МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О.В. Головченко, Л.І. Курпа, О.Г. Ніколаєв, В.А. Ванін,

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ

Навчальний посібник

Харків ХАІ 2008

УДК 517.97 (075.8)

Головченко О.В. Варіаційні методи: навч. посібник / О.В. Головченко, Л.І. Курпа, О.Г. Ніколаєв, В.А. Ванін. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2008. - 92 с.

Запропоновано матеріал з теорії варіаційного числення і варіаційних методів, рекомендований освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів напрямів «Прикладна математика» та «Системний аналіз». Наведено теоретичні відомості й методи розв'язання задач з такої тематики: необхідні й достатні умови екстремуму функціонала, екстремальні задачі з рухомими границями та негладкими екстремалями, варіаційні задачі на умовний екстремум. Розглянуто основні положення енергетичного методу і застосування прямих методів до розв'язання варіаційних задач.

Для студентів механічних спеціальностей і студентів, що вивчають системні науки. Може бути корисним інженерним працівникам та аспірантам.

Іл. 8. Табл. 5. Бібліогр.: 14 назв

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Макарічев,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В.О. Афанасьєв

ЗМІСТ

Вступ

Розділи 1 - 6 навчального посібника присвячені дослідженню на екстремум змінних величин однієї або кількох функцій. Такі величини називають функціоналами.

Приклад В.1. На площині задано дві точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$. Потрібно з'єднати ці точки гладкою кривою $y = \overline{y}(x)$ таким чином, щоб довжина цієї кривої була найменшою.

Розв'язання. Як відомо з курсу математичного аналізу, довжина плоскої кривої, що з'єднує дві задані точки, знаходиться за формулою

$$J[y] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{В.1}$$

Вираз $J[y]$ залежить саме від функції $y(x)$ і є функціоналом. Очевидно, що розв'язком задачі є пряма лінія $y = \overline{y}(x)$. Якщо взяти конкретні точки $A(0, 0)$ і $B(1, 1)$ та криві, які проходять через ці точки, а саме $y = x$, $y = x^2$, то безпосередньо можна знайти за формулою (В.1) значення функціонала $J[y]$. Маємо:

$$J[x] = \int_0^1 \sqrt{1 + 1}dx = \sqrt{2};$$

$$J[x^2] = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}dx = \left(x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right).$$

Площа деякої гладкої поверхні, що задається функцією $z = z(x, y)$, моменти інерції, статичні моменти, координати центра ваги кривої або поверхні також є функціоналами тому, що їхні значення обчислюються за допомогою інтегралів, які, в свою чергу, залежать від вибору конкретної функції.

Задачі, в яких потрібно дослідити на екстремум функціонали, називаються варіаційними, а розділ математики, де розглядаються варіаційні задачі, – варіаційним численням. Варіаційне числення перетворилося в самостійну математичну дисципліну завдяки фундаментальним працям дійсного члена Петербурзької академії наук Л. Ейлера. Першими задачами варіаційного числення були задачі про брахістохрону, геодезичні лінії й ізопериметричні задачі [1, 2, 5, 11], які будуть розглянуті у подальшому.

Задачі математичної фізики, теорії пружності, гідродинаміки та ін., як правило зводяться до звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь або до рівнянь у частинних похідних.

Для наближеного розв’язання варіаційних задач у більшості випадків застосовуються прямі методи. Прямими називаються такі методи наближеного розв’язання задач варіаційного числення, які зводять ці задачі до скінченних систем алгебричних рівнянь (методи Рітца, Бубнова - Галеркіна, Канторовича).

У багатьох випадках задачу інтегрування цих рівнянь можна замінити рівносильною задачею на екстремум деякого функціонала, тобто варіаційною задачею. Так, наприклад, задача інтегрування рівнянь статичної теорії пружності за деяких умов зводиться до задачі розшуку мінімуму потенціальної енергії пружного тіла. Методи, які дозволяють звести задачу інтегрування диференціальних та інтегральних рівнянь до рівносильної варіаційної задачі, називаються варіаційними методами. Найбільш поширеним варіаційним методом є енергетичний метод [6].

Саме питанням можливого застосування прямих і варіаційних методів присвячено розділи 7 - 9 навчального посібника.

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Функціонали у лінійному нормованому просторі. Варіація функціонала

Припустимо, що задано лінійний нормований простір E, у якому кожному елементу $y(x) \in E$ поставлено у відповідь дійсне число $\|y(x)\|$, яке називається нормою елемента $y(x)$ [4]. У цьому просторі введено відстань між двома точками $y(x), z(x) \in E$ за формулою

$$\rho(y,z) = \|y - z\|.$$

Означення 1.1. Функціоналом у лінійному нормованому просторі E називається змінна величина, яка набуває дійсних значень і визначена на всій множині E (або на деякій множині $M \subseteq E$).

Зауваження 1.1. Якщо функціонал визначено на деякій множині функцій $y(x) \in M \subseteq E$, то він, як правило, записується $J[y]$.

Приклади лінійних нормованих просторів:

1. Евклідів простір E_n. Задано дві точки $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x, y \in E_n$. У цьому просторі норма елемента і відстань між елементами $\rho(x,y)$ визначаються за формулами
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{1.1}$$
$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.2}$$
2. Простір неперервних на замкненому проміжку $[x_0, x_1]$ функцій $C[x_0, x_1]$. Для функцій $y(x), z(x) \in C[x_0, x_1]$
$$\|y(x)\| = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y(x)|, \tag{1.3}$$
$$\rho(y,z) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - z(x)|. \tag{1.4}$$
3. Простір неперервних і неперервно диференційовних на замкненому проміжку $[x_0, x_1]$ функцій $C^{(n)}[x_0, x_1]$, $n \in N$. Для функцій $y(x), z(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$ норма елемента і відстань визначаються так:
$$\|y(x)\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [x_0, x_1]} \left|y^{(k)}(x)\right|; \tag{1.5}$$
$$\rho(y,z) = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [x_0, x_1]} \left|y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x)\right|. \tag{1.6}$$

Очевидно, що всі властивості [4] лінійності, властивості норми і відстані між елементами для елементів просторів E_n, $C[x_0, x_1]$, $C^{(n)}[x_0, x_1]$ виконуються.

Означення 1.2. Приростом (варіацією) δy аргумента $y(x)$ функціонала $J[y]$ називається різниця $\delta y = y(x) - y_1(x)$ між двома функціями. Функції $y(x), y_1(x) \in M \subseteq E$.

Означення 1.3. Криві $y(x)$ і $y_1(x)$ мають близькість нульового порядку, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$, маємо $\max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$. Криві $y(x)$ і $y_1(x)$ мають близькість k-го порядку, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$, має місце нерівність $\sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} \left| y^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x) \right| < \varepsilon$.

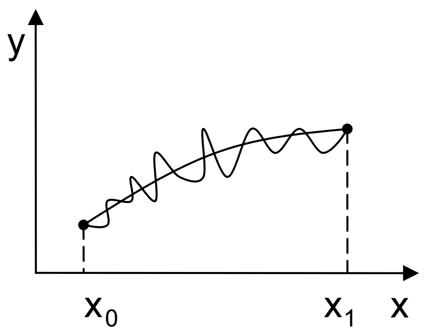


Рис. 1.1

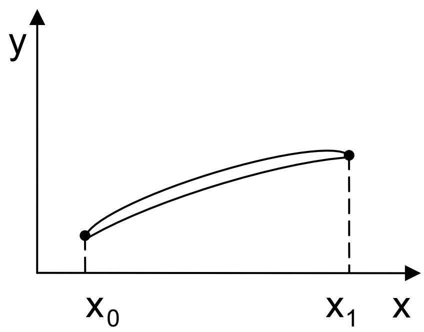


Рис. 1.2

На рис. 1.1 зображено криві, які мають близькість нульового порядку, а криві рис. 1.2 мають близькість першого порядку. Очевидно, що для кривих, які мають близькість k-го порядку, існує близькість і будь-якого меншого порядку.

Означення 1.4. Функціонал $J[y]$ називається неперервним на кривій $y = y_0(x)$ у розумінні близькості k-го порядку, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon$, як тільки $\|y - y_0\|_k < \delta$.

Зауваження 1.2. Означення неперервності наведено для функцій з класу $C^{(k)}[x_0, x_1]$.

Зауваження 1.3. Для дослідження варіаційних задач не вистачає лише простору $C[x_0, x_1]$. Один з найбільш поширених функціоналів $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ не є неперервним у просторі $C[x_0, x_1]$.

Приклад 1.1. В класі $C[0,\pi]$ розглядається функціонал $J[y]=\int\limits_0^{\pi} y'^2(x)dx$. Дослідити неперервність цього функціонала на відрізку $y_0(x)=0$, $x\in[0,\pi]$.

Розв'язання. Візьмемо криву $y=\frac{1}{n}\sin nx$. Ця крива $\forall x\in[0,\pi]$ має близькість нульового порядку з відрізком осі Ox $y_0=0$, $x\in[0,\pi]$. Дійсно, $\max\limits_{x\in[0,\pi]}|y(x)-y_0(x)|=\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{n}\sin nx\right|\le\frac{1}{n}=\varepsilon$. При цьому безпосереднє обчислення приросту функціонала, а саме $|J[y]-J[y_0]|=$ $=\int\limits_0^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\frac{\pi}{2}$, вказує на те, що приріст не прямує до нуля, тобто наведений функціонал не є неперервним у класі $C[0,\pi]$.

Означення 1.5. Функціонал $J[y]$ називається лінійним на множині $M\subseteq E$, якщо $\forall y, y_1, y_2\in M$ і $\forall\lambda\in R$ виконуються властивості лінійності, а саме:

$$J[y_1+y_2]=J[y_1]+J[y_2];$$

$$J[\alpha y]=\alpha J[y].$$

Запишемо приріст функціонала $J[y]$:

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y].$$

Припустимо, що приріст функціонала $J[y]$ можна записати у вигляді

$$\Delta J=L[y,\delta y]+\beta[y,\delta y]\max|\delta y|, \tag{1.7}$$

де $L[y,\delta y]$ - лінійний відносно δy функціонал, а функціонал $\beta[y,\delta y]$ прямує до нуля, якщо $\delta y\to 0$.

Означення 1.6. Варіацією функціонала називається лінійна відносно δy частина приросту функціонала.

Варіація функціонала позначається δJ. Виходячи з (1.7) маємо

$$\delta J=L[y,\delta y]. \tag{1.8}$$

Далі отримаємо розрахункову формулу для знаходження варіації функціонала (1.8). Для цього обчислимо похідну функціонала $J[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y+\alpha\delta y]-J[y]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y,\alpha\delta y]+\beta[y,\alpha\delta y]\max|\alpha\delta y|}{\alpha}=$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha L[y, \delta y] + |\alpha| \beta[y, \alpha\delta y] \max|\delta y|}{\alpha} = L[y, \delta y],$$

оскільки $\beta[y, \alpha\delta y] \to 0$, якщо $\alpha \to 0$.

Таким чином,

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} . \qquad (1.9)$$

Приклад 1.2. Обчислити варіацію функціонала $J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y^2(x)dx$ за означенням (1.8) і безпосередньо за формулою (1.9).

Розв'язання.

1. Запишемо приріст функціонала і скористаємося формулою (1.8):

$$\Delta J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[(y(x) + \delta y)^2 - y^2(x) \right] dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[2y(x)\delta y + (\delta y)^2 \right] dx \le$$

$$\le 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\delta y dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} \max_{x \in [x_0, x_1]} |\delta y|^2 dx = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\delta y dx + (x_1 - x_0)\|\delta y\|^2 =$$

$$= L[y, \delta y] + \beta[\delta y] \cdot \|\delta y\|,$$

де $L[y, \delta y] = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\delta y dx$, $\beta[\delta y] = (x_1 - x_0)\|\delta y\| \to 0$, якщо $\|\delta y\| \to 0$. Тому

$$\delta J = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\delta y dx.$$

2. За формулою (1.9) знаходимо

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_{x_0}^{x_1} [y(x) + \alpha\delta y]^2 dx \Big|_{\alpha=0} = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} (y(x) + \alpha\delta y)\delta y dx \Big|_{\alpha=0} = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\delta y dx.$$

1.2. Екстремум функціонала. Необхідна умова екстремуму. Основна лема варіаційного числення

Припустимо, що функціонал $J[y]$ розглядається на деякій кривій $y = y_0(x)$. Криві, близькі до кривої $y_0(x)$ (порядок близькості не має значення), називаються кривими порівняння. Криві порівняння можна записати у вигляді $y(x, \alpha) = y_0(x) + \alpha\delta y$. Функція $y(x, \alpha)$ задає сім'ю допустимих кривих порівняння. Значенню $\alpha = 0$ відповідає крива $y_0(x)$.

Означення 1.7. Функціонал $J[y]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ локального максимуму (мінімуму), якщо для будь-яких кривих $y(x)$, близьких до кривої $y = y_0(x)$, виконується нерівність

$$\Delta J[y] = J[y] - J[y_0] \le (\ge) 0 . \tag{1.10}$$

Якщо $\Delta J[y] = 0$, то на кривій $y = y_0(x)$ екстремум строгий.

Теорема 1.1 (**необхідна умова екстремуму функціонала**). Якщо функціонал $J[y]$, такий, що має варіацію, досягає на деякій внутрішній кривій $y = y_0(x)$ екстремуму, то варіація функціонала при $y = y_0(x)$ дорівнює нулю.

Доведення. Зафіксуємо $y_0(x)$ і δy. Тоді $J[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$. Функція $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$ досягає екстремуму. Тому, за необхідною умовою екстремуму функції однієї незалежної змінної,

$$\varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y_0(x) + \alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0} = \delta J = 0 . \tag{1.11}$$

Поняття локального екстремуму пов’язано з дослідженням поведінки функціонала на близьких кривих. Розрізняють сильний і слабкий екстремуми.

Означення 1.8. Функціонал $J[y]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ сильного екстремуму (максимуму, мінімуму), якщо криві порівняння близькі у розумінні близькості нульового порядку. Якщо криві порівняння близькі у розумінні близькості першого порядку, то екстремум називається слабким.

Очевидно, що будь-який сильний екстремум одночасно буде й слабким. Зворотне твердження не завжди є правильним.

Приклад 1.3. Дослідити на екстремум функціонал $J[y] = \int\limits_0^{\pi} y^2 \left(1 - y'^2\right) dx$.

Розв’язання. Функціонал $J[y]$ досягає на відрізку прямої $y_0 = 0$, $x \in [0, \pi]$ слабкого мінімуму. Якщо взяти криві, близькі до прямої $y_0 = 0$ у розумінні близькості першого порядку ($|y'(x)| < \varepsilon < 1$), то для цих кривих $J[y] > 0$ ($y \ne y_0$), $J[y_0] = 0$ і виконується нерівність (1.10).

Сильний мінімум буде відсутнім. Для доведення цього твердження розглянемо криві порівняння $y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$. Для цих кривих

$$\| y - y_0 \| = \frac{1}{\sqrt{n}} |\sin nx| \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ а } J[y] = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^2 nx \left(1 - n \cos^2 nx\right) dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}.$$

Для значень $n > 4$ функціонал $J[y]$ починає набувати від'ємних значень і нерівність (1.10) не виконується.

У процесі дослідження необхідних умов екстремуму для різних постановок варіаційних задач використовується наступна важлива теорема.

Теорема 1.2 (**основна лема варіаційного числення**). Якщо функція $f(x) \in C[x_0, x_1]$ і для будь-якої функції $h(x) \in C[x_0, x_1]$ виконується умова $\int_{x_0}^{x_1} f(x) h(x) dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто існує точка $\bar{x} \in (x_0, x_1)$, в якій $f(\bar{x}) \ne 0$ (наприклад $f(\bar{x}) > 0$). Тоді, внаслідок неперервності функції $f(x)$, існує окіл точки $\bar{x}$ ($x_0 < a \le \bar{x} \le b < x_1$), де функція $f(x)$ зберігає знак (за домовленістю $f(x) > 0$). За умовою функція $h(x)$- довільна неперервна. Виберемо знак функції $h(x)$ таким самим, як і у функції $f(x)$. Тоді

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) h(x) dx = \int_a^b f(x) h(x) dx > 0.$$

Отриманий результат суперечить умові теореми. Тому припущення, що функція $f(x)$ в деякій точці $\bar{x}$ відмінна від нуля, неправильне.

Зауваження 1.4. Функцію $h(x)$ можна вибрати так:

$$h(x) = \begin{cases} k\left(x - a\right)^{2n} \left(x - b\right)^{2n}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Зауваження 1.5. Твердження леми залишається правильним, якщо розглядати більш вузький клас функцій $h(x)$, а саме $h(x) \in C^{(k)}[x_0, x_1]$, $k \in N$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$.

Зауваження 1.6. Все, що викладено у розд. 1, без змін може бути перенесено на функціонали від вектор-функцій $y(x) = \left\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \right\}^T$ або на функціонали від функцій з кількома незалежними змінними. Для таких функціоналів варіація визначається як головна лінійна частина приросту функціонала і виконується необхідна умова екстремуму.

Зауваження 1.7. Теорема 1.2 має місце й для кратних інтегралів, а її доведення практично таке саме, як і у випадку визначеного інтеграла. Так, наприклад, для подвійних інтегралів її можна записати таким чином: якщо функція $u(x,y)\in C(\overline{D})$ і для будь-якої функції $h(x,y)\in C(\overline{D})$ виконується умова

$$\iint\limits_{(D)} u(x,y)h(x,y)dxdy = 0,$$

то $u(x,y)=0$.

Функцію $h(x,y)$ можна вибрати так:

$$h(x,y)=\begin{cases}\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2\right]^2, & \text{якщо} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\le\rho^2;\\ 0, \quad \text{якщо} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>\rho^2,\end{cases}$$

де ρ - достатньо малий радіус круга з центром у точці (α,β).

Розділ 2. МЕТОД ВАРІАЦІЙ В ЗАДАЧАХ З НЕРУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

2.1. Функціонали вигляду $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$,

$$J[y_1,y_2,\dots,y_n]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx.$$

Спочатку розглянемо функціонали вигляду

$$J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Припустимо, що функція $y(x)\in C^{(1)}[x_0,x_1]$ задовольняє граничні умови $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ (тобто допустимі криві проходять через дві нерухомі точки (x_0,y_0) і (x_1,y_1)). Для того, щоб функціонал (2.1) досягав на заданій кривій $y(x)$ екстремуму (слабкого), необхідно, щоб функція $F(x,y,y')$ задовольняла рівнянню Ейлера

$$F_y'-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}'\right)=0. \tag{2.2}$$

Зауваження 2.1. Будь-який сильний екстремум є й слабким. Тому теорема 2.1 є необхідною умовою і для сильного екстремуму.

Зауваження 2.2. Функція $F(x,y,y')$ має неперервні похідні по всіх змінних до другого порядку включно.

Доведення. Припустимо, що функціонал (2.1) досягає екстремуму на деякій кривій $y=y(x)$. Побудуємо сім'ю кривих $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$, де $\delta y=y_1(x)-y(x)$, а $y_1(x)$- крива порівняння. Розглянемо функціонал

$$J[y(x,\alpha)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))dx=\varphi(\alpha) \qquad (2.3)$$

і застосуємо до нього необхідну умову екстремуму (1.11):

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F'_x\cdot x'_\alpha+F'_y\cdot y'_\alpha+F'_{y'}\cdot(y')'_\alpha\right\}dx=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F'_y\delta y+F'_{y'}(\delta y)'\right\}dx=$$

$$=F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left\{F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)\right\}\delta y dx=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)\right\}\delta y dx;$$

$$\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)\right\}\delta y dx=0.$$

Оскільки $\delta y=y_1(x)-y(x)$- довільна неперервна функція, то за основною лемою варіаційного числення (теорема 1.2) отримуємо рівняння Ейлера (2.2).

Криві, які задовольняють рівнянню Ейлера, називаються екстремалями.

Зауваження 2.3. Рівняння (2.4) можна записати в розгорнутому вигляді:

$$F'_y-F''_{y'x}-F''_{y'y}y'-F''_{y'y'}y''=0.$$

Якщо $F''_{y'y'}\neq 0$, то $y''(x)$ є неперервною функцією від x.

Зауваження 2.4. Для того, щоб переконатися, чи дійсно на отриманих екстремалях функціонал (2.1) досягає екстремуму, потрібно скористатися достатніми умовами екстремуму. Мова про достатні умови буде йти у наступних розділах. Однак у багатьох варіаційних задачах існування розв'язку очевидне з фізичного або геометричного тлумачення задачі. Тому якщо розв'язок рівняння (2.4), який задовольняє граничні умови, єдиний, то отримана єдина екстремаль і буде розв'язком варіаційної задачі.

Приклад 2.1. Знайти екстремалі функціонала $J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y'^2-y^2+2y\sin x\right)dx$, які задовольняють граничні умови $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Розв'язання. У запропонованій задачі $F(x,y,y')=$ $=y'^2-y^2+2y\sin x$. Запишемо рівняння Ейлера (2.2) для функції $F(x,y,y')$. Маємо

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)=-2y+2\sin x-2y''=0 \text{ або } y''+y=\sin x.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Розв'язок цього рівняння складається з суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння [11].

Запишемо відповідне однорідне рівняння: $y''+y=0$. Його загальним розв'язком є функція $y=C_1\sin x+C_2\cos x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння розшукуємо у вигляді $y_{\text{частинне}}=(a\cos x+b\sin x)x$. Диференціюємо двічі останню функцію, результат підставляємо в рівняння Ейлера, а потім прирівнюємо коефіцієнти при лінійно незалежних функціях sinx і $\cos x$. Маємо $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$, $y_{\text{частинне}}=-\frac{1}{2}x\cos x$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння Ейлера має вигляд

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Знайдемо довільні сталі C_1 і C_2. З граничних умов маємо: $y(0)=C_2=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1=1$. Отже, рівняння екстремалі має вигляд

$$y=\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Рівняння Ейлера (2.2) є диференціальним рівнянням другого порядку (див. зауваження 2.3) і не завжди інтегрується в замкненому вигляді. Тому доцільно розглянути деякі окремі випадки інтегрування цього рівняння.

Окремі випадки інтегрування рівняння Ейлера

1. $F(x,y,y') = F(x,y')$ - функція F не залежить від y.

Рівняння Ейлера (2.2) записується у вигляді $\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) = 0$, звідки $F'_{y'} = C$. Це вже рівняння першого порядку, яке може бути розв'язане стандартними методами [11].

2. $F(x,y,y') = F(y)$.

Рівняння Ейлера (2.2) має вигляд $F'_y = 0$ і не є диференціальним рівнянням. У загальному вигляді ця задача не має розв'язку.

3. $F(x,y,y') = F(y')$.

Рівняння (2.2) має вигляд $F''_{y'y'}y'' = 0$, звідки $y'' = 0$ або $F''_{y'y'} = 0$. Рівняння $y'' = 0$ має розв'язок $y = C_1x + C_2$. Це двопараметрична сім'я інтегральних прямих. Якщо рівняння $F''_{y'y'} = 0$ має дійсні розв'язки, то вони записуються у вигляді $y' = p_j$, $j = \overline{1,k}$, $p_j = \text{const}$ і розв'язки цього рівняння набувають вигляду $y = p_jx + C_j$. Це однопараметрична сім'я інтегральних прямих, яка міститься у вищерозглянутій двопараметричній сім'ї інтегральних прямих. Таким чином, розв'язком рівняння $F''_{y'y'}y'' = 0$ є сім'я прямих $y = C_1x + C_2$.

4. $F(x,y,y') = F(y,y')$.

Рівняння Ейлера в розгорнутому вигляді таке: $F'_y - F''_{y'y}y' - F''_{y'y'}y'' = 0$. Помножимо останнє рівняння на y'. Маємо $F'_yy' - F''_{y'y}y'^2 - F''_{y'y'}y'y'' = \frac{d}{dx}\left(F - y'F'_{y'}\right) = 0$, звідки

$$F - y'F'_{y'} = C. \tag{2.4}$$

Приклад 2.2. (задача про брахістохрону). У вертикальній площині (рис. 2.1) розташовано дві точки O та B. Знайти рівняння кривої, за якою важка матеріальна точка M під дією сили тяжіння спуститься від точки O до точки B за найменший час. Точки O та B не розташовані на вертикальній прямій, початкова швидкість точки дорівнює нулю, а опір руху відсутній.

Розв'язання. За умовою задачі потрібно знайти мінімум функціонала $J[y] = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{dl}\,dl = \int_0^L \frac{dl}{V} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{V}\,dx$, де l - довжина

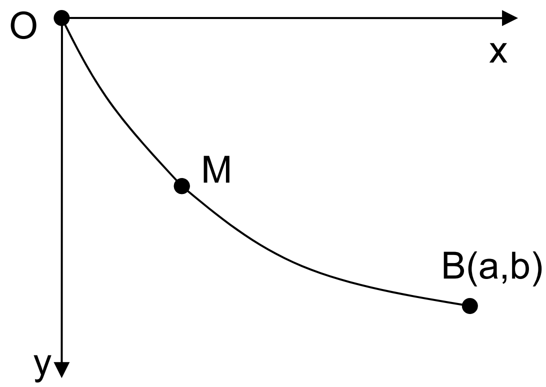


Рис. 2.1

дуги лінії, а V - швидкість руху матеріальної точки.

Відомі закон руху матеріальної точки під дією сили тяжіння і відповідне рівняння траєкторії руху, а саме $v = v_0 t + gt$, $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. Якщо покласти $V_0 = 0$, а $h = y$, то знайдемо $V = \sqrt{2gy}$. Отже, функціонал, мінімум якого потрібно знайти, набуває вигляду $J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0$.

Функція $F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ цієї задачі не залежить від x. Тому розв'язок рівняння Ейлера (2.2) розшукуємо у вигляді (2.4). Маємо

$$F - y'F'_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = C_0,$$

звідки $y\left(1 + y'^2\right) = C_1$, де $C_1 = \frac{1}{C_0^2}$. Розв'язок останнього рівняння розшукуємо у параметричній формі. Покладемо $y'_x = \operatorname{ctg} t$. Тоді $y = \frac{C_1}{1+y'^2} = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t), \quad y(t) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$.

Знайдемо $x(t)$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{dy}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{y'_x} = \frac{C_1 \cdot 2\sin 2t dt}{2 \cdot \mathrm{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1-\cos 2t)dt,$$

$$x(t) = C_1\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C_2.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + C_2, \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2}(1-\cos 2t). \end{cases}$$

Константу C_2 визначимо з початкової умови $y(0)=0$ або $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Маємо $C_2 = 0$. Для спрощення запису відповіді покладемо $\frac{C_1}{2} = C$, а замість $2t$ будемо писати t. Остаточно отримуємо

$$\begin{cases} x(t) = C(t - \sin t), \\ y(t) = C(1-\cos t). \end{cases}$$

Стала C може бути визначена з умови $y(a)=b$. Крива, яка задається записаними параметричними рівняннями, називається циклоїдою.

Далі отримаємо необхідні умови екстремуму функціонала

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx \tag{2.5}$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} y_k(x_0) = y_{0k}, \\ y_k(x_1) = y_{1k}, \quad k = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Для цього зафіксуємо всі функції y_k, $k = \overline{1,n}$, $k \neq j$, окрім однієї - y_j $(k = j)$. Тоді функціонал $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ буде залежати лише від однієї функції $y_j(x)$, тобто

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = J(y_j).$$

Для останнього функціонала запишемо рівняння Ейлера (2.2). Вищенаведені міркування мають місце для будь-якої функції $y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$. Тому для знаходження екстремалей задачі (2.5) - (2.6) потрібно записати систему диференціальних рівнянь Ейлера

$$F'_{y_j} - \frac{d}{dx}\left(F'_{y'_j}\right) = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.7}$$

з початковими умовами (2.6).

Приклад 2.3. Знайти екстремалі функціонала $J[y,z] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 + z'^2 + 2yz\right)dx$, які задовольняють початкові умови $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ z(0) = 0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Розв'язання. Запишемо систему диференціальних рівнянь Ейлера (2.7) для двох функцій $y(x)$ і $z(x)$. Маємо:

$$\begin{cases} F'_y - \dfrac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) = 0, \\ F'_z - \dfrac{d}{dx}\left(F'_{z'}\right) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z - 2y'' = 0, \\ 2y - 2z'' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z = y'', \\ y - y^{(IV)} = 0. \end{cases}$$

Рівняння $y^{(IV)} - y = 0$ є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами четвертого порядку. Корені відповідного характеристичного рівняння дорівнюють ± 1 і $\pm i$. Тому загальний розв'язок отриманої системи має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Довільні сталі $C_i,\ i = \overline{1,4}$ знаходимо з граничних умов. Маємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} + C_4 = 1, \\ z(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} - C_4 = -1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 0, \\ C_4 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $\begin{cases} y(x) = \sin x, \\ z(x) = -\sin x. \end{cases}$

2.2. Функціонали, які залежить від похідних вищих порядків

Знайдемо екстремалі функціонала

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\dots,y^{(n)})dx \tag{2.8}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} &y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\\ &y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)},\qquad k=\overline{0,n-1}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

де функція $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})$ вважається $(n+2)$ рази диференційовною за всіма своїми аргументами.

Теорема 2.2. Припустимо, що функція $y(x)\in C^{(2n)}[x_0,x_1]$ і задовольняє граничні умови (2.9). Для того, щоб функціонал (2.8) досягав на кривій $y(x)$ екстремуму, необхідно, щоб функція $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})$ задовольняла рівнянню

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(F'_{y''}\right)+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(F'_{y^{(n)}}\right)=0\,. \tag{2.10}$$

Доведення. Припустимо, що функціонал (2.8) досягає екстремуму на деякій кривій $y(x)$. Застосуємо необхідну умову екстремуму (1.11) для функціонала (2.8), розглянутого на функціях $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$, де $\delta y=y_1(x)-y(x)$, а $y_1(x)$ - допустима крива порівняння. Маємо

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x,\alpha)]\bigg|_{\alpha=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y\delta y+F'_{y'}(\delta y)'+F'_{y''}(\delta y)''+\dots+F'_{y^{(n)}}(\delta y)^{(n)}\right]dx=0\,.$$

Другий доданок в останньому інтегралі один раз інтегруємо частинами, третій доданок інтегруємо частинами двічі, а останній - n разів. З урахуванням граничних умов (2.9) одержимо

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(F'_{y''}\right)+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(F'_{y^{(n)}}\right)\right]\delta y dx=0\,. \tag{2.11}$$

До інтеграла (2.11) застосуємо основну лему варіаційного числення (див. теорему 1.2). В результаті отримаємо рівняння (2.10).

Рівняння (2.10) досить часто називають рівнянням Ейлера - Пуассона.

Приклад 2.4. Знайти екстремалі функціонала $J[y]=\int\limits_0^1 y''^2 e^{-x}dx$, які задовольняють граничні умови $y(0)=y'(0)=1,\ \ y(1)=y'(1)=e$.

Розв'язання. Функція $F(x,y,y',y'')=y''^2e^{-x}$. Для запису рівняння (2.10) обчислимо: $F'_y=0$, $F'_{y'}=0$, $F'_{y''}=2y''e^{-x}$, $\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$, $\frac{d}{dx}F'_{y''}=2y'''e^{-x}-2y''e^{-x}$, $\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=2y^{(IV)}e^{-x}-2y'''e^{-x}-2y'''e^{-x}+2y''e^{-x}$.

Таким чином, рівняння (2.10) набуває вигляду

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=2e^{-x}\left(y^{(IV)}-2y'''+y''\right)=0, \text{ або } y^{(IV)}-2y'''+y''=0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння [11] має вигляд $k^4-2k^3+k^2=0$. Його корені: $k_{1,2}=0$, $k_{3,4}=1$. Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x$.

Сталі C_i, $i=\overline{1,4}$ визначаються з граничних умов. Маємо

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_3=1, \\ y'(0)=C_2+C_3+C_4=1, \\ y(1)=C_1+C_2+C_3e+C_4e=e, \\ y'(0)=C_2+C_3+2C_4e=e, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} C_1=0, \\ C_2=0, \\ C_3=1, \\ C_4=0. \end{cases}$$

Отже, екстремаллю наведеної варіаційної задачі є крива $y=e^x$.

2.3. Функціонали, які залежать від функцій багатьох незалежних змінних

Розглянемо функціонал вигляду

$$J[z(x,y)]=\iint\limits_{(D)}F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy, \tag{2.12}$$

де функція $z(x,y)$ задана в деякій плоскій замкненій обмеженій області D, має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в цій області й набуває на границі області L заданого значення, тобто

$$z(x,y)\big|_L = f(x,y). \tag{2.13}$$

Відносно функції $F\left(x,y,z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ припустимо, що вона має неперервні частинні похідні за всіма своїми аргументами до другого порядку включно.

Введемо функції:

$$z(x,y,\alpha) = z(x,y) + \alpha\left[z_1(x,y) - z(x,y)\right] = z(x,y) + \alpha\delta z,$$

$$p(x,y,\alpha) = z'_x + \alpha(\delta z)'_x = p + \alpha\delta p,$$

$$q(x,y,\alpha) = z'_y + \alpha(\delta z)'_y = q + \alpha\delta q,$$

де $z_1(x,y)$- поверхня порівняння, а δz на контурі L дорівнює нулю (умова (2.13)).

На функціях $z(x,y,\alpha)$ функціонал (2.12) стає функцією від параметра α, тобто $J[z(x,y,\alpha)] = \varphi(\alpha)$.

Отримаємо необхідні умови екстремуму для функціонала (2.12). Для цього будемо використовувати умову (1.11) з урахуванням зауваження 1.6. Маємо

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[z(x,y,\alpha)]\bigg|_{\alpha=0} = \varphi'(0) = \iint\limits_{(D)}\left[F'_z\delta z + F'_p\delta p + F'_q\delta q\right]dxdy.$$

У наступних перетвореннях скористаємося рівностями

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\delta z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\right)\delta z + F'_p\delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\delta z\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\right)\delta z + F'_q\delta q$$

і формулою Гріна

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де $P = -F'_q\delta z, \quad Q = F'_p\delta z$.

Отже,

$$\delta J = \iint\limits_{(D)}\left[F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\right)\right]\delta z dxdy + \iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\delta z\right)\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D)}\left[F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\right)\right]\delta z dxdy + \int\limits_L\left[-F'_q dx + F'_p dy\right]\delta z =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \left[F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\right) \right] \delta z dxdy = 0 .$$

За основною лемою варіаційного числення (теорема 2.1) з урахуванням зауваження 1.7 отримуємо рівняння Ейлера - Остроградського

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F'_p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F'_q\right) = 0 . \tag{2.14}$$

Приклад 2.5. Записати крайову задачу для знаходження екстремальних поверхонь функціонала

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy,$$

$$z(x,y)\big|_L = f(x,y). \tag{2.15}$$

Розв'язання.

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \; F'_z = 0, \; F'_p = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \; F'_q = 2\frac{\partial z}{\partial y} .$$

Записуємо рівняння (2.14):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in D . \tag{2.16}$$

Рівняння (2.16), як відомо, називається рівнянням Лапласа, а крайова задача (2.16) - (2.15) - задачею Діріхле.

Приклад 2.6. Записати рівняння Ейлера - Остроградського для функціонала

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z\varphi(x,y) \right] dxdy .$$

Розв'язання.

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z\varphi, \; F'_z = 2\varphi, \; F'_p = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \; F'_q = 2\frac{\partial z}{\partial y} .$$

Записуємо рівняння (2.14):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in D . \tag{2.17}$$

Рівняння (2.17) називається рівнянням Пуассона.

Узагальненням функціонала (2.12) є функціонал

$$J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \iint\limits_{(\Omega_n)} \ldots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n , \quad (2.19)$$

де $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Для функціонала (2.19) рівняння (2.14) має вигляд

$$F'_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F'_{p_i} \right) = 0 . \quad (2.20)$$

Зауваження 2.5. Якщо функція F функціонала (2.19) залежить від похідних вищих порядків, то, за аналогією з перетворенням у підрозд. 2.2, до варіації функціонала потрібно застосувати кілька разів перетворення, які використовувалися для виводу рівняння (2.14).

2.4. Варіаційний принцип Остроградського - Гамільтона

Варіаційний принцип Остроградського - Гамільтона є одним з найуніверсальніших принципів сучасного природознавства. Він може бути сформульований як у термінах координат, так і в термінах кінетичної й потенціальної енергій системи. Це дає можливість поширити його на суцільні середовища, а також на фізичні поля.

Принцип Остроградського - Гамільтона. Рух системи за проміжок $[t_0, t_1]$ здійснюється у такому напрямку, який забезпечує стаціонарне значення інтеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt , \quad (2.20)$$

де T - кінетична енергія системи, U - потенціальна енергія, функція $L = T - U$ називається функцією Лагранжа, а сам інтеграл (2.20) - інтегралом дії.

У початковий момент часу $t = t_0$ система знаходиться у деякому фіксованому стані.

Розглянемо кілька прикладів на застосування принципу Остроградського - Гамільтона.

Приклад 2.7. Дано систему матеріальних точок m_i, $i = \overline{1, n}$ з координатами x_i, y_i, z_i. Координати точок є функціями від t, які, принаймні, двічі неперервно диференційовні. Нехай силове поле має потенціальну енергію $U(t, x_i, y_i, z_i)$. Тоді, якщо $F_i(X_i, Y_i, Z_i)$- сила, яка діє на i-ту точку, мають місце рівності $X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$, $Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$, $i = \overline{1,n}$. Кінетична енергія системи матеріальних точок, як відомо, обчислюється за формулою $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right)$. Записати диференціальні рівняння руху системи.

Розв'язання. Побудуємо функцію Лагранжа $L = T - U$ і запишемо для цієї функції систему рівнянь Ейлера (2.5):

$$\begin{cases} L'_{x_i} - \frac{d}{dt}\left(L'_{x_i'}\right) = 0, \\ L'_{y_i} - \frac{d}{dt}\left(L'_{y_i'}\right) = 0, \\ L'_{z_i} - \frac{d}{dt}\left(L'_{z_i'}\right) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i x_i'' = 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i y_i'' = 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i z_i'' = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m_i x_i'' = X_i, \\ m_i y_i'' = Y_i, \\ m_i z_i'' = Z_i \end{cases}$$

або у векторній формі $\overrightarrow{F_i} = m_i \overrightarrow{a_i}$, де $\overrightarrow{a_i}$ - пришвидчення точки m_i.

Приклад 2.8. Вивести диференціальне рівняння плоских поперечних вільних коливань струни, натягненої зі сталою силою P між точками $x = 0$ і $x = l$ осі Ox.

Розв'язання. Нехай струна у стані спокою під впливом натягання розташована вздовж осі Ox. Відхилення від положення рівноваги позначимо $u(x,t)$. Кінетична енергія струни обчислюється за формулою $T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x) u_t'^2 dx$, де $\rho(x)$ - лінійна щільність струни.

Обчислимо потенціальну енергію струни. Ділянка струни dx має здовження $\left(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1\right) \approx \frac{1}{2} u_x'^2 dx$ (з точністю до нескінченно малих величин першого порядку малості), а потенціальна енергія пропорційна здовженню струни. Тому $U = \frac{P}{2}\int_0^l u_x'^2 dx$.

Інтеграл дії (2.20) має вигляд

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_0^{l}\left[\rho(x)u_t'^2 - Pu_x'^2\right]dtdx.$$

Рівнянням коливань струни буде рівняння Ейлера - Остроградського (2.14) для наведеного функціонала. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_t'\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(Pu_x'\right) = 0.$$

Якщо струна однорідна ($\rho = \text{const}$), то останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u_{tt}'' = a^2 u_{xx}'', \quad \text{де} \quad a^2 = \frac{P}{\rho}.$$

Приклад 2.9. Вивести рівняння вільних коливань мембрани, натягненої зі сталою силою P на одиницю площі.

Розв'язання. Потенціальна енергія дорівнює добутку сили тяжіння P на приріст площі. З точністю до нескінченно малих величин першого порядку малості маємо

$$U = P\iint\limits_{(D)}\left(\sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2} - 1\right)dxdy \approx \frac{P}{2}\left(u_x'^2 + u_y'^2\right),$$

де $u = u(t, x, y)$ - відхилення точки (x, y) в момент часу t від початкового стану. Інтеграл дії має вигляд

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}dt\iint\limits_{(D)}\left[\rho(x, y)(u_t')^2 - P\left(u_x'^2 + u_y'^2\right)\right]dxdy,$$

а рівняння Ейлера - Остроградського (2.14) можна записати так:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_t'^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(Pu_x'\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Pu_y'\right) = 0.$$

Якщо мембрана однорідна ($\rho = \text{const}$), останнє рівняння набуває вигляду

$$u_{tt}'' = a^2\left(u_{xx}'' + u_{yy}''\right),$$

де $a^2 = \dfrac{P}{\rho}$.

Розділ 3. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ

3.1. Друга варіація функціонала. Квадратичний функціонал. Теорема Лежандра

Означення 3.1. Говорять, що функціонал $J[y]$ має другу варіацію, якщо його приріст можна записати у вигляді

$$\Delta J = L_1[y,\delta y] + L_2[y,\delta y] + \omega[y,\delta y]\|\delta y\|^2, \tag{3.1}$$

де $L_1[y,\delta y]$ - лінійний функціонал (перша варіація функціонала), $L_2[y,\delta y]$ - квадратичний функціонал, а $\omega[y,\delta y] \to 0$ за умови, що $\delta y \to 0$. Для зручності запису надалі позначимо $\delta y = h$.

Означення 3.2. Квадратичний функціонал $L_2[y,h]$ називається другою варіацією функціонала, тобто

$$\delta^2 J[h] = L_2[y,h]. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Для того, щоб функціонал $J[y]$ на кривій $y = y_0(x)$ досягав мінімуму (максимуму), необхідно, щоб при $y = y_0(x)$ виконувалася умова

$$\delta^2 J[h] \geq 0 \ \ (\leq 0)$$

для будь-яких допустимих значень h.

Доведення. За умовою теореми на кривій $y = y_0(x)$ функціонал досягає екстремуму. Тому $\delta J[h] = 0$ і

$$\Delta J = \delta^2 J[h] + \omega[y,h]\|h\|^2.$$

Знак ΔJ для достатньо малих значень $\|h\|$ буде таким самим, як і знак у $\delta^2 J[h]$.

Нехай на кривій $y = y_0(x)$ функціонал досягає мінімуму. Тоді $\Delta J = J[y_0 + h] - J[y_0] \geq 0$ і друга варіація $\delta^2 J[h]$ має бути невід'ємною. Якщо на кривій $y = y_0(x)$ функціонал досягає максимуму, то $\Delta J \leq 0$ і, як наслідок, $\delta^2 J[h] \leq 0$.

Розглянемо найпростіший функціонал (2.1) і отримаємо розрахункову формулу для обчислення другої варіації функціонала.

Маємо

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+h, y'+h') - F(x,y,y')]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y h + F'_{y'} h\right]dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[F''_{yy}h^2 + 2F''_{yy'}hh' + F''_{y'y'}h'^2\right]dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left[\varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hh' + \varepsilon_3 h'^2\right]dx = \delta J + \delta^2 J + R, \qquad (3.3)$$

де
$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[F''_{yy}h^2 + 2F''_{yy'}hh' + F''_{y'y'}h'^2\right]dx, \qquad (3.4)$$

$$R = \int_{x_0}^{x_1}\left[\varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hh' + \varepsilon_3 h'^2\right]dx. \qquad (3.5)$$

Другий доданок у виразі (3.3) зінтегруємо частинами. Тоді, з урахуванням того, що $h(x_0) = h(x_1) = 0$ і $2F''_{yy'}hh' = F''_{yy'}\dfrac{dh^2}{dx}$, вираз (3.4) можна записати так:

$$\delta^2 J[h] = \int_{x_0}^{x_1}\left[Qh^2 + Ph'^2\right]dx, \qquad (3.6)$$

де
$$Q = \frac{1}{2}\left[F''_{yy} - \frac{d}{dx}F''_{yy'}\right], \qquad (3.7)$$

$$P = \frac{1}{2}F''_{y'y'}. \qquad (3.8)$$

Саме функціонал (3.4) і буде квадратичним функціоналом.

Теорема 3.2 (теорема Лежандра). Для того, щоб функціонал (2.2) досягав на кривій $y = y_0(x)$ мінімуму (максимуму), необхідно, щоб уздовж цієї кривої виконувалася умова

$$F''_{y'y'} \ge 0 \;\; (\le 0). \qquad (3.9)$$

Доведення. Умова (3.9) еквівалентна умові $P(x) \ge 0,\; x \in [x_0, x_1]$ (див. (3.8)). Припустимо протилежне, а саме, що існує точка $a \in (x_0, x_1)$ і така, що $P(a) < 0$.

Виберемо функцію $h(x)$ у вигляді

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{\sigma}\left(1+\dfrac{x-a}{\sigma}\right), & x\in[a-\sigma,a];\\ \sqrt{\sigma}\left(1-\dfrac{x-a}{\sigma}\right), & x\in(a,a+\sigma];\\ 0, & x\notin[a-\sigma,a+\sigma].\end{cases}$$

На проміжку $[a-\sigma,\ a+\sigma]$: $h'^2(x)=\dfrac{1}{\sigma}$, $h^2(x)\le\sigma$. Тому

$$\delta^2 J[h]=\int_{x_0}^{x_1}Q(x)h^2(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}P(x)h'^2(x)dx\le$$

$$\le\sigma\int_{a-\sigma}^{a+\sigma}Q(x)dx+\frac{1}{\sigma}\int_{a-\sigma}^{a+\sigma}P(x)dx\underset{\sigma\to 0}{\to}P(a)<0.$$

За теоремою 3.1 функціонал має бути невід'ємним, а отриманий результат суперечить цій теоремі.

Зауваження 3.1. Лежандр прикладав значні зусилля, щоб довести, що умова $F''_{y'y'}>0\ (<0)$ є й достатньою умовою мінімуму (максимуму) функціонала (2.1). Однак виявилося, що це не так.

3.2. Дослідження квадратичного функціонала. Рівняння Якобі. Достатні умови слабкого екстремуму

Розглянемо другу варіацію (3.6) найпростішого функціонала (2.1) і будемо вважати, що вздовж досліджуваної екстремалі $y=y(x)$ виконується посилена умова Лежандра, а саме

$$F''_{y'y'}>0\ (<0). \tag{3.10}$$

Запишемо для квадратичного функціонала (3.6) рівняння Ейлера

$$Qh-\frac{d}{dx}(Ph')=0 \tag{3.11}$$

з граничними умовами

$$h(x_0)=h(x_1)=0. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.11), як правило, називають рівнянням Якобі. Якщо в нього підставити значення функцій Q(x) і P(x) (3.7) - (3.8), то воно набуде вигляду

$$\left(F''_{yy} - \frac{d}{dx}F''_{yy'}\right)h - \frac{d}{dx}\left(F''_{y'y'}h'\right) = 0. \tag{3.13}$$

Рівняння Якобі (3.11) разом з однорідними граничними умовами має тривіальний розв'язок $h(x) \equiv 0$. Однак може так статися, що воно має й інші розв'язки, які задовольняють ті ж самі граничні умови (3.12).

Приклад 3.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 0$ з такими граничними умовами: а) $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; б) $y(0) = y(\pi) = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $y = 0$ задовольняє як задане диференціальне рівняння, так і граничні умови «а» і «б».

Однак у випадку «а» інші розв'язки відсутні:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ y(0) = C_1 = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ C_1 = C_2 = 0 \text{ і } y = 0.$$

У випадку «б» $y(0) = C_1 = 0$, $y(\pi) = -C_1 = 0$, $y = C_2 \sin x$, $C_2 \in R$, і тому існують розв'язки, тотожно відмінні від нуля.

Означення 3.3. Точка $x^* \in (x_0, x_1]$ називається спряженою до точки $x = x_0$, якщо рівняння Якобі (3.11) з граничними умовами

$$h(x_0) = h(x^*) = 0$$

має розв'язок $h(x)$, тотожно відмінний від нуля ($h(x) \neq 0$).

Для подальших висновків суттєвим буде таке запитання: чи існує розв'язок $h(x)$, який задовольняє умову $h(x_0) = 0$ і має корені на проміжку $x \in (x_0, x_1]$? У випадку, коли корені існують, досліджувана екстремаль не може бути екстремумом функціонала (2.1).

Якщо $h(x)$ є розв'язком рівняння Якобі (3.11) і $h(x) \neq 0$ для $\forall x \in (x_0, x_1)$, то говорять, що екстремаль $h(x)$ у проміжку (x_0, x_1) задовольняє умову Якобі. Якщо умова Якобі виконується в проміжку $(x_0, x_1]$, то говорять, що екстремаль $h(x)$ задовольняє посилену умову Якобі.

Зауваження 3.2. Якщо $h(x)$ – ненульовий розв'язок рівняння (3.11), то вираз $Ch(x)$, $C \neq 0$, $C \in R$ також є розв'язком указаного рівняння. Тому на розв'язок $h(x)$ можна накласти умову нормування, а саме $h'(x_0) = 1$ і замість граничних умов (3.12) розглядати початкові умови

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 1. \tag{3.14}$$

Теорема 3.3. Якщо екстремаль задовольняє посилені умови Лежандра (3.10) і Якобі, то для такої екстремалі

$$\delta^2 J \geq 0,$$

причому знак рівності має місце тільки у випадку $h(x) \equiv 0$.

Доведення. До функціонала (3.6) додамо рівний нулю інтеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\omega'(x)h^2 + 2\omega(x)hh'\right]dx = \int_{x_0}^{x_1} d\left(\omega(x)h^2(x)\right) = \omega(x)h^2(x)\Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Отримаємо такий вираз для другої варіації функціонала:

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \left[(Q + \omega')h^2 + 2\omega hh' + Ph'^2\right]dx. \qquad (3.15)$$

У виразі (3.15) виберемо функцію $\omega(x)$ таким чином, щоб функція, яка інтегрується, була повним квадратом. Це можливо, якщо функція $\omega(x)$ буде задовольняти рівнянню

$$\omega^2 - P(Q + \omega') = 0. \qquad (3.16)$$

Для розв'язання рівняння (3.16) зробимо підстановку $\omega(x) = -P\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Після цього рівняння (3.16) набуде вигляду (3.11) або (3.13), тобто буде отримано рівняння Якобі. При цьому $u(x) \neq 0$ для $\forall x \in (x_0, x_1]$ (за умовою теореми виконується посилення умові Якобі), і тому $\omega(x)$ є неперервною функцією на кожному проміжку.

Якщо функція $\omega(x)$ задовольняє рівнянню (3.16), то функціонал (3.15) матиме вигляд

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} P\left[\left(h'^2 + \frac{2\omega}{P}hh' + \frac{\omega^2}{P^2}h^2\right) + \left(\frac{Q + \omega'}{P} - \frac{\omega^2}{P^2}\right)h^2\right]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} P\left(h' + \frac{\omega}{P}h\right)^2 dx, \qquad (3.17)$$

звідки $\delta^2 J \geq 0$, а рівність нулю буде досягатися лише в тому випадку, коли

$$h' + \frac{\omega}{P}h = 0.$$

Останнє рівняння має розв'язок

$$h(x) = h(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}(\omega(t)/P(t))dt}.$$

Враховуючи початкову умову $h(x_0)=0$, отримуємо, що $h(x)\equiv 0$.

Наслідок. Посилені умови Лежандра і Якобі достатні для того, щоб екстремаль давала слабкий екстремум функціонала (2.1).

Алгоритм дослідження функціонала $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$, $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ на слабкий екстремум:

1. Знаходимо екстремалі функціонала, виходячи з необхідної умови екстремуму і граничних умов.
2. Перевіряємо виконання посиленої умови Лежандра (3.10) вздовж екстремалі.
3. Перевіряємо виконання умови Якобі, досліджуючи при цьому розв'язки задачі Коші для рівняння Якобі $Qu-\frac{d}{dx}(Pu')=0$ з початковими умовами $u(x_0)=0,\ u'(x_0)=1$.

Зауваження 3.3. Розглянемо сім'ю кривих $y=y(x,c)$. Припустимо, що всі криві проходять через єдину спільну точку $A(x_0,y_0)$ і інших точок перетину не мають. В цьому випадку говорять, що сім'я кривих $y=y(x,c)$ утворює центральне поле. Умова Якобі [11] є достатньою умовою для включення екстремалі в центральне поле з центром у точці A.

Зауваження 3.4. Умова Якобі є необхідною умовою екстремуму (як сильного, так і слабкого) [5]. Це означає, що якщо розв'язок рівняння Якобі обертається в нуль для будь-якого значення $x\in(x_0,x_1]$, то на екстремалі $y(x)$ екстремум відсутній.

Приклад 3.2. Дослідити на екстремум функціонал

$$J[y]==\int\limits_1^2\left(xy'^4-2yy'^3\right)dx,\ y(1)=0,\quad y(2)=1.$$

Розв'язання. $F(x,y,y')=xy'^4-2yy'^3$, $F'_y=-2y'^3$, $F''_{yy}=0$, $F'_{y'}=4xy'^3-6yy'^2$, $F''_{yy'}=-6y'^2$, $F''_{y'y'}=12xy'^2-12yy'$.

1. Розв'язуємо рівняння Ейлера з заданими граничними умовами: $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$; $-2y'^3-4y'^3-12xy'^2y''+6y'^3+12yy'y''=0$, $y''y'(y-xy')=0$. Звідси: $y''=0$, або $y'=0$, або $y-xy'=0$.

Рівняння $y''=0$ має загальній розв'язок $y=C_1x+C_2$. З граничних умов знаходимо: $y(1)=C_1+C_2=0$, $y(2)=2C_1+C_2=1$, звідки $C_1=1$, $C_2=-1$ і $y=x-1$.

Рівняння $y'=0$ має загальний розв'язок $y=C$, який не задовольняє граничні умови.

Рівняння $y-xy'=0$ або $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$ має розв'язок $y=Cx$, який також не задовольняє граничні умови.

Таким чином, екстремаллю для наведеного функціонала буде пряма лінія $y=x-1$.

2. $F''_{y'y'}=\left(12xy'^2-12yy'\right)\Big|_{\substack{y=x-1\\ y'=1}}=12x-12(x-1)=12>0$.

3. Перевіряємо умову Якобі:

$$\begin{cases} Qu-\dfrac{d}{dx}\left(Pu'\right)=0; \\ u(1)=0,\ u'(1)=1, \end{cases}$$

де $Q=\frac{1}{2}\left(F''_{yy}-\frac{d}{dx}F''_{yy'}\right)\Big|_{y=x-1}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(-6y'^2\right)\Big|_{y=x-1}=6y'y''=0$, а $P=\frac{1}{2}F''_{y'y'}\Big|_{y=x-1}=6$. Маємо: $-\frac{d}{dx}(6u')=0,\ u''=0,\ u=\alpha_1x+\alpha_2,\ u(1)=$ $=\alpha_1+\alpha_2=0,\ u'(1)=\alpha_1=1$. Звідси $\alpha_1=1,\quad \alpha_2=-1,\quad u=x-1$.

На відрізку (1;2] $u(x)>0$, і тому точки, спряжені з точкою $x=1$, відсутні. Таким чином, достатні умови слабкого екстремуму виконуються і пряма $y=x-1$ надає слабкий мінімум функціоналу.

3.3. Функція Вейєрштрасса. Дослідження на екстремум за допомогою функції Вейєрштрасса

Припустимо, що в задачі (2.1) на екстремум функціонала $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ з граничними умовами $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ виконано умову Якобі, і тому екстремаль L, що проходить через точки $A(x_0,y_0)$ і $B(x_1,y_1)$, може бути включена в центральне поле, кутовий коефіцієнт якого дорівнює p, тобто $\frac{dy}{dx}=p$ (рис. 3.1).

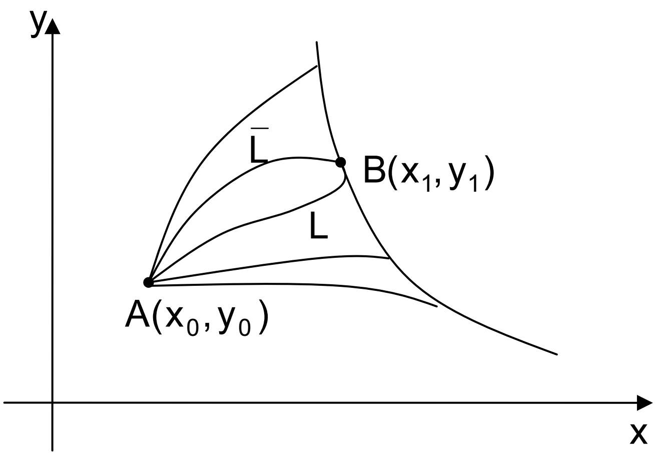


Рис. 3.1

Побудуємо приріст функціонала $\Delta J[y]$, який утворюється при переході від деякої близької кривої $\overline{L}$ до екстремалі L:

$$\Delta J[y] = \int\limits_{\overline{L}} F(x, y, y')dx - \int\limits_{L} F(x, y, y')dx. \qquad (3.18)$$

Розглянемо допоміжний функціонал

$$\int\limits_{\overline{L}} \left[F(x, y, p) - pF'_p(x, y, p)\right]dx + F'_p(x, y, p)dy. \qquad (3.19)$$

Функціонал (3.19) на кривій L ($dy = pdx$) збігається з функціоналом $\int\limits_{L} F(x, y, y')dx$, а з іншого боку, він є інтегралом від повного диференціала і тому не залежить від вигляду контуру інтегрування, який з'єднує точки A і B (див. рис. 3.1). Тому приріст (3.18) можна записати у вигляді

$$\Delta J[y] = \int\limits_{\overline{L}} F(x, y, y')dx - \int\limits_{\overline{L}} \left[F(x, y, p) - pF'_p(x, y, p)\right]dx + F'_p(x, y, p)dy =$$

$$= \int\limits_{\overline{L}} F(x, y, y')dx - \int\limits_{\overline{L}} \left[F(x, y, p) - pF'_p(x, y, p) + y'F'_p(x, y, p)\right]dx =$$

$$= \int\limits_{\overline{L}} \left[F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F'_p(x, y, p)\right]dx. \qquad (3.20)$$

Функція, яка стоїть під знаком інтеграла, названа функцією Вейєрштрасса і позначається $E(x, y, y', p)$:

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F'_p(x, y, p). \qquad (3.21)$$

Таким чином, можна записати

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, y', p)dx, \qquad (3.22)$$

і достатніми умовами для досягнення функціоналом на кривій L екстремуму будуть такі.

Для слабкого екстремуму:

1. Крива L є екстремаллю, яка задовольняє граничні умови.
2. Екстремаль L задовольняє умову Якобі (або екстремаль може бути включена в центральне поле екстремалей).
3. Функція $E(x, y, y', p)$ не змінює знак у всіх точках (x, y), близьких до кривої L і для близьких до p значень y'. У випадку $E \geq 0$ маємо слабкий мінімум, а у випадку $E \leq 0$ - слабкий максимум.

Для сильного екстремуму пункти 1 і 2 такі ж самі, а пункт 3 потрібно записати так: функція $E(x, y, y', p)$ не змінює знак у всіх точках (x, y), близьких до кривої L і для будь-яких значень y'. У випадку мінімуму $E \geq 0$, а у випадку максимуму $E \leq 0$.

Зауваження 3.5. У праці [5] доведено, що умова Вейєрштрасса є й необхідною умовою екстремуму. Це означає, що якщо у центральному полі в точках екстремалі для деяких значень y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум відсутній. Якщо ж це відбувається і для скіль завгодно близьких до p значень y', то відсутній і слабкий екстремум.

Приклад 3.3. Дослідити на екстремум функціонал $J[y] = \int_0^1 y'^3(x)dx$ з граничними умовами $y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

Розв'язання.

1. Знайдемо екстремаль даної варіаційної задачі: $F(x, y, y') = y'^3$, $y = C_1x + C_2$ (див. підрозд. 2.1), $y(0) = C_2 = 0$, $y(1) = C_1 = 1$, $y = x$ - екстремаль.
2. Перевіримо виконання умови Якобі

$$\begin{cases} Qu - \dfrac{d}{dx}(Pu') = 0; \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 1, \end{cases}$$

де $Q = 0, \quad P = 3y'\big|_{y=x} = 3$. Маємо

$$\begin{cases} u'' = 0; \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \alpha_1 x + \alpha_2; \\ u(0) = \alpha_2 = 0; \\ u'(1) = \alpha_1 = 1, \end{cases} \qquad u = x.$$

Функція $u = x$ не обертається в нуль на проміжку (0;1], тому підсилена умова Якобі виконується.

3. Перевіримо виконання умов Лежандра: $F''_{y'y'} = 3 > 0$. Підсилена умова Лежандра виконується. Тому на екстремалі $y = x$ функціонал досягає слабкого мінімуму.

4. Запишемо функцію Вейєрштрасса (3.21):

$$E(x, y, y', p) = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)\left(y'^2 + y'p - 2p^2\right) = (y' - p)^2(y' + 2p).$$

Для довільних значень y' функція E може набувати як додатних, так і від'ємних значень. Тому сильний екстремум відсутній (див. зауваження 3.5).

З наведеного прикладу видно, що дослідження на екстремум за допомогою функції Вейєрштрасса пов'язано з незручними обчисленнями (навіть для такої досить простої задачі). Бажано було б спростити алгоритм перевірки знака функції E.

Припустимо, що функція $F(x, y, y')$ тричі диференційовна за аргументом y'. Тоді за формулою Тейлора можна записати:

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F'_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F''_{y'y'}(x, y, q),$$

де $q \in (p, y')$.

Підставимо отримане розкладання у вираз (3.21). Маємо

$$E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2!} F''_{y'y'}(x, y, q). \tag{3.23}$$

Формула (3.23) дозволяє зробити такий висновок: функція E зберігає знак, якщо зберігає знак $F''_{y'y'}(x, y, q)$. Якщо $F''_{y'y'}(x, y, q) \neq 0$ в точках екстремалі L, то завдяки неперервності цієї функції вона зберігає знак і в точках (x, y), близьких до кривої L, і для значень y', близьких до значень p на кривій L.

Наприкінці розділу сформулюємо алгоритм застосування достатніх умов екстремуму для функціонала (2.1).

Достатні умови слабкого мінімуму (максимуму) для функціонала (2.1). На кривій $y(x)$ досягається слабкий мінімум (максимум), якщо:

1. Крива $y(x)$ задовольняє рівнянню Ейлера (2.2) і граничні умови, тобто вона є екстремаллю.

2. Для екстремалі $y(x)$ виконується рівняння Якобі (3.11) з початковими умовами (3.14).

3. Виконуються: або умова Вейєрштрасса - функція $E(x, y, y', p) \geq 0$ (≤ 0) для точок (x, y), близьких до точок на екстремалі $y(x)$, і для y', близьких до p; або підсилена умова Лежандра (у випадку, коли функція $F(x, y, y')$ тричі диференційовна по y') - $F''_{y'y'}(x, y, y') > 0$ (< 0) на екстремалі $y(x)$.

Достатні умови сильного мінімуму (максимуму) для функціонала (2.1). На кривій $y(x)$ досягається сильний мінімум (максимум), якщо:

1. Крива $y(x)$ задовольняє рівнянню Ейлера (2.2) і граничні умови, тобто вона є екстремаллю.

2. Для екстремалі $y(x)$ виконується рівняння Якобі (3.11) з початковими умовами (3.14).

3. Виконуються: або умова Вейєрштрасса - функція $E(x, y, y', p) \geq 0$ (≤ 0) для точок (x, y), близьких до точок на екстремалі $y(x)$, і для для довільних значень y'; або підсилена умова Лежандра - $F''_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ (≤ 0) для точок (x, y), близьких до точок екстремалі $y(x)$, і для довільних значень y'.

Приклад 3.4. Дослідити функціонал $J[y] = \int\limits_1^2 \left(y' + 2y'^3\right) dx$, $y(1) = 2, \quad y(2) = 6$ на екстремум.

Розв'язання.

1. Знайдемо екстремаль функціонала: $F = y' + 2y'^3$, $y = C_1 x + C_2$ (див. підрозд. 2.1), $y(1) = C_1 + C_2 = 2$, $y(2) = 2C_1 + C_2 = 6$, $C_1 = 4$, $C_2 = -2$, $y = 4x - 2$ - екстремаль функціонала, яка задовольняє задані граничні умови.

2. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) Для перевірки умов Якобі запишемо рівняння Якобі у формі (3.11) або (3.13) на екстремалі з початковими умовами (3.14):

$$F'_y = 0, \quad F'_{y'} = 1 + 6y'^2, \quad F''_{yy} = 0, \quad F''_{yy'} = 0, \quad F''_{y'y'} = 12y'\Big|_{\substack{y=4x-2 \\ y'=4}} = 48,$$

$$-\frac{d}{dx}(48u')=0,\quad u'=\alpha_1,\; u(x)=\alpha_1 x+\alpha_2,\; u(1)=\alpha_1+\alpha_2=0,$$

$$u'(1)=\alpha_1=1,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=-1,\quad u(x)=x-1.$$

Для будь-яких значень $x\in(1;2]$: $u(x)\neq 0$, тобто виконується підсилена умова Якобі.

б) Функція F тричі диференційовна по y'. Перевіримо умову Лежандра: $F''_{y'y'}=12y'$. Функція $F''_{y'y'}$ не зберігає знак для будь-яких значень y', тому достатні умови сильного екстремуму не виконуються і питання існування умови сильного екстремуму залишається відкритим.

Побудуємо функцію Вейєрштрасса (3.21):

$$E(x,y,y',p)=y'+2y'^3-p-2p^3-(y'-p)\left(1+6p^2\right)=$$
$$=(y'-p)+2\left(y'^3-p^3\right)-(y'-p)\left(1+6p^2\right)=(y'-p)\left(1+2y'^2+2y'p+2p^2-1-6p^2\right)=$$
$$=2(y'-p)\left(y'^2+y'p-2p^2\right)=2(y'-p)^2(y'+2p).$$

Якщо y' набуває довільних значень, то $y'+2p$ також набуває довільних значень, і тому сильний екстремум відсутній (див. зауваження 3.5).

Перевіримо достатні умови слабкого екстремуму. На екстремалі $F''_{y'y'}\Big|_{y=4x-2}=48>0$, тому функціонал має слабкий мінімум.

Приклад 3.5. Дослідити на екстремум функціонал: $J[y]=\int\limits_0^1\left(y^2+y'^2\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

Розв'язання.

1. Знайдемо екстремалі функціонала:

$$F=y^2+y'^2,\quad F'_y=2y,\quad F'_{y'}=2y',\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'',\quad y-y''=0,\quad y=C_1e^{-x}+C_2e^{x},$$

$$y(0)=C_1+C_2=0,\quad y(1)=C_1e^{-1}+C_2e=1,\quad C_1=\frac{e}{1-e^2},\quad C_2=\frac{e}{e^2-1},$$

$y=\dfrac{e}{e^2-1}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=\dfrac{2e}{e^2-1}\,\mathrm{sh}x$ - екстремаль функціонала, яка задовольняє граничні умови.

2. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $F''_{yy}=2,\quad F''_{yy'}=0,\quad F''_{y'y'}=2.$

Записуємо рівняння Якобі $2u-2u''=0$ з початковими умовами $u(0)=0,\quad u'(0)=1$. Маємо: $u=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$, $u(0)=C_1+C_2=0$, $u'(0)=$

$= C_1 - C_2 = 1, \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad u(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}x.$ Функція $u(x) = \mathrm{sh}x$ для будь-яких значень $x \in (0;1]$ в нуль не обертається, тому виконується підсилена умова Якобі.

б) Функція F тричі диференційовна по y', тому застосуємо умову Лежандра $F''_{y'y'} = 2 > 0$ для будь-яких значень x і y'. На екстремалі функціонал має сильний мінімум.

Розділ 4. ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ. ЗАДАЧІ З НЕГЛАДКИМИ ЕКСТРЕМАЛЯМИ

4.1. Загальна формула варіації функціонала

Раніше розглядалися варіаційні задачі, де криві порівняння мали спільні початкові й скінченні точки. В загальному випадку у варіаційних задачах граничні точки рухомі. Вони переміщуються на невеликі відстані в довільному напрямку.

Припустимо, що функціонал найпростішої задачі (2.1) має варіацію. Побудуємо цю варіацію у загальному випадку (рис. 4.1.).

Запишемо приріст функціонала (2.1) на кривих порівняння $y(x)$ і $y(x) + \delta y$ і виділимо головну лінійну частину цього приросту (варіацію функціонала):

$$\Delta J[y] = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+(\delta y)')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+(\delta y)') - F(x,y,y')]dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+(\delta y)')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F'_y \delta y + F'_{y'}(\delta y)'\right]dx + o(\delta y, (\delta y)') - F\big|_{x=x_0+\theta_0\delta x_0}\delta x_0 + F\big|_{x=x_1+\theta_1\delta x_1}\delta x_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\delta y dx + F'_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - F\big|_{x=x_0}\delta x_0 + F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + o\big(\delta x_0, \delta x_1, \delta y_0, \delta y_1\big),$$

$\theta_i \in (0;1)$, $i = 0,1$.

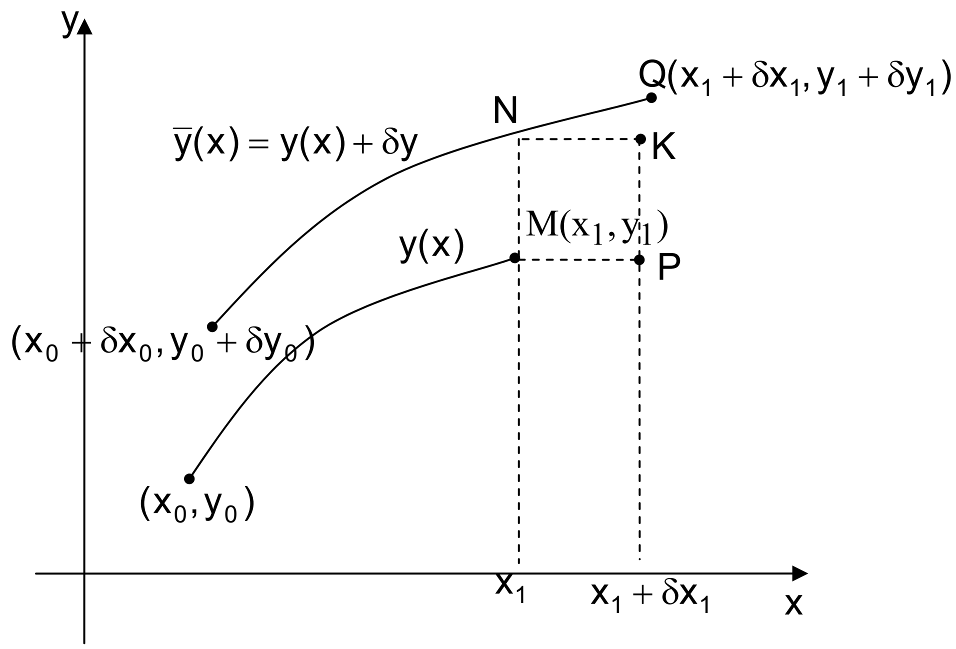


Рис. 4.1

Від значень функції F в точках $x_i+\theta_i\delta x_i$, $i=0,1$ до значень функції F в точках x_i, $i=0,1$ можна перейти завдяки неперервності функції F. Таким чином,

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]dx + F'_{y'}\delta y\Big|_{x=x_1} - F'_{y'}\delta y\Big|_{x=x_0} + F\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - F\Big|_{x=x_0}\delta x_0. \quad (4.1)$$

У формулі (4.1) $\delta y\big|_{x=x_k}$ є приростом ординати в точці x_k, $k=0,1$ при переході від кривої $y(x)$ до кривої $y(x)+\delta y$. Знайдемо зв'язок між $\delta y\big|_{x=x_k}$ і δy_k, де δy_k - приріст ординати y_k, $k=0,1$ (див. рис. 4.1). Маємо: $MN = \delta y\big|_{x=x_1}$, $PQ=\delta y_1$, $KQ = (y+\delta y)'\big|_{x=x_1}\delta x_1 \approx y'(x_1)\delta x_1$. Таким чином, $\delta y\big|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$. Аналогічно можна отримати $\delta y\big|_{x=x_0} \approx \delta y_0 - y'(x_0)\delta x_0$. Підставивши $\delta y\big|_{x=x_k}$, $k=0,1$, в (4.1), будемо мати

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\delta y\delta x + F'_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 - F'_{y'}\Big|_{x=x_0}\delta y_0 + \left[F - y'F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}\delta x_1 -$$
$$-\left[F - y'F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}\delta x_0. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) є загальною формулою варіації функціонала (2.1).

Для функціонала (2.5)

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx$$

загальний вираз для варіації буде таким:

$$\delta J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left(F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y_i'} \right) \delta y_i dx + \sum_{i=1}^{n} F'_{y_i}\Big|_{x=x_1} \delta y_{i_1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} F'_{y_i'}\Big|_{x=x_0} \delta y_{i_0} + \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F'_{y_i'} \right]\Bigg|_{x=x_1} \delta x_1 - \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F'_{y_i'} \right]\Bigg|_{x=x_0} \delta x_0 . \quad (4.3)$$

4.2. Задача з вільними границями

Окремим випадком задачі з рухомими границями є задача з вільними кінцями. Постановка її така: серед усіх кривих, кінці яких розташовані на двох вертикальних прямих $x = x_0$, $x = x_1$, знайти ту, яка надає екстремум функціоналу (2.1), а саме

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx .$$

Для розглядуваної задачі клас допустимих кривих ширший, ніж у задачі з фіксованими граничними точками. Тому якщо на якійсь кривій $y = y(x)$ з вільними границями досягається екстремум, то він досягається й на кривих зі спільними граничними точками. Отже, повинна виконуватися необхідна умова екстремуму (2.2).

Крім того, граничні точки переміщуються по вертикальних прямих $x = x_0 = \text{const}$ і $x = x_1 = \text{const}$. Це означає, що $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$.

Враховуючи вищенаведене, запишемо варіацію функціонала (4.2) і прирівняємо її до нуля:

$$F'_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 - F'_{y'}\Big|_{x=x_0} \delta y_0 = 0. \quad (4.4)$$

У рівності (4.4) варіації δy_1 і δy_0 лінійно незалежні й відмінні від нуля. Тому рівність нулю буде досягатися лише в тому випадку, коли виконуються рівності

$$\begin{cases} F'_{y'}\Big|_{x=x_0} = 0; \\ F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Зауваження 4.1. Якщо одна з граничних точок закріплена, наприклад $y(x_0) = y_0$, а права границя вільна, то умови (4.5) записуються тільки у точці $x = x_1$. У цьому випадку маємо такі граничні умови:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ F'_{y'}\big|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Приклад 4.1. Дослідити, якою плоскою кривою повинна рухатися важка матеріальна точка, щоб із положення O(0;0) за найкоротший час досягти вертикальної прямої $x = a$.

Розв'язання. Запропонована задача була розглянута у прикладі 2.2 (задача про брахістохрону). Її розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = C(t - \sin t); \\ y(t) = C(1 - \cos t). \end{cases}$$

Залишається реалізувати другу умову (4.6), а саме $F'_{y'}\big|_{x=a} = 0$.

Маємо: $F = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$, $F'_{y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{y}}$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $\begin{cases} F'_{y'}\big|_{x=a} = 0, \\ x = a; \end{cases}$ $\begin{cases} y'_t\big|_{t=t_0} = 0, \\ x\big|_{t=t_0} = a; \end{cases}$

$$\begin{cases} C \sin t_0 = 0, \\ C(t_0 - \sin t_0) = a. \end{cases}$$

Враховуючи те, що $C \neq 0$, $t_0 \neq 0$ (значення $t_0 = 0$ відповідає початковій точці O), знаходимо: $t_0 = \pi$, $C = \dfrac{a}{\pi}$.

Отже, остаточно отримуємо

$$x(t) = \frac{a}{\pi}(t - \sin t),$$

$$y(t) = \frac{a}{\pi}(1 - \cos t).$$

4.3. Задача з рухомими границями

Загальною варіаційною задачею для найпростішого функціонала (2.1) є задача з рухомими границями. Постановка її така: серед усіх гладких кривих, кінці яких розташовані на двох гладких заданих лініях $y = \varphi(x)$ і $y = \psi(x)$ (початкова точка (x_0, y_0) рухається по кривій

$y=\varphi(x)$, а скінченна точка (x_1,y_1) - по кривій $y=\psi(x)$), знайти ту, яка надає екстремум функціоналу

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$$

Для запису варіації функціонала скористаємося загальною формулою (4.1). Варіації δx_i і δy_i, $i=\overline{0,1}$, не будуть лінійно незалежними. Зв'язок між ними (з точністю до нескінченно малих величин першого порядку малості) можна записати у вигляді $\delta y_0=\varphi'(x_0)\delta x_0$, $\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1$. Тому формула (4.1) набуває вигляду

$$\delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left[F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right]dx+\left[F+(\psi'-y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}\delta x_1-$$

$$-\left[F+(\varphi'-y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}\delta x_0. \tag{4.7}$$

Далі до функціонала застосуємо необхідну умову екстремуму $\delta J=0$. Враховуючи той факт, що δx_0 та δx_1 - лінійно незалежні варіації, будемо мати рівняння Ейлера (2.2) і дві умови трансверсальності

$$\begin{cases}F+(\varphi'-y')F'_{y'}=0,\ x=x_0;\\ F+(\psi'-y')F'_{y'}=0,\ x=x_1.\end{cases} \tag{4.8}$$

Умови трансверсальності встановлюють зв'язок між кутовими коефіцієнтами φ' і y' та ψ' і y' в граничних точках.

Приклад 4.2. Знайти умову трансверсальності для функціонала $\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx,\ y(x_1)=y_1$, якщо початкова точка (x_0,y_0) переміщується по кривій $y=\varphi(x)$, а $f(x,y)$– довільна неперервна функція.

Розв'язання. Скористаємося другою умовою (4.8). Маємо:

$$F(x,y,y')=f(x,y)\sqrt{1+y'^2},\ F'_{y'}=f(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$F+(\varphi'-y')F'_{y'}=0,\ f(x,y)\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\frac{y'f(x,y)}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

$$f(x,y)\frac{1+y'^2+\varphi' y'-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=0,\ \ \varphi' y'=-1,\ \ y'=-\frac{1}{\varphi'}.$$

У цьому прикладі умова трансверсальності є звичайною умовою ортогональності екстремалі $y(x)$ і кривої $y=\varphi(x)$ в граничних точках.

Приклад 4.3. Знайти криву, на якій функціонал $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx$ може досягати екстремуму, якщо її лівий кінець розташовано на кривій $y(x)=x^2=\varphi(x)$, а правий кінець – на кривій $y(x)=x-5=\psi(x)$.

Розв'язання. $F=\sqrt{1+y'^2}$. Запишемо рівняння Ейлера (2.2) і умови трансверсальності (4.8). Маємо:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0; \\ \sqrt{1+y'^2}+(2x-y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,\ \ x=x_0; \\ \sqrt{1+y'^2}+(1-y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,\ \ x=x_1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо: $y'=C_1$, $y=C_1x+C_2$- екстремаль функціонала. Розглянемо друге й третє рівняння системи:

$$1+y'^2(x_0)+2x_0y'(x_0)-y'^2(x_0)=0,\quad 2x_0y'(x_0)=-1,\ \ y'(x_0)=-\frac{1}{2x_0},$$

$$1+y'^2(x_1)+y'(x_1)-y'^2(x_1)=0,\quad y'(x_1)+1=0,\quad y'(x_1)=-1.$$

Але $y'(x)=C_1$, тому $\begin{cases} C_1=-1; \\ C_1=-\dfrac{1}{2x_0}; \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=-1; \\ x_0=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $y=-x+C_2$.

Екстремаль повинна проходити через точку $\left(x_0;x_0^{\ 2}\right)$, яка лежить на параболі $y=x^2=\varphi(x)$, тобто через точку $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. Звідси знаходимо $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+C_2$ або $C_2=\frac{3}{4}$. Таким чином, шукана екстремаль має рівняння $y=-x+\frac{3}{4}$.

Геометричне тлумачення цієї задачі полягає в тому, що знайдено гладку криву (пряму) мінімальної довжини, яка з'єднує дві задані криві $y=\varphi(x)=x^2$ і $y=\psi(x)=x-5$ (рис. 4.2). Ця довжина дорівнює $J\left[-x+\frac{3}{4}\right]=\sqrt{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}dx=\sqrt{2}\left(\frac{23}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{19\sqrt{2}}{8}$.

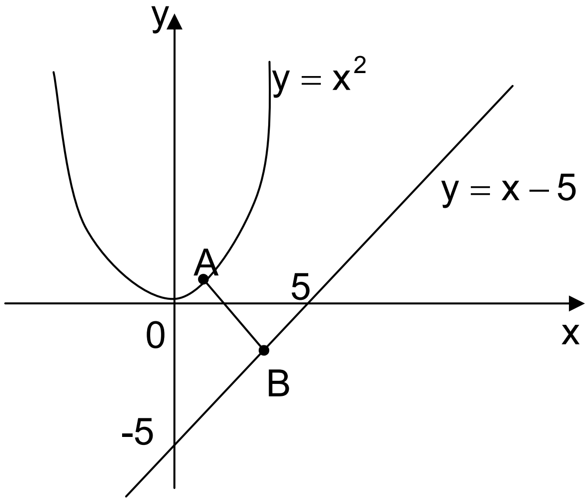


Рис. 4.2

Скінченну границю інтегрування знайдено з умови перетину прямих $y=x-5$ і $y=-x+\frac{3}{4}$.

4.4. Екстремалі з кутовими точками

У попередніх розділах і підрозділах розглядалися варіаційні задачі, де криві порівняння були неперервними і мали неперервні похідні. Однак умова існування неперервної похідної є неприродною, а екстремум у багатьох задачах досягається саме на екстремалях з кутовими точками.

Розглянемо варіаційну задачу для функціонала (2.1)

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

з граничними умовами $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$.

Припустимо також, що екстремаль може мати при $x=c\in(x_0,x_1)$ кутову точку (злам). Кутова точка може бути лише там, де $F''_{y'y'}=0$, тому що у інших випадках $y''(x)$ є неперервною функцією (див. зауваження 2.3).

Розглянемо два проміжки $[x_0;c]$ і $[c;x_1]$ і заданий функціонал запишемо у вигляді

$$J[y]=\int_{x_0}^{c}F(x,y,y')dx+\int_{c}^{x_1}F(x,y,y')dx=J_1[y]+J_2[y].$$

На кожному зі проміжків $[x_0;c]$, $[c;x_1]$ екстремаль задовольняє рівнянню Ейлера (2.2). Загальну формулу для варіації функціонала можна записати на кожному зі вказаних проміжків і на проміжку $[x_0,x_1]$ (при цьому вважаємо, що точка c може довільно переміщуватися):

$$\delta J[y]=\delta J_1[y]+\delta J_2[y]=$$

$$=F'_{y'}\Big|_{x=c-0}\delta y_c+\left(F-y'F'_{y'}\right)\Big|_{x=c-0}\delta c-F'_{y'}\Big|_{x=c+0}\delta y_c-\left(F-y'F'_{y'}\right)\Big|_{x=c+0}\delta c. \quad (4.9)$$

За необхідною умовою екстремуму функціонала (теорема 1.1) $\delta J[y]=0$. Прирівняємо вираз (4.9) до нуля. З урахуванням того, що варіації δc і δy_c лінійно незалежні, отримаємо

$$\begin{cases} F'_{y'}\Big|_{x=c-0}=F'_{y'}\Big|_{x=c+0}; \\ (F-y'F'_{y'})\Big|_{x=c-0}=(F-y'F'_{y'}\Big|_{x=c+0}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Умови (4.10) називаються умовами Вейєрштрасса - Ердмана.

Зауваження 4.2. Якщо ввести нові змінні (канонічні) $p=F'_{y'},\ H=-F+y'F'_{y'}$, то умови (4.10) набудуть вигляду

$$\begin{cases} p(c-0)=p(c+0); \\ H(c-0)=H(c+0), \end{cases} \quad (4.11)$$

а це, як неважко побачити, є умовами неперервності канонічних змінних у точці зламу.

Приклад 4.4. Знайти екстремаль функціонала $J[y]=\int_{-1}^{1}y^2(1+y'^2)dx,\quad y(-1)=0,\ y(1)=1$ в класі кусково-гладких кривих.

Розв'язання.

$$F=y^2(1+y'^2),\ F'_{y'}=2y^2y',F-y'F'_{y'}=y^2(1+y'^2)-y'2y^2y'=y^2(1-y'^2).$$

Запишемо умови Вейєрштрасса - Ердмана (4.10):

$$\begin{cases} y^2 y'\big|_{x=c-0} = y^2 y'\big|_{x=c+0}; \\ y^2(1-y'^2)\big|_{x=c-0} = y^2(1-y'^2)\big|_{x=c+0}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Якщо $y^2(c) \neq 0$, то $y'\big|_{x=c-0} = y'\big|_{x=c+0}$, що суперечить існуванню кутової точки при $x = c$. Тому $y(c) = 0$.

Розглянемо друге рівняння системи (4.12) на проміжках 1) $x \in [-1; c)$ і 2) $x \in (c; 1]$:

1) $x \in [-1; c)$: $y(c) = 0, \quad y(-1) = 0$, $\quad y^2\left(1 - y'^2\right)\big|_{x=c-0} = 0$. Звідси

$$\left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y' = \pm 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y = \pm x + C_1. \end{array}\right.$$

Перший розв'язок $y = 0$ задовольняє умови $y(-1) = y(c) = 0$.

Розглянемо другий розв'язок $y = \pm x + C_1$:

а) $y = x + C_1, \; y(-1) = 0 = -1 + C_1, \; y(c) = 0 = c + C_1 = 0.$ Звідси

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ c = -1. \end{cases}$$

Точка $c = -1$ збігається з граничною точкою, а це суперечить умові $c \in (-1; 1)$.

б) $y = -x + C_1, \; y(-1) = 1 + C_1 = 0, \; y(c) = 0 = -c + C_1 = 0,$ $\begin{cases} C_1 = -1; \\ c = -1. \end{cases}$

Точка $c = -1 \notin (-1; 1)$.

Таким чином, на проміжку $x \in [-1; c)$ екстремаль задається рівнянням $y = 0$.

2) $x \in (c; 1]$: $y(c) = 0, \; y(1) = 1, \; y^2(1 - y'^2)\big|_{x=c+0} = 0.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y'^2 = \pm 1, \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y = \pm x + C_2. \end{array}\right.$ Перший розв'язок $y = 0$ не задовольняє умову $y(1) = 1$.

Розглянемо другий розв'язок $y = \pm x + C_2$:

а) $y = x + C_2, \; y(c) = 0 = c + C_2, \; y(1) = 1 = 1 + C_2.$ Звідси $\begin{cases} C_2 = 0; \\ c = 0, \end{cases}$

$y = x$. Точка $c = 0 \in (-1; 1)$.

б) $y = -x + C_2, \;\; y(c) = 0 = -c + C_2, \;\; y(1) = 1 = -1 + C_2$. Звідси $\begin{cases} C_2 = 2; \\ c = 2. \end{cases}$

Точка $c = 2 \notin (-1;1)$.

Таким чином, екстремаль зі зламом , яка задовольняє граничні умови, має вигляд

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0); \\ x, & x \in [0;1]. \end{cases}$$

Розділ 5. ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

5.1. Ізопериметричні задачі

За давніх часів ізопериметричними задачами називали задачі, де потрібно було знайти геометричні фігури, які мають найбільшу площу, а периметр цих фігур має задане стале значення (наприклад задача Дідони).

У наш час ізопериметричними задачами називають варіаційні задачі, в яких потрібно знайти екстремум деякого функціонала за наявності так званих ізопериметричних умов.

Постановка ізопериметричної задачі. Задано дві функції $F(x, y, y')$ і $G(x, y, y')$, які є неперервними і мають неперервні частинні похідні по всіх аргументах до другого порядку включно на відрізку $[x_0, x_1]$. Серед усіх кривих $y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, вздовж яких інтеграл

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = l \tag{5.1}$$

набуває заданого сталого значення (l), знайти ту, вздовж якої функціонал (2.1)

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{5.2}$$

набуває ектремального значення.

Теорема 5.1 (Ейлера). Якщо крива $y(x)$ надає екстремум функціоналу (5.2) з граничними умовами

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y(x_{1)} = y_1 \end{cases} \tag{5.3}$$

і додатковою умовою

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx = l,\ \ l = \text{const} \tag{5.4}$$

і якщо $y(x)$ не є екстремаллю функціонала (5.4), то існує така стала λ, що крива $y(x)$ є екстремаллю функціонала

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x,y,y')dx\,, \tag{5.5}$$

де $H = F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')$. Функція H називається функцією Лагранжа для ізопериметричної задачі.

Доведення. Припустимо, що крива $y(x)$ є екстремаллю функціонала (5.2) и не є екстремаллю функціонала (5.4). На інтервалі (x_0, x_1) візьмемо дві довільні точки α_1 і α_2 і знайдемо приріст функціонала (5.2) за умови, що $y(x)$ варіюється в околі точок α_1 і α_2. У подальших перетвореннях буде застосована друга теорема про середнє значення (рис. 5.1):

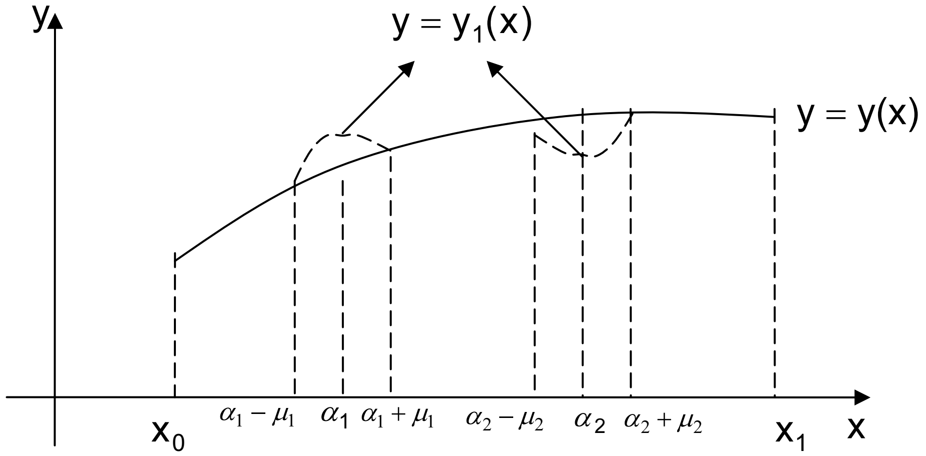


Рис. 5.1

$$J[y_1] - J[y] = \int_{\alpha_1-\mu_1}^{\alpha_1+\mu_1} \left\{F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right\}\delta_{\alpha_1} y dx + \int_{\alpha_2-\mu_2}^{\alpha_2+\mu_2} \left\{F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right\}\delta_{\alpha_2} y dx =$$

$$= \left(\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=\alpha_1} + \varepsilon_1\right)\int_{\alpha_1-\mu_1}^{\alpha_1+\mu_1}\delta_{\alpha_1} y dx + \left(\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=\alpha_2} + \varepsilon_2\right)\int_{\alpha_2-\mu_2}^{\alpha_2+\mu_2}\delta_{\alpha_2} y dx =$$

$$= \left(\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=\alpha_1} + \varepsilon_1\right)\sigma_1 + \left(\left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=\alpha_2} + \varepsilon_2\right)\sigma_2\,, \tag{5.5}$$

де $\sigma_i = \int\limits_{\alpha_i-\mu_i}^{\alpha_i+\mu_i} \delta_{\alpha_i} y dx$ - площі «горбків», $i = 1, 2$, а $\varepsilon_i \to 0$ разом з σ_i.

Для довільних значень $\delta_{\alpha_i} y$, $i = 1, 2$ крива

$$y_1(x) = y(x) + \delta_{\alpha_1} y + \delta_{\alpha_2} y \tag{5.6}$$

не буде допустимою кривою.

Для того, щоб крива (5.6) була допустимою, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $K[y_1] = K[y]$, тобто

$$0 = K[y_1] - K[y] = \left(\left[G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right]\Bigg|_{x=\alpha_1} + \varepsilon'_1 \right) \sigma_1 +$$

$$+ \left(\left[G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right]\Bigg|_{x=\alpha_2} + \varepsilon'_2 \right) \sigma_2 = 0, \tag{5.7}$$

де $\varepsilon'_i \to 0$ разом з σ_i, $i = 1, 2$.

Виберемо точку α_2 таким чином, щоб $\left[G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right]\Bigg|_{x=\alpha_2} \neq 0$.

Це можливо тому, що $y(x)$ не є екстремаллю для функціонала (5.1). З (5.7) знаходимо

$$\sigma_2 = -\left\{ \frac{\left(G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right)\Big|_{x=\alpha_1} + \varepsilon'_1}{\left(G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right)\Big|_{x=\alpha_2} + \varepsilon'_2} \right\} \sigma_1 = -\left\{ \frac{\left(G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right)\Big|_{x=\alpha_1}}{\left(G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right)\Big|_{x=\alpha_2}} + \varepsilon' \right\} \sigma_1,$$

де $\varepsilon' \to 0$ разом з $\sigma_1 \to 0$. Позначимо $\lambda = -\frac{F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'}}{G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'}}\Bigg|_{x=\alpha_2}$ і запишемо

приріст функціонала (5.5), враховуючи рівність $\sigma_2 = -\lambda \sigma_1$:

$$\Delta J[y] = \left\{ \left[F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right]\Bigg|_{x=\alpha_1} + \lambda \left[G'_y - \frac{d}{dx} G'_{y'} \right]\Bigg|_{x=\alpha_1} + \varepsilon \right\} \sigma_1,$$

де $\varepsilon \to 0$ разом з σ_1.

За умовою $y = y(x)$ надає екстремальне значення функціоналу (5.2). Тому $\Delta J[y] \geq 0$ (≤ 0) і $\delta J[y] = 0$.

Маємо

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) + \lambda(G'_y - \frac{d}{dx}G'_{y'}) = 0. \qquad (5.8)$$

Рівність (5.8) якраз і є рівнянням Ейлера для функціонала (5.5).

Узагальненням теореми 5.1 є

Теорема 5.2. Якщо вектор-функція $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$, $y_i(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, $i = \overline{1,n}$ надає екстремум функціоналу

$$J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ...y_n, y'_1, y'_2, ...y'_n)dx$$

з граничними умовами

$$y_i(x_0) = y_{i0};$$
$$y_i(x_1) = y_{i1}$$

і додатковими умовами

$$K_j[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, y_1, y_2, ...y_n, y'_1, y'_2, ...y'_n)dx = l_j, \ j = \overline{1,m}, \ m \le n$$

і якщо $y(x)$ не є екстремаллю функціоналів K_j, $j = \overline{1,m}$, то існують такі сталі λ_j, $j = \overline{1,m}$, що вектор-функція $y(x)$ задовольняє систему рівнянь Ейлера

$$H'_{y_i} - \frac{d}{dx}H'_{y'_i} = 0, \ i = \overline{1,n},$$

складених для функціонала $\int_{x_0}^{x_1} H(x, y_1, ...y_n, y'_1, ..., y'_n)dx$, де

$$H(x, y_1, y_2, ...y_n, y_1', y_2', ...y_n') =$$
$$= F(x, y_1, y_2, ...y_n, y_1', y_2', ...y_n') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x, y_1, y_2, ...y_n, y_1', y_2', ...y_n').$$

Приклад 5.1. Знайти екстремаль функціонала $J[y] = \int_0^1 y'^2(x)dx$, яка задовольняє граничні умови $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ і інтегральну умову $\int_0^1 y(x)dx = 3.$

Розв’язання.

1. Складемо функцію Лагранжа:

$$F = y'^2, \ m = 1, \ G_1 = G = y, \ H(x, y, y') = y'^2 + \lambda y.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера для функції H і рівняння зв'язку:

$$H'_y - \frac{d}{dx}H'_{y'} = \lambda - 2y'' = 0\,, \quad \int_0^1 y(x)dx = 3\,.$$

3. Знайдемо загальний розв'язок рівняння Ейлера і λ:

$$y''(x) = \frac{\lambda}{2},\ \ y'(x) = \frac{\lambda}{2}x + C_1,\ \ y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1x + C_2,$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{4}x^2 + C_1x + C_2\right]dx = \left(\frac{\lambda}{12}x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3\,.$$

4. Визначимо λ і сталі C_i, i=1,2, з граничних умов і рівняння зв'язку:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 1, \\ y(1) = \dfrac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6\,, \\ \dfrac{\lambda}{12} + \dfrac{C_1}{2} + C_2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = 1, \\ \lambda + 4C_1 = 20\,, \\ \lambda + 6C_1 = 24; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 2\,, \\ C_2 = 1, \\ \lambda = 12. \end{cases}$$

Таким чином, екстремаль має рівняння $y(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

5.2. Задача Лагранжа

Варіаційними задачами на умовний екстремум називаються задачі, в яких необхідно знайти екстремум функціонала J з деякими обмеженнями (зв'язками), які накладено на функції, від яких залежить функціонал.

Наприклад, потрібно дослідити на екстремум функціонал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n)dx, \tag{5.9}$$

якщо введено додаткові умови

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \tag{5.10}$$

або

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n) = 0,\ \ j = \overline{1, m},\ m \le n. \tag{5.11}$$

У механіці умови (5.10) називаються голономними, а (5.11) - неголономними.

Теорема 5.3. Якщо крива $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$ надає екстремум функціоналу

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx \tag{5.12}$$

в класі допустимих кривих, які задовольняють граничні умови $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, $z(x_0)=z_0$, $z(x_1)=z_1$ і розташовані на поверхні $G(x,y,z)=0$, у точках якої $G_x'^2+G_y'^2\neq 0$, то існує функція $\lambda(x)$, така, що крива $\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x) \end{cases}$ є екстремаллю функціонала

$$\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,z,y',z',\lambda)dx, \tag{5.13}$$

де

$$H=F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)G(x,y,z,y',z'). \tag{5.14}$$

Функція H називається функцією Лагранжа.

Доведення. Припустимо, що крива $\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x) \end{cases}$ надає екстремум функціоналу (5.12), варіації функцій δy та δz відмінні від нуля лише у малому околі точки $\bar{x}\in(x_0;x_1)$ і крива $\begin{cases} y=y(x)+\delta y, \\ z=z(x)+\delta z \end{cases}$ є допустимою кривою порівняння. Позначимо $\int_{x_0}^{x_1}\delta y dx=\sigma_1$, $\int_{x_0}^{x_1}\delta z dx=\sigma_2$ і проведемо перетворення, аналогічні (5.5) – (5.7):

$$\delta G=\int_{x_0}^{x_1}\left[G_y'\delta y+G_z'\delta z\right]dx=G_y'\big|_{x=\bar{x}}\sigma_1+G_z'\big|_{x=\bar{x}}\sigma_2+\varepsilon_1\sigma_1+\varepsilon_2\sigma_2,$$

де $\varepsilon_i\to 0$ разом з σ_i, $i=1,2$. Звідси

$$\sigma_2=-\frac{G_y'\big|_{x=\bar{x}}+\varepsilon_1}{G_z'\big|_{x=\bar{x}}+\varepsilon_2}\sigma_1=\left(-\frac{G_y'\big|_{x=\bar{x}}}{G_z'\big|_{x=\bar{x}}}\sigma_1+\varepsilon'\right)\sigma_1.$$

За умовою $G_x'^2+G_y'^2\neq 0$. Припустимо для визначеності, що саме $G_z'\neq 0$. Остання рівність, з точністю до нескінченно малих першого порядку малості, може бути записана у вигляді

$$\sigma_2=-\frac{G_y'\big|_{x=\bar{x}}}{G_z'\big|_{x=\bar{x}}}\sigma_1. \tag{5.15}$$

Так само для варіації функціонала (5.11) з урахуванням (5.15) запишемо рівняння

$$0=\left[F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=x_1}\sigma_1+\left[F'_z-\frac{d}{dx}F'_{z'}\right]\Bigg|_{x=x_1}\sigma_2=$$

$$=\left\{\left[F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right]\Bigg|_{x=\bar{x}}-\frac{G'_y\big|_{x=\bar{x}}}{G'_z\big|_{x=\bar{x}}}\left[F'_z-\frac{d}{dx}F'_{z'}\right]\Bigg|_{x=\bar{x}}\right\}\sigma_1.$$

Звідси з необхідної умови екстремуму знаходимо

$$\frac{F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}}{G'_y}=\frac{F'_z-\dfrac{d}{dx}F'_{z'}}{G'_z}=-\lambda(x)$$

уздовж дослідженої кривої, тобто

$$\begin{cases}F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}+\lambda(x)G'_y=0;\\ F'_z-\dfrac{d}{dx}F'_{z'}+\lambda(x)G'_z=0.\end{cases} \tag{5.16}$$

Система рівнянь (5.16) є системою диференціальних рівнянь Ейлера для функції H варіаційної задачі (5.13) - (5.14).

Узагальненням теореми (5.3) є наступна теорема.

Теорема 5.4. Якщо на вектор−функції $y(x)=(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x))^T$, де $y_i(x)\in C^{(1)}[x_0;x_1]$, яка задовольняє граничні умови

$$y_i(x_0)=y_{i0},\ y_i(x_1)=y_{i1},\ i=\overline{1,n} \tag{5.16}$$

і додаткові умови (5.10), а функціонал (5.9) досягає екстремуму, то функції $y_1,y_2,...,y_n$ задовольняють систему рівнянь Ейлера

$$H'_{y_i}-\frac{d}{dx}H'_{y'_i}=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{5.17}$$

складену для функціонала

$$J^*[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}H(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)dx, \tag{5.18}$$

де $$H=F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\varphi_j(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

Відносно функцій $\varphi_j(x,y_1,y_2,...,y_n)$, $j=\overline{1,m}$, з рівнянь (5.10) припускається, що вони лінійно незалежні, тобто

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Аналогічна теорема має місце в тому випадку, коли рівняння зв'язку (5.11) є диференціальним.

Теорема 5.5. Якщо на вектор-функції $y(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, де $y_i(x) \in C^{(1)}[x_0; x_1]$, яка дозволяє граничні умови (5.16) і додаткові умови (5.11), функціонал (5.9) досягає екстремуму, то функції $y_1, y_2, .., y_n$ задовольняють систему диференціальних рівнянь Ейлера (5.17), складену для функціонала (5.18), де

$$H = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n').$$

Відносно функцій з рівнянь (5.11) припускається, що

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} \neq 0.$$

Задачі, розглянуті в підрозд. 5.2, називаються задачами Лагранжа, а функції $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ − множниками Лагранжа.

Приклад 5.2. Знайти екстремаль функціонала $J[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2 + z^2 - y'^2 - z'^2\right) dx$, яка задовольняє граничні умови $y(0) = 1$, $z(0) = -1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ і рівняння зв'язку $y - z - 2\cos x = 0$.

Розв'язання.

1. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$F = y^2 + z^2 - y'^2 - z'^2, \; m = 1, \; \varphi(y, z) = y - z - 2\cos x,$$

$$H = y^2 + z^2 - y'^2 - z'^2 + \lambda(x)(y - z - 2\cos x).$$

2. Запишемо систему рівнянь Ейлера і рівняння зв’язку:

$$\begin{cases} H_y' - \dfrac{d}{dx} H_{y'}' = 2y + \lambda(x) + 2y'' = 0; \\ H_z' - \dfrac{d}{dx} H_{z'}' = 2z - \lambda(x) + 2z'' = 0; \\ \varphi(x, y, z) = y - z - 2\cos x = 0. \end{cases}$$

3. Знайдемо розв’язок останньої системи. Для цього запишемо суму перших двох рівнянь:

$$\begin{cases} y + z + y'' + z'' = 0, \\ y = z + 2\cos x; \end{cases} \qquad \begin{cases} z + z'' = 0, \\ y = z + 2\cos x; \end{cases}$$

$$z'' + z = 0,\ \ z = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2\cos x\,.$$

Функцію $\lambda(x)$ знаходити в даному випадку не потрібно, тому що ця функція - допоміжне значення і ніде не з'являється у розв'язку.

Сталі інтегрування C_i, $i=1,2$ знайдемо з граничних умов:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 2 = 1; \\ z(0) = C_1 = -1; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_2 = 1; \\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -1; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $y(x) = \cos x + \sin x,\ z(x) = -\cos x + \sin x$.

Зауваження 5.1. Граничні умови і рівняння зв'язку мають бути узгоджені, а саме:

$$y(0) - z(0) - 2\cos 0 = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - z\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Узгодженість рівнянь зв'язку і граничних умов потрібно перевіряти, перш ніж розпочати розв'язання задач.

Приклад 5.3. Знайти найменшу відстань між точками $A(0;-1;1)$ і $B(1;0;-1)$, які лежать на площині $x + y + z = 0$.

Розв'язання. За умовою потрібно знайти екстремаль функціонала $J[y,z] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$, яка задовольняє граничні умови $y(0) = z(1) = -1,\ z(0) = 1,\ y(1) = 0$ і рівняння зв'язку $x + y + z = 0$.

1. Складемо функцію Лагранжа: $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, $m = 1$, $\varphi = x + y + z$, $H = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(x + y + z)$.

2. Запишемо систему рівнянь Ейлера і рівняння зв'язку:

$$\begin{cases} H'_y - \dfrac{d}{dx}H'_{y'} = \lambda(x) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0; \\ H'_z - \dfrac{d}{dx}H'_{z'} = \lambda(x) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0; \\ \varphi(x,y,z) = x+y+z = 0. \end{cases}$$

3. Знайдемо розв’язок отриманої системи. Для цього запишемо різницю перших двох рівнянь, а третє – продиференціюємо:

$$\begin{cases} \dfrac{y'-z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C; \qquad \dfrac{2y'-1}{\sqrt{1+y'^2+(y'+1)^2}} = C; \qquad y' = C_1; \qquad y = C_1x + C_2; \\ z' = -1-y'; \qquad z' = -1-C_1; \qquad z = -(1+C_1)x + C_3. \end{cases}$$

Підставимо y й z у рівняння $x+y+z=0$. Маємо

$$x + C_1x + C_2 - (1+C_1)x + C_3 = 0, \qquad C_2 + C_3 = 0.$$

Сталі інтегрування визначимо з початкових умов:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = -1; \\ z(1) = -1 - C_1 + C_3 = -1; \\ z(0) = C_3 = 1; \\ y(1) = C_1 + C_2 = 0; \\ C_2 + C_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $C_1 = 1,\ C_2 = -1,\ C_3 = 1$.

Отже, рівняння шуканої лінії таке: $\begin{cases} y = x-1; \\ z = -2x+1. \end{cases}$

Лінія найменшої довжини, яка з’єднує дві задані точки на поверхні, називається геодезичною лінією.

Приклад 5.4. Знайти екстремаль функціонала $J[y,z] = \int_0^1 [y^2 + 2y'^2 + z'^2]dx$, яка задовольняє граничні умови $y(0)=1,\ z(0)=0$, $y(1) = e + e^{-1},\ z(1) = 2e - e^{-1}$ і рівняння зв’язку $y' - z = 0$.

Розв'язання:

1. Складемо функцію Лагранжа: $F = y^2 + 2y'^2 + z'^2$, $m = 1$, $\varphi = y' - z$, $H = y^2 + 2y'^2 + z'^2 + \lambda(x)(y' - z)$.

2. Запишемо систему рівнянь Ейлера і рівняння зв'язку:

$$\begin{cases} H'_y - \dfrac{d}{dx}H'_{y'} = 2y - 4y'' - \lambda'(x) = 0; \\ H'_z - \dfrac{d}{dx}H'_{z'} = -2z'' - \lambda(x) = 0; \\ \varphi(x, y, z, y', z') = y' - z = 0. \end{cases}$$

3. Знайдемо загальний розв'язок записаної системи. З третього рівняння отримаємо $z'' = y'''$; з другого рівняння маємо $\lambda(x) = -2y'''$, $\lambda'(x) = -2y^{(IV)}$; з першого рівняння також знаходимо $\lambda'(x) = 2y - 4y''$. Залишилося прирівняти вирази для $\lambda'(x)$: $y^{(IV)} - 2y'' + y = 0$. Характеристичне рівняння таке: $k^4 - 2k^2 + 1 = 0$. Корені характеристичного рівняння: $k_{1,2} = 1$, $k_{3,4} = -1$. Загальний розв'язок наведеного однорідного рівняння записується у вигляді

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x},$$

а

$$z(x) = y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x (1 + x) - C_3 e^{-x} + C_4 e^{-x}(1 - x).$$

Сталі інтегрування C_i, $i = \overline{1,4}$ визначимо з граничних умов:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = 1; \\ z(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0; \\ y(1) = (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4)e^{-1} = e + e^{-1}; \\ z(1) = (C_1 + 2C_2)e - C_3 e^{-1} = 2e - e^{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1; \\ C_3 = 1; \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, $y = xe^x + e^{-x}$; $z = (1 + x)e^x - e^{-x}$.

Розділ 6. КАНОНІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

6.1. Канонічна форма запису рівняння Ейлера. Перші інтеграли рівнянь Ейлера

Розглянемо функціонал (2.5)

$$J[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx$$

з граничними умовами (2.6). Для цього функціонала рівняння Ейлера мають вигляд (2.7). Це система n диференціальних рівнянь другого порядку. Запишемо систему (2.7) як систему $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього введемо нові змінні

$$p_i = F'_{y_i'}, \ i = \overline{1,n},$$

$$H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i . \qquad (6.1)$$

Означення 6.1. Змінні (6.1) називаються канонічними змінними, а функція H називається функцією Гамільтона даного функціонала.

Зауваження 6.1. Канонічні змінні у випадку $i = 1$ були введені в розд. 4 (див. підрозд. 4.4, формула (4.11)).

Запишемо рівняння Ейлера (2.7) у канонічних змінних (6.1). Для цього з перших n рівнянь (6.1) виразимо y_i' через $x, y_i, p_i, i = \overline{1,n}$. Це можливо, якщо припустити, що $\dfrac{D(p_1, p_2, ..., p_n)}{D(y_1', y_2', ..., y_n')} \neq 0$. Тоді функцію H можна розглядати як функцію, що залежить від $x, y_i, p_i, i = \overline{1,n}$, тобто $H = H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Запишемо повний диференціал функції H:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i . \qquad (6.2)$$

З іншого боку, враховуючи означення функції H (6.2), маємо

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i'}dy_i' + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i . \qquad (6.3)$$

Прирівняємо вирази (6.2) і (6.3). Звідси

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \ y_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ i = \overline{1,n}. \qquad (6.4)$$

Враховуючи рівності (6.4), рівняння Ейлера (2.7) можна записати в симетричній формі:

$$\begin{cases} F'_{y_i} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \\ y'_i = \dfrac{dy_i}{dx}, \ i = \overline{1,n}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \ i = \overline{1,n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Означення 6.2. Система 2n диференціальних рівнянь першого порядку (6.4) називається канонічною системою рівнянь Ейлера для функціонала (2.5).

Припустимо, що функція $F = F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ явно не залежить від x. Тоді з (6.2) і (6.4) знаходимо

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right] = 0,$$

звідки $H = \text{const}$.

Означення 6.3. Першим інтегралом деякої системи диференціальних рівнянь називається функція, яка зберігає стале значення вздовж будь-якої інтегральної кривої цієї системи.

Отже, якщо функція F не залежить від x, то функція H з (6.4) є першим інтегралом рівняння Ейлера.

Зауваження 6.2. Першим інтегралом для рівняння Ейлера (2.2) у випадку, коли $F = F(y, y')$, є функція $F - y'F'_{y'} = \text{const}$ (див. (2.4)).

З'ясуємо тепер, які умови потрібно накласти на функцію $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, щоб вона була першим інтегралом системи диференціальних рівнянь Ейлера (6.4). Для цього обчислимо

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right] = [\Phi, H],$$

де

$$[\Phi, H] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right]. \tag{6.5}$$

Означення 6.4. Вираз $[\Phi, H]$ з (6.5) називається дужкою Пуассона функцій Φ і H.

Теорема 6.1. Для того, щоб функція $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ була першим інтегралом системи (6.4), необхідно і достатньо, щоб дужка Пуассона $[\Phi, H] \equiv 0$.

6.2. Канонічні перетворення. Теорема Нетер

Розглянемо систему канонічних рівнянь Ейлера (6.4) для функціонала (2.5) і перейдемо від змінних y_i, p_i, $i=\overline{1,n}$ до нових змінних

$$Y_i = Y_i(x, y_i, p_i),\ P_i = P_i(x, y_i, p_i),\ i=\overline{1,n}. \qquad (6.6)$$

З'ясуємо, які умови потрібно накласти на функції Y_i та P_i з (6.6), щоб у нових змінних рівняння Ейлера (6.4) для функціонала

$$J[x, Y_1, Y_2, ..., Y_n, P_1, P_2, ..., P_n] = \int_{x_0}^{x_1}\left[-\tilde{H} + \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i'\right]dx \qquad (6.7)$$

мали канонічний вигляд, а саме

$$\frac{dP_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial Y_i},\ \frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i},\ i=\overline{1,n}. \qquad (6.8)$$

Функціонали (2.5) і (6.7) задають дві різні варіаційні задачі від змінних y_i та p_i, $i=\overline{1,n}$, тому що Y_i і P_i, $i=\overline{1,n}$ (6.6) залежать від y_i та p_i, $i=\overline{1,n}$.

Означення 6.5. Дві варіаційні задачі називаються еквівалентними, якщо одну задачу можна отримати з другої деякої заміною змінних, а самі функціонали називаються інваріантними відносно заданого перетворення.

Теорема 6.2. Дві варіаційні задачі (2.5) і (6.7) еквівалентні, якщо вирази під інтегралами відрізняються один від одного на повний диференціал деякої функції.

Доведення. Розглянемо деяку функцію $\Phi = \Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Запишемо повний диференціал цієї функції

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i'\right)dx$$

і позначимо

$$\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i'. \qquad (6.9)$$

Функція ψ (6.9) задовольняє систему рівнянь Ейлера (2.5). Дійсно,

$$\psi'_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(\psi'_{y_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2} y_i' - \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2} y_i' - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2} y_i' = 0.$$

При цьому $\int\limits_{x_0}^{x_1} d\Phi = \text{const}$, а варіація сталої величини дорівнює нулю.

Таким чином, якщо до функціонала (2.5) додати інтеграл від повного диференціала деякої функції Φ, то екстремалі задачі (2.5) не зміняться (значення самого функціонала зміниться на деяку сталу величину).

Використовуючи доведене твердження, запишемо рівність

$$\left(-H + \sum_{i=1}^{n} P_i y_i'\right)dx = \left(-\tilde{H} + \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i'\right)dx + d\Phi(x, y_i, p_i),$$

або

$$d\Phi = \left(\tilde{H} - H\right)dx + \sum_{i=1}^{n} P_i dy_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dY_i .$$

Звідси $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \tilde{H} - H,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} = P_i,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial Y_i} = -P_i$.

Якщо функція Φ не залежить явно від x, то $\tilde{H} = H$, тобто для отримання нової функції Гамільтона $\tilde{H}$ достатньо в функції H поміняти y_i та p_i, $i = \overline{1,n}$, на Y_i і P_i відповідно.

Зауваження 6.1. Той факт, що функція F не залежить явно від x, рівносильний такому твердженню: якщо ввести нову змінну $x^* = x + \alpha$, то функція $F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$ і інтеграл $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx$ не зміняться. Таким чином, функція H є першим інтегралом системи рівнянь Ейлера (6.4) тоді і тільки тоді, коли функціонал не змінюється при перетворенні $x^* = x + \alpha$.

Приклад 6.1. Задано функціонали $J_1[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$ і $J_2[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} x y'^2 dx$. Перевірити інваріантність цих функціоналів відносно перетворення координат $x^* = x + \alpha$, $y^* = y$, де $\alpha = \text{const}$.

Розв'язання. Припустимо, що задана на проміжку $[x_0, x_1]$ крива γ має рівняння $y = h(x)$. Після введення нових координат (x^*, y^*) крива γ^* буде мати рівняння $y^* = h(x^* - \alpha) = h^*(x^*)$.

Розглянемо наведені функціонали

$$J_1[y^*] = \int\limits_{x_0^*}^{x_1^*} \left(\frac{dh^*(x^*)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \int\limits_{x_0+\alpha}^{x_1+\alpha} \left(\frac{dh(x^*-\alpha)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)^2 dx = J_1[y],$$

$$J_2[y^*] = \int\limits_{x_0^*}^{x_1^*} x^* \left(\frac{dh^*(x^*)}{dx^*} \right)^2 dx^* = \int\limits_{x_0+\alpha}^{x_1+\alpha} x^* \left(\frac{dh(x^*-\alpha)}{dx^*} \right)^2 dx^* =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} (x+\alpha) \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)^2 dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} x \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)^2 dx + \alpha \int\limits_{x_0}^{x_1} x \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)^2 dx =$$

$$= J_2[y] + \alpha J_1[y] \neq J_2[y].$$

Таким чином, функціонал $J_1[y]$ інваріантний відносно наведеного перетворення координат, а варіаційні задачі $J_1[y]$ та $J_1[y^*]$ еквівалентні. Функціонал $J_2[y]$ не є інваріантним відносно вказаного перетворення координат.

Теорема 6.3 (теорема Нетер). Якщо існує сукупність обернених перетворень змінних x, y_i, $i = \overline{1,n}$, які залежать від параметра α, а саме

$$x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha),$$
$$y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha), \ i = \overline{1,n}, \qquad (6.10)$$

де функції $\varphi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha)$ диференційовні, а при $\alpha = 0$ задають тотожне перетворення, то кожному перетворенню координат (6.10), яке залишає інтеграл (2.5) інваріантним, відповідає перший інтеграл системи рівнянь Ейлера (6.4).

Доведення теореми Нетер можна знайти в працях [2, 5].

Приклад 6.2. Записати перший інтеграл системи рівнянь Ейлера (6.4) у разі інваріантності варіаційної задачі (2.5) відносно перетворення координат $x^* = x$, $y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha)$, $i = \overline{1,n}$.

Розв'язання. Припустимо, що функціонал (2.5) має екстремалі $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, а y_i^* - криві порівняння. Зробимо такі перетворення: $y_i^* - y_i = \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha + o(\alpha)$, де α - нескінченно мала величина, і запишемо варіацію функціонала (2.5). Маємо

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} F'_{y'_i} \delta y_i \Bigg|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F'_{y'_i} \right) \delta x \Bigg|_{x_0}^{x_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta y_i \Bigg|_{x_0}^{x_1} - H \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \delta y_i \Bigg|_{x_0}^{x_1} = \left| \delta y_i = \alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \right| = \alpha \sum_{i=1}^{n} F'_{y'_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \Bigg|_{x_0}^{x_1} = 0 .$$

За умовою варіаційна задача інваріантна відносно заданого перетворення координат, а варіація функціонала для довільних значень x_0 і x_1 дорівнює нулю. Тому $\sum_{i=1}^{n} F'_{y'_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \text{const}$ - перший інтеграл системи канонічних рівнянь Ейлера (6.4).

6.3. Закони збереження

Розглянемо механічну систему з n матеріальних точок, кожна з яких має масу m_i, координати $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, $i = \overline{1,n}$. Потенціальна енергія цієї системи - $U(t, x_i, y_i, z_i)$, кінетична енергія $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right)$, $L = T - U$- функція Лагранжа, $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ - інтеграл дії.

Введемо канонічні змінні (6.1). В нашому випадку

$$P_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i'} = m_i x_i', \; P_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i'} = m_i y_i', \; P_{z_i} = \frac{\partial L}{\partial z_i'} = m_i z_i',$$

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i' P_{x_i} + y_i' P_{y_i} + z_i' P_{z_i} \right) = -T + U + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right) =$$

$$= -T + U + 2T = U + T$$ - повна енергія системи.

Користуючись виглядом функції L в інтегралі дії, можна знайти ті чи інші функції, які зберігають стале значення вздовж траєкторій системи. Такі функції стають суттєвою складовою частиною законів збереження.

Розглянемо деякі з таких законів:

1. Закон збереження енергії. Припустимо, що функція Лагранжа L не залежить явно від часу t (потенціальна енергія U не залежить від t). Відповідна система в цьому випадку називається консервативною. Функція $H = T + U = \text{const}$ (див. підрозд. 6.1) уздовж кожної екстремалі. Таким чином, отримано закон збереження енергії: повна енергія консервативної системи залишається сталою в процесі руху.
2. Закон збереження імпульсу. Припустимо, що функція Лагранжа L не змінюється при паралельному перенесенні координат, тобто при

заміні x_i, y_i, z_i на $x_i + a, y_i + b, z_i + c$ відповідно. Згідно з теоремою Нетер (6.3) існує перший інтеграл системи рівнянь Ейлера.

Розглянемо перетворення $t^* = t,\ x_i^* = x_i + a,\ y_i^* = y_i,\ z_i^* = z_i$ і запишемо варіацію функціонала дії:

$$\delta J = L\delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{i=1}^{n} L'_{x_i'}\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{i=1}^{n} L'_{y_i'}\delta y_i\Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{i=1}^{n} L'_{z_i'}\delta z_i\Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i' L'_{x_i'}\delta t\Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=1}^{n} y_i' L'_{y_i'}\delta t\Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=1}^{n} z_i' L'_{z_i'}\delta t\Big|_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \delta t = \delta y_i = \delta z_i = 0 \\ \delta x_i = \alpha \end{matrix}\right| = \alpha \sum_{i=1}^{n} L'_{x_i'} = 0.$$

Тому $\sum_{i=1}^{n} L'_{x_i'} = \text{const}$, або $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = \text{const}$.

Аналогічно, якщо розглянути перетворення координат $t^* = t$, $x_i^* = x_i,\ y_i^* = y_i + b,\ z_i^* = z_i$ та $t^* = t,\ x_i^* = x_i,\ y_i^* = y_i,\ z_i^* = z_i + c$, отримаємо умови $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i' = \text{const}$, $\sum_{i=1}^{n} m_i z_i' = \text{const}$ відповідно.

Отримані рівності ($\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = \text{const}$ і т.п.) дають можливість записати закон збереження імпульсу: якщо інтеграл $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ інваріантний відносно паралельного перенесення координат, то повний імпульс системи не змінюється з часом.

Розділ 7. ЕНЕРГЕТИЧНИЙ МЕТОД

7.1. Деякі відомості з теорії лінійних операторів

Означення 7.1. На деякій множині функцій (D_A) задано оператор A, якщо наведено закон, за яким кожній функції $u = u(x)$ з цієї множини поставлена у відповідність одна і тільки одна функція.

Область D_A називається областю визначення оператора A. Область змінювання оператора позначатимемо R_A. Надалі будемо вважати область визначення D_A лінійною. Лінійну множину називають лініалом.

Приклади лінійних множин функцій:

а) множина неперервних функцій;

б) множина багаточленів;

в) множина функцій, що дорівнюють нулю на границі області;

г) множина функцій, визначених на D_A, інтеграли від квадратів яких існують.

Доведемо твердження «г».

Нехай функції $u, v \in D_A$, $a = \text{const} \in R$. За умовою існують $\int\limits_{(\Omega)} u^2 d\Omega$, $\int\limits_{(\Omega)} v^2 d\Omega$. Очевидно, що $\int\limits_{(\Omega)} (au)^2 d\Omega$ існує. Доведемо, що існує $\int\limits_{(\Omega)} (u+v)^2 d\Omega$. Маємо: $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$, $2uv \leq u^2 + v^2$, $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv \leq 2(u^2 + v^2)$.

Таким чином, $\int\limits_{(\Omega)} (u+v)^2 d\Omega \leq 2 \int\limits_{(\Omega)} (u^2 + v^2) d\Omega = 2 \int\limits_{(\Omega)} u^2 d\Omega + 2 \int\limits_{(\Omega)} v^2 d\Omega$, тобто лінійність множини функцій, інтегрованих квадратами, доведено.

Прикладом нелінійної множини функцій є множина обмежених функцій, а саме множина функцій $|u(p)| < C$, $C = \text{const} > 0$. Дійсно, якщо $u(p_0) \neq 0$ і $a = \dfrac{2C}{u(p_0)}$, то $|au(p_0)| = \dfrac{2C}{|u(p_0)|} \cdot |u(p_0)| = 2C > C$.

Означення 7.2. Оператор A називається лінійним, якщо він визначений на лініалі D_A і для будь-яких функцій $u, v \in D_A$ та для будь-якої сталої $a \in R$ виконуються рівності $A(u+v) = Au + Av$, $A(au) = aAu$.

Надалі будуть розглядатися лінійні оператори, але окрім цього на оператори накладаються деякі обмеження. Для диференціальних операторів ці обмеження такі: функції, які належать D_A, є неперервними в замкненій області, а значення оператора повинні мати скінченну норму. Якщо розглядається інтегральний оператор, то вважається, що функції, які входять в область визначення оператора (D_A) і в область змінювання (R_A), мають скінченну норму.

Приклад 7.1. Перевірити, чи входять в область визначення D_A оператора $Au = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $x \in [0;1]$ функції $u_1 = \dfrac{1}{x}$, $u_2(x) = \begin{cases} x \ln x, & x \in [0;1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

$$u_3(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x \in [0;1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $u_1 \notin D_A$ тому, що при $x = 0$ вона не є неперервною. Функція $u_2(x)$ неперервна при $x = 0$, але $\frac{d^2}{dx^2} u_2(x) = \frac{d}{dx}(\ln x + 1) = \frac{1}{x}$, $\left\| \frac{1}{x} \right\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} dx} = \infty$. Отже, норма функції $\frac{1}{x}$ не є скінченною, і тому $u_2(x) \notin D_A$. Функція $u_3(x)$ неперервна при $x = 0$,

$$\frac{d^2}{dx^2} u_2(x) = \frac{d}{dx}(2x \ln x + x) = 2\ln x + 3, \quad \| 2\ln x + 3 \| = \sqrt{\int\limits_0^1 (2\ln x + 3)^2 dx} = \sqrt{5}.$$

Значення оператора мають скінченну норму, тому функція $u_3(x) \in D_A$.

Означення 7.3. Лінійний оператор A називається симетричним, якщо $\forall u, v \in D_A$ виконується тотожність

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{7.1}$$

Приклад 7.2. Перевірити симетричність операторів $Au = -\frac{d^2 u}{dx^2}$, $x \in (0;1)$ і $Bu = -\frac{d^2 u}{dx^2}$, $x \in (0;1)$, $u(0) = u(1) = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що оператори A та B лінійні. Перевіримо виконання умови (7.1):

$$(Au, v) - (u, Av) = -\int\limits_0^1 \left[v \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d^2 v}{dx^2} \right] dx = -\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \Bigg|_0^1 +$$

$$+ \int\limits_0^1 \left[\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \right] dx = -\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \Bigg|_0^1 \neq 0;$$

$(Bu, v) - (u, Bv) = -\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \Bigg|_0^1 = 0$ завдяки граничним умовам.

Таким чином, оператор A не є симетричним, а оператор B - симетричний.

Означення 7.4. Симетричний оператор A називається додатним, якщо $\forall u(p) \in D_A$ виконується нерівність

$$(Au, u) \geq 0, \tag{7.2}$$

причому $(Au, u) = 0$ лише тоді, коли $u(P) \equiv 0$.

Приклад 7.3. Перевірити, чи буде додатним оператор $Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}$, $x \in (0;1)$, $u(0) = u(1) = 0$.

Розв'язання. Симетричність оператора Bu доведено в прикладі 7.2. Обчислимо

$$(Bu,u) = -\int_0^1 u\frac{d^2u}{dx^2}dx = -u\frac{du}{dx}\Big|_0^1 + \int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0 .$$

Припустимо, що $(Bu,u) = 0$. Тоді $\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, $u = \text{const}$. Але $u(0) = u(1) = 0$, і тому $u(x) \equiv 0$.

Таким чином, означення (7.4) виконується і наведений оператор додатний.

Приклад 7.4. Розглянемо рівняння Пуассона $-\Delta u = f(P)$, де P - точка двовимірної або тривимірної області Ω, $\|f\| < \infty$, функція $u \in C^{(2)}(\Omega + S)$, S - границя області Ω. Перевірити, чи буде оператор $Au = -\Delta u$ додатним у випадках:

а) $u\big|_S = 0$ (задача Діріхле);

б) $\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)u\right]\Big|_S = 0$, $\sigma(P) > 0$;

в) $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$ (задача Неймана).

Розв'язання. Для розв'язання задач прикладу 7.4 буде використовуватися перша формула Гріна [6]

$$\int_\Omega u\Delta v d\Omega = -\int_\Omega \text{grad}u \cdot \text{grad}v d\Omega + \int_{(S)} u\frac{\partial v}{\partial n}dS :$$

а) $(-\Delta u, u) = -\int_{(\Omega)} u\Delta u d\Omega = \int_{(\Omega)} (\text{grad}u)^2 d\Omega - \int_{(S)} u\frac{\partial u}{\partial n}dS =$

$= \int_{(\Omega)} (\text{grad}u)^2 d\Omega \geq 0$. Якщо $(-\Delta u, u) = 0$, то $\int_{(\Omega)} (\text{grad}u)^2 d\Omega = 0$ і $\text{grad}u = 0$.

Звідси $u = \text{const}$, але $u\big|_S = 0$, і тому $u \equiv 0$. Виконується означення 7.4 і оператор додатний;

б) $(-\Delta u,u)=\int\limits_{(\Omega)}(\mathrm{grad}u)^2 d\Omega-\int\limits_{(S)}u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\int\limits_{(\Omega)}(\mathrm{grad}u)^2 d\Omega+\int\limits_{(S)}\sigma u^2 dS\geq 0$.

Якщо $(-\Delta u,u)=0$, то $\begin{cases}\int\limits_{(S)}\sigma u^2 dS=0;\\ \int\limits_{(\Omega)}(\mathrm{grad}u)^2 d\Omega=0.\end{cases}$

З другого рівняння системи знаходимо, що $\mathrm{grad}u=0$ і $u=c=\mathrm{const}$. Тоді з першого рівняння системи отримуємо $c^2\int\limits_{(S)}\sigma dS=0$. Але $\sigma>0$, тому $c=0$ і $u\equiv 0$. Оператор додатний;

в) $(-\Delta u,u)=\int\limits_{(\Omega)}(\mathrm{grad}u)^2 d\Omega\geq 0$. Якщо $(-\Delta u,u)=0$, то $\mathrm{grad}u=0$ і $u=\mathrm{const}$. Отже, оператор $Au=-\Delta u$ не є додатним.

Як відомо з курсу математичної фізики, задача Неймана не має розв'язків для довільної функції $f(P)$. Для існування розв'язку задачі Неймана необхідно, щоб $\int\limits_{(\Omega)}f(P)d\Omega=0$. У цьому випадку задача Неймана має безліч розв'язків і всі вони відрізняються на довільну сталу. Довільну сталу можна вибрати таким чином, щоб розв'язок $u(P)$ задовольняв умову

$$\int\limits_{\Omega}u(P)d\Omega=0. \tag{7.3}$$

За умови виконання рівності (7.3) оператор $Au=-\Delta u$ в задачі Неймана вже буде додатним, оскільки виконується ланцюжок перетворень: $(-\Delta u,u)=0\Rightarrow \mathrm{grad}u=0\Rightarrow u=\mathrm{const}$. Але стала величина, яка задовольняє умову (7.3), тотожно дорівнює нулю.

Означення 7.5. Симетричний оператор A називається додатно визначеним, якщо $\forall u(p)\in D_A$ виконується нерівність

$$(Au,u)\geq\gamma^2\|u\|^2, \tag{7.4}$$

де γ - додатна стала.

Приклад 7.5. Довести, що оператор $Ly=-\frac{d}{dx}(p(x)y'(x))+r(x)y(x)$ є додатно визначеним, якщо $x\in(a,b)$, $y(a)=y(b)=0$, $p(x)>0$, $r(x)\geq 0$.

Розв'язання. Лінійність оператора L очевидна. Доведемо спочатку симетричність оператора L. Маємо

$$(Lu,v)=\int_a^b\left[-\frac{d}{dx}(pu')+ru\right]vdx=$$

$$=-pu'v\Big|_a^b+\int_a^b p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx+\int_a^b ruvdx=\int_a^b\left[p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+ruv\right]dx=(u,Lv).$$

Симетричність оператора доведено. Доведемо також, що оператор L додатно визначений. Для цього візьмемо $v=u$ і розглянемо

$$(Lu,u)=\int_a^b\left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2+ru^2\right]dv\ge\int_a^b p\left(\frac{du}{dx}\right)^2dv\ge p_0\int_a^b\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx=p_0\|u'\|^2.$$

Проведені оцінки мають місце тому, що $r(x)\ge 0$ для будь-яких значень $x\in[a,b]$, а функція $p(x)\in C[a,b]$ і тому досягає свого найменшого значення. В даному випадку це p_0. Таким чином, залишилося оцінити $\|u'\|^2$. Використовуючи нерівність Коші - Буняковського, проведемо такі перетворення:

$$u(x)=\int_a^x u'(t)dt,\ u^2(x)=\left(\int_a^x 1\cdot u'(x)dx\right)^2\le\int_a^x 1^2dt\cdot\int_a^x u'^2(t)dt=$$

$$=(x-a)\int_a^x u'^2(t)dt\le(x-a)\int_a^b u'^2(t)dt=(x-a)\|u'\|^2.$$

Таким чином, $u^2(x)\le(x-a)\|u'\|^2$. Зінтегруємо останню нерівність: $\int_a^b u^2(x)dx\le\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b\|u'\|^2=\frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|^2$. Маємо $\|u\|^2\le\frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|^2$ і $(Lu,u)\ge p_0\|u'\|^2\ge\frac{2p_0}{(b-a)^2}\|u\|^2$. Отже, нерівність (7.4) виконується і оператор L є додатно визначеним.

Зауваження 7.1. Аналогічно, використовуючи нерівності Фрідріхса і Пуанкаре [6], можна довести додатну визначеність оператора $Au=-\Delta u$ для задач Діріхле, Неймана (за умови використання рівності (7.3)) і мішаної задачі.

7.2. Збіжність за енергією

Припустимо, що деяка система під впливом зовнішнього зусилля, яке задається функцією $f(P)$, отримує зміщення $u(P)$. Функції $u(P)$ і $f(P)$ зв'язані рівнянням

$$Au = f, \tag{7.5}$$

де $u \in D_A$, $\|f\| < \infty$ і A - додатний оператор.

Величина $(Au, u) = (f, u)$ пропорційна величині енергії, яку потрібно витратити, щоб надати системі зміщення $u(P)$. Тому додатність оператора має таке фізичне тлумачення: неможливо надати системі яке-небудь зміщення без витрачання на це енергії. Вираз (Au, u) досить часто називають енергією.

Означення 7.6. Енергетичною нормою, або нормою енергії функції $u(P) \in D_A$, називається $\sqrt{(Au, u)}$.

Енергетична норма позначається $\|u\|_E$. Таким чином, має місце запис

$$\sqrt{(Au, u)} = \|u\|_E. \tag{7.6}$$

За міру близькості двох функцій $u(P)$, $v(P) \in D_A$ береться корінь квадратний з енергії їхньої різниці, тобто

$$\|u - v\|_E = \sqrt{(A(u - v), u - v)}. \tag{7.7}$$

Розглянемо послідовність функцій $u_n(P) \in D_A$, $n = 1,2\dots$.

Означення 7.7. Послідовність функцій $u_n(P)$ збігається за енергією до функції $u(P) \in D_A$, якщо $\|u_n - u\|_E \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Збіжність за енергією послідовності функцій $u_n(P)$ до функції $u(P)$ будемо записувати так: $u_n(P) \xrightarrow{E} u(P)$.

Зауваження 7.2. Широке застосування мають рівномірна близькість функцій і близькість у середньому. У випадку рівномірної близькості $\|u(P) - v(P)\| = \max\limits_{p} |u(P) - v(P)| \to 0$, а у випадку близькості у середньому $\|u(P) - v(P\| = \sqrt{\int\limits_{(\Omega)} [u(P) - v(P)]^2 d\Omega} \to 0$.

Теорема 7.1. Якщо оператор A додатно визначений і $u_n \xrightarrow{E} u$, то одночасно $u_n \xrightarrow{сер} u$.

Доведення. Проведемо оцінки енергетичної норми, виходячи з рівності (7.6) і нерівності (7.4):

$\|u\|_E = \sqrt{(Au,u)} \geq \sqrt{\gamma^2 \|u\|^2_{сер}} = \gamma\|u\|_{сер}$; $\gamma > 0$, звідки $\|u\|_{сер} \leq \dfrac{1}{\gamma}\|u\|_E$. В останній нерівності замінимо u на $u_n - u$ і отримаємо $\|u_n - u\|_{сер} \leq \dfrac{1}{\gamma}\|u_n - u\|_E$.

Збіжність у середньому є окремим випадком збіжності за енергією. Дійсно, якщо взяти $A = u$, $Eu = u$, то $\|u\|_E = \sqrt{(Eu,u)} = \sqrt{\|u\|^2_{сер}} = \|u\|_{сер}$. Тоді $\|u_n - u\|_E = \|u_n - u\|_{сер}$.

Розглянемо скалярний добуток (Au, v), де $u, v \in D_A$, а A - додатний оператор.

Означення 7.7. Величина (Au, v) називається енергетичним добутком функцій $u(P)$ і $v(P)$ і позначається символом $[u, v]$, тобто

$$[u,v] = (Au,v) = \int_{(\Omega)} v \cdot Aud\Omega, \; u,v \in D_A . \tag{7.8}$$

Енергетичний добуток (7.8) задовольняє всі властивості скалярного добутку, а саме:

1. $[u,v] = (Au,v) = (u,Av) = [v,u]$ (оператор A - додатний, а тому й симетричний.
2. $[\alpha u_1 + \beta u_2, v] = \alpha[u_1, v] + \beta[u_2, v]$, де $\alpha, \beta \in R$, $u_1, u_2, v \in D_A$. Наведена властивість лінійності енергетичного добутку має місце тому, що оператор A є лінійним оператором (див. означення 7.3 і 7.4).
3. $[u,u] = (Au,u) = \|u\|^2_E \geq 0$.
4. $[u,u] = (Au,u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u \equiv 0$. Оператор A - додатний, а з властивостей 3 і 4 якраз складається означення (7.4) додатності оператора.

Норма за енергією $\|u\|^2_E = [u,u]$ задовольняє всі властивості норми (в чому легко переконатися), зокрема, має місце нерівність

$$\left|[u,v]\right| \leq \|u\|_E \cdot \|v\|_E ,$$

яка є аналогом нерівності Коші – Буняковського, і нерівність трикутника

$$\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E .$$

Лінеал D_A з енергетичним добутком (7.8) утворює лінійний простір з енергетичним добутком. Цей простір може бути і не повним за енергією. Додамо до лінеалу D_A границі всіх фундаментальних у D_A послідовностей з нормою $\|u\|_E$. Тоді лінеал D_A з енергетичним добутком буде утворювати повний за енергією лінійний простір.

Означення 7.8. Повний лінійний простір D_A з енергетичним добутком (7.8) називається енергетичним простором додатного оператора A. Позначимо його H_A.

7.3. Теорема про мінімальний функціонал. Мінімізуюча послідовність і її збіжність

Метою цього підрозділу є встановлення відповідності між існуванням розв'язку функціонального рівняння (7.5) і квадратичним функціоналом

$$F[u] = (Au, u) - 2(u, f) = \int_{\Omega} u(P)[Au(P) - 2f(P)]d\Omega. \qquad (7.9)$$

Теорема 7.2. Якщо A - додатний оператор, то рівняння (7.5) $Au = f, u \in D_A$, $\|f\| < \infty$ не може мати більше одного розв'язку.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $\exists u_1, u_2 \in D_A$ і такі, що $Au_1 = f$, $Au_2 = f$. Тоді $A(u_1 - u_2) = 0$ і $(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0$. Оскільки оператор додатний, то згідно з означенням (7.4) $u_1 - u_2 \equiv 0$, $u_1 \equiv u_2$. Цей висновок суперечить припущенню, що рівняння (7.5) може мати більше одного розв'язку.

Теорема 7.3 (теорема про мінімальний функціонал). Нехай A - додатний оператор. Якщо рівняння $Au = f$, $u \in D_A$, $\|f\| < \infty$ має розв'язок $u_0 \in D_A$, то квадратичний функціонал (7.9) набуває на функції $u = u_0$ мінімального значення.

Обернене твердження. Нехай серед функцій $u \in D_A$ існує функція u_0, яка надає функціоналу (7.8) мінімальне значення. Тоді ця функція є розв'язком рівняння (7.5).

Доведення.

Необхідність. Нехай функція $u = u_0$ є розв'язком рівняння (7.5), тобто $Au_0 = f$. Запишемо функціонал (7.9), де замість функції f підставимо Au_0:

$$F[u] = (Au, u) - 2(Au_0, u) = [u, u] - 2[u_0, u] = [u, u] - 2[u_0, u] + [u_0, u_0] - [u_0, u_0] =$$
$$= [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0] = \|u - u_0\|_E^2 - \|u_0\|_E^2.$$

Функціонал $F[u]$ досягає свого мінімального значення тоді і тільки тоді, коли $u = u_0$, а саме $\min\limits_{u \in D_A} F[u] = F[u_0] = -\|u_0\|_E^2$.

Достатність. Нехай функція $u = u_0(P) \in D_A$ надає функціоналу $F[u]$ мінімальне значення. Візьмемо довільну функцію $h(P) \in D_A$ і довільне число $\lambda \in R$. Сума $u_0 + \lambda h \in D_A$ і $F[u_0 + \lambda h] - F[u_0] \geq 0$. Здійснимо деякі перетворення лівої частини останньої нерівності

$$\begin{aligned} F[u_0 + \lambda h] - F[u_0] &= (A(u_0 + \lambda h), u_0 + \lambda h) - 2(u_0 + \lambda h, f) - (Au_0, u_0) + \\ &+ 2(u_0, f) = (Au_0, u_0) + \lambda(Ah, u_0) + \lambda(Au_0, h) + \lambda^2(Ah, h) - 2(u_0, f) - \\ &- 2\lambda(h, f) - (Au_0, u_0) + 2(u_0, f) = 2\lambda(Au_0, h) + \lambda^2(Ah, h) - 2\lambda(h, f) = \\ &= 2\lambda(Au_0 - f, h) + \lambda^2(Ah, h) = Q(\lambda) \geq 0. \end{aligned}$$

У вищенаведених перетвореннях ураховано, що оператор A - симетричний. Функція $Q(\lambda)$ є квадратним двочленом відносно параметра λ. Нерівність $Q(\lambda) \geq 0$ виконується лише тоді, коли дискримінант цього квадратного двочлена не є додатним, тобто $(Au_0 - f, h)^2 - (Ah, h)^2 \cdot 0 = (Au_0 - f, h)^2 \leq 0$, а це можливо лише тоді, коли $(Au_0 - f, h) = 0$.

Оскільки енергетичний простір оператора A повний, то остання рівність для будь-яких функцій $h \in D_A$ можлива лише тоді, коли $Au_0 - f = 0$, тобто u_0 є розв'язком рівняння (7.5).

З погляду практичного застосування теореми 7.3 важливо мати алгоритм, який дає можливість будувати послідовності функцій, які збіжні до розв'язку u_0.

Означення 7.9. Послідовність функцій u_n, $n = 1,2...$, які належать області визначення функціонала $F[u]$, називається мінімізуючою для цього функціонала, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} F(u_n) = d$, де $d = \inf F[u]$.

Нехай A, як і раніше, є додатним оператором, а рівняння $Au = f$ має розв'язок $u = u_0$. Тоді для функціонала (7.9) $\min\limits_{u \in D_A} F[u] = F[u_0] = -\|u_0\|_E^2$ (див. теорему 7.3) і мінімізуюча послідовність визначається рівністю $\lim\limits_{n \to \infty} F(u_n) = -\|u_0\|_E^2$.

Теорема 7.4. Якщо рівняння $Au = f$ має розв'язок $u = u_0$, де A - додатний оператор, $u \in D_A$, $\|f\| < \infty$, то будь-яка мінімізуюча для функціонала (7.8) послідовність збігається за енергією до розв'язку u_0.

Доведення. Якщо u_n, $n = 1,2...$ - мінімізуюча послідовність для функціонала (7.9), то

$$F[u_n] = \|u_n - u_0\|_E^2 - \|u_0\|_E^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\|u_0\|_E^2.$$

Тому $\|u_n - u_0\|_E \to 0$ і $u_n \xrightarrow{E} u_0$. Якщо припустити, що оператор A додатно визначений, то (див. теорему 7.1) $u_n \xrightarrow{сер} u_0$.

Теорема 7.4 є основою для застосування прямих методів до розв'язання крайових задач.

Зауваження 7.3. Розв'язок $u = u_0$ рівняння (7.5), який мінімізує функціонал (7.8) в H_A, як правило, називають узагальненим розв'язком рівняння (7.4).

Розділ 8. ПРЯМІ МЕТОДИ У ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ

8.1. Метод Рітца

У методі Рітца реалізується один з напрямів побудови мінімізуючої послідовності.

Розглянемо рівняння $Au = f$ (7.5), де A – додатний оператор. Пошук розв'язку рівняння (7.5) зводиться до знаходження мінімуму функціонала (7.9).

Виберемо послідовність координатних функцій $\{\varphi_k(P)\}_{k=1}^{\infty}$, таких, що $\varphi_к(P) \in D_A, к = 1,2,...$, послідовність $\{\varphi_k(P)\}_{к=1}^{\infty}$є повною за енергією і для будь-якого значення $n \in N$ функції $\{\varphi_k(P)\}_{к=1}^{\infty}$ лінійно незалежні.

Будемо шукати мінімізуючу послідовність для функціонала (7.9) у вигляді

$$U_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P), \tag{8.1}$$

де $a_k, k = \overline{1,n}$ - довільні дійсні сталі.

Підставимо функцію $U_n(P)$ з (8.1) у функціонал (7.8):

$$F[u_n] = (Au_n, u_n) - 2(f, u_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k, \sum_{s=1}^{n} a_s \varphi_s \right) - 2\left(f, \sum_{s=1}^{n} a_s \varphi_s \right) =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} a_k a_s (A\varphi_k, \varphi_s) - 2\sum_{s=1}^{n} a_s (\varphi_s, f) = g(a_1, a_2, ..., a_n). \tag{8.2}$$

З виразу (8.2) видно, що функціонал (7.9) перетворився у функцію багатьох незалежних змінних $a_k, k = \overline{1,n}$. Застосуємо до функції $g(a_1, a_2, ..., a_n)$ необхідні умови екстремуму $\frac{\partial g}{\partial a_s} = 0, s = \overline{1,n}$. Маємо

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F[u_n]}{\partial a_s} = \sum_{k=1}^{n} a_k (Au_k, \varphi_s) - (f, \varphi_s) = 0, s = \overline{1,n},$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} a_k = \gamma_s, s = \overline{1,n}, \tag{8.3}$$

де

$$\beta_{sk} = (A\varphi_k, \varphi_s), \gamma_s = (f, \varphi_s). \tag{8.4}$$

Система (8.3) з коефіцієнтами (8.4) є лінійною системою алгебричних рівнянь відносно невідомих $a_k, k = \overline{1,n}$. Головний визначник цієї системи є визначником Грама і тому відмінний від нуля.

Теорема 8.1. Наближені розв'язки (8.1) рівняння (7.5) утворюють мінімізуючу послідовність для функціонала (7.9.), якщо рівняння (7.5) має розв'язок зі скінченною енергією.

Доведення. Нехай $u_0 \in H_A$ - розв'язок рівняння $Au = f$. Тоді з системи (8.3) маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [\varphi_k, \varphi_s]_A = (f, \varphi_s) = [u_0, \varphi_s]_A,$$

або

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k - u_0, \varphi_s\right]_A = [u_n - u_0, \varphi_s] = 0, \ s = \overline{1,n}, \ n = 1,2,... .$$

В силу повноти функцій $\{\varphi_k(P)\}_{k=1}^{\infty}$ існує функція $v_n = \sum_{s=1}^{n} c_s \varphi_s(P)$, така, що $\|v_n - u_0\|_A \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Обчислимо значення функціонала (7.9) на сукупності функцій V_n, $n = 1,2,...$. Маємо

$$F[v_n] = \|v_n - u_o\|_A^2 - \|u_o\|_A^2 = \|(v_n - u_n) + (u_n - u_o)\|_A^2 - \|u_o\|_A^2 =$$

$$= \|v_n - u_n\|_A^2 + \|u_n - u_o\|_A^2 + [v_n - u_n, u_n - u_o] - \|u_o\|_A^2 = \|u_n - u_o\|_A^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} (c_s - a_s)[u_n - u_o, \varphi_s] - \|u_o\|^2 = \|u_n - u_o\|_A^2 - \|u_o\|_A^2 = F[u_n].$$

Таким чином, $F[v_n] \ge F[u_n] \ge -\|u_0\|_A^2$, і $\|v_n - u_0\|_A \ge \|u_n - u_0\|_A \ge 0$. Тепер спрямуємо $n \to \infty$:

$$\|v_n - u_0\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \lim_{n\to\infty} F[v_n] = -\|u_0\|_A^2,$$

і тому

$$\lim_{n\to\infty} F[u_n] = -\|u_0\|_A^2, \|u_n - u_0\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отже, наближений розв'язок $u_n(x)$ збігається за енергією до точного розв'язку u_0. Якщо оператор A не тільки додатний, але й додатно визначений, то збіжність буде і в середньому (див. теорему 7.1).

8.2. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$y'' + m(x)y' + q(x)y = R(x) \tag{8.5}$$

з лінійними крайовими умовами

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(x_0) - \alpha_2 y'(x_0) &= A, \\ \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) &= B, \end{aligned} \tag{8.6}$$

де $m(x)$, $q(x)$, $R(x) \in C[x_0, x_1]$, $q(x) \le 0$, а $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \ne 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \ne 0$.

В подальшому умови (8.6) можна вважати однорідними. Якщо це не так, то побудуємо функцію $z = z(x)$, $z(x)$ є $C^{(2)}[x_0 x_1]$, яка задовольняє умови (8.6). Тоді функція $u = u(x)$, яка визначається рівністю $u = y - z$, буде задовольняти однорідні граничні умови.

Так, наприклад, якщо крайові умови (8.6) мають вигляд

$$y(x_0) = A, y(x_1) = B, \tag{8.7}$$

що відповідає значенням параметрів $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$, то функцію $z(x)$ беремо такою:

$$z(x) = \frac{B - A}{x_1 - x_0}(x - x_0) + A.$$

Рівняння (8.5) потрібно звести до спеціального вигляду:

$$A[y] = -\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + r(x)y = f(x). \tag{8.8}$$

Для цього помножимо рівняння (8.5) на функцію $p(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} m(x)dx} > 0$. Після нескладних перетворень отримаємо рівняння (8.7), де $r(x) = -p(x)q(x) \ge 0,\ f(x) = -R(x)p(x)$.

Таким чином, розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння (8.8) з однорідними крайовими умовами (8.6) (у цих умовах $A = B = 0$), де $p(x),\ r(x),\ p'(x),\ f(x) \in C[x_0, x_1], \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - невід'ємні, α_1 і α_2, а також β_1 і β_2 одночасно не обертаються в 0, $p(x) > 0, r(x) \ge 0$.

З урахуванням зроблених припущень оператор

$$A[y] = -\frac{d}{dx}(p(x)y') + r(x)y \tag{8.9}$$

рівняння (8.8) є додатно визначеним. Це твердження для граничних умов $y(x_0) = y(x_1) = 0$ доведено в прикладі 7.5.

Аналогічно додатну визначеність оператора (8.9) можна довести й для однорідних граничних умов (8.6) [6].

Наближений розв'язок рівняння (8.8) розшукуємо у вигляді (8.1), а саме $y_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$, де невідомі сталі a_k, $k = \overline{1,n}$ є розв'язками системи (8.3) з коефіцієнтами (8.4):

$$\beta_{sk} = (A\varphi_k, \varphi_s) = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[-\frac{d}{dx}(p\varphi_k') + r\varphi_k\right]\varphi_s dx =$$

$$= p(x_0)\varphi_k(x_0)\varphi_s(x_0) - p(x_1)\varphi_k(x_1)\varphi_s(x_1) + \int\limits_{x_0}^{x_1}[p\varphi_k'\varphi_s' + r\varphi_k\varphi_s];$$

$$\gamma_s = \int\limits_{x_0}^{x_1} f\varphi_s(x)dx. \tag{8.10}$$

Кожна з функцій $\varphi_k(x), k = \overline{1,n}$ (8.1) повинна задовольняти крайові умови. У випадку однорідних крайових умов (8.7) функції $\varphi_k(x)$ можна записувати у вигляді $\varphi_k(x) = \omega(x)x^{k-1}, k = \overline{1,n},$ де $\omega(x) = (x - x_0)(x_1 - x_0)$.

Приклад 8.1. Побудувати варіаційну задачу для крайової задачі $y'' - y + x = 0, y(0) = y(1) = 0$ і знайти її наближені розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

Розв'язання. Неважко переконатися в тому, що запропонована задача має розв'язок $y = x - \dfrac{shx}{sh1}$.

Побудуємо варіаційну задачу. Функціонал (7.9) має вигляд

$$F[y]=(Ay,y)-2(y,f)=\int_{x_0}^{x_1}\left(-\frac{d}{dx}(y')+y-2x\right)ydx=-yy'\Big|_{x_0}^{x_1}+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+y^2-2xy\right)dx==\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+y^2-2xy\right)dx.$$

Координатні функції запишемо так: $\varphi_k(x)=x(1-x)x^{k-1}, k=\overline{1,n}$. За умовою знаходимо наближені розв'язки $y_1(x)=a_1x(1-x)$ і $y_2(x)=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)$. Для цього розв'язуємо систему (8.4) з коефіцієнтами (8.10), де $p=1$, $r=1$, $f=x$.

У коефіцієнтах β_{sk} позаінтегральні члени дорівнюють нулю.

Спочатку знайдемо наближений розв'язок $y_1(x)$:

$$\beta_{11}=\int_0^1\left[\varphi_1'^2+\varphi_1^2\right]dx=\begin{vmatrix}\varphi_1=x(1-x)\\ \varphi_1'=1-2x\end{vmatrix}=\int_0^1\left[(1-2x)^2+x^2(1-x)^2\right]dx=\frac{11}{30};$$

$$\gamma_1=\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{1}{12};\beta_{11}a_1=\gamma_1;\ a_1=\frac{\gamma_1}{\beta_{11}}=\frac{5}{22};y_1=\frac{5}{22}x(1-x).$$

Тепер знайдемо $y_2(x)$:

$$\beta_{11}=\frac{11}{30};\ \beta_{12}=\beta_{21}=\int_0^1\left[\varphi_1'\varphi_2'+\varphi_1\varphi_2\right]dx=\begin{vmatrix}\varphi_2=x^2(1-x)\\ \varphi_2'=2x-3x^2\end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^1\left[(1-2x)\left(2x-3x^2\right)+x^3\left(1-x^2\right)\right]dx=\frac{11}{60};$$

$$\beta_{22}=\int_0^1\left[\varphi_2'^2+\varphi_2^2\right]dx=\int_0^1\left[(2x-3x_2)^2+x^4(1-x)^2\right]dx=\frac{1}{7};$$

$$\gamma_1=\frac{1}{12};\gamma_2=\int_0^1 x^3(1-x)dx=\frac{1}{20}.$$

Система (8.4) має вигляд

$$\begin{cases}\frac{11}{30}a_1+\frac{11}{60}a_2=\frac{1}{12};\\ \frac{11}{60}a_1+\frac{1}{7}a_2=\frac{1}{20}.\end{cases}$$

Звідси

$$a_1 = \frac{69}{473}, \quad a_2 = \frac{7}{43}, \quad y_2 = x(1-x)\left(\frac{69}{473} + \frac{7}{43}x\right).$$

Для порівняння значень в проміжних точках точного розв'язку y, наближень y_1 і y_2 складемо таблицю (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

x	y_1	y_2	y
$1/4$	0,04261	0,03498	0,03505
$1/2$	0,05682	0,05682	0,05659
$3/4$	0,04261	0,05024	0,05027

З цієї таблиці видно, що максимальна похибка вже другого наближення не перевищує 0,0002.

Зауваження 8.1. Для оцінювання точності розв'язків, обчислених методом Рітца або іншими прямими методами, як правило, користуються таким прийомом: обчислюють наближення $y_n(x)$ і $y_{n+1}(x)$ та порівнюють їхні значення у деяких проміжних точках відрізка $(x_0; x_1)$. Якщо в межах заданої точності їхні значення збігаються, то вважають, що розв'язком задачі є y_n. Якщо значення не збігаються, то обчислюють y_{n+2} і т.д.

8.3. Крайові задачі для двовимірних рівнянь Лапласа і Пуассона

Розглянемо крайову задачу для рівняння

$$-\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = f(x, y), (x, y) \in D \tag{8.11}$$

з однорідною граничною умовою

$$u = 0, (x, y) \in L \text{ (задача Діріхле)}, \tag{8.12}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x, y) \in L \text{ (задача Неймана)}, \tag{8.13}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, (x, y) \in L \text{ (мішана задача)}. \tag{8.14}$$

Оператор $Au = -\Delta u$ є додатним і навіть додатно визначеним для кожної з крайових задач (8.12) – (8.14) (див. приклад 7.4 і зауваження 7.2). Для задачі Неймана (8.13) потрібно враховувати умову (7.3).

Умови (8.12) – (8.14) можна розглядати однорідними. Якщо це не так, то достатньо побудувати будь-яку двічі неперервну диференційовну функцію $h(x,y)$, яка задовольняє відповідні неоднорідні умови (8.12) – (8.14) на границі L. Тоді нова функція z, така, що $z = u - h$, буде задовольняти однорідні умови (8.12) – (8.14).

Наближений розв'язок рівняння (8.11) розшукуємо у вигляді (8.1), а саме

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x,y), \tag{8.15}$$

де невідомі сталі $a_k, k = \overline{1,n}$ є розв'язками системи (8.3) з коефіцієнтами (8.4). Для наведених крайових задач коефіцієнти (8.4) мають вигляд

$$\beta_{sk} = (A\varphi_k, \varphi_s) = -\iint\limits_{(D)} \varphi_s \Delta\varphi_k dxdy = \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y} \right] dxdy,$$

$$\gamma_s = \iint\limits_{(D)} f\varphi_s dxdy. \tag{8.16}$$

Кожна з функцій $\varphi_k(x,y)$ мусить задовольняти якусь граничну умову (8.12) – (8.14) залежно від задачі, яка розв'язується. Тому кожна з функцій $\varphi_k(x,y)$ повинна мати множник $\omega(x,y) \ge 0$, який на границі області L обертається в нуль. Це можна зробити так: $\varphi_1 = \omega,\ \ \varphi_2 = \omega x,\ \ \varphi_3 = \omega y,\ \ \varphi_4 = \omega x^2,\ \ \varphi_5 = \omega xy,\ \ \varphi_6 = \omega y^2,\ ...$.

Приклади побудови функції $\omega(x,y)$ для різних областей D з границею Г (рис. 8.1):

рис. 8.1, а: $\omega(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{n}(c_i - a_i x - b_i y)$;

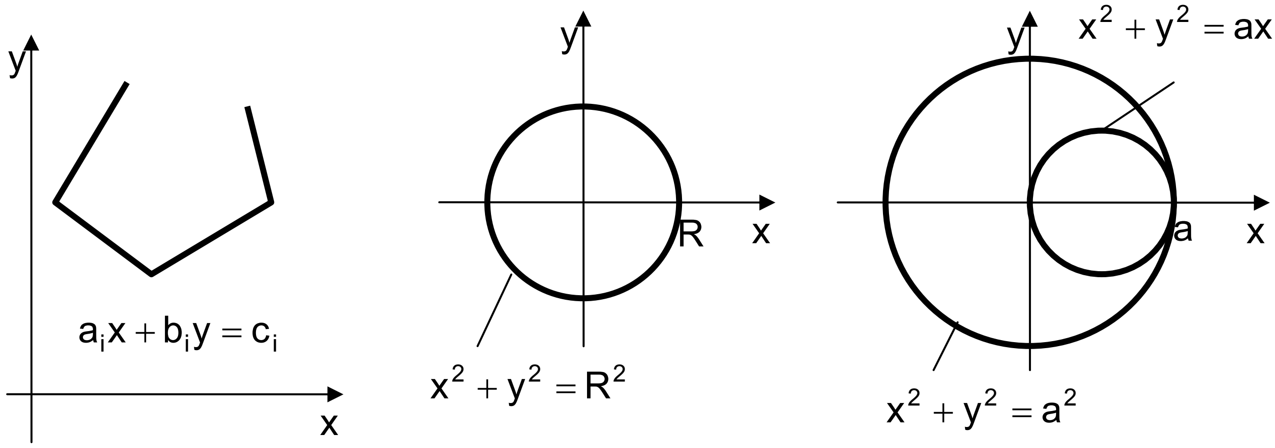
рис. 8.1, б: $\omega(x,y) = R^2 - x^2 - y^2$;

рис. 8.1, в: $\omega(x,y) = (a^2 - x^2 - y^2)$.

Приклад 8.2. Побудувати варіаційну задачу для крайової задачі $-\Delta u = 1, u_{|\Gamma} = 0$, де Γ - контур прямокутника $-2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$. Знайти розв'язки $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ і $u_3(x,y)$ цієї варіаційної задачі.

Розв'язання. Функціонал (7.9) заданої крайової задачі має вигляд

$$F[u]=(Au,u)-2(u,f)=\iint\limits_{(D)}\left[(u'_x)^2+(u'_y)^2-2u\right]dxdy\,.$$



а б в

Рис. 8.1

Наближений розв'язок (8.15) (враховуючи симетрію задачі) записуємо у вигляді

$$u_n(x)=\left(4-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(a_1+a_2x^2+a_3y^2+a_4x^2y^2+...\right),$$

де $\omega(x,y)=\left(4-x^2\right)\left(1-y^2\right)$ - функція, яка забезпечує виконання граничних умов $u_{|\Gamma}=0$.

За умовою знаходимо наближені розв'язки

$$u_1(x,y)=a_1\omega(x,y),\ \ u_2(x,y)=\omega(x,y)\left(a_1+a_2x^2\right),$$

$$u_3(x,y)=\omega(x,y)\left(a_1+a_2x^2+a_3y^2\right).$$

Для цього розв'язуємо систему (8.3) з коефіцієнтами (8.16), де $f=1$. Функції $\varphi_i(x,y)$, $\ i=\overline{1,3}$, які є у формулах (8.4), дорівнюють

$$\varphi_1(x,y)=\omega(x,y),\ \varphi_2(x,y)=x^2\omega(x,y),\ \varphi_3(x,y)=y^2\omega(x,y).$$

Знаходимо наближений розв'язок $u_1(x,y)$:

$$\beta_{11}=\iint\limits_{(D)}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=4\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-1}^{1}\left[x^2\left(1-y^2\right)^2+y^2\left(4-x^2\right)^2\right]dy=$$
$$=113,7779;$$

$$\gamma_1 = \iint\limits_{(D)} f\varphi_1 dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{1} (4 - x^2)(1 - y^2)dy = 13{,}3778; \; a_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_{11}} = 0{,}125;$$

$$u_1(x, y) = 0{,}125(4 - x^2)(1 - y^2).$$

Далі знаходимо розв'язок $u_2(x, y)$:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \iint\limits_{(Д)} \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right] dxdy = 70{,}2171;$$

$$\beta_{22} = \iint\limits_{(Д)} \left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = 183{,}7782; \quad \gamma_2 = \iint\limits_{(Д)} f\varphi_2 dxdy = 11{,}3778.$$

Система (8.3) має вигляд

$$\begin{cases} \beta_{11}a_1 + \beta_{12}a_2 = \gamma_1; \\ \beta_{21}a_1 + \beta_{22}a_2 = \gamma_2, \end{cases}$$

її розв'язок такий: $a_1 = 0{,}1136; a_2 = 0{,}0185$, а

$$u_2(x, y) = (4 - x^2)(1 - y^2)(0{,}1136 + 0{,}0185).$$

Нарешті, знаходимо $u_3(x, y)$: обчислимо за формулами (8.4) коефіцієнти $\beta_{13} = \beta_{31} = 27{,}3067$, $\beta_{23} = \beta_{32} = 5{,}2013$, $\gamma_3 = 2{,}8444$; система (8.3) має розв'язки $a_1 = 0{,}1155$, $a_2 = 0{,}018$, $a_3 = -0{,}0068$, а

$$u_3(x, y) = (4 - x^2)(1 - y^2)(0{,}1155 + 0{,}018x^2 - 0{,}0068y^2).$$

Для порівняння значень наближень в проміжних точках складемо таблиці (8.2) – (8.4).

З таблиць видно, що значення у проміжних точках другого і третього наближень відрізняються за абсолютною величиною не більш ніж на 0,008.

Таблиця 8.2

Значення наближення $u_1(x, y)$

y/x	0	0,5	1	1,5
0	0,5	0,4688	0,375	0,2188
0,5	0,375	0,3516	0,2813	0,1641

Таблиця 8.3

Значення наближення $u_2(x,y)$

y/x	0	0,5	1	1,5
0	0,4543	0,4433	0,3963	0,2717
0,5	0,3407	0,3324	0,2972	0,2037

Таблиця 8.4

Значення наближення $u_3(x,y)$

y/x	0	0,5	1	1,5
0	0,4622	0,4501	0,4005	0,2729
0,5	0,3416	0,3328	0,2966	0,2025

8.4. Метод Бубнова - Галеркіна

Метод Бубнова - Галеркіна є узагальненням методу Рітца для рівняння $Au = f$, де оператор A не обов'язково додатний.

Нехай лінійний оператор A визначено на множині, яка є щільною в деякому сепарабельному гільбертовому просторі. Виберемо послідовність функцій $\{\varphi_n(P)\}_{n=1}, \varphi_n \in D_{|A}$. Функції цієї послідовності повинні задовольняти лінійні однорідні граничні умови, бути неперервними і достатню кількість разів диференційовними (відповідно до вимог задачі) у замкненій області $\overline{\Omega} = \Omega + S$, де S - границя області Ω.

Наближений розв'язок рівняння $Au = f$ розшукуємо, як і раніше, у вигляді (8.1).

Побудуємо нев'язку

$$\Delta_n = Au_n - f. \tag{8.17}$$

За методом Бубнова - Галеркіна коефіцієнти $a_k, k = \overline{1,n}$ наближеного розв'язку (8.1) визначаються з умови ортогональності нев'язки (8.17) до всіх функцій $\{\varphi_m\}_{m=1}^{n}$, а саме

$$(\Delta_n \varphi_m) = 0, \ m = \overline{1,n}. \tag{8.18}$$

Систему рівнянь (8.18) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k \varphi_m) = (f, \varphi_m), \ m = \overline{1,n}. \tag{8.19}$$

За зовнішнім виглядом система (8.19) тотожна системі (8.3), яка була отримана у методі Рітца. Тому методи Бубнова - Галеркіна і Рітца збігаються, якщо оператор *A* додатний або додатно визначений.

Питання дослідження збіжності методу Бубнова - Галеркіна широко висвітлено у сучасній літературі [5 - 7], але виходять за межі цього посібника.

Запишемо систему рівнянь (8.19) для деяких диференціальних та інтегральних рівнянь.

1. Звичайні диференціальні рівняння другого порядку.

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8.20}$$

з граничними умовами

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{8.21}$$

Будемо вважати, що поставлена задача має єдиний розв'язок. Наближений розв'язок задачі (8.20) - (8.21) розшукуємо у вигляді (8.1), де функції $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n \in C^{(1)}[x_0; x_1]$ і задовольняють граничні умови (8.21). Крім того, ця система функцій має бути повною у такому розумінні: похідну будь-якої функції $y(x) \in C^{(1)}[x_0; x_1]$ можна скіль завгодно точно апроксимувати у середньому лінійними комбінаціями похідних $\{\varphi_k'\}_{k=1}^n, n = 1,2,...$.

Нехай $y_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$, тоді $Ay_n = -y_n'' + py_n' + qy_n$, $\Delta_n = Ay_n - f$.

З системи (8.19) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x_1} [-\varphi_k''\varphi_m + p\varphi_k'\varphi_m + q\varphi_k\varphi_m]dx = \int_{x_0}^{x_1} f\varphi_m dx. \tag{8.22}$$

Зінтегруємо частинами $\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi_k''\varphi_m dx = \varphi_k'\varphi_m\Big|_{x_0}^{x_1} - \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi_k'\varphi_m dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi_k'\varphi_m' dx$.

Результат підставимо у (8.22):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x_1} [\varphi_k'\varphi_m' + p\varphi_k'\varphi_m + q\varphi_k\varphi_m]dx = \int_{x_0}^{x_1} f\varphi_m dx,$$

або

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_{mk}a_k = \beta_m, m = \overline{1,n}, \qquad (8.23)$$

де

$$\omega_{mk} = \int_{x_0}^{x_1}\left[\varphi_k'\varphi_m' + p\varphi_k'\varphi_m + q\varphi_k\varphi_m\right]dx,$$

$$\beta_m = \int_{x_0}^{x_1} f\varphi_m dx, m = \overline{1,n}. \qquad (8.24)$$

Визначивши коефіцієнти $a_k, k = \overline{1,n}$ з системи (8.23) - (8.24), знайдемо наближений розв'язок $y_n(x)$.

Для оцінювання точності обчислень потрібно застосувати рекомендації, наведені в зауваженні 8.1.

2. Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$y(x) - \int_{x_0}^{x_1} K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad (8.25)$$

де $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^{x_1} K^2(x,t)dt < \infty, \|f\| < \infty.$

Припустимо, що рівняння (8.25) має єдиний розв'язок, такий, що $\|y\| < \infty$.

Наближений розв'язок рівняння (8.25) розшукуємо у вигляді (8.1): $y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$, де функції $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ утворюють повну систему функцій з погляду збіжності у середньому. Крім того, функції $\varphi_k(x)$ зручно вважати ортонормованими, тобто $(\varphi_k, \varphi_\gamma) = \begin{cases} 0, \gamma \neq k; \\ 1, \gamma = k. \end{cases}$ Якщо це не так, то можна провести процес ортогоналізації.

Підставимо наближений розв'язок $y_n(x)$ у рівняння (8.25). З урахуванням ортонормованості функцій $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ отримаємо систему лінійних рівнянь відносно $a_m, m = \overline{1,n}$:

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = \alpha_m, \qquad (8.26)$$

де

$$\gamma_{mk} = \int_{x_0}^{x_1} dt \int_{x_0}^{x_1} K(x,t) \varphi_m(x) \varphi_k(t) dx,$$

$$\alpha_m = \int_{x_0}^{x_1} f \varphi_m dx. \qquad (8.27)$$

3. Задача на власні числа.

Розглянемо задачу знаходження власних чисел лінійного оператора A, а саме $Au = \lambda u$. Наближений розв'язок задачі розшукуємо у вигляді (8.1). За методом Бубнова - Галеркіна записуємо систему (8.19), яка набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda (\varphi_k \varphi_m) \right] a_k = 0, m = \overline{1,n}.$$

Власні числа λ визначаються з характеристичного рівняння

$$\det\left[(A\varphi_k \varphi_m) - \lambda (\varphi_k \varphi_m) \right] = 0, \quad k, m = \overline{1,n}.$$

8.5. Метод Канторовича

Метод Канторовича займає проміжну позицію між точним методом побудови розв'язку і методом Рітца. У процесі застосування методу Канторовича розв'язок також розшукують у вигляді (8.15), але замість невизначених сталих $a_k, k = \overline{1,n}$ записують функції однієї невідомої змінної, а саме

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \varphi_k(x,y), \qquad (8.28)$$

або

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(y) \varphi_k(x,y). \qquad (8.29)$$

Метод Канторовича має більшу точність побудови наближених розв'язків, ніж метод Рітца. Це пояснюється тим, що клас функцій (8.28) – (8.29) ширше класу функцій (8.15). Тому серед функцій (8.28) -

(8.29) можна краще, ніж серед функцій (8.15), підібрати функції, які апроксимують розв'язок варіаційної задачі.

Розглянемо функціонал (2.15)

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_{(D)} F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy, \tag{8.30}$$

де область D обмежена прямими $x = x_0, x = x_1$ та двома кривими $\psi_1(x), \psi_2(x)$. Наближене рівняння екстремалі функціонала (8.30) розшукуємо у вигляді (8.28), вибираючи функції $\varphi_k(x,y)$ таким чином, щоб вони оберталися в нуль на границі області D за винятком, можливо, прямих $x = x_0, x = x_1$.

Підставимо розв'язок (8.28) у функціонал (8.30):

$$J[u_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} F\left(x, y, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) dy. \tag{8.31}$$

Зінтегруємо функцію F у функціоналі (8.31) за y, тоді функціонал (8.31) набере вигляду

$$J[u_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), a_1'(x), a_2'(x), \dots, a_n'(x))\, dx. \tag{8.32}$$

Функції $a_k(x), k = \overline{1,n}$ підбирають так, щоб функціонал (8.32) досягав екстремуму, а для цього, як відомо, потрібно застосувати необхідні умови екстремуму (2.7)

$$F'_{a_k} - \frac{d}{dx}\left(F'_{a_k'}\right) = 0, k = \overline{1,n}.$$

Довільні сталі при цьому вибирають так, щоб виконувалися граничні умови на прямих $x = x_0, x = x_1$.

Більш детально ознайомитися з методом Канторовича можна в монографії [3].

Приклад 8.3. До задачі прикладу 8.2 застосувати метод Канторовича. Знайти наближений розв'язок $u_1(x,y)$. Отриманий розв'язок порівняти з розв'язками прикладу 8.2.

Розв'язання. Функціонал для задачі Пуассона $-\Delta u = 1$, $x \in (2;-2)$, $y \in$ (-1;1), $u_{|\Gamma} = 0$ (Г – контур прямокутника) такий:

$$J[u] = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{1} \left[u_x'^2 + u_y'^2 - 2u\right] dy.$$

Наближений розв'язок розшукуємо у вигляді

$$u_1(x,y) = z(x)(1-y^2). \qquad (8.33)$$

Функція $u_1(x,y)$ задовольняє дві з чотирьох граничних умов, а саме $u_1(x,\pm 1) = 0$.

Підставимо функцію $u_1(x,y)$ (8.33) у функціонал даної задачі й зінтегруємо отриманий вираз по y. Маємо

$$J[u_1] = \iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 - 2u_1\right] dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-1}^{1} \left[(1-y^2)^2 z'^2 + 4y^2 z^2 - 2(1-y^2)z\right] dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{16}{15} z'^2 + \frac{8}{3} z^2 - \frac{8}{3} z\right) dx = J[z(x)].$$

Останній функціонал є функціоналом від функції однієї незалежної змінної. Для знаходження екстремалі цього функціонала запишемо рівняння Ейлера (2.2) і знайдемо його розв'язок:

$$F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z'} = 0; \quad \frac{16}{3} z - \frac{8}{3} - \frac{32}{15} z'' = 0,$$

$$z'' - \frac{5}{2} z = -\frac{5}{4}, \; z = c_1 e^{-\sqrt{\frac{5}{2}} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{5}{2}} x} + \frac{1}{2}.$$

Для знаходження сталих c_i, $i = 1{,}2$ на функцію $z(x)$ накладемо додаткові умови $z(\pm 2) = 0$, які забезпечують виконання граничних умов запропонованої задачі на вертикальних прямих $x = \pm 2$. Маємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження c_1 і c_2:

$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{10}} + c_2 e^{-\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{2}; \\[2mm] c_2 e^{-\sqrt{10}} + c_2 e^{\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Звідси

$$c_1 = c_2 = -\frac{1}{4\operatorname{ch}\sqrt{10}}; \; z_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}} x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right) \; \text{ і } \; u_1(x,y) = \frac{1}{2}(1-y^2)\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}} x}{\operatorname{ch}\sqrt{10}}\right).$$

Обчислимо значення функції $u_1(x,y)$ у внутрішніх точках області. Результати запишемо в табл. 8.5.

Таблиця 8.5

y / x	0	0,5	1	1,5
0	0,4577	0,4138	0,3930	0,2716
0,5	0,3433	0,3329	0,2947	0,2037

Дані табл. 8.2 - 8.4 і 8.5 свідчать про те, що розв'язок $u_1(x, y)$, отриманий за методом Канторовича, практично збігається з розв'язком $u_2(x, y)$, одержаним за методом Рітца. Метод Канторовича досить часто називають методом звичайних диференціальних рівнянь.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. – М.: Гостехиздат, 1955.

2. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961.

3. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М. – Л.: Физматгиз, 1962.

4. Колгоморов А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колгоморов, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

5. Лаврентьев М. А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

6. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957.

7. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1950.

8. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский.– М.: МАИ, 2000.

9. Полак Л.С. Вариационные принципы механики / Л.С. Полак. – М.: Физматгиз, 1959.

10. Цлаф Л.А. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л.А. Цлаф. – М.: Наука, 1970.

11. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.

12. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления: пер. с англ. / Л. Янг. – М.: Мир, 1970.

13. Практичний курс вищої математики: навч. посіб. - В 4 кн. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, О.Г. Ніколаєв та ін. - Х.: Нац. аерокосм. ун-т „Харк. авіац. ін-т", 2004. – Кн. 4: Варіаційне числення. Рівняння математичної фізики. Випадкові процеси.

14. Варіаційне числення. Рівняння математичної фізики. Теорія ймовірностей: робочий зошит / Укл. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, О.Г. Ніколаєв та ін. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т „Харк. авіац. ін-т", 2003.

Головченко Олександр Васильович
Курпа Лариса Ігорівна
Ніколаєв Олексій Георгійович
Ванін Віктор Антонович

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 2008
Підписано до друку 16.10.2008
Формат 60х84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 5. Обл.-вид. арк. 5,75. Наклад 100 прим.
Замовлення 463. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu