне сподівання в.в., розподіленої за експоненціальним законом, дорівнює $\frac{1}{\lambda}$. У такому разі $P(\xi \ge M[\xi]) = P\left(\xi \ge \frac{1}{\lambda}\right) = e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{e} = const$, що й треба було довести.

Приклад 5.3. В.в. ξ – час до виходу приладу з ладу, причому ξ: $E\left(\frac{1}{T}\right)$. Знайти ймовірність того, що прилад не вийде з ладу за час, який дорівнює двом середнім часам безаварійної роботи.

Розв'язання. Середній час безаварійної роботи – це математичне сподівання в.в. ξ: $M[\xi] = \frac{1}{\left(\frac{1}{T}\right)} = T$; $P(\xi \geq 2T) = 1 - P(\xi < 2T) =$

$= 1 - F(2T)$; для експоненціального розподілу $F(2T) = 1 - e^{-\frac{2T}{T}} =$ $= 1 - e^{-2}$. Таким чином, $P(\xi \geq 2T) = 1 - \left(1 - e^{-2}\right) = e^{-2}$.

Відповідь: e^{-2}.

Приклад 5.4. Знайти моду гамма-розподілу.

Розв'язання. Треба знайти те значення аргументу x (або декілька значень), при якому щільність ймовірності гамма-розподілу має максимум (або декілька локальних максимумів). Для цього продиференціюємо щільність гамма-розподілу та розв'яжемо рівняння $p'(x) = 0$:

$$\left(Ax^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\right)' = 0;$$

$$(\alpha - 1)x^{\alpha-2}e^{-\lambda x} - \lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} = x^{\alpha-2}e^{-\lambda x}(\alpha - 1 - \lambda x) = 0.$$

Це рівняння має корінь $x = \frac{\alpha - 1}{\lambda}$.

Обчислимо другу похідну і підставимо замість x знайдене число:

$$\left(Ax^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\right)'' = Ae^{-\lambda x}x^{\alpha-3}\left((\alpha - 1)(\alpha - 2) - 2\lambda(\alpha - 1)x + \lambda^2 x^2\right);$$

при $x = \frac{\alpha - 1}{\lambda}$: $p''\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda}\right) = Ae^{-(\alpha-1)}\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda}\right)^{\alpha-3}\left[-(\alpha - 1)\right] < 0$.

Таким чином, число $\frac{\alpha - 1}{\lambda}$ – це абсциса точки локального максимуму щільності.

Відповідь: $x_{\text{mod}} = \frac{\alpha - 1}{\lambda}$.

Приклад 5.5. Випадкову величину дискретного типу ξ_n задано рядом розподілу $P\left(\xi_n = \frac{m - np}{\sqrt{n}}\right) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Знайти характеристичну функцію в.в. ξ_n.

Розв'язання. $\varphi_{\xi_n} = M[\exp(it\xi_n)] = \sum\limits_{m=0}^{n} e^{it\frac{m-np}{\sqrt{n}}} C_n^m p^m q^{n-m} =$

$$= \left(e^{-i\frac{tp}{\sqrt{n}}} \right)^n \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(pe^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \right)^m q^{n-m} = \left(e^{-i\frac{tp}{\sqrt{n}}} \right)^n \times$$

$$\times \left(pe^{i\frac{t}{\sqrt{n}}} + q \right)^n = \left(pe^{i\frac{t-tp}{\sqrt{n}}} + q^{-i\frac{tp}{\sqrt{n}}} \right)^n = \left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{n}}} + qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{n}}} \right)^n .$$

Відповідь: $\varphi_{\xi_n}(t) = \left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{n}}} + qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{n}}} \right)^n$.

Узагальнення. Цікавим є питання про межу $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\xi_n}(t)$.

Зробимо заміну: $z = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \frac{1}{z^2}$ та знайдемо межу

$\lim\limits_{z\to 0} \ln \varphi_{\xi_n}(t)$: $\lim\limits_{z\to 0} \ln \varphi_{\xi_n} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln\left(pe^{itq} pe^{-itpz}\right)}{z^2}$.

Скористаємося правилом Лопіталя: $\lim\limits_{z\to 0} \ln \varphi_{\xi_n}(t) =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{itpqe^{itqz} - itpqe^{-itpz}}{2z\left(pe^{itqz} + qe^{-tpz}\right)} = \frac{itpq}{2} \lim_{z\to 0} \frac{e^{itqz} - e^{-itpz}}{z} = \frac{itpq}{2} \times$$

$$\times \lim_{z\to 0} \frac{itq + itp}{1} = -\frac{t^2 pq}{2}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\xi_n}(t) = e^{-\frac{t^2 pq}{2}}$. Це є характеристична функція нормального розподілу $N(0, \sqrt{pq})$; таким чином, ще раз доведено теорему Муавра - Лапласа.

6. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6.1. Означення, функція сумісного розподілу

Розглянемо ймовірнісний простір ($\dot{I}$, Φ, P). Якщо відобразити його на n-вимірний числовий простір, то одержимо випадкову вектор-функцію, яка має n координат, кожна з яких є випадковою величиною. Координати випадкового вектора утворюють, таким чином, систему випадкових величин. Як і в разі однієї випадкової величини, ймовірнісний опис можна задати функцією розподілу ймовірностей, але вже від n аргументів. Надалі для спрощення будемо найчастіше розглядати випадок системи з двох в.в. $(X;\, Y)$: $F_{X,\,Y}(x;\, y) = P(X < x,\, Y < y)$. Це відповідає ймовірності випадкової точки $(X;\, Y)$ знаходитися в закресленій області (рис. 6.1).

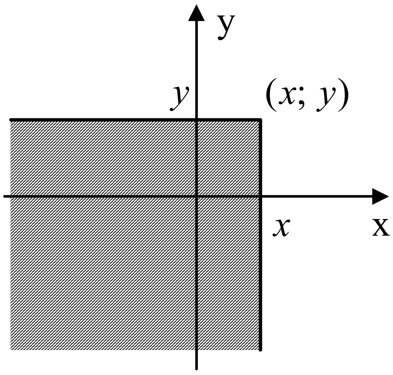


Рис. 6.1

Властивості функції сумісного розподілу:

1) $F(X;\, Y)$ не зменшується зі зростанням кожного з аргументів;

2) $F(-\infty;\, y) = F(x;\, -\infty) = F(-\infty;\, -\infty) = 0$; $F(\infty;\, \infty) = 1$.

Як і у випадку однієї випадкової величини, сумісний розподіл може бути дискретним, неперервним і сингулярним (або сумішшю цих типів).

6.2. Багатовимірний дискретний розподіл

Якщо випадковий вектор належить до дискретного типу, то його розподіл можна подати і у вигляді таблиці розподілу ймовірностей (аналог ряду розподілу). Для цього будують таблицю, входами якої є значення координат випадкових точок, а на виході – ймовірності:

$(X;\, Y)$	$(x_1;\, y_1)$	$(x_2;\, y_2)$	$\ldots$	$(x_n;\, y_n)$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Але більш поширеним є опис розподілу, коли випадкові точки утворюють сітку, завдяки чому стає можливим позначити вузли сітки подвійним індексом. Тоді таблиця буде двовимірною, а в її клітинах будуть розташовані $P(X = x_i;\, Y = y_j) = p_{i\,j}$.

Приклад 6.1. Розподіл випадкового вектора $(X;\, Y)$ дискретного типу задано таблицею розподілу:

$Y \setminus X$	1	3	4
0	0	1	3
1	2	3	1

$/\,10$, тобто

$$P(X = 1;\, Y = 0) = p_{11} = 0;\ P(X = 1;\, Y = 1) = p_{21} = \frac{2}{10};$$

$$P(X = 3;\, Y = 0) = = p_{12} = \frac{1}{10};\ P(X = 3;\, Y = 1) = p_{22} = \frac{3}{10};$$

$$P(X = 4;\, Y = 0) = p_{13} = \frac{3}{10};\ P(X = 4;\, Y = 1) = p_{23} = \frac{1}{10}.$$ Знайти

ймовірності подій:

а) $\{X > 1\} \cdot \{Y = 1\}$; *б*)$\{X + Y \le 3{,}5\}$; *в*) $\{X \cdot Y \ge 3\}$; *г*) $\{X = 3\}$; *д*)$\{Y = 0\}$.

Розв′язання

а) $\{X > 1\} \cdot \{Y = 1\} = \{X = 3;\ Y = 1\} + \{X = 4;\ Y = 1\}$;

$$P(X > 1;\ Y = 1) = p_{22} + p_{23} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5};$$

б) $P(X + Y \le 3{,}5) = P(X = 1;\ Y = 0) + P(X = 3;\ Y = 1) +$

$$+ P(X = 3;\ Y = 0) = \frac{3}{10};$$

в) $P(X \cdot Y \ge 3) = P(X = 3;\ Y = 1) + P(X = 4;\ Y = 1) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$;

г) $P(X = 3) = P(X = 3;\ Y = 0) + P(X = 3;\ Y = 1) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$;

д) $P(Y = 0) = P(X = 1;\ Y = 0) + P(X = 3;\ Y = 0) + P(X = 4;\ Y = 0) = \dfrac{2}{5}$.

Відповідь: $\dfrac{2}{5};\ \dfrac{3}{10};\ \dfrac{2}{5};\ \dfrac{2}{5};\ \dfrac{2}{5}$.

Приклад 6.2. Кидають гральну кість два рази. В.в. X – сумарна кількість очок, Y – добуток очок. Побудувати таблицю розподілу системи $(X;\ Y)$ та знайти ймовірність події $\{Y - X \le 0\}$.

Розв′язання

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0

$/36$

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\{Y - X \le 0\} = \{X = 2;\ Y = 1\} + \{X = 3;\ Y = 2\} + \{X = 4;\ Y = 3\} +$
$+ \{X = 4;\ Y = 4\} + \{X = 4;\ Y = 4\} + \{X = 6;\ Y = 5\} + \{X = 7;\ Y = 6\}$;
виписані лише ті події, для яких ймовірність не нульова.

$$P(Y - X \le 0) = \frac{(1+2+2+1+2+2+2)}{36} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Припустимо, що нам задано таблицю ймовірностей системи двох випадкових величин: $P(X = x_j;\ Y = y_i) = p_{j\,i}$. Як, скориставшись цими даними, знайти ряд розподілу однієї з них? Отже, треба обчислити величини $P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Подія $\{X = x_i\}$ є сумою несумісних подій: $\{X = x_i\} = \{X = x_i;\ Y = y_1\} + \{X = x_i;\ Y = y_2\} + \ldots +$
$+ \{X = x_i;\ Y = y_{ny}\}$.

Тому $P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{j\,i}$. Одержуємо так званий маргінальний розподіл. Таким же чином можна знайти ряд розподілу для іншої компоненти випадкового вектора або для групи компонент Для цього треба знайти суми таблиці розподілу за індексами тих змінних, які не входять у маргінальний.

Згідно з таблицею прикладу 6.2 ряд розподілу для суми очок *X* має такий вигляд:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

.

Кожне значення ймовірності одержано шляхом додавання ймовірностей, які знаходяться у стовпчику з відповідним значенням в.в. *X*. Таким же чином можна побудувати ряд розподілу для в.в. Y.

Якщо відомо, якого значення набула одна з координат випадкового вектора, то розподіл іншої (або інших), взагалі кажучи, змінюється. Він стає умовним: $P(X = x_i / Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n_X$. За загальними правилами $P(X = x_i / Y = y_j) = \dfrac{p_{j\ i}}{P(Y = y_j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_X$.

Якщо $P(X = x_i / Y = y_j) = P(X = x_i)$, то це свідчить про те, що випадкова величина X не залежить від випадкової величини Y. В такому разі $p_{j\,i} = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

Початковим моментом порядку $k + s$ двовимірного випадкового вектора дискретного типу є сума такого вигляду:

$$M[X^k \cdot Y^s] = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} x_i^k y_j^s p_{i\,j}.$$

Центральним моментом порядку $k + s$ є така сума:

$$\mu_{k,\,s} = M\left[(X - \bar{x})^k (Y - y)^s\right] = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} (x_i - \bar{x})^k (y_j - \bar{y})^s p_{i\,j}.$$

Центральні моменти порядків 2+0 та 0+2 – це просто дисперсії окремих компонент:

$$\mu_{2,\,0} = M\left[(X - \bar{x})^2\right] = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} (x_i - \bar{x})^2 p_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n_X} \left(\sum_{j=1}^{n_Y} p_{i\,j} \right) (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_X} (x_i - \bar{x})^2 P(X = x_i) = D[X].$$

Центральний момент порядку 1+1 має назву коваріації:

$$K_{XY} = \mu_{1,\,1} = M\left[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})\right] = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) p_{i\,j}.$$

Нормована коваріація – це коефіцієнт кореляції двох випадкових компонент випадкового вектора $(X;\, Y)$: $\rho_{X,\,Y} = \dfrac{K_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Теорема. $|\, \rho_{X,Y} \,| \le 1$.

Доведення. Розглянемо в.в. $Z = X + \lambda Y$, де λ – довільне число (невипадкове). Обчислимо дисперсію Z:

$$D[Z] = M\left[(X + \lambda Y - \bar{x} - \lambda \bar{y})^2\right] = M\left[((X - \bar{x}) + \lambda (Y - \bar{y}))^2\right] =$$

$$= M\left[(X - \bar{x})^2\right] + 2\lambda M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] + \lambda^2 M\left[(Y - \bar{y})^2\right] = \sigma_X^2 + 2\lambda \times$$

$\times K_{X,\,Y} + \lambda^2 \sigma_Y^2$. Однією з властивостей дисперсії є її невід'ємність:

$D[Z] \geq 0$, тобто $\lambda^2\sigma_Y^2 + 2\lambda K_{X,Y} + \sigma_X^2 \geq 0$ для якого завгодно дійсного числа λ. Це означає, що графік параболи $\lambda^2\sigma_Y^2 + 2\lambda K_{X,Y} + \sigma_X^2$ знаходиться вище осі OY (в крайньому разі торкається в одній точці), тобто корені рівняння: $\lambda^2\sigma_Y^2 + 2\lambda K_{X,Y} + \sigma_X^2 = 0$ – відсутні (серед дійсних чисел). У такому разі дискримінант розглянутого квадратного тричлена обов′язково від′ємний (в крайньому разі дорівнює нулю): $4K_{X,\ Y}^2 - 4\sigma_X^2\sigma_Y^2 \leq 0$,

або $\dfrac{K_{X,\ y}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \leq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{K_{X,\ Y}}{\sigma_X\sigma_Y}\right| \leq 1$, що й треба було довести.

Розглянемо незалежні в.в. X, Y:

$P(X = x_i;\ Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ та обчислимо $M[f_1(X)f_2(Y)]$,

де $f_1(x)$, $f_2(y)$ – якісь функції:

$$M[f_1(X)f_2(Y)] = \sum_{i=1}^{n_X}\sum_{j=1}^{n_Y} f_1(x_i)f_2(y_j)P(X = x_i)P(Y = y_j) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_X} f_1(x_i)P(X = x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n_Y} f_2(x_j)P(Y = y_j)\right) = M[f_1(X)]M[f_2(Y)].$$

Таким чином, математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань множників. Зокрема, $M\left[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})\right] = M[X-\bar{x}]M[Y-\bar{y}]$, якщо X та Y незалежні. Але $M[X-\bar{x}] = 0$ $\left(M[Y-\bar{y}] = 0\right)$, і тому $K_{X,\ Y} = 0$ у разі незалежності X та Y. Це дуже важливий факт: якщо в.в. X та Y незалежні, то їх коваріація (а також коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю. Протилежне твердження, взагалі кажучи, невірне, але існують дуже поширені розподіли, для яких з рівності нулю коваріації випливає незалежність.

Доведений факт можна трактувати і так: якщо коваріація відмінна від нуля, то випадкові величини є залежними.

Приклад 6.3. Знайти коефіцієнт кореляції між сумою та добутком загальної кількості очок на гральних костях.

Розв′язання. Спочатку треба обчислити $M[X] = \bar{x}$, $M[Y] = \bar{y}$ суми X і добутку Y кількості очок.

$\bar{x} = (2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 +$
$+ 11\cdot 2 + 12\cdot 1)/36 = 7$.

$$\bar{y} = (1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1 + 10\cdot 2 + 12\cdot 4 +$$
$$+15\cdot 2 + 16\cdot 1 + 18\cdot 2 + 20\cdot 2 + 24\cdot 2 + 25\cdot 1 + 30\cdot 2 + 36\cdot 1)/36 = \frac{137}{12}.$$

Для обчислення коваріації скористаємося прийомом введення штучного нуля:

$$K_{X,Y} = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = M[(X - \bar{x}_0 + (\bar{x} - \bar{x}_0))(Y - \bar{y}_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0))] =$$
$$= M[(X - \bar{x}_0)(Y - \bar{y}_0)] + (\bar{x} - \bar{x}_0)(\bar{y} - \bar{y}_0).$$

Нехай $\bar{x}_0 = 7$, $\bar{y}_0 = 10$.

$$M[(X - \bar{x}_0)(Y - \bar{y}_0)] = ((2-7)(1-10)\cdot 1 + (3-7)(2-10)\cdot 2 + (4-7)\times$$
$$(3-10)\cdot 2 + (4-7)(4-10)\cdot 1 + (5-7)(4-10)\cdot 2 + (5-7)(6-10)\times$$
$$\times 2 + (6-7)(5-10)\cdot 2 + (6-7)(8-10)\cdot 2 + (6-7)(9-10)\cdot 1 + 0 +$$
$$+ (8-7)(12-10)\cdot 2 + (8-7)(15-10)\cdot 2 + (8-7)(16-10)\cdot 1 + (9-7)\times$$
$$\times (18-10)\cdot 2 + (9-7)(20-10)\cdot 2 + (10-7)(24-10)\cdot 2 + (10-7)\times$$
$$\times (25-10)\cdot 1 + (11-7)(30-10)\cdot 2 + (12-7)(36-10)\cdot 1)/36 = \frac{689}{36}.$$

Оскільки $\bar{x} - \bar{x}_0 = 0$, то $K_{X,Y} = \dfrac{689}{36}$.

Залишилося знайти дисперсії X та Y:

$$D[X] = M[(X - \bar{x})^2] = (5^2\cdot 1 + 4^2\cdot 2 + 3^2\cdot 3 + 2^2\cdot 4 + 1^2\cdot 5 + 0 + 1^2\cdot 5 +$$
$$+ 2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 3 + 4^2\cdot 2 + 5^2\cdot 1)/36 = \frac{35}{6}.$$

$$D[Y] = D[(Y-10)] = M\left[((Y - \bar{y}_0) + (\bar{y}_0 - \bar{y}))^2\right] = M\left[(Y - \bar{y}_0)^2\right] +$$
$$+ (\bar{y}_0 - \bar{y})^2 = \frac{3061}{36} - \left(\frac{137}{12} - 10\right)^2 = \frac{12533}{144};$$

$$\rho_{X,\,Y} = \frac{689\cdot 12\cdot 6}{36\sqrt{14\cdot 18\cdot 12533}} \cong 0{,}764.$$

Відповідь: $\rho_{X,Y} \cong 0{,}764$.

За наявності системи випадкових величин виникає між іншим ще одне питання – відносно математичного сподівання однієї випадкової координати, якщо відомо, що інша (чи інші) випадкова координата набула якогось значення. Це є так зване умовне математичне сподівання. Його обчислюють за допомогою умовного розподілу

$$M[X / Y = y_j] = \sum_{i=1}^{n_X} x_i P(X = x_i / Y = y_j).$$

Оскільки $\{Y = y_j\}$ – випадкова подія, то умовне математичне сподівання $M[X / Y = y_j]$ також є не просто числом, а випадковою величиною, яка має свій розподіл. Цей розподіл має таких вигляд: у рядку для P знаходяться ймовірності $P(Y = y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n_y$; в рядку для значень випадкової величини знаходяться числа $M[X = x / Y = y_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n_y$.

Має місце формула повного математичного сподівання $M[X] =$
$$= M[M[X / Y]] = \sum_{j=1}^{n_x} M[X / Y = y_j] P(Y = y_j).$$

Дійсно, $M[X] = \sum_{i=1}^{n_x} x_1 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n_x} x_i \sum_{j=1}^{n_y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n_x} x_i \times$
$$\times \sum_{j=1}^{n_y} P(Y = y_j) P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{j=1}^{n_y} P(Y = y_j) \sum_{i=1}^{n_x} x_i P(X = x_i, Y = y_j) =$$
$= \sum_{j=1}^{n_y} P(Y = y_j) M[X / Y = y_j]$, що й треба було довести.

Приклад 6.4. Два рази кидають гральну кість. Випадкові величини X – кількість разів, коли випала парна кількість очок; Y – кількість разів, коли випала кількість очок, що ділиться на три. Побудувати таблицю сумісного розподілу системи $(X; Y)$, а також ряди розподілу X та Y. З′ясувати питання про незалежність X та Y.

Розв′язання.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	4	4	1
1	8	8	2
2	4	4	1

/ 36

$\{X = 0; Y = 0\} = \{1; 1\} + \{1; 5\} + \{5; 1\} + \{5; 5\}$; $P_{00} = \dfrac{4}{36}$;

$\{X = 1; Y = 0\} = \{2; 1\} + \{1; 2\} + \{4; 1\} + \{1; 4\} + \{2; 5\} + \{5; 2\} + \{4; 5\} + \{5; 4\}$;

$P_{10} = \dfrac{8}{36}$;

$\{X = 2; Y = 0\} = \{2; 2\} + \{2; 4\} + \{4; 2\} + \{4; 4\}$; $P_{20} = \dfrac{4}{36}$;

$\{X=0;\ Y=1\}=\{1;\ 3\}+\{3;\ 1\}+\{5;\ 3\}+\{3;\ 5\}$; $P_{01}=\dfrac{4}{36}$;

$\{X=1;\ Y=1\}=\{2;\ 3\}+\{3;\ 2\}+\{4;\ 3\}+\{3;\ 4\}+\{1;\ 6\}+\{6;\ 1\}+\{5;\ 6\}+\{6;\ 5\}$; $P_{11}=\dfrac{8}{36}$;

$\{X=2;\ Y=1\}=\{2;\ 6\}+\{6;\ 2\}+\{4;\ 6\}+\{6;\ 4\}$; $P_{21}=\dfrac{4}{36}$;

$\{X=0;\ Y=2\}=\{3;\ 3\}$; $P_{02}=\dfrac{1}{36}$;

$\{X=1;\ Y=2\}=\{6;\ 3\}+\{3;\ 6\}$; $P_{12}=\dfrac{2}{36}$;

$\{X=2;\ Y=2\}=\{6;\ 6\}$; $P_{22}=\dfrac{1}{36}$.

X	0	1	2
P	$\dfrac{9}{36}$	$\dfrac{18}{36}$	$\dfrac{9}{36}$

;

Y	0	1	2
P	$\dfrac{16}{36}$	$\dfrac{16}{36}$	$\dfrac{4}{36}$

.

Побудуємо таблицю з елементами $P(X=i)P(Y=j)$, $i=0,\ 1,\ 2$, $j=0,\ 1,\ 2$:

$P_Y \setminus P_X$	0	1	2
0	4	4	1
1	8	8	2
2	4	4	1

$/\,36$.

Ця таблиця збігається з таблицею $P(X=i;\ Y=j)$; $P(X=i;\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$.

Відповідь: випадкові величини X та Y незалежні.

6.3. Багатовимірний неперервний розподіл

Припустимо, що X та Y мають неперервний сумісний розподіл. Це означає, що $F_{X,Y}(x;\ y)$ майже всюди має неперервні часткові похідні $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Оскільки події $\{X<\infty\}$, $\{Y<\infty\}$ несуперечні, то $\{X<x\}=\{X<x\}$, $\{Y<\infty\}=\{X<x;\ Y<\infty\}$, тобто маргінальні розподіли для X та Y є межами такого вигляду: $F_X(x)=\lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}(x;\ y)=F_{X,Y}(x;\ \infty)$, $F_Y(y)=$

$= \lim\limits_{x \to \infty} F_{X,Y}(x;\ y) = F_{X,Y}(\infty;\ y)$. Графічне відображення: $F_X(x)$ є ймовірність точки $(X;\ Y)$ знаходитися в напівплощині (рис. 6.2).

Обчислимо ймовірність точки (X; Y) знаходитися в прямокутнику з вершинами (x_0; y_0), $(x_1;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_0;\ y_1)$ (рис. 6.3):

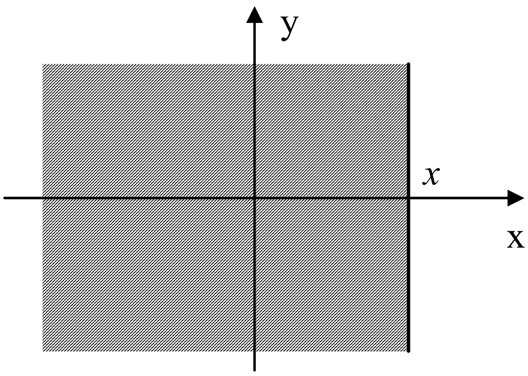


Рис. 6.2

$\{X < x_1;\ Y < y_1\} = \{X < x_0;\ Y < y_1\} + \{X < x_1;\ Y < y_0\} + \{(X;\ Y) \in D\}$. За правилом обчислення ймовірнісної суми

$P(X < x_1;\ Y < y_1) = P(X < x_0; Y < y_1) + P(X < x_1; Y < y_0) - P(\{X < x_0; Y < y_1\} \times \{X < x_1;\ Y < y_0\}) + P(D)$. Тому

$P(D) = F(x_1;\ y_1) - F(x_1;\ y_0) - F(x_0;\ y_1) + F(x_0;\ y_0)$.

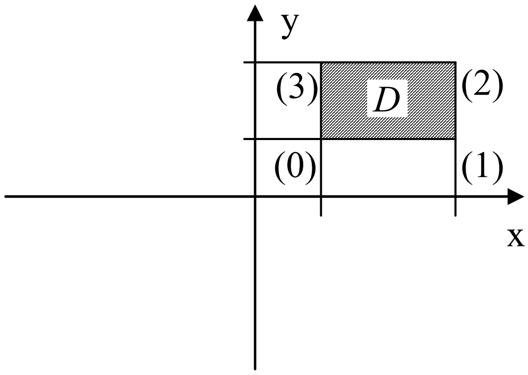


Рис. 6.3

Одержану формулу можна записати у вигляді

$P(x_0 \le X < x_1;\ y_0 \le Y < y_1) = \sum\limits_{i=0}^{1} \sum\limits_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} \times F(x_i; y_j)$.

Ця формула легко узагальнюється на випадок n-вимірного випадкового вектора.

Припустимо, що $x_0 = x$, $x_1 = x + dx$, $y_0 = y$, $y_1 = y + dy$. Вважаючи величини dx, dy малими та відкидаючи величини більш високого порядку малості, одержуємо рівність $P(dS) = F(x + dx;\ y + dy) - F(x + dx;\ y) - \big(F(x; y + dy) - F(x; y)\big) \cong \left(\frac{\partial F(x + dx;\ y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x;\ y)}{\partial y} \right) \cong \frac{\partial^2 F(x;\ y)}{\partial x \partial y} dxdy$. Величину $\frac{\partial^2 F(x;\ y)}{\partial x \partial y}$ називають щільністю сумісного розподілу випадкових величин X та Y: $P_{X,Y}(x;\ y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x;\ y)}{\partial x \partial y}$.

Для n-вимірного простору має місце формальне означення:

$$P_{\vec{R}}(\vec{r}) = \frac{\partial^n F_{\vec{R}}(\vec{r})}{\prod\limits_{i=1}^{n} \partial x_i}.$$

За її допомогою диференціал ймовірності записують так: $dF(x;\ y) = p(x;\ y)ds$.

Властивості щільності ймовірностей:

1. Щільність ймовірностей невід′ємна, оскільки функція розподілу не зменшується за кожним з аргументів;
2. $\underbrace{\iint \ldots \int}_{n} p_{\vec{R}}(\vec{r})dV = 1$ (умова нормування).

Якщо скористатися dF, то можна обчислити ймовірність точці $\vec{R}$ знаходитися в будь-якій області D: $P(\vec{R} \in D) = \underbrace{\int \ldots \int}_{D} p_{\vec{R}}(\vec{r})dV$.

Це дає змогу виразити функцію розподілу $F(x;\ y)$ через щільність розподілу $F_{X,Y}(x;\ y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(z;\ t)dzdt$, а також маргінальні функції розподілу

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x;\ \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(z;\ y)dy.$$

Остання формула дає вираз для маргінальної щільності розподілу $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x;\ y)dy$; $p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x;\ y)dx$.

У загальному випадку *n* вимірів для знаходження маргінальної щільності розподілу по якійсь групі аргументів треба щільність сумісного розподілу проінтегрувати за тими змінними, які не входять у виділену групу.

Досить складним є перехід до умовних розподілів у разі неперервності розподілу. Справа в тому, що $P(Y = y) = 0$, як це не парадоксально. Адже областю в цій рівності є лінія, а її міра, тобто площа, – нульова.

Розглянемо область $\{X < x,\ y \le Y < y + dy\}$ (рис. 6.4):

$$P((X;\ Y) \in D) = F(x;\ y + dy) - F(x; y) - F(-\infty;\ y + dy) + F(-\infty;\ -\infty) \cong \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

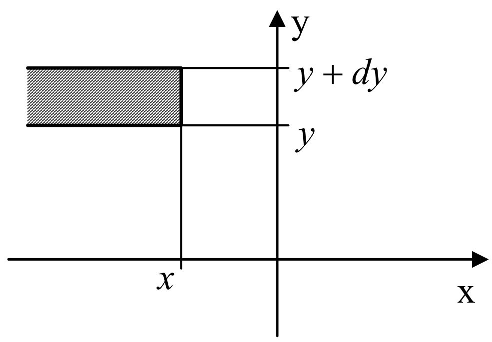


Рис. 6.4

Функцію умовного розподілу є природним визначати як межу:

$$F(x/y) = \lim_{dy\to 0} P(X < x / y \le Y < y + dy) =$$

$$= \lim_{dy\to 0} \frac{P(X < x,\ y \le Y < y + dy)}{P(y \le Y < y + dy)} = \lim_{dy\to 0} \frac{\frac{\partial F_{X,Y}}{\partial y} dy}{\frac{dF_{X,\ Y}}{dy} dy} =$$

$$= \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x;\ y)}{\partial y}}{p_Y(y)}$$. Тоді щільність умовного розподілу можна обчислити

як похідну за змінною x: $p_{X,Y}(x/y) = \dfrac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x;\ y)}{\partial x \partial y}}{p_Y(y)} =$

$$= \frac{p_{X,Y}(x;\ y)}{p_Y(y)}.$$

Таким чином, $p(x/y) = \dfrac{p(x;\ y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(z;\ y)dx}$.

Моменти, дисперсії, коваріація обчислюють за допомогою інтегрування

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^k (y-\bar{y})^s p(x;y)dxdy;$$

$$K_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{y})p(x;\ y)dxdy.$$

Умовним математичним сподіванням є така випадкова величина: $M[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/Y)dx$, де $p(x/Y) = \dfrac{p_{X,Y}(x;\ Y)}{p_Y(Y)}$.

Особливої уваги заслуговує коваріація. Якщо вимірів n, то коваріації сумісно з дисперсіями компонент випадкового вектора $\vec{R}(X_1;\ X_2;\ \ldots;X_n)$ утворюють коваріаційну матрицю K із компонентами $K_{ij} = M[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)]$; $K_{ii} = D[X_i]$. Ця матриця симетрична: $K_{ij} = K_{ji}$, і тому має лише дійсні власні значення. Але до того ж всі її власні значення позитивні, тобто квадратична форма з матрицею K є позитивно означеною (це твердження залишимо без доказу). З курсу лінійної алгебри випливає, що існує ортогональне перетворення (тобто поворот системи координат) $U : \vec{R} = U \cdot \vec{R}'$, $U \cdot U^T = E$, після якого матриця K стає діагональною, тобто квадратична форма з цією матрицею стає сумою квадратів:

$$\vec{R}^T \cdot K \cdot \vec{R} = \vec{R}'^T \cdot U^T \cdot K \cdot U \cdot \vec{R}' =$$

$$= \vec{R}'^T \cdot K' \cdot \vec{R}' = \lambda_1 \cdot X_1'^2 + \lambda_2 \cdot X_2'^2 + \ldots + \lambda_3 X_n'^2,\ \lambda_i > 0.$$

У двовимірному випадку власні числа λ_1, λ_2 обчислюють як корені характеристичного рівняння $\begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & K_{12} \\ K_{12} & \sigma_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$;

$\lambda^2 - \lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1^2\sigma_2^2 - K_{12}^2 = 0$; $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = trK$, $\sigma_1^2\sigma_2^2 - K_{12}^2 = \det K$; $\lambda^2 - trK\lambda + \det K = 0$;

$$\lambda_{1,2} = \frac{trK \pm \sqrt{tr^2K - 4\det K}}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 4K_{12}^2}}{2}.$$

Приклад 6.5. Точку $(X;\, Y)$ вибирають навмання в прямокутнику з вершинами $(0;\, 0)$, $(2;\, 0)$, $(2;\, 1)$, $(0;\, 1)$. Знайти сумісний розподіл системи в.в. $(X;\, Y)$, маргінальні розподіли; треба з′ясувати питання про залежність в.в. X, Y.

Розв′язання. Вибір точки $(X;\, Y)$ “навмання” відповідає умові, що ймовірність знаходитися їй в області з площею S пропорційна цій площі. Таким чином, щільність розподілу $(X;\, Y)$ є постійною величиною в прямокутнику умови $D : p_{X,Y}(x;\, y) = C$, $(x;\, y) \in D$, $p_{X,\,Y}(x;\, y) = 0$, $(x;\, y) \notin D$. З умови нормування випливає, що

$$C = \frac{1}{S_D} = \frac{1}{2}:\ p_{X,Y}(x; y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Для обчислення $p_X(x)$ візьмемо інтеграл $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x\ \ y)dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$, $x \in [0;\, 2]$ та $p_X(x) = 0$, якщо $x \notin [0,\, 2]$, $p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x;\, y)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{2} dx = 1$, $y \in [0;\, 1]$ та

$p_Y(y) = 0$, якщо $y \notin [0;\ 1]$.

Між $p_{X,Y}(x;\ y)$ та $p_X(x)$, $p_Y(y)$ маємо зв′язок:

$p_{X,Y}(x;\ y) = \frac{1}{2} = p_X(x)p_Y(y)$ за умови $x \in [0;\ 2]$, $y \in [0;\ 1]$.

Таким чином, в.в. X, Y незалежні.

Відповідь: $p_{X,Y} = \frac{1}{2}$, $x \in [0;\ 2]$, $y \in [0;\ 1]$ і 0 в інших точках; $p(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0;\ 2]$ та 0 в інших точках; $p(y) = 1$, $y \in [0;\ 1]$ і 0 в інших точках. X та Y незалежні.

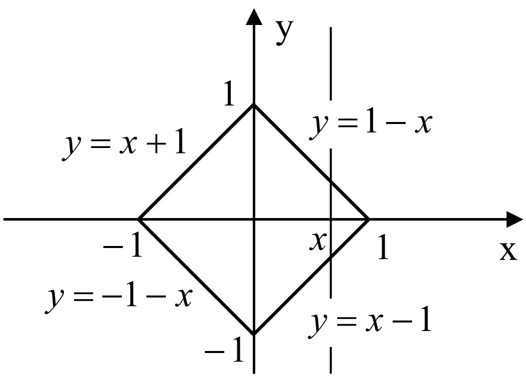


Рис. 6.5

Приклад 6.6. Точку $(X;\ Y)$ беруть навмання в квадраті з вершинами $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$. Знайти щільність сумісного розподілу, маргінальні щільності, умовні щільності, коефіцієнт кореляції. Необхідно з′ясувати питання про залежність чи незалежність в.в. X, Y.

Розв′язання. Система $(X;\ Y)$ є рівномірно розподіленою в квадраті

$$D:\ p_{X,Y}(x;\ y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x;\ y) \in D, \\ 0, & (x;\ y) \notin D \end{cases} \quad (S_D = 2).$$

Знайдемо $p_X(x)$. Для цього при фіксованому x проінтегруємо $p_{X,Y}(x;\ y)$ за змінною y. Для вибору x маємо чотири різні можливості. Припустимо, що $x < -1$ або $x > 1$. Тоді $p_{X,Y}(x;\ y) = 0$ і $p_X(x) = 0$. Нехай $0 \le x < 1$. Тоді під час зміни y від $-\infty$ до прямої, яка поєднує точки $(0;\ -1)$ і $(1;\ 0)$, та від прямої, яка поєднує точки $(0;\ 1)$ і $(1;\ 0)$ до ∞ $P_{X,Y}(x;\ y) = 0$; між точками зустрічі прямої $x = const$ з описаними прямими $p_{X,Y}(x;\ y) = 1$. Тому $p_X(x) = \int\limits_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2}dy = (1-x)$.

Якщо ж $x \in [-1;\ 0]$, то $p_X(x) = \int\limits_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}dy = (1+x)$. Єдиний запис має вигляд $p_X(x)=\begin{cases}(1-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

Аналогічно $p_Y(y)=\begin{cases}(1-|y|), & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$

Далі, $p(x/y)=\dfrac{p(x;\,y)}{p(y)}=\begin{cases}0, & (x;\,y)\notin D,\\ \dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |y|\le 1,\ |x|+|y|\le 1,\end{cases}$

$$p(y/x)=\begin{cases}0, & (x;\,y)\notin D,\\ \dfrac{1}{2(1-|x|)}, & |x|\le 1,\ |x|+|y|\le 1.\end{cases}$$

$\bar{x}=\int\limits_{-1}^{1}xp(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}x(1-|x|)dx=0$ (функція під знаком інтеграла непарна); $\bar{y}=0$; $\overline{x^2}=\int\limits_{-1}^{1}x^2(1-|x|)dx=2\int\limits_{0}^{1}(x^2-x^3)dx=2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{6}$;

$\overline{y^2}=\dfrac{1}{6}$; $\sigma_X^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\dfrac{1}{6}$, $\sigma_X=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\sigma_Y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Обчислимо коваріацію $K_{X,Y}=\iint\limits_{D}(x-0)(y-0)1dxdy=0$.

Таким чином, коефіцієнт кореляції, як і коваріація, дорівнює нулю; але в.в. X і Y залежні, оскільки $p_X(x)p_Y(y)\ne p_{X,Y}(x;\,y)$ (це видно також і з того, що $p(x/y)\ne p(x)$ або $p(y/x)\ne p(y)$).

Відповідь: $p_{X,Y}(x;\,y)=\begin{cases}0, & |x|+|y|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|+|y|\le 1;\end{cases}$

$p(x)=\begin{cases}(1-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $\qquad p(y)=\begin{cases}(1-|y|), & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1;\end{cases}$

$$p(x/y)=\begin{cases}0, & |x|+|y|>1,\\ \dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |x|+|y|\le 1;\end{cases}$$

$p(y/x)=\begin{cases}0, & |x|+|y|>1,\\ \dfrac{1}{2(1-|x|)}, & |x|+|y|\le 1;\end{cases}$ $\rho_{X,Y}=0$; X та Y – залежні в.в.

Приклад 6.7. На колі радіусом 1 навмання беруть три точки. Знайти середню площу трикутника, вершини якого розташовані в цих точках.

Розв'язання. Розташуємо коло в системі координат так, щоб центр збігався з початком системи координат, а одну з вершин (наприклад, C) розмістимо в точці з координатами $(1;\ 0)$. Тоді з точками A та B на колі взаємооднозначно можна зіставити незалежні рівномірно на $[0;\ 2\pi]$ розподілені випадкові величини Φ_1 та Φ_2. Площа ΔABC може бути обчислена як $2\left|\sin\frac{\Phi_1}{2}\sin\frac{\Phi_2}{2}\sin\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right|$.

$$M[S]=\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot 2\cdot 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi_1}{2}d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}d\varphi_2=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi_1}{2}d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\left[\cos\left(\varphi_2-\frac{\varphi_1}{2}\right)-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right]d\varphi_2=\frac{1}{2\pi^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi_1}{2}\left(2\sin\frac{\varphi_1}{2}-\varphi_1\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)d\varphi_1=\frac{3}{2\pi}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2\pi}$.

Приклад 6.8. На діаметрі півкола радіусом 1 і на самому півколі навмання вибирають по точці, які є двома вершинами трикутника; третя вершина – центр півкола (рис. 6.6). Знайти середню площу утвореного трикутника.

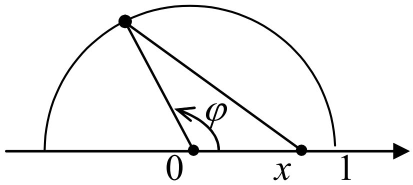


Рис. 6.6

Розв'язання. Координата точки на діаметрі є випадковою величиною X, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[-1;\ 1]$. Кут Φ – також випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0;\ \pi]$. Ці дві випадкові величини незалежні, тому їх сумісна щільність розподілу є добутком щільностей X і Φ:

$$\rho(x;\ y)=\frac{1}{2\pi},\ x\in[-1;1],\ \varphi\in[0;\ \pi].$$

$$S=\left|\frac{1}{2}X\cdot 1\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\right|;\ M[S]=\iint_D Sp(x;\ \varphi)dxd\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}|\ x\ |\ dx\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 x dx \int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2\pi}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2\pi}$.

Приклад 6.9. У колі радіусом 1 навмання ставлять дві точки (рис. 6.7). Знайти середній квадрат відстані між ними .

Розв'язання. Координати однієї $(X_1; Y_1)$ та другої $(X_2; Y_2)$ точки утворюють систему випадкових величин. Сумісні щільності пар $(X_1; Y_1)$ та $(X_2; Y_2)$ дорівнюють $\frac{1}{\pi}$ $(x_i^2 + y_i^2 \le 1,\ i = 1, 2)$. Оскільки ці пари незалежні одна від одної, то сумісна щільність розподілу всіх чотирьох випадкових величин є добутком щільностей кожної з пар: $p(x_1; y_1; x_2; y_2) = \frac{1}{\pi^2}$, $x_1^2 + y_1^2 \le 1$, $x_2^2 + y_2^2 \le 1$. Позначимо як l^2 квадрат відстані між точками

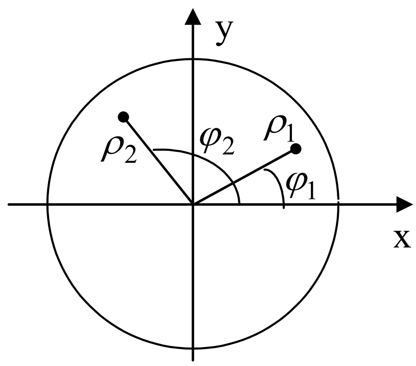


Рис. 6.7

$$M[l^2] = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2\le 1,\\ x_2^2+y_2^2\le 1.}} \iiint l^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 .$$

Перейдемо в полярну систему координат, в якій $l^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $dx_1 dy_1 = \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1$, $dx_2 dy_2 = \rho_2 d\rho_2 d\varphi_2$.

$$M[l^2] = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^1 \rho_1 d\rho_1 \int_0^1 \rho_2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \times$$

$$\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1))d\rho_2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^1 \rho_1\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\rho_1 \times\right.$$

$$\left.\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right)d\rho_1 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right)d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}2\pi - \frac{2}{9}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\Bigg|_{\varphi_2 = 0}^{\varphi_2 = 2\pi}\right)d\varphi_1 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{4} d\varphi_1 =$$

$$= \frac{4\pi^2}{4\pi^2} = 1.$$

Відповідь: $M[l^2] = 1$.

Приклад 6.10. На діаметрі півкола радіусом 1 і в півколі навмання вибирають по точці, які є двома вершинами трикутника; третя вершина – центр півкола (рис. 6.8). Знайти середню площу утвореного трикутника.

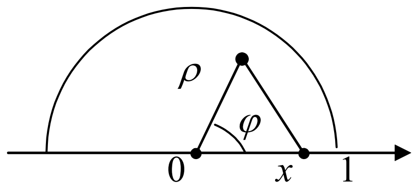


Рис. 6.8

Розв'язання. Координата точки на діаметрі є випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена на інтервалі $[-1; 1]$. Вона не залежить від координат X_1, Y_1 точки в півколі, які в сукупності також рівномірно розподілені в півколі: $p(x_1; y_1) = \frac{2}{\pi}$, оскільки площа півкола дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Сумісна щільність розподілу X, X_1, Y_1 є добутком $\frac{1}{2}$ та $\frac{2}{\pi}$: $p(x; x_1; y_1) = \frac{1}{\pi}$.

$M[S] = \iiint sp\,dx\,dx_1\,dy_1$. Перейдемо в полярну систему координат в області зміни x_1, y_1: $M[S] = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\,dx \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{2}\rho^2 \sin\frac{\varphi}{2}\,d\rho = \frac{1}{3\pi}$.

Відповідь: $\frac{1}{3\pi}$.

Приклад 6.11. У колі радіусом 1 навмання беруть дві точки. Знайти середнє значення площі трикутника, для якого ці точки є вершинами, а третьою вершиною є центр.

Розв'язання. Позначимо довільно взяті точки як *A* та *B*. Їх координати $(X_1; Y_1)$ та $(X_2; Y_2)$ мають сумісну щільність розподілу $\frac{1}{\pi^2}$ $(x_1^2 + y_1^2 \le 1,\ x_2^2 + y_2^2 \le 1)$. Площу трикутника *ABO* можна підрахувати за формулою

$S_{ABO} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2 |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)|$, де ρ_1, φ_1 та ρ_2, φ_2 – полярні координати точок *A* та *B*.

Таким чином, $M[S]=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1 d\rho_1\int\limits_0^1 d\rho_2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\int\limits_0^{2\pi}|\sin(\varphi_1-\varphi_2)|\times$

$$\times\rho_1\rho_2 d\varphi_2=\frac{1}{9\pi^2}2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\int\limits_0^{\varphi_1}\sin(\varphi_1-\varphi_2)d\varphi_2=\frac{2}{9\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi_1)d\varphi_1=\frac{4}{9\pi}.$$

Відповідь: $\frac{4}{9\pi}$.

Приклад 6.12. На відрізку $[0;1]$ навмання вибирають дві точки. Знайти середнє значення добутку довжин одержаних трьох відрізків.

Розв'язання. В даному разі йдеться про дві незалежні випадкові величини X та Y, які мають рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$, та функцію від них S, яка дорівнює $X(Y-X)(1-Y)$, якщо $X<Y$, або $Y(X-Y)(1-X)$, якщо $X>Y$.

$$M[S]=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x y(x-y)(1-x)dy=2\int\limits_0^1(1-x)dx\int\limits_0^x(yx-x^2)dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3(1-x)dx=\frac{1}{60}.$$

Відповідь: $\frac{1}{60}$.

<u>Узагальнення</u>. Якщо таких точок n, то $M[S]=n!\int\limits_0^1 dx_1\times$

$$\times\int\limits_0^{x_1}dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}\int\limits_0^{x_{n-1}}(x_1-0)(x_2-x_1)(x_3-x_2)\ldots$$

$\ldots(1-x_n)dx_n=\frac{n!}{(2n+1)!}$. Наприклад, при $n=1$ $M[S]=\frac{1}{6}$. При $n=3$

$$M[S]=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=\frac{1}{840}.$$

Приклад 6.13. У прямокутнику зі сторонами a і b навмання беруть точку. Знайти математичне сподівання відстані від неї до початку координат.

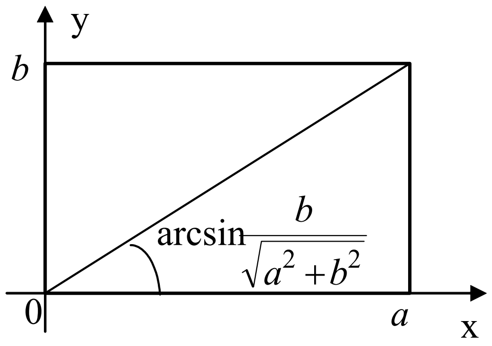


Рис. 6.9

Розв'язання. Положення точки однозначно характеризується її випадковими декартовими координатами X та Y (рис 6.9), кожна з яких має рівномірний розподіл (на $[0; a]$ та $[0; b]$ відповідно), до того ж вони незалежні. Тому $p(x;\ y)=\frac{1}{ab}$, якщо $x \in [0;\ a]$; $y \in [0;\ b]$. $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ – відстань від початку координат.

$M[Z]=\int_0^a\int_0^b\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{ab}\,dxdy$. Перейдемо до полярної системи кординат.

$$M[Z]=\frac{1}{ab}\left\{\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}\rho^2 d\rho+\int_0^{\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}d\varphi\int_0^{\frac{b}{\cos\varphi}}\rho^2 d\varphi\right\}=$$

$$=\frac{1}{3ab}\big(J(a;\ b)+J(b;\ a)\big),\quad \text{де}\quad J(a;\ b)=a^3\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}=$$

$$=a^3\int_0^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}$$ (зробили заміну $\sin\varphi=t$).

Оскільки $\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$, то

$$J(a;\ b)=\frac{a^3}{2}\left[\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)+\frac{b}{a}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]$$ і $M[Z]=\frac{1}{6}\times$

$$\times\left\{\frac{a^2}{b}\ln\left[\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]+\frac{b^2}{a}\ln\left[\frac{a}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right]+(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{a^2+b^2}\right\}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}\left\{\frac{a^2}{b}\ln\left[\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]+\frac{b^2}{a}\ln\left[\frac{a}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right]+\right.$
$\left.+(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a^2+b^2}\right\}.$

6.4. Характеристична функція багатовимірного розподілу

Припустимо, відомим є розподіл ймовірностей випадкового вектора $\vec{R}(X_1;\ X_2;\ \ldots;\ X_n)$, тобто відомими є або функція розподілу $F_{\vec{R}}(\vec{r})$, або щільність розподілу $p_{\vec{R}}(\vec{r})$.

Як і в разі випадкової величини, характеристичну функцію $\varphi_{\vec{R}}(\vec{t})$, яка залежить від вектора параметрів $\vec{t}$, визначають у вигляді математичного сподівання функції $e^{i(\vec{t};\ \vec{R})}$, де $(\vec{t};\ \vec{R})$ – скалярний добуток векторів $\vec{t}$ і $\vec{R}$: $\varphi(\vec{t}) = M[e^{i\vec{t}\vec{R}}] = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int}\ e^{i\vec{t}\vec{r}}\,p(\vec{r})dV$.

Припускаючи можливість диференціювання під знаком інтеграла за параметрами t_i, для моментів порядку $\vec{k}(k_1;\ k_2;\ \ldots;k_n)$ одержуємо такі вирази:

$$i^{k_1+k_2+\ldots k_n}M[X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}\ldots X_n^{k_n}] = \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\ldots\partial t_n^{k_n}}\varphi(\vec{t})\bigg|_{\vec{t}=\vec{0}}.$$

Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial t_k}e^{i(\vec{t}\cdot\vec{r})} = ie^{i(\vec{t}\cdot\vec{r})}\frac{\partial}{\partial t_k}(t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n) = ix_ke^{i(\vec{t}\cdot\vec{r})}\ \text{ і т.д.}$$

Якщо випадкові величини $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ незалежні, то $p_{\vec{R}}(\vec{r}) = \prod\limits_{k=1}^{n}p_{X_k}(x_k)$. У такому разі $\varphi(\vec{t}) = \prod\limits_{k=1}^{n}M\left[e^{it_kX_k}\right] = \prod\limits_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)$, тобто характеристична функція має уявлення у вигляді добутку характеристичних функцій окремих компонент вектора $\vec{R}$.

Приклад 6.14. Компоненти вектора $\vec{R}(X;\ Y)$ незалежні. Випадкова величина X розподілена за законом Коші зі щільністю $p_X = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $Y : E(1)$. Знайти $\varphi_{\vec{R}}(\vec{t})$.

Розв'язання. Знайдемо поодинці $\varphi_X(t_1)$ і $\varphi_Y(t_2)$:

$$\varphi_X(t_1) = e^{-|t_1|};\ \varphi_Y(t_2) = \frac{1}{1-it_2}.$$

Тоді $\varphi_{\vec{R}}(\vec{t}) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2) = \dfrac{e^{-|t_1|}}{1-it_2}$.

Відповідь: $\varphi_{\vec{R}}(t_1;\ t_2) = \dfrac{e^{-|t_1|}}{1-it_2}$.

Приклад 6.15. Випадковий вектор $\vec{R}$ рівномірно розподілений в квадраті з вершинами в $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ (рис. 6.10). Знайти $\varphi_{\vec{R}}(t_1;\ t_2)$.

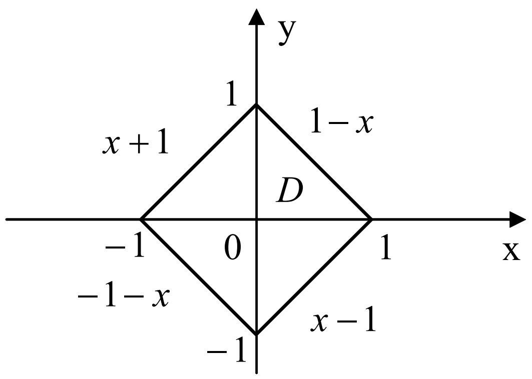


Рис. 6.10

Розв'язання. Треба обчислити інтеграл $\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D} e^{-it_1x-it_2y}\,dxdy$, оскільки $p_{X,Y}(x;\ y) = \dfrac{1}{2}$, якщо $(x;\ y)\in D$, і 0, якщо $(x;\ y)\notin D$.

$$\varphi(t_1;t_2) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-x}^{1+x} e^{-it_1x} \times$$

$$\times\, e^{-it_2y}dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+x}^{1-x} e^{-it_1x} e^{-it_2y}\,dy = \int\limits_{-1}^{0} e^{-it_1x} \times$$

$$\times \frac{1}{-it_2 2}\left[e^{-it_2(1+x)} - e^{it_2(1-x)}\right]dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{1} e^{-it_1x} \frac{1}{-it_2 2}\left[e^{-it_2(1-x)} - e^{it_2(1-x)}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{t_2}\left\{\int\limits_{-1}^{0} e^{-it_1x}\sin t_2(1+x)dx + \int\limits_{0}^{1} e^{-it_1x}\sin t_2(1-x)dx\right\}.$$ Якщо в першому інтегралі зробити заміну $x \to -x$, то цей вираз набуде такого вигляду:

$$\varphi(t_1;\ t_2) = \frac{1}{t^2}\left\{\int\limits_{0}^{1} e^{it_1x}\sin t_2(1-x)dx + \int e^{-it_1x}\sin t_2(1-x)dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{t}\int_0^1 \cos(t_1 x)\sin(t_2(1-x))dx = \frac{2}{2t_2}\int_0^1 \Big[\sin((t_1-t_2)x+t_2)-$$

$$-\sin((t_1+t_2)x-t_2)\Big]dx = \frac{1}{t_2}\left[\frac{-1}{t_1-t_2}\cos\Big[(t_1-t_2)x+t_2\Big]\Big|_0^1 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{t_1+t_2}\cos\Big[(t_1+t_2)x-t_2\Big]\Big|_0^1\right] = \frac{1}{t_2}\left[\frac{\cos t_2-\cos t_1}{t_1-t_2}+\frac{\cos t_1-\cos t_2}{t_1+t_2}\right]=$$

$$=\frac{(\cos t_2-\cos t_1)}{t_2(t_1^2-t_2^2)}\cdot(t_1+t_2-t_1+t_2)=\frac{2(\cos t_2-\cos t_1)}{t_1^2-t_2^2}.$$

Відповідь: $\varphi_{\vec{R}}(t_1;\, t_2) = \dfrac{2(\cos t_2 - \cos t_1)}{t_1^2 - t_2^2}$.

Зауваження. За допомогою формул тригонометрії відповідь задачі можна записати у такому вигляді:

$$\varphi_{\vec{R}}(t_1;\, t_2) = \frac{\sin\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}.$$ Позначимо $t_1' = \dfrac{t_1-t_2}{2}$,

$t_2' = \dfrac{t_1+t_2}{2}$. Тоді, по-перше, $t_1 = t_1' + t_2'$, $t_2 = t_2' - t_1'$, по-друге, $\varphi_{\vec{R}}(t_1';\, t_2') = \varphi_{X'}(t_1)\varphi_{Y'}(t_2')$, тобто X' та Y' – незалежні в.в. Який зв′язок між X', Y' та X, Y? Для його знаходження виходимо з рівності $(\vec{t};\, \vec{R}) = (\vec{t}\,';\, \vec{R}')$; $t_1X + t_2Y = t_1'X' + t_2'Y'$. Це дає таке: $(t_2' + t_1')X + (t_2' - t_1')Y = t_1'(X-Y) + t_2'(X+Y)$, тобто $X' = X - Y$, $Y' = X + Y$. Таким чином, лінійне перетворення певного вигляду в площині $(X;\, Y)$ дозволило виявити незалежні комбінації в.в. X та Y.

6.5. Багатовимірний нормальний розподіл

Такий розподіл є заданим у вигляді $p_{\vec{R}}(\vec{r}) = A\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})^T C(\vec{r}-\bar{\vec{r}})\right\}$, де C – позитивно означена симетрична матриця; A – константа нормування. Характеристичну функцію можна записати як

$$\varphi(\vec{t}) = M[e^{i(\vec{t};\, \vec{R})}] = A \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\vec{r} - \bar{\vec{r}})^T C(\vec{r} - \bar{\vec{r}}) + i\vec{t}^{\,T} \vec{r} \right\} dV .$$

Перейдемо в систему координат, в якій матриця C є діагональною. Це завжди можна зробити за допомогою ортогонального перетворення U (стовпці U – це власні нормовані вектори матриці C): $\vec{r} = U\vec{r}\,'$, причому якобіан перетворення має абсолютне значення 1:

$$\varphi(\vec{t}) = A \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\vec{r}\,' - \bar{\vec{r}}\,')^T C_{diag}\, (\vec{r}\,' - \bar{\vec{r}}\,') + i\vec{t}^{\,T} U\vec{r}\,' \right\} dV' =$$

$$= A \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x'_k - \bar{x}'_k)^2 \lambda_k + it'_k x'_k \right\} dx'_k$$.Одержали характеристичну функцію системи незалежних нормально розподілених в.в. із математичними сподіваннями $\bar{x}'_k$ і дисперсіями $\frac{1}{\lambda_k}$: $\varphi(\vec{t}) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{ it'_k \bar{x}'_k - \frac{t'^2_k}{2\lambda_k} \right\}$, де $\vec{t}^{\,T} U = \vec{t}^{\,T'}$, або $\vec{t}\,' = U^T \vec{t}$.

Повернемося до змінних $\vec{t}$: $\varphi(\vec{t}) = \exp\left\{ i(\vec{t};\, \bar{\vec{r}}) - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} UC^{-1}\vec{t} \right\}$. Позначимо $C^{-1} = B$: $\varphi(\vec{t}) = exp\left\{ i(\vec{t};\, \bar{\vec{r}}) - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} UB\vec{t} \right\}$.

Після обчислення $\left.\frac{\partial \varphi(\vec{t})}{\partial t_k}\right|_{\vec{t} = 0}$ переконуємося, що компонентами вектора $\bar{\vec{r}}$ є математичні сподівання випадкового вектора $\vec{R}$:

$$\frac{\partial \varphi(\vec{t})}{\partial t_k} = \exp\left\{ i(\vec{t},\, \bar{\vec{r}}) - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} B\vec{t} \right\} \left\{ i\bar{x}_k - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_k} \sum_{s=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} b_{sp} t_s t_p \right\} =$$

$= exp\left\{ i(\vec{t}, \bar{\vec{r}}) - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} B\vec{t} \right\} \cdot \left\{ i\bar{x}_k - \sum_{s=1}^{n} b_{ks} t_s \right\}$. Якщо покласти $\vec{t} > 0$, то побачимо, що $iM[X_k] = i\bar{x}_k$, тобто $M[X_k] = \bar{x}_k$.

Обчислимо другу похідну

$$\frac{\partial^2 \varphi(\vec{t})}{\partial t_k t_l} = \exp\left\{ i(\vec{t}, \bar{\vec{r}}) - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} B\vec{t} \right\} \left\{ \left(i\bar{x}_k - \sum_{s=1}^{n} b_{ks} t_s \right)\left(i\bar{x}_l - \sum_{p=1}^{n} B_{lp} t_p \right) + \right.$$

$\left. + \left(-b_{kl}\right) \right\}$; покладемо $\vec{t} = 0$: $-M\left[X_k X_l\right] = 1\left\{ -\bar{x}_k \bar{x}_l - b_{kl} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{kl} = M[X_k X_l] - \bar{x}_k \bar{x}_l = M[(X_k - \bar{x}_k)(X_l - \bar{x}_l)] = K_{kl} .$$

Одержали результат: $B = K$, або $C = K^{-1}$. У такому разі багатовимірний нормальний розподіл можна подати у вигляді, в якому враховано всі його числові параметри, а саме – вектор математичних сподівань $\bar{\vec{r}}$ і коваріаційна матриця K:

$$p_{\vec{R}}(\vec{r}) = A\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})^T K^{-1}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})\right\},$$

$$\varphi_{\vec{R}}(\vec{t}) = \exp\left\{i(\vec{t},\vec{r}) - \frac{1}{2}\vec{t}^T K\vec{t}\right\}.$$

Константу A одержують з умови нормування. Обчислимо інтеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})^T K^{-1}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})\right\}dV =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{r}'^T\left(K_{diag}\right)^{-1}\vec{r}'\right\}dV' = \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k x_k'^2}\,dx_k',$$ де

$\vec{r}-\bar{\vec{r}} = U\vec{r}'$, λ_k – власні числа матриці K^{-1}.

Кожен із множників дорівнює $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda_k}}$, як це було показано в п. 1.5.4.

Тому $A = \prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{\lambda_k}{2\pi}} = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}$. Добуток власних чисел є інваріантом відносно будь-яких лінійних перетворень і дорівнює детермінанту матриці, в даному разі – матриці K^{-1}. $\det K^{-1} = \dfrac{1}{\det K}$, і

тому $A = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det K}}$. Таким чином,

$$p_{\vec{R}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det K}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})^T K^{-1}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})\right\}.$$

У квадратичній формі показника експоненти можна виділити лінійний та квадратичний доданки вигляду αx_n^2 і $\beta\left(x_n - \sum\limits_{l=1}^{n-1}\gamma_l x_l\right)$ – і при цьому інші доданки утворюють також квадратичну форму відносно x_1, x_2, …, x_{n-1}. Після інтегрування за змінною x_n функціональний характер щільності не зміниться, тобто маргінальні розподілу у випадку нормального багатовимірного розподілу також є нормальними, лише в матриці K будуть викреслені n-й рядок і n-й стовпчик. Це є одна з характерних особливостей цього розподілу. Але найбільш важливим є твердження: якщо компоненти нормального розподілу випадкового вектора не корельовані, то вони й незалежні. Дійсно, в разі $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$

$$p_{\vec{R}}(\vec{r}) = A\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})^T K_{diag}^{-1}(\vec{r}-\bar{\vec{r}})\right\} =$$

$$= A\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\bar{x}_k)^2}{\sigma_k^2}\right\} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left\{-\frac{(x-\bar{x}_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(x_k),\ X_k:\ N(\bar{x}_k;\sigma_k).$$

Розглянемо окремо випадок $n = 2$, який досить широко зустрічається на практиці.

$$K = \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & K_{XY}\\ K_{XY} & \sigma_Y^2\end{pmatrix};\ \det K = \sigma_X^2\sigma_Y^2 - K_{XY}^2 = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2),\ \text{де}$$

ρ – коефіцієнт кореляції;

$$K^{-1} = \frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}\sigma_Y^2 & -K_{XY}\\ K_{XY} & \sigma_X^2\end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}\\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2}\end{pmatrix}.\ \text{Нарешті,}$$

$$p_{X,Y}(x;\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{(y-\bar{y})}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\};$$

$$\varphi_{X,Y}(t_1;t_2) = \exp\left\{i(t_1\bar{x}+t_2\bar{y}) - \frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_X^2 + 2t_1t_2K_{XY} + t_2^2\sigma_Y^2\right)\right\}.$$

7. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

7.1. Функції однієї випадкової величини

Припустимо, що на ймовірнісному просторі $(\dot{I}, \Phi, P)$ означено числову функцію (яку можна виміряти), тобто випадкову величину ξ. Вона набуває значення на числовій осі. На цій осі розглянемо функцію $f(x)$, де x – координати точок на осі ξ. У такому разі значення цієї функції виявляються залежними від подій простору $(\dot{I}, \Phi, P)$, тобто f є також випадковою величиною, означеною на цьому просторі: $\eta = f(\xi)$. Виникає задача виявити розподіл $f(\xi)$, якщо відомим є розподіл ξ, тобто ймовірності: $P(\eta < y)$. $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P((\xi) < y)$.

Припустимо, що залежність $y = f(x)$ має обернену залежність $x = f^{-1}(y)$. В такому разі $F_\eta(y) = P(f(\xi) < y) = P(\xi < f^{-1}(y)) =$ $= F_\xi(f^{-1}(y))$; $p_\eta(y) = \left(F_\eta(y)\right)'_y = \left(F_\xi(f^{-1}(y))\right)'_y = p_\xi(f^{-1}(y)) \times$ $\times \left|(f^{-1}(y))'_y\right|$. Позначимо обернену функцію $f^{-1}(y)$ як $g(y)$; тоді $p_\eta(y) = p_\xi(g(y))\left|g'(y)\right|$. Простим перепозначенням $y \to x$ одержуємо залежність $p_\eta(x) = p_\xi(g(x))\left|g'(x)\right|$, де $g(x)$ – функція, обернена до $f(x)$: $f[g(x)] = x$, $g[f(x)] = x$.

Приклад 7.1. В.в. ξ задано її розподілом $F_\xi(x)$. Знайти розподіл в.в. $\eta = a\xi + b$.

Розв′язання. $f(x) = ax + b$ – ця лінійна функція задає залежність η від ξ: $\eta = f(\xi)$. Оберненою до функції f є функція $g = f^{-1}$ такого вигляду: $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$. Дійсно, $f[g(x)] = a\dfrac{x-b}{a} + b = x$,

$g[f(x)] = \dfrac{(ax+b)-b}{a} = x$. Отримати явний вигляд оберненої функції дуже просто: треба, по-перше, розв′язати рівняння $y = ax + b$ відносно x: $x = \dfrac{y-b}{a}$, по-друге, перепозначити $y \to x$: $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$.
Початкова функція $f(x) = ax + b$, таким чином, має єдину обернену функцію. Тому $F_\eta(x) = F_\xi(g(x)) = F_\xi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$;

$$p_\eta(x) = p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)\left|\frac{1}{a}\right|.$$

Відповідь: $F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $p_{a\xi+b} = \frac{1}{|a|}p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Приклад 7.2. Через точку з координатами (0; 1) під навмання вибраним кутом проводять пряму лінію, яка перетинає вісь OX у точці X. Знайти розподіл в.в. X.

Розв'язання. Положення випадкової прямої можна однозначно задати випадковим кутом φ (рис. 7.1), який має рівномірний розподіл на відрізку $[-\pi; \pi]$:

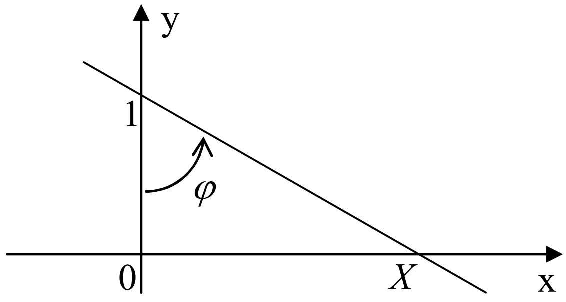


Рис. 7.1

$$F_\varphi(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \le -\pi, \\ \frac{\varphi+\pi}{2\pi}, & \varphi \in [-\pi; \pi], \\ 1, & \varphi \ge \pi. \end{cases}$$

В.в. X є функцією від φ: $X = \mathrm{tg}\,\varphi$. На відрізку $(-\pi; \pi)$ існує єдина обернена функція: $\varphi = \mathrm{arctg}\,X$.

Тому $F_X(x) = \frac{\mathrm{arctg}\ x + \pi}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,x$, $p_X = F'_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (розподіл Коші).

Відповідь: $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,x$, $p_X = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Приклад 7.3. В.в. ξ описано її характеристичною функцією $\varphi_\xi(t)$. В.в. $\eta = a\xi + b$. Знайти характеристичну функцію η.

Розв'язання. $\varphi_\eta(t) = M\left[e^{it\eta}\right] = M\left[e^{it(a\xi+b)}\right] = M\left[e^{i(at)\xi}e^{itb}\right]$. За правилом $M[C\xi] = CM[\xi]$

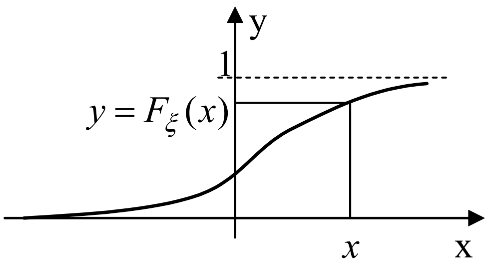


Рис. 7.2

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb}M\left[e^{i(at)\xi}\right] = e^{itb}\varphi_\xi(at).$$

Відповідь: $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$.

Окремого розгляду заслуговує розподіл випадкової величини η, яка пов'язана з випадковою величиною ξ такою функціональною залежністю: $\eta = F_\xi(\xi)$, де $F_\xi(x)$ – функція розподілу ξ (рис. 7.2).

Очевидно, η набуває значення в інтервалі [0; 1]; завжди є обернена функція, оскільки функція розподілу є зростаючою.

$P(\eta < y) = P(F_\xi(x) < y) = P(\xi < x)$; $F_\eta(y) = F_\xi(x)$;

$$\left(F_\eta(y)\right)'_y = \left(F_\xi(x)\right)'_x \cdot x'_y = p_\xi(x) = \frac{1}{y'_x} = \frac{p_\xi(x)}{\left(F_\xi(x)\right)'_x} = \frac{p_\xi(x)}{p_\xi(x)} = 1.$$ Таким

чином, $p_\eta(x) = 1$, $x \in [0; 1]$.

Висновки:

1. Випадкова величина $\eta = F_\xi(\xi)$ має рівномірний розподіл на інтервалі [0; 1] для будь-якої випадкової величини ξ.
2. Якщо $f[F_\xi(x)] = x$, $F_\xi[f(x)] = x$, тобто $f(x)$ є оберненою для $F_\xi(x)$, а $\eta : R[0; 1]$, то $\xi = f(\eta)$ має розподіл $F_\xi(x)$. Це дає змогу генерувати будь-який розподіл з рівномірного, треба лише знати функцію, обернену до заданої функції розподілу $F(x)$. Наприклад, якщо $F(x) = 1 - e^{-x}$, то $x = -\ln(1 - F(x))$, і $\xi = -\ln(1 - \eta)$ має експоненціальний розподіл, якщо $\eta : R[0; 1]$.

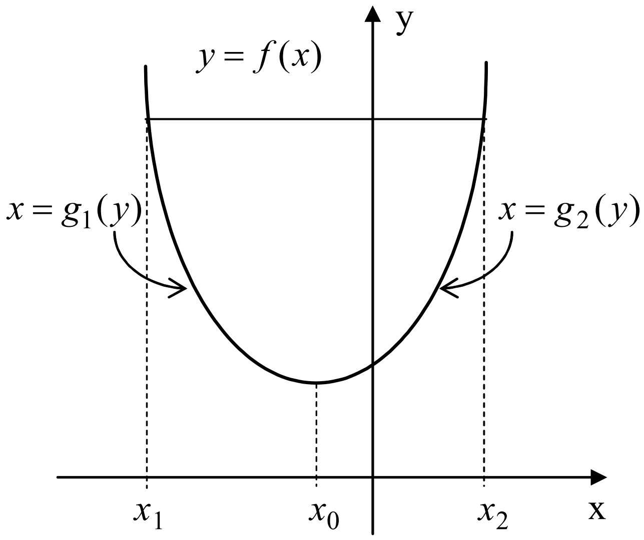


Рис. 7.3

Якщо функція має кілька обернених гілок, то питання щодо розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$ дещо ускладнюється. Для функції $y = f(x)$, показаної на рис. 7.3, є дві обернені: $x = g_1(y)$, якщо $x < x_0$, і $x = g_2(y)$, якщо $x \geq x_0$.

$P(\eta < y) = P(f(\xi) < y) =$

$= P(x_1 \leq \xi < x_2) =$

$= F_\xi(g_2(x)) - F_\xi(g_1(x))$. Це й є функція розподілу η.

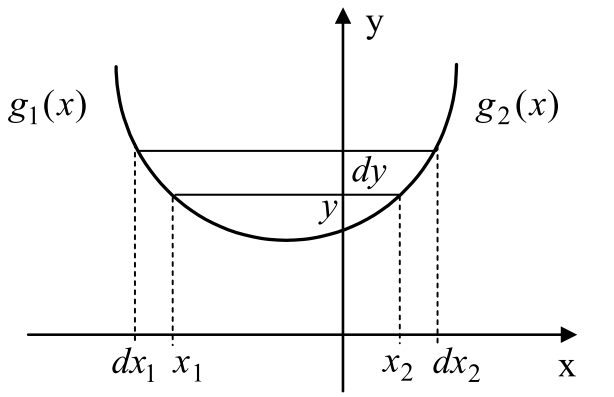


Рис. 7.4

Для знаходження щільності розподілу $p_{f(\xi)}$ є інший підхід (рис. 7.4):

$$P(\eta\in[y;\ y+dy])=P(\xi\in[x_1;\ x_1+dx_1])+P(\xi\in[x_2;\ x_2+dx_2])\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\eta(y)dy=p_\xi(x_1)\,|\,dx_1\,|+p_\xi(x_2)\,|\,dx_2\,|,\ x_1=g_1(y),$$

$|\,dx_1\,|=|\,g'_1(y)dy\,|$; $x_2=g_2(y)$, $|\,dx_2\,|=|\,g'_2(y)\,||\,dy\,|$.

Звідси випливає таке: $p_\eta(y)=p_\xi(g_1(y))\,|\,g'_1(y)\,|+p_\xi(g_2(y))\,|\,g'_2(y)\,|$.

У разі наявності n гілок оберненої до f функції, таким чином, має місце формула $p_\eta(y)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_\xi(g_k(y))\,|\,g'_k(y)\,|$.

Приклад 7.4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0;\ 1]$. Знайти розподіл в.в. $\eta=\xi^2$.

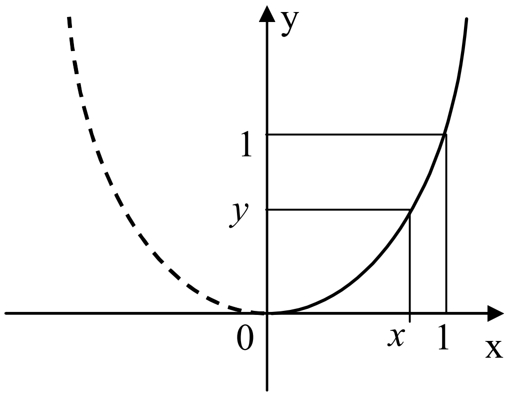


Рис. 7.5

Розв′язання. Маємо функцію $\eta=f(\xi)$, де $f(x)=x^2$. Обернена функція має дві гілки (рис. 7.5): $x=g_1(y)=\sqrt{y}$, $x=g_2(y)=\sqrt{y}$. Оскільки щільність розподілу в.в. ξ дорівнює нулю при від′ємних значеннях аргументу, то друга гілка внеску не дає.

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(\xi^2<y)=$$

$$=P(0\le\xi<\sqrt{y})=F_\xi(\sqrt{y})-F_\xi(0)=\sqrt{y}-0,\ y\in[0;\ 1].$$

Перепозначимо $y\to x$: $F_\eta(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 1]$. У такому разі

$$p_\eta(x)=F'_\eta(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x\in[0;\ 1].$$

Відповідь: $F_{\xi^2}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & 1<x;\end{cases}$ $p_{\xi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in(0;\ 1],\\ 0, & x\notin(0;\ 1].\end{cases}$

Приклад 7.5. $\xi : R(0;\ 1)$. Знайти розподіл $\eta=-\ln(\xi)$.

Розв′язання. Розглянемо рис. 7.6.

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(-\ln\xi<y)=$$

$$=P(\ln\xi>-y)=P(\xi>e^{-y}).$$

Оскільки випадкова величина ξ набуває значення лише на відрізку $(0;\,1)$, то $P(\xi > e^{-y}) = P(1 > \xi > e^{-y}) =$

$= F_{\xi}(1) - F_{\xi}(e^{-y}) = 1 - e^{-y},\ y > 0$.

$P_{\eta}(y) = \left(F_{\eta}(y)\right)' = e^{-y},\ y > 0$.

Відповідь: $p_{-\ln\xi}(x) = e^{-x},\ x > 0;$

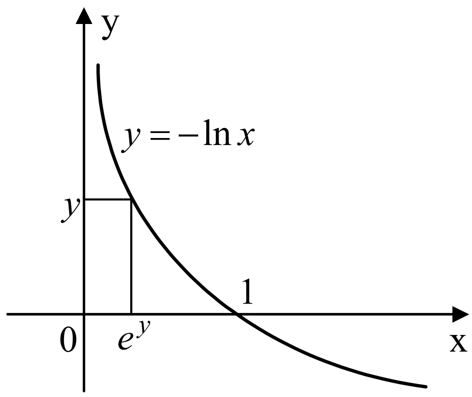


Рис. 7.6

$p_{-\ln\xi}(x) = 0,\ x < 0$. $F_{-\ln\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-x}, & 0 \le x. \end{cases}$

Зауваження. З наведеного прикладу можна зробити висновок: якщо за допомогою ЕОМ згенерувати випадкову величину $E(1)$, то треба згенерувати випадкову величину $\xi : R(0;\,1)$, а потім обчислити $\eta = -\ln\xi$.

Приклад 7.6. В.в. $\xi : N(0;\,1)$. Знайти розподіл в.в. $\eta = \xi^2$.

Розв'язання. Розглянемо рис. 7.7.

$F_{\eta}(y) = P(\eta \le y) = P(\xi^2 \le y) =$

$= P(-\sqrt{y} \le \xi \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) =$

$= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1,\ y \ge 0,$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$. Тому

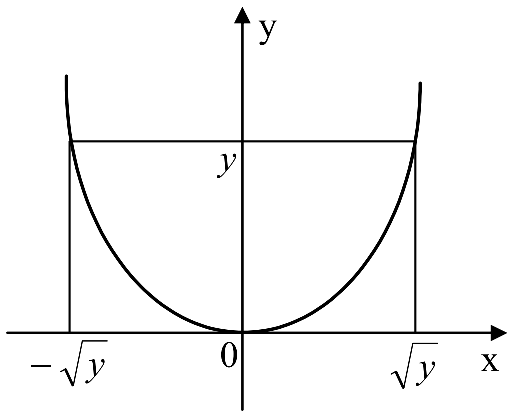


Рис. 7.7

$F_{\xi^2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - 1,\ x \ge 0;$ $p_{\xi^2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}},$ $x > 0$.

Це є гамма-розподіл з параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\xi^2 : \Gamma\left(\frac{1}{2};\, \frac{1}{2}\right)$.

7.2. Скалярні функції від декількох випадкових аргументів

Йдеться про таку залежність: $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Для знаходження розподілу η є два способи. Один із них полягає в тому, що використовують щільність розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$: $p_{\vec{\xi}}(\vec{r})$, для пошуку ймовірності події $\{\eta<y\}$: $F_\eta(y) = P(\eta < y) = \underset{f(\vec{r})<y}{\int\ldots\int} p_{\vec{\xi}}(\vec{r})dV$.

При застосуванні другого способу спочатку знаходять сумісний розподіл вектор-функції від тих же аргументів $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, однією з компонент якої є випадкова величина η, а потім за допомогою інтегрування за іншими змінними обчислюють маргінальний розподіл цієї компоненти. Цей спосіб буде розглянуто в наступному пункті.

Приклад 7.7. В.в. $X : R(0; 1)$, $Y : R(0; 1)$. $Z = X + Y$. Знайти розподіл Z.

Розв'язання. $F(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)$. Аналітична форма запису буде різною залежно від z (рис 7.8).

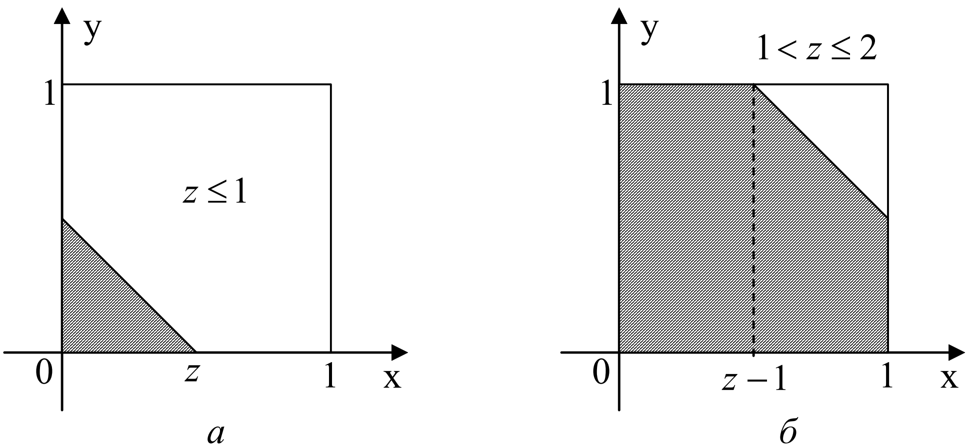


Рис. 7.8

а) $z \le 1$: $P(X + Y < z) = \dfrac{1}{2}z^2$;

б) $1 < z \le 2$: $P(X + Y < z) = 1 - \dfrac{1}{2}(1 - (z-1))^2 = -\dfrac{z^2}{2} + 2z - 1$.

Відповідь: $F(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \frac{1}{2}z^2, & 0<z\le 1,\\ -\frac{z^2}{2}+2z-1, & 1<z\le 2,\\ 1, & z>2;\end{cases}$ $p(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z, & 0<z\le 1,\\ 2-z, & 1<z\le 2,\\ 0, & z>2.\end{cases}$

Приклад 7.8. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$, $Z=\dfrac{Y}{X}$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

Розв′язання. $F(z)=P(Z<z)=P\left(\dfrac{Y}{x}<z\right)=P(Y<X\cdot z)$. Далі відповідно до рис. 7.9:

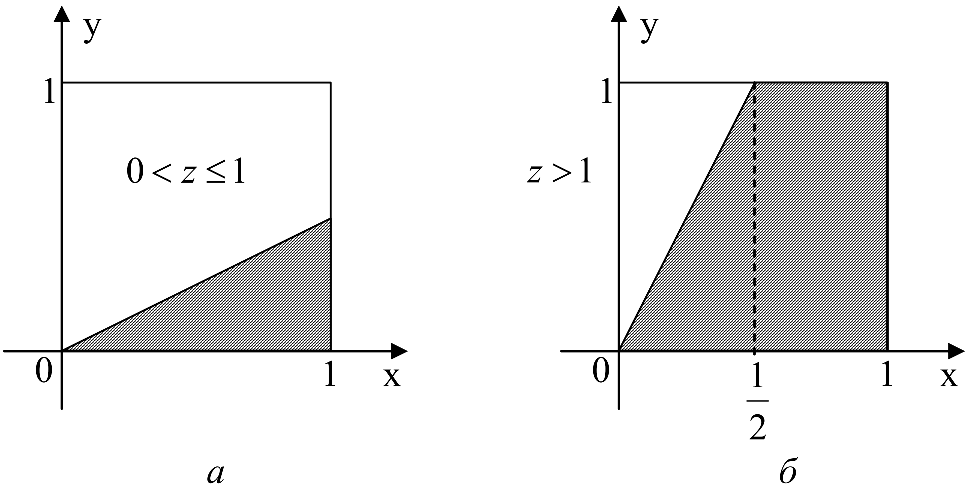


Рис. 7.9

а) $0<z\le 1$: $P(Y<z\cdot X)=\dfrac{1}{2}z$;

б) $z>1$: $P(Y<z\cdot X)=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z}$.

Відповідь: $F(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \frac{1}{2}z, & 0<z\le 1,\\ 1-\frac{1}{2z}, & 1<z;\end{cases}$ $p(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \frac{1}{2}, & 0<z\le 1,\\ \frac{1}{2z^2}, & 1<z.\end{cases}$

Приклад 7.9. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$, $Z=X\cdot Y$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

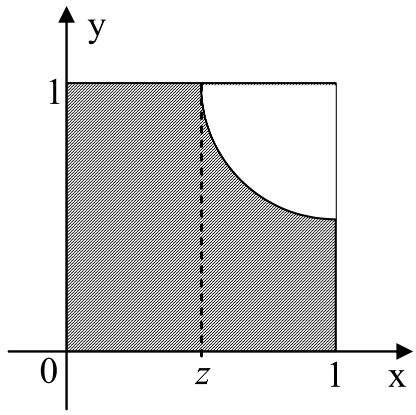


Рис. 7.10

Розв'язання

$$F(z) = P(Z < z) = P(X \cdot Y < z) = P\left(Y < \frac{z}{X}\right).$$

Далі відповідно до рис 7.10:

$$P\left(Y < \frac{z}{X}\right) = z + \int_z^1 \frac{z}{x}\,dx = z - z\ln z = z\ln\frac{e}{z}.$$

Відповідь: $F(z) = z\ln\frac{e}{z}$, $0 < z \le 1$;

$p(z) = -\ln z$, $0 < z \le 1$.

Приклад 7.10. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$; $Z = |X - Y|$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

Розв'язання.

$F(z) = P(Z < z) = P(|X - Y| < z) = P(-z < X - Y < z) = P(-z < Y - X < z) =$

$= P(X - z < Y < X + z)$. Далі відповідно до рис. 7.11: $P(X - z < Y < X + z) = 1 - (1 - z)^2$, $z \in [0;\,1]$.

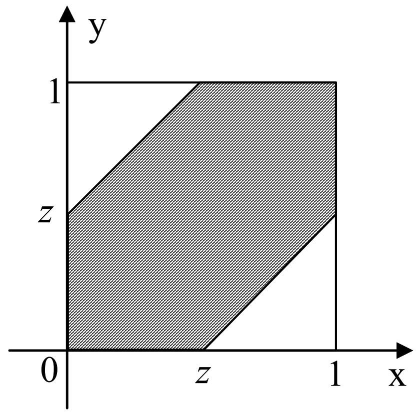


Рис. 7.11

Відповідь: $F(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1 - (1 - z)^2, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$

$$p(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2(1 - z), & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$$

Приклад 7.11. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$; $Z = X^2 + Y^2$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

Розв'язання. $F(Z < z) = P(Z < z)$. Залежно від величини z для $F(z)$ будуть різні аналітичні залежності (рис. 7.12):

а) $0 \le z \le 1$: $P(X^2 + Y^2 < z) = \frac{1}{4}\pi z$;

б) $1 < z \le 2$:

$$P(X^2 + Y^2 < z) = \sqrt{z-1} + \int_{\sqrt{z-1}}^{1} \sqrt{z - X^2}\,dx = \sqrt{z-1} + \frac{z}{2}\arcsin\frac{2-z}{z}.$$

$$\textit{Відповідь: } F(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{\pi z}{4}, & 0<z\le 1,\\ \sqrt{z-1}+\dfrac{z}{2}\arcsin\dfrac{2-z}{z}, & 1<z\le 2,\\ 1, & 2\le z;\end{cases}$$

$$p(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0<z\le 1,\\ \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2-z}{z}, & 1<z\le 2,\\ 0, & 2<z.\end{cases}$$

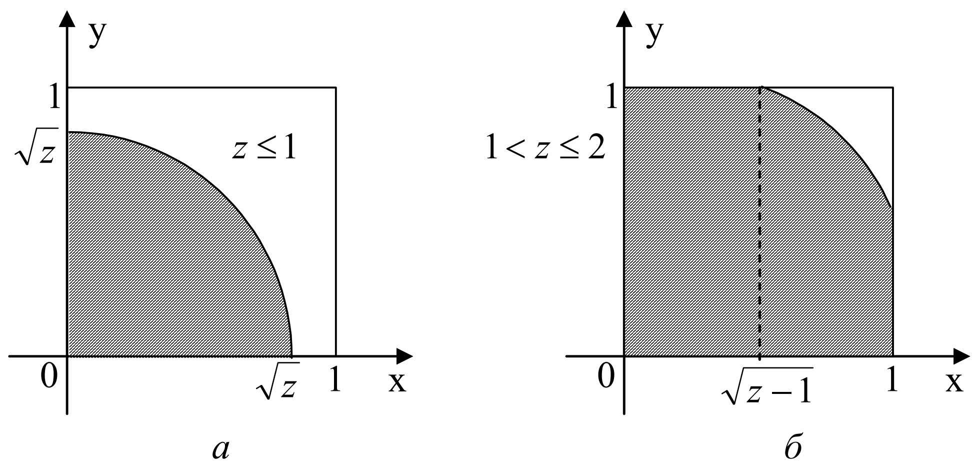


Рис. 7.12

Приклад 7.12. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$; $Z=\max(X;\,Y)$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

Розв'язання. $F_Z(z)=P(Z<z)=P(\{X<z\}\text{ і }\{Y<z\})=$

$=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$; $F_X(z)=x$, $F_Y(z)=y$, $x,\ y\in[0;\,1]$.

$$\textit{Відповідь: } F(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z^2, & 0<z\le 1,\\ 1, & 1<z;\end{cases}\quad p(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 2z, & 0<z\le 1,\\ 0, & 1<z.\end{cases}$$

Приклад 7.13. В.в. $X : R(0;\,1)$, $Y : R(0;\,1)$; $Z=\min(X;\,Y)$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

Розв'язання. $F_Z(z)=P(Z<z)=P(\{X<z\}\text{ або }\{Y<z\})=$

$= P(X < z) + P(Y < z) - P(X < z)P(Y < z) = F_X(z) + F_Y(z) -$

$- F_X(z)F_Y(z) = z + z - z^2 = 2z - z^2.$

Відповідь: $F(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2z - z^2, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$ $p(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2(1 - z), & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$

Приклад 7.14. В.в. $X : R(0;\ 1)$, $Y : R(0;\ 1)$; $Z = \dfrac{\min(X;\ Y)}{\max(X;\ Y)}$, X і Y незалежні. Знайти розподіл Z.

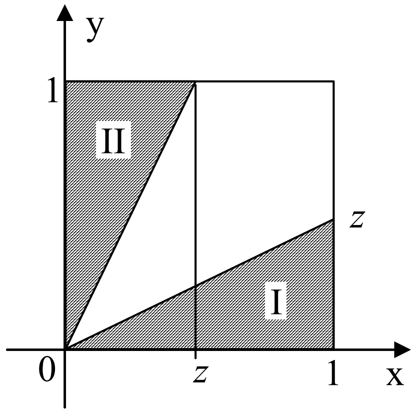


Рис. 7.13

Розв'язання. $F(z) = P(Z < z)$. В області I (рис. 7.13) $Y < X$, тому $Z = \dfrac{Y}{X}$ і $Y < zX$; в області II $X < zY$.

$P(Z < z) = P(\{X;\ Y\} \in \mathrm{I}) + P(\{X;\ Y\} \in \mathrm{II}) =$

$= \dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{2} = z$, $(z \in [0;\ 1])$.

Відповідь: $F(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ z, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$

$p(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1, & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$

Приклад 7.15. В.в. $X : E(1)$, $Y : E(1)$, X та Y незалежні. Знайти розподіл $Z = \dfrac{\min(X;\ Y)}{\max(X;\ Y)}$.

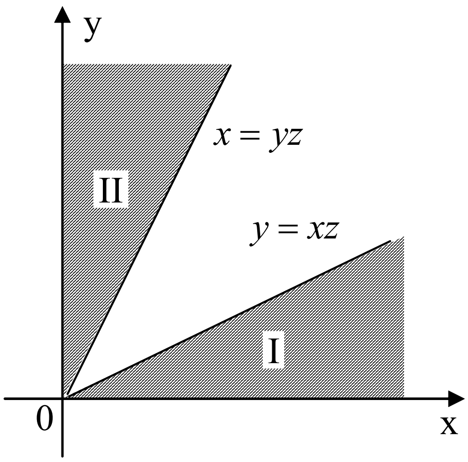


Рис. 7.14

Розв'язання. $F(z) = P(Z < z)$; $z \in [0;\ 1]$. Закреслені області (рис. 7.14) відповідають множині реалізацій випадкових величин X і Y, для яких $\dfrac{\min(X;\ Y)}{\max(X;\ Y)} < z$ $(z \in [0;\ 1])$.

$P(Z < z) = 2\iint p(x)p(y)\,dxdy =$

$$= 2\int_0^{\infty} dx \int_0^{x} e^{-x-y}\,dy = 2\int_0^{\infty} e^{-x} e^{-y}\Big|_0^{zx}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}(1-e^{-zx})dx =$$

$$= 2\left(-e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z+1}e^{-(1+z)x}\Big|_0^{\infty}\right) == 2\left(1-\frac{1}{1+z}\right) = \frac{2z}{1+z};\ z \in [0;\ 1].$$

Відповідь: $F(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \dfrac{2z}{1+z}, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$ $p(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \dfrac{2z}{(1+z)^2}, & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$

Приклад 7.16. В.в. $X : E(1)$, $Y : E(1)$. X та Y незалежні. $Z = \dfrac{\max(X;\ Y)}{\min(X;\ Y)}$. Знайти розподіл Z.

Розв'язання. $F(z) = P(Z < z)$. Множина точок закресленої області (рис. 7.15) відповідає нерівностям $\dfrac{\max(X;\ Y)}{\min(X;\ Y)} < z,\ z > 1$.

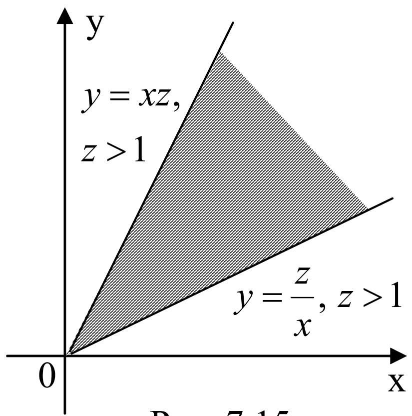


Рис. 7.15

$$P(Z < z) = \int_0^{\infty} dx \int_{\frac{x}{2}}^{z-x} e^{-x-y}\,dy = \frac{z-1}{z+1}.$$

Відповідь: $F(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, $z > 1$; $p(z) = \dfrac{2}{(z+1)^2}$.

Приклад 7.17. В.в. $X : N(0;\ 1)$, $Y : N(0;\ 1)$. X та Y незалежні. $Z = \dfrac{Y}{X}$. Знайти розподіл Z.

Розв'язання $F(z) = P(Z < z) = P\left(\dfrac{Y}{X} < z\right)$. $p_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $p_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. Оскільки X та Y незалежні, то

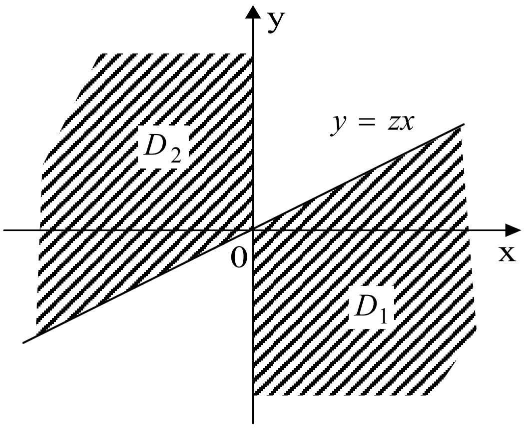


Рис. 7.16

$$p_{X,Y}(x;\, y) = p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Розв’яжемо нерівність $\frac{y}{x} < z$. Якщо $x > 0$, то $y < xz$. Якщо $x < 0$, то $y > xz$. Таким чином, об′єднання областей D_1 і D_2 (рис. 7.16) складає множину реалізацій X та Y, для яких виконується подія $\frac{Y}{X} < z$.

$$P(Z < z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy$$

. Перейдемо до полярної системи координат. Тоді $P(Z < z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} z} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho +$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} z} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg} z + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} z.$$

Відповідь: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} z$, $p(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}$, $z \in (-\infty;\, \infty)$ (розподіл Коші).

Приклад 7.18. На відрізку [1; 2] навмання вибирають дві точки. Знайти розподіл суми довжин лівого та правого малих відрізків, на які ці точки ділять початковий відрізок.

Розв’язання. З кожною подією умови можна зіставити реалізації двох випадкових незалежних величин X та Y – координат цих точок

із розподілом $R(1;\ 2)$. Довжина лівого відрізка $\min(X;\ Y) - 1$, правого $\max(X;\ Y) - 2$. Їх сума $Z = 1 + \min(X;Y) - \max(X;\ Y)$ (рис. 7.17). $F_Z(z) = P(Z < z)$, $z \in [0;\ 1]$. Якщо $X < Y$, то $Z = 1 + x - y$. Якщо $X > Y$, то $Z = 1 + y - x$.
$1 + X - Y < Z \Rightarrow Y > 1 + X - Z$.

Об′єднання областей D_1 і D_2 відповідає множині реалізацій X та Y, для яких виконується нерівність $Z < z$.

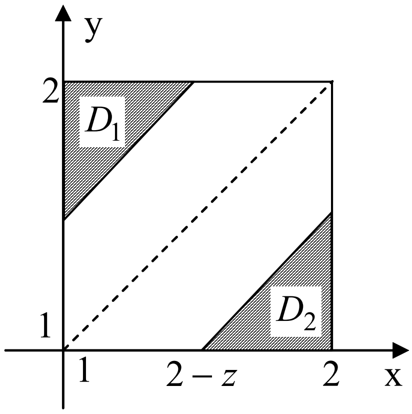


Рис. 7.17

$P(Z < z) = 2\frac{1}{2}(2-(2-z))^2 = z^2$. Тому $F_Z(z) = z^2$.

Відповідь: $F(z) = z^2$, $z \in [0;\ 1]$; $p(z) = 2z$, $z \in [0;\ 1]$.

Приклад 7.19. Відрізок [1; 2] двома точками, взятими навмання, ділиться на три відрізки. Знайти розподіл різниці довжин лівого та правого малих відрізків, на які ці точки поділяють початковий відрізок.

Розв'язання. З подією умови задачі можна зіставити реалізації двох незалежних випадкових величин X та Y, розподілених рівномірно на [0; 1] – координат цих точок. Різниця довжин $Z = |(2 - \max(X;\ Y)) - (\min(X;\ Y) - 1)| = |3 - \max(X;\ Y) - \min(X;\ Y)| = |3 - X - Y|$ (рис. 7.18).

Розглянемо подію $Z < z$: $|3 - X - Y| < z \Rightarrow 3 + z > X + Y > 3 - z$.

На рис. 7.18 закреслено область, для кожної точки якої виконується подія $Z < z,\ z \in [0;\ 1]$.

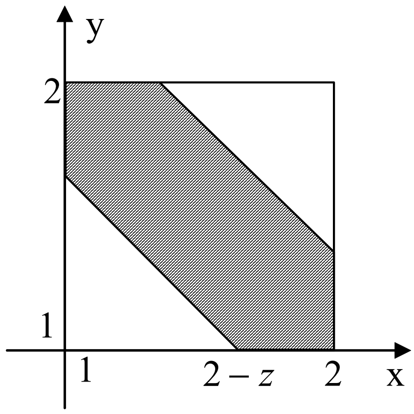


Рис. 7.18

Таким чином, $P(Z < z) = 1 - ((2 - z) - 1)^2 = 2z - z^2$.

Відповідь: $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2z - z^2, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$ $p(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 2(1 - z), & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$

Приклад 7.20. На півколі радіусом 1 навмання вибирають дві точки. Знайти розподіл хорди, яка їх поєднує.

Розв'язання. З подією умови можна зіставити дві незалежні випадкові величини Φ_1 та Φ_2 – кути, утворені віссю OX і радіусами в ці точки (рис. 7.19): Φ_1, Φ_2 : $R[0; \pi]$.

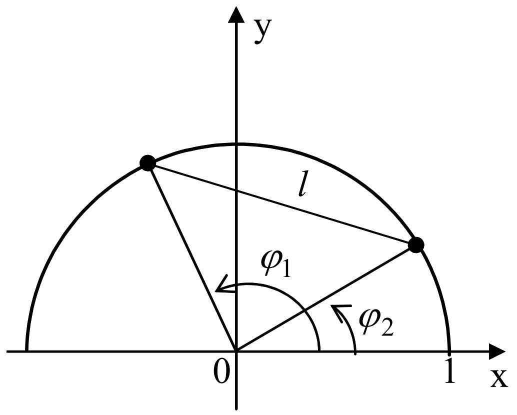


Рис. 7.19

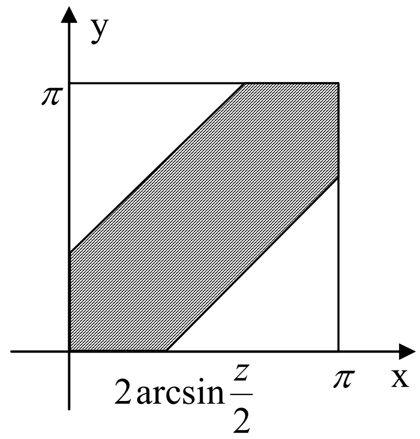


Рис. 7.20

Випадкова величина умови $l = 2\sin\frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{2}$, $F_l(z) = P(l < z)$, $z \in [0; 2]$.

Розглянемо подію (рис. 7.20)

$$\{l < z\} = \left\{2\sin\frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{2} < z\right\} = \left\{\varphi_1 - 2\arcsin\frac{z}{2} < \varphi_2 < \varphi_1 + 2\arcsin\frac{z}{2}\right\};$$

$$P(l < z) = \frac{1}{\pi^2}\left(\pi^2 - \left(\pi - 2\arcsin\frac{z}{2}\right)^2\right) = \frac{4}{\pi}\arcsin\frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{z}{2}\right).$$

Відповідь: $F_l(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \frac{4}{\pi}\arcsin\frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{z}{2}\right), & 0 < z \le 2, \\ 1, & 2 < z; \end{cases}$

$$P_l(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \frac{4}{\pi\sqrt{4 - z^2}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{z}{2}\right), & 0 < z \le 2, \\ 0, & 2 < z. \end{cases}$$

Приклад 7.21. На півколі радіусом 1 навмання вибирають чотири точки. Випадкові величини X_1, X_2, X_3, X_4 – відстані від цих точок до діаметра. Знайти розподіл випадкової величини $Z = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Розв'язання. $F_Z(z) = P(Z < z) = P(\{X_1 < z\}\{X_2 < z\}\{X_3 < z\} \times$

$\times \{X_4 < z\}) = P(X_1 < z)P(X_2 < z)P(X_3 < z)P(X_4 < z) = F_X^4(z)$, де

F_X – функція розподілу кожної з величин X_1, X_2, X_3, X_4.

Кут Φ, утворений віссю OX і радіусом, проведеним у випадкову точку на півколі (рис. 7.21), є випадковою величиною, розподіленою за законом $R[0;\ \pi]$.

$$F_\Phi(\varphi) = \frac{\varphi}{\pi}, \qquad \varphi \in [0;\ \pi].$$

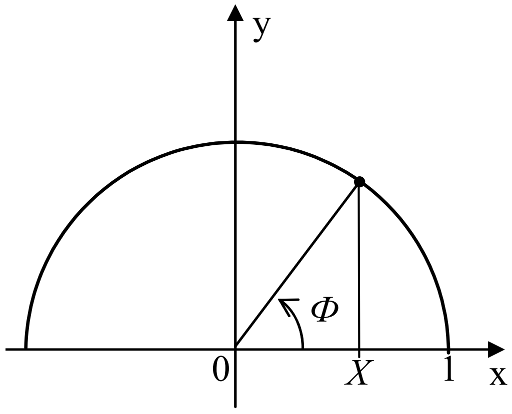


Рис. 7.21

$$P(X < z) = P(\sin\Phi < z) =$$
$$= P(\{\Phi < \arcsin z\} \cup \Phi > \pi -$$
$$- \arcsin z\}) = P(\Phi < \arcsin z) + P(\Phi >$$
$$> \pi - \arcsin z) = P(\Phi < \arcsin z) +$$
$$+ 1 - P(\Phi < \pi - \arcsin z) =$$
$$= F_\Phi(\arcsin z) + 1 -$$
$$- F_\Phi(\pi - \arcsin z) = \frac{1}{\pi}\arcsin z + 1 -$$
$$- \frac{1}{\pi}(\pi - \arcsin z) = \frac{2}{\pi}\arcsin z;\ z \in [0;\ 1].$$

Таким чином, $F_Z(z) = \dfrac{16}{z^4}\arcsin^4 z$, $z \in [0;\ 1]$.

Відповідь: $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \dfrac{16}{\pi^4}(\arcsin z)^4, & 0 < z \le 1, \\ 1, & 1 > z; \end{cases}$

$$P_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \dfrac{64(\arcsin z)^3}{\pi^4\sqrt{1-z^2}}, & 0 < z \le 1, \\ 0, & 1 > z. \end{cases}$$

Приклад 7.22. В площині XOY через навмання взяту точку відрізка з кінцями (0; 0) та (0; 1) під довільним кутом проводять пряму, яка перетинає вісь OX у точці $(X;\ 0)$. Знайти розподіл випадкової величини X.

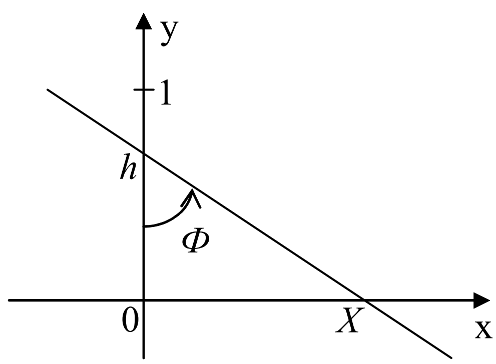


Рис. 7.22

Розв'язання. Положення прямої, про яку йдеться, однозначно визначається двома величинами (рис. 7.22): h – ордината точки перетину прямої з віссю

OY та кутом Φ між прямою та віссю OY. Випадкові величини h і Φ мають рівномірний розподіл, на відрізках [0, 1] та $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ відповідно і є незалежними, тобто сумісна щільність розподілу дорівнює $\frac{1}{\pi}$, $h \in [0; 1]$, $\Phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $F_X(x) = P(X < x)$. Якщо $x > 0$, то

$$P(X < x) = P(h \operatorname{tg} \Phi < x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} + \int_{\operatorname{arctg} x}^{1} x \operatorname{ctg} \varphi d\varphi\right) = \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

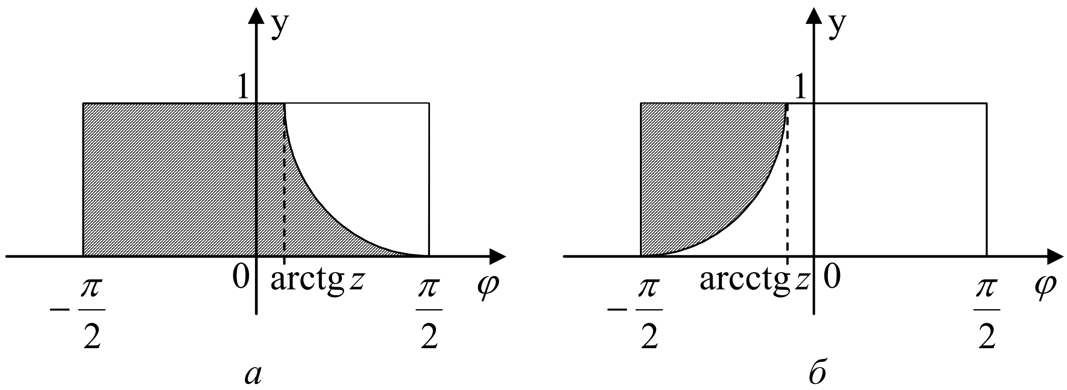


Рис. 7.23

Якщо $x < 0$, то $F(x) = 1 - F(x)$; це випливає з рис. 7.23, *б*.

Відповідь: $F_X = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $x > 0$;

$F_X(x) = 1 - F_X(-x)$, $x < 0$. $p_X = \frac{1}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, $x \neq 0$.

Приклад 7.23. Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд

X	1	2	3	7	8	12
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

. Знайти розподіл випадкової величини $Y = \min(X; 2{,}5)$. За допомогою знайденого розподілу знайти середнє значення в.в. Y.

Розв'язання. В.в. Y, як і X, має дискретний розподіл. Вона набуває значення: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2{,}5$.

$P(Y = y_1) = P(X = x_1) = P(X = 1) = 0{,}1;$

$P(Y = y_2) = P(X = x_2) = P(X = 2) = 0{,}2;$

$P(Y = y_3) = P(X > 2{,}5) = P(\{X = 3\} +$
$+ \{X = 7\} + \{X = 8\} + \{X = 12\}) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7.$

Таким чином, знайдено розподіл Y:

Y	1	2	2,5
P	0,1	0,2	0,7

.

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{3} y_i P_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 2{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}1 + 0{,}4 + 1{,}75 = 2{,}25.$$

Відповідь: $\overline{Y} = 2{,}25$.

Приклад 7.24. Мають три монети по 2 копійки, одну – в п′ять копійок і дві по 10 копійок. Навмання беруть три монети. Побудувати ряд розподілу випадкової величини S – одержаної суми. За допомогою знайденого розподілу знайти розподіл в.в. $S1 - \max(S;\ 10)$ і середнє значення $S1$.

Розв'язання. Можливі такі комбінації по три монети: $E_1 = \{2;\ 2;\ 2\}$; $E_2 = \{2;\ 2;\ 5\}$; $E_3 = \{2;\ 2;\ 10\}$; $E_4 = \{2;\ 5;\ 10\}$; $E_5 = \{2;\ 10;\ 10\}$; $E_6 = \{5;\ 10;\ 10\}$. Відповідні значення S є: $S_1 = 6$; $S_2 = 9$; $S_3 = 14$; $S_4 = 17$; $S_5 = 22$; $S_6 = 25$;

$$P_1 = P(S = 6) = P(E_1) = \frac{C_3^3 C_1^0 C_2^0}{C_3^6} = \frac{1}{20};$$

$$P_2 = P(S = 9) = P(E_2) = \frac{C_3^2 C_1^1 C_2^0}{C_6^3} = \frac{3}{20};$$

$$P_3 = P(S = 14) = P(E_3) = \frac{C_3^2 C_1^0 C_2^1}{C_6^3} = \frac{6}{20};$$

$$P_4 = P(S = 17) = P(E_4) = \frac{C_3^1 C_1^1 C_2^1}{C_6^3} = \frac{6}{20};$$

$$P_5 = P(S = 22) = P(E_5) = \frac{C_3^1 C_1^0 C_2^2}{C_6^3} = \frac{3}{20};$$

$$P_6 = P(S = 25) = P(E_5) = \frac{C_3^0 C_1^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{20}.$$

S	6	9	14	17	22	25
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

.

Перевірка: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$.

В.в. $S1$ набуває таких значень: $S1_1 = 10$, $S1_2 = 14$, $S1_3 = 17$, $S1_4 = 22$, $S1_5 = 25$.

$S1$	10	14	17	22	25
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

.

Нарешті,

$$\overline{S1} = \sum_{i=1}^{5} S1_i P_i = \frac{1}{20}(10 \cdot 4 + 14 \cdot 6 + 17 \cdot 6 + 22 \cdot 3 + 25 \cdot 1) = \frac{317}{20}.$$

Відповідь: $\overline{S1} = \frac{317}{20} = 15{,}85$.

Приклад 7.25. В одиничному квадраті $ABCD$ на сторонах AB і CD навмання беруть точки L і M відповідно. Знайти розподіл випадкової довжини відрізка LM.

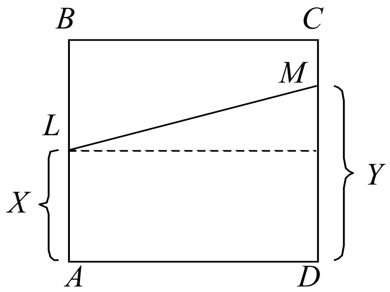


Рис. 7.24

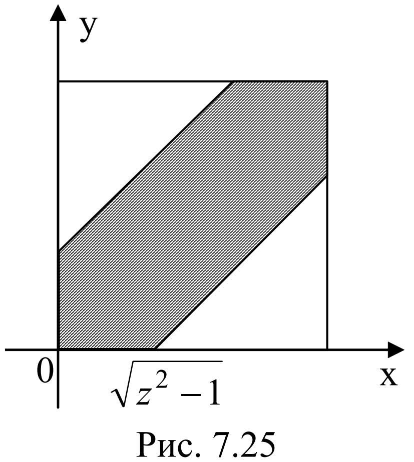


Рис. 7.25

Розв'язання. Якщо ввести в розгляд в.в. $X = AL$ та $Y = DM$ (рис. 7.24), то в.в. $l = LM = \sqrt{1 + (X+Y)^2}$.

Сумісна щільність розподілу системи $(X; Y)$ дорівнює одиниці в квадраті $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$.

$$F_l(z) = P(l < z) = P\left(\sqrt{1 + (Y - X)^2} < z\right) = P\left(X - \sqrt{z^2 - 1} < Y < X + \sqrt{z^2 - 1}\right) = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - z^2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{z^2 - 1} - z^2,\ 1 \le z \le 2$$

(рис. 7.25).

Відповідь:

$$F_l(z) = \begin{cases} 0, & z \le 1, \\ 1 + 2\sqrt{z^2 - 1} - z^2, & 1 < z \le \sqrt{2}; \\ 1, & \sqrt{2} < z; \end{cases}$$

$$p_I(z)=\begin{cases}0, & z\le 1,\\ 2z\dfrac{1-\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}, & 1<z\le\sqrt{2};\\ 0, & \sqrt{2}<z.\end{cases}$$

Приклад 7.26. У дві комірки навмання кидають кулі, кількість яких з рівними ймовірностями може бути від однієї до п'яти. Знайти розподіл кількості куль у першій комірці та середню кількість куль у ній.

Розв'язання. Позначимо через Z випадкову величину умови. Вона може набувати значення від нуля до п'яти. Введемо в розгляд гіпотези: $H_i=$\{загальна кількість куль дорівнює i\}. $P(H_i)=\frac{1}{5}$. Скористаємося формулою повної ймовірності

$$P(Z=0)=P(H_1)P(Z=0/H_1)+P(H_2)P(Z=0/H_2)+\ldots+P(H_5)P(Z=0/H_5)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{16+8+4+2+1}{32}=\frac{31}{160};$$

$$P(Z=1)==\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(Z=1/H_i)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}C_i^1\frac{1}{2^i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}(1\cdot16+2\cdot8+$$

$$+3\cdot4+4\cdot2+5\cdot1)=\frac{57}{160};\ \ P(Z=2)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(Z=2/H_i)=$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{i=2}^{5}C_i^2\frac{1}{2^i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}(1\cdot8+3\cdot4+6\cdot2+10\cdot1)=\frac{42}{160};\ \ P(Z=3)=$$

$$=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(Z=3/H_i)=\frac{1}{5}\sum_{i=3}^{5}C_i^3\frac{1}{2^i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}(1\cdot4+4\cdot2+10\cdot1)=\frac{22}{160};$$

$$P(Z=4)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)P(Z=4/H_i)=\frac{1}{5}\sum_{i=4}^{5}C_i^4\frac{1}{2^i}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}(1\cdot2+5\cdot1)=$$

$$=\frac{7}{160};\ P(Z=5)=P(H_5)P(Z=5/H_5)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{160}.$$

Перевірка: $\sum_{i=0}^{5}(Z=i)=\frac{1}{160}(31+57+42+22+7+1)=1.$

$$\bar{Z}=\sum_{i=0}^{5}Z_iP(Z_i)=\frac{1}{160}(31\cdot0+57\cdot1+42\cdot2+22\cdot3+7\cdot4+1\cdot5)=2\frac{1}{40}=$$
$$=2{,}025.$$

Відповідь:

Z	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{31}{160}$	$\frac{57}{160}$	$\frac{42}{160}$	$\frac{22}{160}$	$\frac{7}{160}$	$\frac{1}{160}$

; $\bar{Z} = 2{,}025$.

7.3. Вектор-функція випадкового вектора

Розглянемо послідовність відображень: $(\dot{I};\ \Phi;\ P) \xrightarrow{\vec{\xi}} R_n \xrightarrow{\vec{f}} R'_n$. Випадковий вектор $\vec{\xi}$ здійснює відображення ймовірнісного простору $(\dot{I};\ \Phi;\ P)$ на дійсний простір з n вимірами R_n. Функція $\vec{f}$ відображає простір R_n в інший простір R'_n з тією ж кількістю вимірів. Це означає, що задано випадковий вектор $\vec{\eta}$, який є вектор-функцією випадкового вектора $\vec{\xi}$: $\vec{\eta} = \vec{f}(\vec{\xi})$. Для ймовірнісного опису $\vec{\eta}$ треба мати змогу обчислити диференціал ймовірності $P(dV')$, тобто лінійну за dV' частину ймовірності точки з координатами кінця вектора $\vec{\eta}$ потрапити в область R'_n об'єму dV'. Для цього треба знайти ймовірнісну міру тієї області простору R_n, всі точки якої за допомогою $\vec{f}$ відображаються в область dV'. Припустимо, що $\vec{f}$ має єдине обернене відображення. Тоді $P(dV) = P(dV')$. Це означає, що $p_{\vec{\xi}}(\vec{r})dV = p_{\vec{\eta}}(\vec{r}\,')dV'$ і

$$p_{\vec{\eta}}(\vec{r}\,') = p_{\vec{\xi}}(\vec{r})\left|\frac{dV}{dV'}\right|.$$

Вираз $\left|\frac{dV}{dV'}\right|$ має назву якобіана (оберненого відображення) і обчислюється як визначник:

$$\frac{dV}{dV'} = J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x'_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix}.$$

У разі декількох гілок оберненого відображення, як і у випадку функції однієї випадкової змінної, вираз для щільності розподілу дещо ускладнюється, бо з'являються декілька доданків (позначимо їхню кількість m):

$$p_{\vec{\eta}}(\vec{r}\,') = \sum_{k=1}^{m} p_{\vec{\xi}_k}(\vec{r}) \left| \frac{dV_k}{dV'} \right| .$$

Якщо знайдено розподіл вектора $\vec{\eta} = \vec{f}(\vec{\xi})$, то стає можливим знайти й маргінальні розподіли. Такий підхід дозволяє знаходити розподіл вектор-функції $\vec{\zeta} = \vec{g}(\vec{\xi})$, яка має кількість компонент, меншу, ніж кількість компонент початкового вектора $\vec{\xi}$.

Приклад 7.27. Випадковий вектор $\vec{\xi}(X;Y)$ рівномірно розподілений в колі радіусом 1 і з центром у початку координат. Знайти розподіл вектора $\vec{\eta}(R;\Phi)$, де R – відстань від початку координат, а Φ – кут між вектором $\vec{\xi}$ і віссю OX, який вимірюється від $-\pi$ до π (рис. 7.26).

Розв'язання. Пряма залежність задана формулами

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ \Phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}, \ X > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X} + \pi, \ X < 0, \ Y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X} - \pi, \ X < 0, \ Y < 0. \end{cases} \end{cases}$$

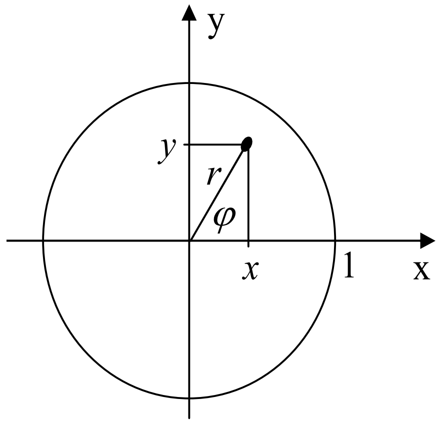


Рис. 7.26

Обернена залежність: $\begin{cases} X = R\cos\Phi, \\ Y = R\sin\Phi. \end{cases}$

$$J' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

Таким чином, $p_{R,\,\Phi}(r;\ \varphi) = p_{X,\,Y}(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)r = \dfrac{1}{\pi}r$, $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$, $r \in [0;\ 1]$.

Відповідь: $p_{R,\,\Phi}(r;\ \varphi) = \dfrac{r}{\pi}$, $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$, $r \in [0;\ 1]$.

<u>Зауваження</u>. $p_R(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{R,\,\Phi}(r;\ \varphi)d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{r}{\pi}d\varphi = 2r$, $r \in [0;\ 1]$;

$p_{\Phi}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{R,\,\Phi}(r;\,\varphi)dr = \int\limits_{0}^{1} \frac{r}{\pi} dr = \frac{1}{2\pi}$. Тому

$p_{\Phi}(\varphi)p_R(r) = \dfrac{r}{\pi} = p_{R,\,\Phi}(r;\,\varphi)$. Таким чином, із системи в.в. X і Y (які є залежними) можна утворити комбінації, які будуть незалежними, а саме: випадкові величини R і Φ незалежні, причому Φ розподілене рівномірно, а R – за законом $2r$.

7.4. Розподіл суми випадкових величин

Припустимо, що заданим є вектор $\vec{\xi}(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\xi_n)$.

Розподіл випадкової величини $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ має назву композиції розподілів компонент $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$. Пряме обчислення розподілу $F_\eta(z)$ приводить до згортки. Ілюстрацію можна подати для $n = 2$: $F_{X+Y}(z) = P(X + Y < z) = \iint\limits_{X+Y<z} p_{X,\,Y}(x;\ y)dxdy =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} p_{X,\,Y}(x;\ y)dy$. У такому разі $p_{X+Y}(z) = F'_{X+Y}(z) =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x;\,z - x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{X,\,Y}(z - y;\ y)dy$.

Взагалі кажучи, для довільного розподілу вектора $\vec{\xi}$ знайти композицію практично неможливо. В окремих, але найбільш важливих випадках, за допомогою особливостей розподілів задача спрощується.

Розглянемо випадок, коли додатки незалежні, та знайдемо характеристичну функцію суми:

$$\varphi_\eta(t) = M[\exp(it(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n))] = \prod_{k=1}^{n} M[\exp(it\xi_k)] = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t).$$

Знаючи характеристичну функцію як перетворення Фур′є щільності розподілу, знаходимо й щільність.

Якщо ж розподіли незалежних компонент $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ до того ж однакові, то $\varphi_\eta(t) = \left(\varphi_\xi(t)\right)^n$, де $\varphi_\xi(t)$ – характеристична функція однієї компоненти.

Розподіли, для яких композиція має той же функціональний вигляд, як і розподіл окремих незалежних компонент, мають назву композиційно сталих.

Приклад 7.28. Знайти розподіл випадкової величини $\eta =$

$= \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi}{n}$, де ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – незалежні і мають розподіл Коші $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Розв'язання. Розглянемо в.в. $\eta_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$, тому $\varphi_{\eta_1}(t) = \left(e^{-|t|}\right)^n = e^{-n|t|}$.

Але $\varphi_\eta(t) = \varphi_{\frac{\eta_1}{n}}(t) = M\left[e^{it\frac{\eta_1}{n}}\right] = M\left[e^{i\left(\frac{t}{n}\right)\eta_1}\right] = e^{-n\left|\frac{y}{n}\right|} = e^{-|t|}$.

Відповідь: розподіл середнього арифметичного незалежних в.в., розподілених за законом Коші, збігається з розподілом кожного окремого додатка.

Приклад 7.29. $\eta = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $\xi_i : \Gamma(\alpha;\ \lambda)$, ξ_i незалежні в сукупності. Знайти розподіл η, якщо $n \to \infty$.

Розв'язання. $\varphi_\xi(t) = \dfrac{1}{\left(1 - i\dfrac{t}{\lambda}\right)^\alpha}$; $\eta_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \varphi_{\eta_1}(t) = \left(\varphi_\xi(t)\right)^n =$

$= \dfrac{1}{\left(1 - i\dfrac{t}{\lambda}\right)^{\alpha n}} : \Gamma(\alpha n;\ \lambda)$; $\varphi_\eta(t) = \varphi_{\frac{\eta_1}{n}}(t) = \varphi_{\eta_1}\left(\dfrac{t}{n}\right) = \dfrac{1}{\left(1 - i\dfrac{t}{\lambda n}\right)^{\alpha n}}$:

: $\Gamma(\alpha n;\ \lambda n)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_\eta(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \left(i\dfrac{t}{\lambda}\right)\dfrac{1}{n}\right)^{n(-\alpha)} = e^{-i\frac{t}{\lambda}(\alpha)} = e^{it\frac{\alpha}{\lambda}}$. Це є розподіл невипадкової величини (числа) $\dfrac{\alpha}{\lambda}$.

Відповідь: число $\dfrac{\alpha}{\lambda}$, яке дорівнює математичному сподіванню гамма-розподілу.

Приклад 7.30. $\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, ξ_k: $N(\bar{x}_k; \sigma_k)$, ξ_k у сукупності незалежні. Знайти композицію.

Розв'язання. $\varphi_{\xi_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{it\bar{x}_k - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} = \exp\left\{ it \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \right\} =$

$= \exp\left\{ it\bar{x} - \frac{t^2}{2}\sigma^2 \right\}$, де $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k$, $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$.

Відповідь: $\eta : N(\bar{x}; \sigma^2)$, де $\bar{x}$ – сума математичних сподівань, σ^2 – сума дисперсій окремих додатків. Нормальний розподіл є композиційно сталим.

Приклад 7.31. Окремі додатки ξ_k незалежні в сукупності й однаково розподілені за законом:

ξ	0	1
P	q	p

. Знайти розподіл $\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Розв'язання. Проведемо обчислення за допомогою твірної функції (а не характеристичної): $\chi_n(t) = M[t^{\eta}] = M[t^{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}] =$

$= \left(M\left[t^{\xi} \right] \right)^n = \left(t^0 q + t^1 p \right)^n = (pt + q)^n$.

Одержали твірну функцію біномного розподілу.

Відповідь: біномний розподіл.

Приклад 7.32. Випадковий вектор $\vec{\xi}(X_1; X_2; X_3)$ має нормальний розподіл з параметрами: $\bar{\vec{\xi}}(1; 0{,}2)$, $K_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

Знайти вектор $\vec{\eta}(Y_1; Y_2; Y_3)$, лінійно пов'язаний з $\vec{\xi}$, який би мав незалежні компоненти з нульовими математичними сподіваннями.

Розв'язання. Запишемо зв'язок між $\vec{\eta}$ та $\vec{\xi}$ у вигляді: $\vec{\xi} - \bar{\vec{\xi}} = C\vec{\eta}$, $M[\vec{\xi} - \bar{\vec{\xi}}] = 0$, і тому $M[C\vec{\eta}] = CM[\vec{\eta}] = 0 \Rightarrow M[\vec{\eta}] = 0$. Коваріаційну матрицю K_ξ можна записати у вигляді $K_\xi = M\left[(\vec{\xi}-\bar{\vec{\xi}})(\vec{\xi}-\bar{\vec{\xi}})^T\right]$. Виразимо її у вигляді залежності від K_η: $K_\xi = M\left[C\vec{\eta}\vec{\eta}^T C^T\right] = CM\left[\vec{\eta}\vec{\eta}^T\right]C^T = CK_\eta C^T$. Кожна з компонент Y_1, Y_2, Y_3 є лінійно пов'язаною з нормально розподіленими в.в. X_1, X_2, X_3. За композиційною сталістю нормального розподілу в.в. Y_1, Y_2, Y_3 також розподілені нормально. В такому разі для їх незалежності вистачає некорельованості, тобто матриця зв'язку повинна бути такою, щоб $K_\xi = CK_{diag}C^T$. Відносно симетричних матриць, якою є K_ξ, відомо таке: існує ортогональна матриця U (стовпцями якої є власні вектори): $U^T U = I$, де I – одинична матриця, яка приводить K_ξ до діагонального вигляду: $U^T K_\xi U = K_{diag}$. Оскільки $U^T = U^{-1}$, то звідси випливає, що $K_\xi = UK_{diag}U^T$, і тому матрицю зв'язку C можна взяти у вигляді $C = U$.

Знаходимо власні числа матриці K_ξ:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{7}{6}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Власні числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Як бачимо, власне число 1 має кратність 2. Це звичайно дещо ускладнює пошук власних векторів, тому що вектори $\vec{U}_2$ та $\vec{U}_3$ можна взяти будь-якими ортонормованими в їх власному просторі.

Знайдемо власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2} - 2\right)U_{11} - \frac{1}{\sqrt{6}}U_{21} + \frac{1}{2\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}U_{11} + \left(\frac{4}{3} - 2\right)U_{21} - \frac{1}{3\sqrt{2}}U_{31} = 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}U_{11} - \frac{1}{3\sqrt{2}}U_{21} + \left(\frac{7}{6} - 2\right)U_{31} = 0, \\ U_{11}^2 + U_{21}^2 + U_{31}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{11} + \frac{2}{\sqrt{6}}U_{21} - \frac{1}{\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ U_{11} + \frac{4}{\sqrt{6}}U_{21} + \frac{1}{\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ U_{11} - \frac{2}{\sqrt{6}}U_{21} - \frac{5}{\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ U_{11}^2 + U_{21}^2 + U_{31}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{11} + \frac{2}{\sqrt{6}}U_{21} - \frac{1}{\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ \frac{2}{\sqrt{6}}U_{21} + \frac{2}{\sqrt{3}}U_{31} = 0, \\ \frac{4}{\sqrt{6}}U_{21} + \frac{4}{\sqrt{6}}U_{31} = 0, \\ U_{11}^2 + U_{21}^2 + U_{31}^2 = 1. \end{cases}$$

Позначимо $U_{31} = y$; тоді $U_{21} = -\sqrt{2} \cdot t$,

$U_{11} = \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}t = \sqrt{3} \cdot t$, $t^2(3 + 2 + 1) = 1$; $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Виберемо знак "+": $\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Вектори $\vec{U}_2$ та $\vec{U}_3$ ортогональні між собою та вектором $\vec{U}_1$. До того ж $\vec{U}_2$ та $\vec{U}_3$ відповідають одному власному числу. Виберемо $\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d\sqrt{3} \\ d\sqrt{6} \end{pmatrix}$. У такому разі $\vec{U}_2^T\vec{U}_1 = -d + d = 0$ і $\vec{U}_2 \perp \vec{U}_1$. Константу d підбираємо так, щоб $|\vec{U}_2| = 1$: $d^3 3 + d^2 6 = 1$,

$d = \pm\frac{1}{3}$. Виберемо знак "+", і в такому разі $\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Вектор $\vec{U}_3$ в такому разі можна знайти як векторний добуток $\vec{U}_1$ і $\vec{U}_2$: $\vec{U}_3 =$

$= \pm[\vec{U}_1,\ \vec{U}_2] = \pm\left(i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - j\,\frac{1}{\sqrt{3}} + k\,\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$. Виберемо знак "–" :

$$\vec{U}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Нарешті знаходимо вектор $\vec{\eta}$: $\vec{\xi} - \overline{\vec{\xi}} = U\vec{\eta}$:

$$\vec{\eta} = U^T(\vec{\xi} - \overline{\vec{\xi}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - 1 \\ X_2 \\ X_3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{2}} - \frac{X_2}{\sqrt{3}} + \frac{X_3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}}$,

$Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{3}} + \frac{2X_3}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}}$, $Y_3 = \frac{X_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2}{\sqrt{3}} - \frac{X_3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Зауваження. Незалежними будуть також будь-які в.в. Y_1', Y_2', Y_3', які пов'язані з Y_1, Y_2, Y_3 залежностями: $Y_1' = \alpha Y_1$, $Y_2' = \beta(Y_2\cos\varphi - Y_3\sin\varphi)$, $Y_3' = \gamma(Y_2\sin\varphi - Y_3\cos\varphi)$, де α, β, γ – довільні числа ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$), φ – довільний кут; тобто загальний зв'язок такий: $\vec{\eta}\left(Y_1', Y_2', Y_3'\right) =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta\cos\varphi & -\beta\sin\varphi \\ 0 & \gamma\sin\varphi & \gamma\cos\varphi \end{pmatrix} U^T(\vec{\xi} - \overline{\vec{\xi}}).$$

7.5. Закони великих чисел

7.5.1. Центральна гранична теорема

Розглянемо послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, і послідовність сум $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2$, …, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n$, …. Припустимо, що випадкові величини ξ_k мають математичні сподівання та дисперсії. Зіставимо з кожною з випадкових величин S_k випадкову величину $X_k = \frac{S_k - \bar{S}_k}{\sigma_k}$, де $\bar{S}_k = \sum_{l=1}^{n} \bar{\xi}_l$,

$\sigma_k^2 = D[S_k] = \sum_{l=1}^{k} D[\xi_k] + 2\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k} K_{lm}$. Обчислимо перший та другий моменти X_k: $M[X_k] = \frac{1}{\sigma_k} M[S_k - \bar{S}_k] = 0$;

$D[X_k] = M[X_k^2] = \frac{1}{\sigma_k^2} D[X_k] = 1.$

Для дуже поширених класів розглянутого типу справедливим є твердження: $p_{X_k} \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$. Якщо для якоїсь послідовності $\{\xi_k\}$ виконується прямування $p_{X_k}(x)$ до $\Phi(x)$, то кажуть, що для цієї послідовності випадкових величин справедливою є центральна гранична теорема (ЦГТ). Доведемо, наприклад, це твердження у разі однаково розподілених і незалежних у сукупності випадкових величин ξ_k зі скінченним математичним сподіванням $\bar{\xi}$ і дисперсією σ^2. Для цього знайдемо, як пов'язані характеристична функція $\varphi_{\xi_k}(t)$ і характеристична функція $\varphi_{X_n}(t)$.

$\varphi_{X_n}(t) = M\left[e^{itX_n}\right] = M\left[\exp\left(it\frac{S_n - \bar{S}_n}{\sigma_k}\right)\right]$; але

$\sigma^2 = D\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = nD[\xi] = n\sigma^2$. Тому

$$\varphi_{X_n}(t) = M\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - \bar{\xi}_k}{\sigma}\right)\right] = M\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{n} i\frac{t}{\sqrt{n}}\frac{\xi - \bar{\xi}_k}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= M\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{n} i\frac{t}{\sqrt{n}}\zeta_k\right)\right],\ \zeta_k = \frac{\xi_k - \bar{\xi}_k}{\sigma}.\ M[\zeta_k] = 0,\ D[\zeta_k] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \varphi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\zeta_k\right)\right] = \left(\varphi_\zeta\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n,$$ де $\varphi_\zeta(t)$ – характеристична функція в.в. ζ. Згідно з формулою Тейлора

$\varphi_\zeta(t) = \varphi_\zeta(0) + \varphi'_\zeta(0)t + \frac{\varphi''_\zeta}{2}t^2 + o(t^2)$, де $o(t^2)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж t^2. Але $\varphi'_\zeta(0) = 0$,

$\varphi''_\zeta(0) = -M[\zeta^2] = -1$. Тому $\varphi_\zeta(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$\varphi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$. Якщо спрямувати $n \to \infty$, то

$\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Але $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – це характеристична функція розподілу, $N(0;\,1)$ із функцією розподілу

$\Phi(x)$ і щільністю $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Щільність розподілу і характеристична функція є Фур′є-образами (оберненими та прямими) один до одного.

Якщо $\varphi_{X_n}(t) \to e^{-\frac{x^2}{2}}$, то і $p_{X_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Умови, за яких є справедливою ЦГТ, можуть бути послаблені. Наприклад, випадкові величини ξ_k можуть не бути однаково розподілені, можуть бути залежними “в розумному степені” і т.д. Існує, коротше кажучи, ціла галузь теорії ймовірності, яка вивчає межі, в яких справедливою є ЦГТ. В усякому разі на практиці велика кількість малих похибок у сумі зазвичай призводять до сумарної похибки, розподіленої за нормальним законом, чому наведена теорема і має назву центральної, що означає її важливість.

ЦГТ у практичних обчисленнях можна використати, наприклад, для генерування нормального розподілу . Розглянемо $S_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k - a_n$, де $\xi_k : R(0;\,1)$. Згідно з ЦГТ, розподіл S_n прямує до нормального. $M[S_n] = \alpha_n \cdot \frac{1}{2} - a_n$; $D[S_n] = \alpha_n^2 \cdot \frac{n}{12}$. Підберемо α_n так, щоб $D[S_n] = \sigma^2$: $\alpha_n = \sqrt{\frac{12\sigma^2}{n}}$, а константу a_n так, щоб $M[S_n] = \bar{x}$: $a_n = \sqrt{3n} \cdot \sigma$, де $\bar{x}$ та σ – задані параметри. Тоді $S_n \approx N(\bar{x};\,\sigma)$. Наприклад, для $\sigma = 1$, $\bar{x} = 0$ при $n = 12$ $\alpha_{12} = 1$, $a_{12} = 6$. Висновок: якщо мати 12 незалежних випадкових величин ξ, рівномірно розподілених на $[0;\,1]$, то $S = \sum_{k=1}^{12} \xi_k - 6$ буде приблизно нормальною в.в. зі стандартним нормальним розподілом.

Приклад 7.33. Маємо послідовність в.в. ξ_n, незалежних у сукупності, які мають такий розподіл:

X	0	1
P	q	p

. Довести, що вона задовольняє ЦГТ.

Розв'язання. $M[X] = p$; $D[X] = 0 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq$. І $M[X]$, і $D[X]$ скінченні, тому умова ЦГТ у доведеному варіанті виконується.

Зауваження. В.в. $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \bar{\xi}_k}{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - p}{\sqrt{npq}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - np}{\sqrt{npq}} =$

$= \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, де m – це кількість “успіхів” у n незалежних випробуваннях. Таким чином, теорема Маувра-Лапласа є частковим випадком ЦГТ.

Приклад 7.34. Розглядається послідовність в.в. $\xi_k : E(\lambda)$, незалежних у сукупності. Знайти розподіл випадкових величин $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ і довести, що для послідовності $\{\xi_k\}$ виконується ЦГТ.

Розв'язання. Випишемо характеристичну функцію для S_n:

$\varphi_{S_n}(t)=\left(\varphi_\xi(t)\right)^n=\dfrac{1}{\left(1-i\dfrac{t}{\lambda}\right)^n}$. Це означає, що в.в. S_n має гамма-розподіл $\Gamma(n;\lambda)$ (він має специфічну назву розподілу Ерланга): $p_{S_n}(x)=\dfrac{\lambda^n}{n!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$, $x>0$. $M[\xi]=\dfrac{1}{\lambda}$, $D[\xi]=\dfrac{1}{\lambda^2}$. Таким чином, умови ЦГТ виконано, і тому розподіл $\dfrac{(S_n-\overline{S}_n)}{\sigma[S_n]}$ із зростанням n стає все ближчим до розподілу $N(0;1)$.

Відповідь: $p_{S_n}(x)=\dfrac{\lambda^n}{n!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$, $x>0$.

7.5.2. Закон великих чисел

Розглянемо послідовність в.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Цю послідовність вважають такою, що прямує до випадкової величини ξ за ймовірністю, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується граничне співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)=0$. Невипадкова величина, тобто “звичайне” число, є окремим видом випадкових величин. Найчастіше вивчають саме прямування послідовності випадкових величин до числа.

П.Л.Чебишеву належить теорема: припустимо, що випадкові величини $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ незалежні в сукупності, однаково розподілені та мають математичне сподівання a і дисперсію σ^2. Тоді послідовність середніх арифметичних $\xi_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k$ прямує за ймовірністю до границі a. Для доведення скористаємося нерівністю Чебишева $P(|\xi_n-\overline{\xi}_n|\ge\varepsilon)\le\dfrac{D[\xi_n]}{\varepsilon^2}$.

Підрахуємо $\overline{\xi}_n$: $\overline{\xi}_n=M[\xi_n]=M\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\right]=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a=\dfrac{na}{n}=a$. Далі, $D[\xi_n]=M\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\right]=\dfrac{1}{n^2}n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$. Тоді $P(|\xi_n-\overline{\xi}_n|\ge)\varepsilon\le\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. Якщо $n\to\infty$, то $P(|\xi_n-\overline{\xi}_n|\ge\varepsilon)\to 0$, яким би не було фіксоване число ε. Це і є твердження теореми.

Особливо ефектним є застосування доведеної теореми до схеми незалежних випробувань. Випадкову кількість “успіхів” m у n випробуваннях можна розглядати як суму незалежних в.в. η_k, які розподілені за законом:

η_k	0	1
P	q	p

, тобто $m = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$.

Розглянемо в.в. $\xi_n = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$; $M[\xi_n] = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} p}{n} = p$. Існує також $D[\xi_n] = npq < \infty$. Тому за доведеною теоремою послідовність $\dfrac{m}{\eta}$ прямує за ймовірністю до ймовірності успіху в одному випробуванні p: $\dfrac{m}{n} \xrightarrow{P} p$. Це й дає підставу зробити протилежний висновок: якщо ймовірність успіху в окремому випробуванні є невідомою, то відносну частоту $\dfrac{m}{n}$ при достатньо великій кількості випробувань n можна розглядати як ймовірність: $\dfrac{m}{n} \approx p$. Це виправдовується тим, що ймовірність відхилення $\dfrac{m}{n}$ від дійсної ймовірності p (яка все-таки невідома) на як завгодно мале число ε прямує до нуля.

Е. Борелем була доведена ще більш сильна теорема: $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \to 0\right) = 1$ при $n \to \infty$. Це є окремим випадком іншого виду прямування: послідовність ξ_n прямує до в.в. ξ з ймовірністю 1, якщо $P(|\ \xi_n - \xi\ | \to 0) = 1$ при $n \to \infty$.

Таким чином, теореми Чебишева та Бореля є прикладами закону великих чисел, за яким відносна частота $\dfrac{m}{n}$ прямує до ймовірності.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гмурман Е.Н. Теория вероятности с элементами математической статистики. – М.: Наука, 1971.
2. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятности. – М.: Наука, 1970.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.
4. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука,1977.
5. Бендерский М.М., Забара С.Н. Решение задач по теории вероятностей. – Х.: ХАИ, 1987.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под общ. ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.

ЗМІСТ

Чернишов Юрій Костянтинович
Жолткевич Григорій Миколайович
Халтурін Володимир Олександрович
Ярова Ольга Володимирівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Редактор Т.Г.Кардаш

Зв. план, 2004
Підписано до друку 25.10.2004
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 8,5. Обл.-вид. арк. 9,61. Наклад 100 прим.
Замовлення 451. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків–70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків–70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu