МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний інститут ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С.С. Курєннов

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЛОГІСТИКИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2008

УДК 658.012.34(075.8)

Курєннов С.С. Математичні методи логістики: навч. посіб. / С.С. Курєннов. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2008. – 91 с.

Запропоновано матеріал з математичних методів розв'язання задач логістики й управління запасами, рекомендований освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів напрямів «Прикладна математика» і «Системний аналіз». Наведено теоретичні відомості про логістику і математичні моделі й методи розв'язання задач з таких тематик: «Прогнозування попиту», «Організація закупівель», «Транспортні задачі», «Управління запасами».

Для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» і «Системний аналіз». Може бути корисним інженерним працівникам, менеджерам, логістам і аспірантам.

Іл. 8. Табл. 5. Бібліогр. : 14 назв

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О.О. Стрєльнікова,
д-р техн. наук, проф. Л.В. Курпа

© Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2008

1. ВСТУП. ПРЕДМЕТ І ЗАВДАННЯ ЛОГІСТИКИ

Логістика (англ. logistics) – наука про планування, контроль і управління транспортуванням, складуванням й іншими матеріальними й нематеріальними операціями, які виконуються в процесі доставки сировини й матеріалів до промислових підприємств, внутрішньозаводського перероблення сировини, матеріалів, напівфабрикатів, доведення готової продукції до споживача відповідно до його вимог, а також про процес передачі, оброблення й зберігання відповідної інформації.

Слово «логістика» походить від грецького «logistike», яке перекладається як мистецтво обчислювати, міркувати. Воно використовувалось ще в часи Візантійської імперії, де означало мистецтво й науку про тилове забезпечення військ [1]. Об'єктом вивчення логістики є матеріальні й відповідні їм фінансові й інформаційні потоки.

У сучасній логістиці можна виділити кілька напрямків, взаємозв'язок яких показано на рис. 1.1.

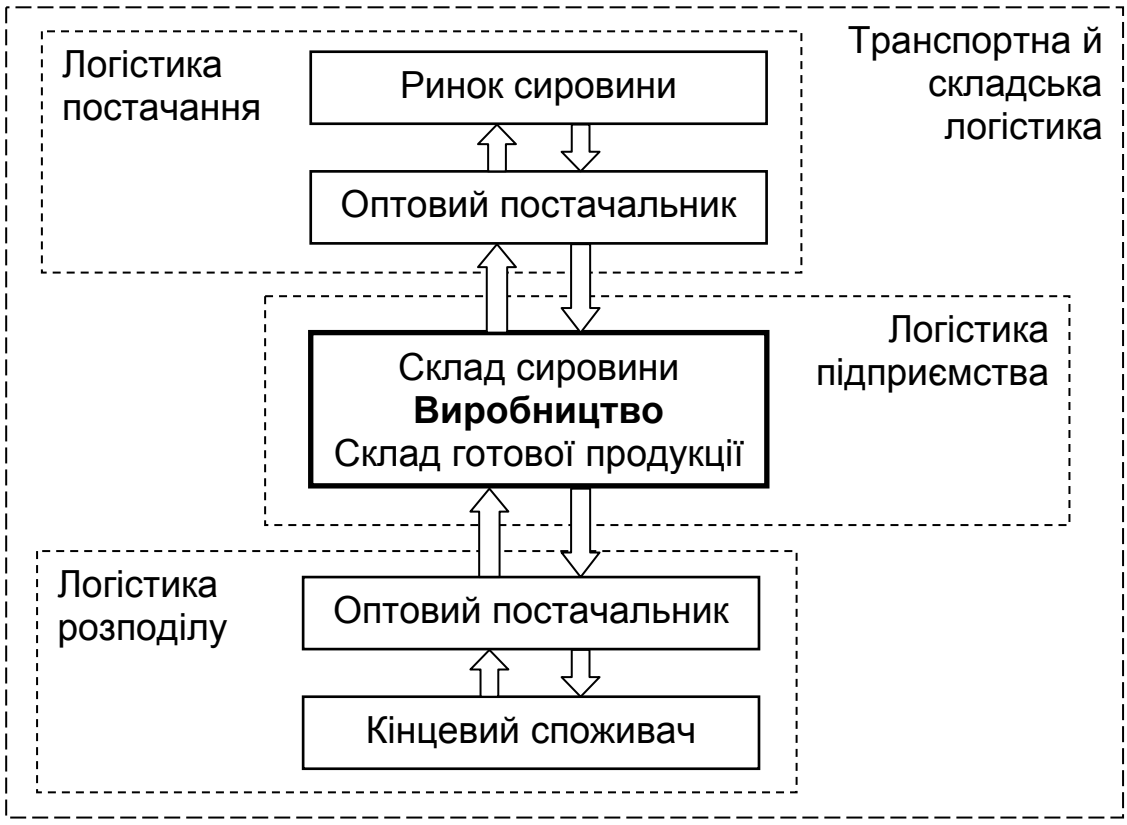

Рис. 1.1. Система напрямків логістики

Виділяють кілька основних видів логістики: логістику, пов'язану із забезпеченням виробництва матеріалами (закупівельна логістика), виробничу логістику, транспортну логістику й логістику збуту (маркетингову, або розподільну). Невід'ємною частиною всіх видів

логістики є обов'язкова наявність логістичного інформаційного потоку, що включає збір даних про товарний потік, їх передачу, оброблення й систематизацію з наступною видачею готової інформації. Цю підсистему логістики часто називають інформаційною логістикою.

Глобальна мета логістики – зменшення витрат і ризиків шляхом скорочення циклу, підвищення точності прогнозування, зменшення обсягів запасів, зниження транспортних витрат, синхронізації процесів і т. д.

Можна також сказати, що логістика – це знаходження такого каналу й такої стратегії руху товарів, які гармонійно забезпечують мінімальні строки й мінімальні витрати на доставку товарів споживачеві. Виробнича логістика забезпечує безперервність виробництва й відтворення.

У сучасному трактуванні логістика розуміється як наука про планування, управління й контроль за матеріальними потоками в сферах виробництва й обігу. У наш час логістика характеризується повсюдним упровадженням інформаційних технологій моніторингу й управління, системним підходом до розв'язання задач у всіх фазах руху продукту від первинного джерела сировини до кінцевого споживача, інтеграцією всіх учасників ланцюгів постачання, виробництва й розподілу.

У даному курсі дається уявлення про всі головні напрямки логістики й показано їхні місце й роль в організації виробництва й збуту. Основну увагу приділено математичним моделям управління запасами. Це зумовлено насамперед широтою застосування: створення запасів товарної продукції забезпечує безперервність виробничого циклу і є невід'ємною умовою роботи торговельних організацій. Крім того, область застосування теорії управління запасами й відповідних моделей не обмежується складськими операціями і може бути поширена на кількість персоналу, виробничу потужність, капітал та ін.

До основних методів, які використовуються для вирішення наукових і практичних завдань в області логістики, слід віднести методи системного аналізу, методи теорії дослідження операцій, кібернетичний підхід і математичну статистику. Застосування цих методів дозволяє прогнозувати матеріальні потоки, створювати інтегровані системи управління й контролю за їхнім рухом, розробляти системи логістичного обслуговування, оптимізувати запаси й вирішувати ряд інших завдань.

Цей курс не охоплює питання логістики, пов’язані з юридичним забезпеченням логістичних операцій, проходженням вантажу через митницю, методиками контролю й аналізу, технічною стороною організації складських і транспортних процесів, кредитуванням й страхуванням та ін.

Наведемо деякі визначення логістики [1]:

1. Логістика – це наука про планування, реалізацію й контроль ефективних і економічних з погляду витрат операцій переміщення й зберігання матеріалів, напівфабрикатів і готової продукції, а також пов'язану з ними інформацію про поставку товарів від місця виробництва до місця споживання відповідно до вимог клієнтури.

2. Логістика – наука про процес фізичного розподілу продукції в просторі й у часі.

3. Логістика – комплексний напрямок у науці, що охоплює проблеми управління матеріальними потоками.

4. Логістика – наука про раціональну організацію виробництва й розподілу, що комплексно вивчає постачання, збут і розподіл засобів виробництва.

5. Логістика – процес планування, організації й контролю за рухом матеріальних потоків і супутніми їм інформацією, фінансами й послугами з метою повного задоволення потреб споживачів з оптимальними затратами ресурсів.

Новизна логістики полягає в зміні пріоритетів між різними видами господарської діяльності на користь посилення значущості діяльності з управління наскрізним матеріальним потоком. Виділення матеріального потоку як об'єкта управління й пов'язане з цим абстрагування від ряду факторів приводять до деякого спрощення економічних процесів і до істотного скорочення розмірності задач моделювання. Це дозволяє проектувати наскрізні логістичні ланцюги, розв’язувати задачі наскрізного моніторингу руху вантажів, починаючи від первинного джерела сировини через усі проміжні процеси аж до надходження до кінцевого споживача, й у цілому відкриває нові можливості формалізованого дослідження економічних процесів.

1.1. Основні визначення логістики

Об'єктом вивчення логістики є наскрізні матеріальні потоки, потоки послуг і супутні їм фінансові й інформаційні потоки.

Предметом вивчення логістики є оптимізація матеріальних потоків, потоків послуг і супутніх їм фінансових та інформаційних потоків.

Матеріальний потік – сукупність ресурсів одного найменування, що розглядаються в процесі додавання до них різних логістичних операцій. Таким чином, матеріальний потік – це матеріальний ресурс умовно одного виду, який переміщується в певних кількостях від певного постачальника до певного одержувача з одного певного місця в інше в заздалегідь визначений строк.

Множина елементарних матеріальних потоків, які формуються на підприємстві, становить загальний матеріальний потік, що забезпечує

функціонування підприємства. Матеріальний потік має розмірність (обсяг, час, кількість, масу). Формою існування матеріального потоку може бути вантажообіг складу або вантажний потік (кількість вантажів, перевезених окремими видами транспорту від пункту відправлення до пункту призначення за певний період часу).

Матеріальні потоки розрізняють:

- за номенклатурою (прості або складні, одно- або багатоасортиментні);
- місцем у процесі обігу (які очікують відвантаження, відвантажені, у шляху, такі, що прибули, які очікують розвантаження, прийняті на склад);
- безперервністю (безперервні й дискретні);
- частотою (термінові, тривалі, чергові, щоденні й т. д.);
- величиною маси або обсягу (масові, великі, середні, дрібні);
- ступенем агресивності, вогненебезпечності й т. ін.;
- ступенем сумісності;
- типом тари (контейнери, вагони, мішки, ящики й ін.);
- ступенем напруженості;
- ступенем визначеності (детерміновані, стохастичні);
- ритмічністю відправлень;
- ступенем рівномірності швидкості руху.

Матеріальний потік може бути зовнішнім і внутрішнім, вхідним і вихідним, стаціонарним і нестаціонарним.

Інформаційний потік – це сукупність інформаційних повідомлень в усній формі або у формі документа, які циркулюють у логістичній системі й необхідні для управління логістичними операціями й контролю за ними. Інформаційні потоки поділяють за такими ознаками: відношення до логістичного ланцюга та його ланок, вид носія інформації, призначення інформації (директивна, облікова тощо), ступінь відкритості, режим обміну інформацією, напрямок і синхронність з відповідним матеріальним потоком.

Логістична операція – відособлена сукупність дій, спрямованих на перетворення матеріального або інформаційного потоку. Логістична операція може бути матеріальною (транспортування, складування, навантаження, комплектація тощо) й нематеріальною (збір даних про матеріальний потік, зберігання й передача даних).

Виконання логістичних операцій з матеріальним потоком, що надходить у логістичну систему або залишає її, відрізняється від виконання цих же операцій усередині логістичної системи. Це зумовлено переходом права власності на товар і страхових ризиків від однієї юридичної особи до іншої. За цією ознакою всі логістичні операції поділяють на однобічні й двобічні.

Деякі логістичні операції є продовженням технологічного виробничого процесу, наприклад фасування. Ці операції змінюють

споживчі властивості товару й можуть здійснюватися як у сфері виробництва, так і у сфері обігу, наприклад у фасувальному цеху оптової бази або складу.

Логістичні операції, які виконуються в процесі постачання підприємства або збуту готової продукції, відносять до категорії зовнішніх логістичних операцій. Логістичні операції, що виконуються всередині логістичної системи, називають внутрішніми.

Логістична функція – укрупнена група логістичних операцій, спрямованих на реалізацію цілей логістичної системи. Основні (базисні) функції: постачання, виробництво, збут.

У логістиці для управління потоками використовують такі *функції*:

- планування (встановлення оптимальної траєкторії руху, розроблення розкладу або графіка проходження потоку, розрахунок потреб у ресурсах для здійснення потоку);
- оперативне регулювання (відстеження кожного об'єкта потоку відповідно до графіка руху, вироблення й застосування управлінських впливів);
- облік, збір, оброблення, зберігання й видача інформації про матеріальний потік, складання звітності;
- контроль (ступінь відповідності фактичних параметрів потоку плановим);
- аналіз (причини невідповідності плану);
- координація (координація процесів закупівлі, збуту).

Логістичний канал – частково впорядкована множина, що складається з постачальника, споживача, перевізників, посередників, страховиків і т. д.

Споживач або постачальник в умовах ринкової економіки має можливість вибору елементів логістичного каналу за різними критеріями за допомогою застосування різних методів обчислення рейтингів. Після зробленого вибору логістичний канал перетворюється в *логістичний ланцюг* (лінійно впорядковану множину фізичних і/або юридичних осіб, які здійснюють логістичні операції з доведення зовнішнього матеріального потоку від однієї логістичної системи до іншої). Параметрами логістичного ланцюга можуть бути організаційний коефіцієнт місця в ланцюзі, що показує, скільки разів продукція була перепродана, й складський коефіцієнт місця в ланцюзі, який показує, скільки перевалок пройшла продукція на тому ж шляху.

Логістичний цикл – інтервал часу між оформленням замовлення на поставку товарів і доставкою продукції на склад споживача.

Логістичний цикл містить:

а) час на формулювання замовлення і його оформлення у встановленому порядку;

б) час на доставку або передачу замовлення постачальникові;

в) час на виконання замовлення (у тому числі час на виконання

замовлення, час на простої й комплекс послуг);

г) час на доставку виготовленої продукції замовникові;

д) час на підготовку продукції до споживання.

Показники підпунктів «*в», «г»* мають найбільш питому вагу.

Логістична система – адаптивна система зі зворотним зв'язком, що виконує ті чи інші логістичні функції або операції, складається з підсистем і має розвинені зв'язки із зовнішнім середовищем. Як логістичні системи розглядаються промислові й торговельні підприємства, територіально-промислові центри, постачальницько-збутові організації й т. д. Логістична система може бути з прямими зв'язками, тобто це система, в якій матеріальний потік доводиться до кінцевого споживача без участі посередників, і гнучкою, коли доведення матеріального потоку до споживача здійснюється як за прямими зв'язками, так і за участю посередника.

Логістична система містить підсистеми (закупівля, фінансова система, складування, виробництво, збут) і відповідні матеріальний та інформаційний потоки.

Наукова організація й планування роботи будь-якої виробничої, дистриб'юторської або торговельної організації основана на відомих методологічних концепціях «Точно в строк» (JIT), «Планування потреб/ресурсів» (MRP і MRPII) й «Реагування на попит».

Існують так звані «шість правил логістики», які описують кінцеву *мету* логістичного управління:

1. Вантаж – постачання потрібного товару.
2. Якість – досягнення необхідної якості.
3. Кількість – постачання в необхідній кількості.
4. Час – доставка товару в потрібний час.
5. Місце – поставка товару в потрібне місце.
6. Витрати – поставка товару з мінімальними загальними витратами.

1.2. Основні принципи логістики

Логістика сприяє підвищенню ефективності роботи фірми при дотриманні таких принципів.

1. *Підтримка зв'язку логістики з корпоративною стратегією*. Загальновизнано, що всі аспекти логістичних операцій мають бути безпосередньо пов'язані зі стратегічним планом корпорації або фірми. Це головна умова досягнення високих прибутків від застосування логістики. Керівники, що застосовують логістичний підхід на своїх підприємствах, прагнуть до досягнення загальної мети й управляють логістичними операціями в інтересах реалізації стратегії компанії, спрямованої на забезпечення конкурентоспроможності за рахунок скорочення витрат і диференціювання послуг.

2. *Принцип системного підходу*. Підхід до об'єктів дослідження як до систем – головна особливість логістики. Максимальний ефект можна одержати тільки у випадку, коли матеріальний потік оптимізується на всьому шляху від первинного джерела сировини до кінцевого споживача, а не в рамках окремого підприємства або підрозділу. При цьому всі ланки логістичного ланцюга мають працювати як єдиний налагоджений механізм, тому їх необхідно розглядати як цілісну систему, щоб узгодити економічні інтереси окремих її елементів, технічні питання, технологічні процеси й т. д.

3. *Удосконалювання організації руху матеріальних потоків і глобальна оптимізація*. Цей принцип передбачає таку організацію логістичних операцій, яка дала б можливість контролювати всі функції з виконання завдань, пов'язаних із закупівлею, транспортуванням, складуванням, зберіганням запасів і збутом під егідою єдиного комерційного підрозділу. Інакше кажучи, всі логістичні функції мають бути об'єднані для відповідного контролю під централізованим й децентралізованим керівництвом з урахуванням того, що ефективні рішення легше прийняти, якщо спецпідрозділ відповідає за всі тісно зв'язані між собою логістичні операції.

Усе більша кількість фірм об’єднують під загальним керівництвом дві важливі області діяльності: управління запасами й розподіл матеріальної продукції. Це дозволяє краще використати такі складні сфери бізнесу, якими є транспортування й складування. У таких фірмах здійснюється контроль за всім логістичним ланцюжком як за єдиним цілісним потоком з використанням широкого діапазону структур і підструктур забезпечення.

4. *Надходження необхідної інформації й сучасна технологія її оброблення*. Логістичні підрозділи розглядають комп'ютеризацію як важливе джерело реалізації потенційних можливостей логістики. Використовуючи мережі електронного обміну даними зі споживачами й постачальниками, можна підвищити конкурентоспроможність фірми. При аналізі, синтезі й оптимізації об'єктів і процесів у логістичній системі застосовуються різні математичні й імітаційні моделі, які реалізовані у відповідному програмному забезпеченні.

5. *Ефективне управління трудовими ресурсами*. Цей принцип відіграє вирішальну роль у налагодженні механізму управління матеріальними потоками. Тільки добре підготовлені й досвідчені менеджери здатні забезпечити успіх у реалізації стратегії й планів фірм, тому керівники вищого рівня сфери логістики стали прямо взаємодіяти із системою підготовки кадрів. Підготовка кадрів на робочому місці вже недостатня, й багато фірм направляють кадри логістичних підрозділів на спеціальні курси перепідготовки (бізнес-тренінги) з метою підвищення кваліфікації й навчання новим методам і технологіям в області логістики.

6. *Тісний взаємозв'язок з іншими фірмами зі створення стратегії*. Завдяки реалізації цього принципу компанії встановлюють тісне співробітництво зі своїми партнерами з господарських зв'язків. Не менше значення надається координації діяльності внутрішніх підрозділів фірм. Досвід показує, що найбільших успіхів у збільшенні прибутку досягають саме ті фірми, в яких установлено міцні зв'язки із зовнішніми й внутрішніми учасниками комерційних відносин. Фірми все ширше практикують «стратегічні союзи» з постачальниками, споживачами, транспортними агентствами й іншими учасниками логістичного ланцюга. При цьому величезне значення надається відкритому й систематичному процесу обміну інформацією з прогнозування, планування, графікам постачання продукції й т. д.

7. *Урахування прибутку від логістики в системі фінансових показників*. На основі практичного досвіду фірми прийшли до висновку, що найкраще логістичні операції, такі, як транспортування, складування й інші, підлягають оцінюванню з боку обліково-калькуляційних підрозділів або інших структурних органів, які результати діяльності вимірюють отриманим прибутком.

Традиційно в країнах з розвиненою економікою компанії використовують показник норми прибутку на активи як найбільш важливий індикатор фінансової діяльності. За аналогією ряд американських фірм розраховують прибуток на логістичні активи. У результаті впровадження цього показника у фінансову практику все більша кількість компаній починають користуватися послугами відповідних спеціалізованих фірм. Це співробітництво може бути у формі скорочення кількості власного автопарку за рахунок вдавання до послуг спеціалізованих перевізників і складів загального користування. З розвитком інтеграційних процесів виникає новий варіант логістичного аутсорсінгу й новий тип провайдерів – 4PL провайдери (Fourth Party Logistics Providers), які є інтеграторами всього логістичного ланцюга і забезпечують повні й вичерпні рішення. Такі компанії забезпечують стратегічне й оперативне управління потоками, а також виконують функції консалтингової компанії.

8. *Визначення оптимальних рівнів якості логістичного обслуговування* з метою підвищення рентабельності є одним з елементів стратегічної політики фірм. Для виявлення оптимальної якості обслуговування визначають додаткові доходи, одержані від надання високоякісного сервісу, й вимірюють відношення прибутку, отриманого від нього, до витрат, пов'язаних з підтримкою таких рівнів. Крім того, розробляється орієнтована на ринок програма із зазначенням рівня логістичного обслуговування, з якої видно, як планується обслуговувати споживачів послуг з різних класів, що установлюються залежно від їхньої частки в обсязі продажу, а також строку виконання замовлення.

Більшість фірм у країнах з розвиненою економікою визнають важливість обслуговування конкретного споживача [2]. Вони встановили параметри обслуговування й суворо стежать за тим, як задовольняються вимоги, поставлені до обслуговування. Найбільшого ефекту досягають ті фірми, логістичні підрозділи яких укладають внутрішній контракт з кожним з виробничих відділів про розмір обслуговування й одержують від них відповідну плату.

2. ЕЛЕМЕНТИ ЛОГІСТИКИ ЗАКУПІВЕЛЬ

Закупівельна логістика (логістика постачання) – це управління матеріальними потоками в процесі забезпечення підприємства матеріальними ресурсами. Будь-яке підприємство, як виробниче, так і торговельне, має службу, що здійснює закупівлю, доставку й тимчасове зберігання сировини, напівфабрикатів і товарів народного споживання. Закупівельна логістика є однією з основних логістичних підсистем, яка вивчає процес руху сировини, матеріалів, запасних частин з ринку закупівель до складів підприємства. На закупівлю припадає значна частина загальних витрат підприємства (в середньому близько 60%), і невеликі покращання в цій області можуть принести значні вигоди.

Мета логістики постачання – створення стійкого й безперервного матеріального потоку в організацію з максимально високою ефективністю. Основу економічної ефективності становлять пошук і закупівля необхідних ресурсів задовільної якості за мінімальними цінами. До головних завдань логістики постачання відносять:

- *інформаційні* – визначення потреби в матеріальних ресурсах, дослідження ринків, задача «зробити або купити» (Make or buy problem), задача вибору постачальника;
- *завдання реалізації* – узгодження ціни й укладання договорів, підготовка бюджету закупівель, формування замовлень, контроль за кількістю й строками поставок, вхідний контроль за ресурсами, розміщення їх на складі, управління запасами й поточний контроль;
- *завдання інтеграції й координації* закупівель з виробництвом, збутом, складуванням, транспортуванням, а також з постачальниками.

Потреба в матеріальних ресурсах може бути визначена на основі замовлень від різних підрозділів підприємства. Відповідно до виробничої програми детально розписують, які номенклатурні позиції потрібні, а також роблять висновок про те, що буде дешевшим: виготовити комплект виробів або закупити на стороні. Після створення списку потрібних ресурсів визначають джерела постачання, тобто вибирають і визначають постачальника, а саме встановлюють критерії оцінювання постачальника, а потім здійснюють його пошук.

Постачальник може запропонувати себе сам. Інформацію про нього можна знайти в довідниках, у спеціалізованих виданнях, на виставках.

2.1. Потреби й поставки. Вибір постачальника

За функціональним впливом розрізняють такі види потреб:

- *первинна* – ринкова потреба (те, що треба для продажу на ринку);
- *вторинна* – сировина, матеріали, напівфабрикати, комплектувальні вироби, які необхідні для первинної потреби;.
- *третинна* – допоміжні матеріали іншого призначення, необхідні для первинної й вторинної потреб.

Методи визначення потреби:

- детермінований – оснований на використанні цілком певних вихідних даних і переважно для визначення вторинної й третинної потреб при відомій первинній;
- стохастичний.

Потреба може бути визначена на основі ієрархії виробу з урахуванням забезпечення комплектації елементів. При використанні детермінованого методу важливо встановити час споживання матеріальних ресурсів. Для того, щоб виконати замовлення в строк, матеріали мають бути в наявності в найбільш ранній строк, щоб цикли їх надходження й оброблення не збільшували цикл виготовлення виробу. Деталі мають бути вчасно готові, щоб залишався час на їх збирання. Куповані вироби мають бути замовлені з урахуванням часу на затримку поставки.

Ефективність функціонування транспортно-логістичної системи забезпечується за умови реалізації на всіх рівнях управління системою таких основних принципів: «just in time» («точно в строк»), «minimal expenses and costs» («з найменшими витратами й втратами»), «necessary quality and in necessary quantity» («товар необхідної якості й у необхідній кількості»). Реалізація даних принципів можлива при високій надійності транспортування й стабільній роботі постачальників матеріальних ресурсів. Вибір постачальника й перевізника матеріальних ресурсів – найважливіше завдання логістики.

При оцінюванні постачальника необхідно враховувати, що являє собою фірма з організаційної й технічної точок зору, а також думки інших людей, які працюють з цією фірмою.

Критерії оцінювання постачальника:

- низька ціна товару;
- якість продукції, що поставляється;
- надійність поставок;
- гнучкість поставок (можливість позачергової поставки,

відстрочення поставки, поставка продукції заданих ваги й комплектації тощо);
- гнучкість оплати за продукцію (відстрочення платежу, платіж частинами й ін.);
- сервісне обслуговування продукції;
- обмеження розміру поставки;
- величина транспортних витрат;
- організація управління якістю у постачальника;
- наявність власного транспорту;
- якість обслуговування споживачів;
- наявність систем спостереження за вантажем, транспортними засобами;
- кредитоспроможність і фінансовий стан постачальника.

Ранжирування й вибір критеріїв здійснює вищий менеджмент фірми, виходячи зі стратегічних і тактичних цілей бізнесу.

Існують такі основні методи для вибору постачальника:

1. Експертні, відповідно до яких вибір ґрунтується на думці експертів, які інтегрально враховують усі аспекти ринку.

2. Аналітичні, що передбачають використання формул, що містять ряд параметрів, які характеризують постачальника й імовірнісних логістичних посередників. Вибираються певна система балів, величина оцінки й інтегральний критерій оцінювання. Визначається значущість (вага) критеріїв у частках одиниці.

Інтегральний критерій може бути адитивним:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{ij} ,$$

де ω_i – ваговий коефіцієнт i-го критерію; a_{ij} – оцінка за i-м критерієм j-го постачальника.

Якщо вагові коефіцієнти однакові, а це може спостерігатися у тому випадку, коли оцінки a_{ij} наведено не у безрозмірному вигляді, а у грошовому вираженні, то може застосовуватися мультиплікативний інтегральний критерій

$$Z_j = \prod_{i=1}^{N} a_{ij} .$$

До основних недоліків наведеної вище методики вибору постачальників матеріальних ресурсів слід віднести відсутність урахування динаміки зміни локальних критеріїв вибору постачальника, а також випадковий характер величини цих критеріїв. Перелічені методики вибору постачальників в основному орієнтовано на детерміновану інформацію про постачальника і його можливості на певний момент часу без урахування фактора часу й імовірнісного характеру самих параметрів.

Для виконання комбінованого прогнозу локальних критеріїв постачальника використовуються адаптивні й експертні методи прогнозування з урахуванням оцінок за Байєсом [3]. Такий підхід забезпечує одержання ефективного, надійного короткострокового прогнозу значень локальних критеріїв.

Для оцінювання нестабільності локальних критеріїв постачальника матеріальних ресурсів низкою авторів запропоновано коефіцієнт нестабільності i-го локального критерію для j-го постачальника, який обчислюється за формулою

$$\beta_{ij} = 1 - \frac{\sigma_{ij}^{зал}}{a_{ij}},$$

де a_{ij} – прогнозний рівень *i*-го локального критерію для j-го постачальника; $\sigma_{ij}^{зал}$ – залишкова дисперсія прогнозу i-го локального критерію для *j*-го постачальника.

На основі експертних оцінок визначається значущість кожного локального критерію (ω_i). Знаючи прогнозні значення локальних критеріїв, характеристики їхньої нестабільності, а також коефіцієнти значущості локальних критеріїв, визначають узагальнену критеріальну функцію постачальника матеріальних ресурсів:

$$F_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \beta_{ij} a_{ij}.$$

Вибирають такого постачальника, який забезпечує максимальне значення узагальненої критеріальної функції.

Вступаючи в господарський зв'язок з невідомим постачальником, підприємство наражається на певний ризик. У випадку нестабільної роботи постачальника в споживача можуть виникнути зриви у виконанні виробничих програм або ж прямі фінансові втрати. Відшкодування зазнаних збитків пов’язано, як правило, з певними труднощами. У зв'язку з цим підприємства використовують різні способи, які дозволяють виявити незадовільних постачальників. Нерідко фірми вдаються до послуг спеціалізованих агенцій або приватних осіб, які підготовляють довідки про постачальників, іноді використовуючи неформальні канали. Ці довідки можуть містити таку інформацію про фінансовий стан постачальника:

- відношення ліквідності постачальника до суми боргових зобов'язань;
- відношення обсягу продажів до дебіторської заборгованості;
- відношення чистого прибутку до обсягу продажів;
- рух готівки;
- оборотність запасів та ін.

Коли вибір постачальника закінчено, проводять переговори, у

результаті яких необхідно досягти таких умов поставки (або серії поставок), що були б виграшними для постачальника й покупця.

Хороший постачальник доставляє товар вчасно, забезпечує надійність і якість, стабільність поставок, виконує обіцяння, інформує покупця. Цікавою для споживача інформацією є інформація про можливі зміни цінової політики, обсягів випуску (наприклад, про ремонт або пуск нового обладнання), асортименту, про рух товару на маршруті й т. д. Крім того, для споживача, особливо при обмежених оборотних коштах, бажано, щоб постачальник забезпечував відстрочення платежу за відпущений товар.

Хороший споживач замовляє товар вчасно, забезпечує постійний і, бажано, зростаючий попит, платить акуратно, точно визначає специфікацію, довіряє постачальникові й будує свої відносини на взаєморозумінні. Постачальник зацікавлений, щоб споживач купував товар за попередню оплату, що дає можливість постачальникові використати оборотні кошти.

Під час угоди здійснюється підписання контракту або договору поставки. Це документ, за яким одна юридична особа (постачальник) зобов'язується передати в певний строк іншій юридичній особі (споживачеві) у власність продукцію обумовлених асортименту і якості в необхідній кількості, а споживач – оплатити продукцію. У деяких випадках, щоб поставки були виконані вчасно, здійснюється експедирування поставки.

Головним показником поставок є надійність постачання, яка розраховується за формулою

$$P = 1\text{-}P_{\text{відмови}},$$

де $P_{\text{відмови}}$ – ймовірність відмови в задоволенні замовлення.

Ця формула застосовується для одноканальної системи постачання, в якій один тип сировини постачає один постачальник. Для підвищення надійності або ж у випадку обмежених потужностей постачальників використовують багатоканальну систему постачання, в якій один тип ресурсів поставляють декілька постачальників, тобто здійснюється диверсифікація системи постачання.

Оцінювання надійності поставок проводять за таким алгоритмом:

1. Зіставляються дати планової й фактичної поставок.
2. Визначається час запізнення.
3. Зіставляються обсяги планової й фактичної поставок, виявляються випадки недопоставки продукції.
4. Визначається обсяг недопоставки продукції:

$$\Delta Q = Q_{\text{фактич}} - Q_{\text{план}}.$$

5. Розраховуються умовне запізнення у випадку недопоставки $t_{\text{зап}}=\Delta Q/q$, де Q – величина недопоставки, q – середня денна витрата.
6. Визначається загальна величина запізнень $T_{\text{зап}}= t_{\text{зап}}+ t`_{\text{зап}}$.

7. Встановлюється кількість випадків відмови.

8. Розраховуються напрацювання на відмову $T_e = (T - \sum T_{зап})/n$, де T – загальна кількість днів у періоді.

9. Визначається інтенсивність відмов $\pi = 1/T_{зап}$.

10. Визначається коефіцієнт готовності постачання

$$K_{гп} = (T - \sum T_{зап})/T.$$

11. Розраховується надійність постачання $P = K_{нп} e^{-\pi t}$ (чим вище цей коефіцієнт, тим надійніше постачання).

2.2. Статистичний аналіз потреб

Можна виділити кілька основних завдань статистичного аналізу потреб (у товарному виробництві – завдань аналізу *попиту*):

- ABC- і XYZ-аналіз;
- побудова функцій розподілів потреб;
- кореляційно-регресійний аналіз, що досліджує характер впливу різних факторів на попит (потреби);
- прогнозування потреб (аналіз часових рядів);
- кореляційний аналіз у багатономенклатурних задачах.

2.2.1. ABC- й XYZ-аналіз

Ідея методу ABC-аналізу ґрунтується на підставі принципу Парето, на цей час більш відомого як «правило 20 на 80»: за більшість можливих результатів відповідає відносно невелика кількість причин.

Методи ABC- й XYZ-аналізу набули великого поширення завдяки своїм простоті й ефективності, а також тій обставині, що не потребують високої кваліфікації персоналу. Результатом ABC-аналізу є групування об'єктів за ступенем впливу на загальний результат. Алгоритм цього аналізу такий:

1. Визначають об'єкти аналізу (клієнт, постачальник, товарна група, номенклатурна позиція й ін.).

2. Визначають параметр, за яким буде проводитися аналіз об'єкта (середній товарний запас, обсяг продажів, дохід, кількість одиниць продажів, кількість замовлень і т. ін.).

3. Об'єкти аналізу сортують в порядку зменшення значення параметра й визначають групи A, B і C.

Група A – об'єкти, сума часток з накопичувальним підсумком яких становить перші 50 % від загальної суми параметрів, група B – об’єкти, сума часток яких дорівнює від 50 до 80 %, і група C – об’єкти, сума часток яких становить від 80 до 100 %.

Згрупувавши товар за одним параметром, необхідно зіставити отриманий результат з іншими параметрами. Група C може приносити 20 % доходу, становити 50 % товарного запасу й займати 80 % площі складу. Результати аналізу можуть бути використані при плануванні

розміщення товару на складі або в торговельному залі магазина, ураховуватися при розробленні стратегії організації й т. д.

Основна ідея XYZ- аналізу полягає в групуванні об'єктів аналізу в міру однорідності параметрів, тобто за коефіцієнтом варіації [5]

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(\bar{u} - u_n)^2}}{\bar{u}} \times 100\,\%,$$

де $\bar{u}$ – середнє значення параметра, що оцінюється, u_n – значення параметра в n-й період, N – кількість періодів.

Алгоритм XYZ-аналізу подібний до алгоритму ABC-аналізу. Цей метод аналізу має сенс, якщо кількість аналізованих періодів більша від трьох за умови відсутності тренду.

Якщо аналіз статистичних даних показує, що тренд існує, то критерієм розподілу є відношення середньоквадратичного відхилення параметрів від лінії тренду до прогнозного значення параметра:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(u_i - f_i)^2}}{f_{i+1}} \times 100\,\%,$$

де f_i – значення функції тренду в точці i; f_{i+1} – прогнозне значення динамічного ряду; k – кількість степенів вільності у рівнянні тренду (при $f_i = a_0 + a_1 i$ маємо $k = 2$).

Група X – об'єкти, значення коефіцієнта варіації яких не перевищують 10%, група Y – об'єкти, для яких $k = 10...25\%$, група *Z* – об’єкти, для яких $k > 25\%$.

При суміщенні результатів аналізу отримаємо дев’ять груп об'єктів аналізу, які розрізняються за двома критеріями: ступенем впливу на кінцевий результат (ABC) і стабільністю/прогностичністю цього результату (XYZ). Наприклад, група A-Z робить суттєвий внесок до загальної суми, але елементи цієї групи мають випадковий характер і мало придатні для прогнозування.

2.2.2. Функція розподілу потреб

Розрізняють дискретні й безперервні випадкові величини. Найчастіше досліджуються ситуації, пов'язані зі значним попитом на предмети постачання. Навіть у тих випадках, коли потреба вимірюється в штуках, можна з невеликою помилкою переходити до безперервного подання попиту, що полегшує використання класичних методів аналізу для оптимізації моделі. Дискретний попит

застосовується лише для номенклатурних позицій, які дорого коштують і рідко використовуються (наприклад кораблі або літаки).

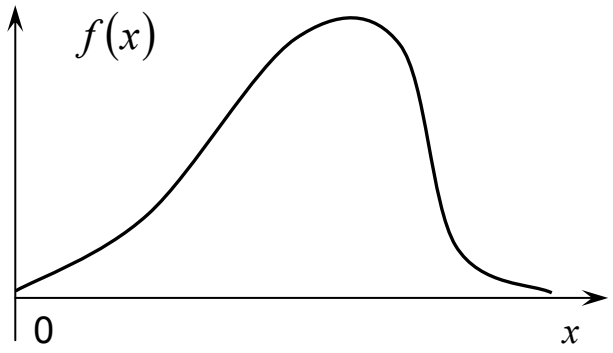

Рис. 2.1. Щільність розподілу попиту

Усі можливі значення потреб за розглядуваний період (наприклад доба, тиждень) утворюють повну групу подій. Ця сумарна ймовірність деяким чином розподілена між усіма можливими значеннями. Закон розподілу повністю характеризує випадкові потреби.

Типовий графік щільності розподілу $f(x)$ безперервної потреби наведено на рис. 2.1.

Математичне сподівання попиту $\bar{x} = \int_0^\infty x f(x) dx$. Початковим *моментом k-го* порядку називається інтеграл $\nu_k = \int_0^\infty x^k f(x) dx$.

Центральний момент k-го порядку

$$\mu_k = \int_0^\infty (x - \nu_1)^k f(x) dx.$$

Між початковими й центральними моментами існують відомі співвідношення, які наведено в роботах [4, 5].

Другий центральний момент – дисперсія – характеризує розкид попиту навколо середнього значення. Замість нього часто використовують середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\mu_2}$. Третій центральний момент μ_3 (або безрозмірна величина μ_3 / σ^3) служить для оцінювання асиметрії розподілу, четвертий – для оцінювання його крутості (гостровершинності). Крутість зазвичай вимірюється *ексцесом* $\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ і визначається відносно нормального розподілу, для якого $\varepsilon = 0$. Ексцес додатний для розподілів з більшою, ніж у нормального, гостровершинністю.

Для мінімізації витрат необхідно мати аналітичний вираз функції розподілу попиту, яка знаходилася б в задовільній відповідності до експериментальних даних й була б по можливості обґрунтованою. Одержання такої функції є метою вирівнювання статистичного розподілу попиту. У загальному випадку процес вирівнювання

складається з таких етапів:

1) побудова статистичного ряду;
2) розрахунок моментів статистичного розподілу;
3) вибір типу кривої розподілу;
4) оцінювання параметрів кривої;
5) перевірка узгодження отриманого теоретичного розподілу з експериментальними даними.

При виборі типу кривої розподілу в ряді випадків логічний аналіз умов дозволяє вважати розподіл нормальним, наприклад, якщо за складом закріплено велику групу приблизно однорідних незалежних споживачів і середня потреба кожного споживача мала порівняно з сумарною. Але згладжування емпіричного розподілу кривою Гаусса пов’язано з такими недоліками: крива Гаусса допускає негативний і нескінченно великий попит, що не є природним, і, крім того, має симетрію відносно математичного сподівання, яке може не завжди спостерігатися при емпіричному розподілі. За відсутності обґрунтувань необхідно вибрати функцію, яка згладжує емпіричну залежність. Найчастіше статистичні дані вирівнюють за допомогою:

- поліномів;
- нормальної кривої з поправками (використовують пертурбаційний багаточлен або ряди Шарльє);
- кривих Пірсона.

Для перевірки відповідності статистичного розподілу теоретичному використовують критерії узгодження. Найбільш використовуваними критеріями є χ^2 Пірсона і ω^2.

При аналізі попиту на нові вироби обсяг статистики, як правило, буває недостатнім для вирівнювання емпіричного розподілу за методом найменших квадратів або моментів. У зв'язку з цим виникає проблема відшукування відповідного розподілу за допомогою інших відомостей: про очікуваний максимальний і мінімальний попит, його середнє і найбільш імовірне значення, загальний характер кривої щільності розподілу (опуклість) і поведінку на межах діапазону зміни попиту. У подібній ситуації використовують параболи, порядок яких не перевищує третій (рідко – гіперболу [4]).

2.2.3. Прогнозування потреб

Прогнозування є поглядом у майбутнє, тому ніколи не буде абсолютно точним, тобто розробляти логістичну систему потрібно таким чином, щоб вона не повністю залежала від точності прогнозів, а була гнучкою й могла адекватно реагувати на ті або інші зміни в попиті. Основні властивості прогнозування такі:

1. Точність прогнозів вища для груп продуктів, ніж для індивідуальних продуктів. Прогноз для групи точніший за прогноз для

її окремого представника, оскільки в цьому випадку відбувається «взаємне зрівноваження» відхилень: в одному випадку прогноз завищений, в іншому – занижений, але в цілому він прийнятний.

2. Точність прогнозів вища для близької перспективи, ніж для далекої. Із зазначеної причини прогнозування на далекий термін може спрацювати негативно, оскільки підвищується ймовірність похибок.

Існують умови, при яких прогнозувати попит взагалі недоцільно:

- коли прийнятний час на очікування клієнтом, доки виконується його замовлення, перевищує час на виробництво й закупівлю компонентів; інакше кажучи, клієнт готовий чекати своє замовлення стільки часу, скільки організації буде потрібно для виконання замовлення без попереднього планування;

- якщо потужності й інші необхідні ресурси для виконання замовлень клієнтів цих організацій можуть бути змінені швидко й не потребують істотних витрат;

- коли немає необхідності у фінансовому плануванні й плануванні промислової потужності.

У всіх інших випадках без прогнозування попиту не обійтися. Однак формувати прогнози попиту потрібно рівно настільки, наскільки цього потребують конкретні цілі. Кожний з перелічених нижче параметрів прогнозів попиту має бути обґрунтований метою його використання й визначений до початку формування прогнозу.

Горизонт планування. На який період у майбутньому має бути складено прогноз?

Рівень деталізації. Чи повинен прогноз попиту відображати прогноз попиту кожного замовника? Чи досить сумарного плану за категоріями замовників?

Частота перегляду. Чи потрібно переглядати прогноз попиту раз у рік? раз у квартал? раз на місяць? раз на тиждень?

*Інтервал прогнозування. Я*кі часові проміжки мають відображати прогноз попиту: роки, місяці, тижні, дні?

Існують багато класифікацій методів прогнозування попиту. Для зручності можна виділити лише дві групи методів: експертні й статистичні.

Перші основані на експертних оцінках і за своєю природою є суб'єктивними. Суть їх полягає в аналізі й обробленні різних експертних думок за допомогою відповідних формул для формування прогнозу. До експертних методів належать: метод комісії, «мозкова атака», анкетне опитування.

Статистичні методи припускають застосування статистичних розрахунків для побудови майбутнього на основі минулого. При статистичному прогнозуванні характеристик попиту найчастіше приймається гіпотеза про незмінний вигляд функції розподілу й прогнозування ведеться для математичного сподівання й дисперсії.

Найпростішим методом прогнозування середнього попиту є усереднення фактичних даних за всі попередні періоди. Однак тенденція зміни середнього значення найбільш чітко простежується за останніми даними й буде нівелюватися застарілими даними, тому система управління буде повільно реагувати на зміни інформації.

Кращі результати прогнозування середнього значення попиту можна одержати при використанні методу *ковзної середньої* й методу *експоненціального згладжування*.

Відповідно до методу *ковзної середньої* очікуваний попит у період t буде

$$a(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t-i), \qquad (2.1)$$

де $x(\tau)$ – фактичний попит у періоді τ. Вибір *N* здійснюється з умов компромісу між стійкістю й швидкістю реакції системи управління.

Метод *експоненціального згладжування* передбачає розрахунок сподіваного середнього значення:

$$a(t) = a(t-1) + \alpha\left[x(t-1) - a(t-1)\right], \qquad (2.2)$$

де коефіцієнт α $(0 < \alpha < 1)$ визначає ступінь урахування неузгодженості між прогнозом і фактичним значенням попиту в попередній період.

Послідовно підставляючи (2.2) в (2.1), одержуємо

$$a(t) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^{k-1} x(t-k). \qquad (2.3)$$

При досить великих k коефіцієнти $(1-\alpha)^{k-1}$ виявляються малими й відповідні їм значення попиту не впливають на прогноз.

Швидкість реакції системи на зміну попиту регулюється параметром α. Для усунення відставання розрахункового середнього попиту від фактичного можна ввести додаткову поправку на *тренд* або швидкість зміни середнього. Якщо визначити тренд як

$$b(t) = a(t) - a(t-1),$$

то прогноз тренду

$$b(t) = \alpha \cdot b(t-1) + (1-\alpha)b(t-2),$$

а уточнений прогноз середнього попиту

$$\alpha'(t) = a(t) + \frac{1-\alpha}{\alpha} b(t),$$

де $a(t)$ обчислюється згідно з (2.3).

Еквівалентом такої системи буде система другого порядку, що описується формулою

$$a'(t) = \alpha \cdot x(t-1) + 2(1-\alpha)\cdot a(t-2) + (1-\alpha)\cdot a(t-3).$$

Система другого порядку (на відміну від (2.2)) має коливальну

реакцію на стрибкоподібну зміну попиту.

Для визначення α пропонують прорахунок прикладу планування постачання з близької до досліджуваної області на основі реальних статистичних даних при різних значеннях α і вибір такого з них, що дає найкраще наближення до дійсності. Це значення може бути знайдено методом найменших квадратів.

Для повільно мінливого середнього значення попиту рекомендують $\alpha = 0{,}1$. Для періодів зі швидкою зміною попиту (особливо якщо ця зміна закономірна) значення α може бути збільшене до $0{,}3...0{,}5$, а потім зменшене знову.

Існує ряд комбінованих формул [6], які за допомогою спеціально підібраних вагових коефіцієнтів ураховують як динаміку споживання поточного року, так і торішні показники. Останні використовуються для врахування сезонної складової попиту.

Попит на продукти, які довго існують на ринку, наприклад, більшість продуктів споживання, будматеріали, пакувальні матеріали, деякі види медикаментів і т. д., змінюється періодично, якщо розглядати досить великий проміжок часу (кілька років).

При аналітичному згладжуванні часового ряду його мінливість подають як суму детермінованої й випадкової складових. Детерміновані зміни членів часового ряду підпорядковані деякому певному правилу, тому вони передбачувані й можуть бути подані як функція часу. При виборі моделі детермінованого компонента насамперед ураховуються змістовні міркування, тобто ті об'єктивні фактори й закономірності, які приводять до її формування. Зазвичай виділяють дві складові частини детермінованої складової:

1) *тренд* – нециклічний компонент, що плавно змінюється й описує чистий вплив довгострокових факторів, ефект яких проявляється поступово;
2) *періодичний компонент* – джерело коливань, що характеризує поведінку ряду, яка змінюється регулярно протягом заданого періоду (року, місяця, тижня й т. д.).

Треба сказати, що більшість методик аналізу має відношення до ситуацій, в яких попит забезпечується великою кількістю клієнтів, що задовольняють потреби періодично, але через їх велику кількість ця періодичність не відображена на статистичних даних. Ця ситуація справедлива, в першу чергу, для магазинів, а також для будь-яких організацій, які мають велику кількість клієнтів. Якщо ж кількість великих клієнтів мала, то замовлення, що надходять від них, має сенс виключити з історичних показників споживання й обробляти статистичні дані цих клієнтів окремо. Характерна ситуація регулярного попиту на товари, які забезпечують виробництво (комплектуючі, сировина, упаковка й т. д.), де має місце збільшення обсягів споживання в активний сезон, що відбивається на скороченні періодів

між замовленнями й/або на збільшенні обсягів партії, яка замовляється. Можливі також втрата або залучення великого клієнта в досліджуваний період. Ця подія стрибкоподібно відбивається на обсягах споживання, що також необхідно враховувати.

На обсязі потреб відбиваються також промоакції (промоакція – захід щодо короткочасного збільшення продажів яких-небудь товарів). Для того щоб прогноз майбутніх продажів був по можливості максимально точним, важливо при його побудові враховувати очікуваний ефект промоакцій, а також виключити приріст продажів, спричинений ними, з історичних показників споживання.

Частина, що залишається після виділення закономірної складової (фільтрації), є хаотичною й непередбачуваною. Для її опису використовуються методи теорії ймовірності й математичної статистики [7].

При великій тривалості періоду поширене припущення про лінійність зростання середньої (постійний тренд) погано узгоджується з практикою. Типовим випадком є експоненціальне або параболічне зростання потреб.

Деякі автори [6] рекомендують поділити товари на дві групи (товари сезонного й постійного попиту) й застосовувати до кожної з них відповідну методику прогнозування, тип якої встановлюється експериментально.

У реальній практиці використовують статистичні методи в сполученні з розумним експертним судженням. Крім того, вибір методу прогнозування може й повинен визначатися параметрами необхідного прогнозу (горизонт планування, рівень деталізації та ін.). Наприклад, для складання прогнозу попиту для бізнес-плану на 10 років доцільніше використати методи експертних оцінок, ніж статистичні методи.

Для ефективного прогнозування попиту слід регулярно вимірювати відхилення фактичних продажів від їх прогнозу. Помилка прогнозу (Forecast Error) – це абсолютна різниця між фактичним і прогнозованим попитом. Крім випадкових мають місце систематичні відхилення в один бік, які називаються зсувом. Зсув спричиняє значний негативний вплив на систему управління виробництвом й запасами. Інакше кажучи, він створює систематичне заниження або завищення прогнозу попиту.

Свідоме заниження персоналом прогнозу попиту може відбуватися з метою:

- перевиконання плану продажів і одержання премій;
- зниження запасів.

Завищення прогнозу попиту може відбуватися з метою:

- одержання більшого бюджету витрат;
- підтримки рівномірного завантаження виробництва;

- збільшення запасів.

У результаті зсуву прогнозів попиту в той або інший бік виникають найгірші наслідки: невиконання замовлень клієнтів у строк, незаплановані простої виробництва або перероблення, збільшення рівня запасів готової продукції і т. ін. Відповідно необхідно, в першу чергу, аналізувати причини зсувів, щоб уникати їх у майбутньому, й постійно вдосконалювати систему прогнозування для врахування особливостей ринку.

2.2.4. Застосування кореляційно-регресійного аналізу

Окрім сезонних факторів (впливу зростання економіки й т. д.), які зазвичай прогнозуються, на очікувані потреби можуть вплинути фактори, пов'язані зі зміною маркетингової стратегії суб'єкта. Такими факторами є реклама, зміна цінової політики, поява на ринку нових суб'єктів і нових виробів і т. д. Усе це впливає на попит, і для оцінювання даного впливу служить апарат кореляційно-регресійного аналізу [5].

Кореляційно-регресійний аналіз складається з таких етапів:

- пошук системи факторів, які істотно впливають на результативну ознаку;
- розроблення моделі, що відображає загальний зміст взаємозв'язків, які досліджуються, і їх кількісне оцінювання;
- перевірка якості моделі;
- оцінювання впливу окремих факторів.

На першому етапі здійснюється відбір факторів, які істотно впливають на результативну ознаку. Він проводиться, насамперед, виходячи зі змістовного аналізу. Для одержання надійних оцінок у модель не слід включати багато факторів, їх кількість не повинна перевищувати однієї третини обсягу даних, які аналізуються.

Але на початковому етапі розроблення моделі в дослідника немає однозначної відповіді на питання щодо набору факторів. Тому при використанні програмного забезпечення відбір факторів здійснюється безпосередньо в процесі створення моделі методом послідовної регресії. Суть цього методу полягає в послідовному включенні додаткових факторів у модель і оцінюванні впливу цих факторів. Використовується також підхід, при якому на включені у попередній склад моделі фактори не накладаються особливі обмеження й лише на наступних стадіях проводяться їх оцінювання й відбір.

Другий етап починається з розроблення моделі, що відображає загальний зміст взаємозв'язків, які досліджуються.

Регресійна модель – це рівняння (або система рівнянь), що зв’язує фактори, які, на думку дослідника, мають бути залучені до взаємозв'язків, що підлягають аналізу. Регресійне рівняння дає також

уявлення про форму зв'язку.

Найбільший інтерес становить дослідження впливу на математичне сподівання потреб зміни ціни (у лінійній моделі – коефіцієнт чутливості ціни). Вибір імовірного характеру впливу визначається досвідом, знанням проблеми й потребує залучення експертів. В основу виявлення й установлення аналітичної форми зв'язку покладено використання заданих функцій: лінійної, логарифмічної, степеневої, експоненціальної, поліноміальної й деяких інших. Але оскільки лінійні рівняння являють собою найпростіший тип взаємозв'язку, то їх використання потребує особливої обережності.

2.2.5. Кореляційний аналіз у багатономенклатурних задачах

Попит на окрему номенклатурну позицію може перебувати в імовірнісній залежності як від попиту за минулі періоди, так і від попиту на інші номенклатури, тобто характеристики розподілу попиту різних номенклатурних одиниць можуть бути взаємозалежними. З таких характеристик інтерес становить математичне сподівання попиту. Залежність між математичним сподіванням попиту і попитом на інші товари може бути встановлена за допомогою кореляційного аналізу.

У задачах про управління запасами типовими факторами, що приводять до корельованого попиту, є такі:

- комплектний характер задоволення потреби;
- взаємозамінність окремих номенклатур;
- групові відмови елементів обладнання.

Перший фактор зазвичай пов’язаний із загальною зміною інтенсивності операцій у системі й приводить до односпрямованої зміни попиту (додатна кореляція). Взаємозамінність деталей спричиняє часткове зменшення попиту на одну з них за рахунок більш інтенсивної витрати іншої (від’ємна кореляція). У всіх випадках характер залежності передбачається лінійним, внаслідок чого тіснота взаємозв'язку може бути охарактеризована коефіцієнтом кореляції [5]

$$r = \frac{M\left[\left(x_i - \bar{x}_i\right)\left(x_j - \bar{x}_j\right)\right]}{\sigma_i \sigma_j},$$

який змінюється від 0 до ± 1 (де M – математичне сподівання).

Коефіцієнт кореляції, близький до одиниці, вказує на пропорційну витрату номенклатур і, отже, на можливість їх розгляду як однієї сукупної одиниці («комплект»). Малі за модулем значення дають підстави застосувати для кожної з номенклатур апарат теорії запасів, розроблений для незалежного попиту.

2.3. Задача розподілу замовлень між постачальниками

Задача вибору постачальника ускладнюється, якщо на ринку присутні кілька постачальників, що мають різні ціни, пропонують товар

різної якості й мають обмеження на обсяг поставок. У найпростішому випадку, коли ціна на товар постійна, задача зводиться до класичної задачі лінійного програмування.

Коли ж залежність ціни від обсягу замовлення кусково-лінійна, тобто коли існують різні варіації оптових цін (дрібний опт, середній опт і т. д.), то задача розподілу замовлень між постачальниками значно ускладнюється. Для розв'язання задач такого типу (багатоекстремальні задачі дискретного програмування) застосовуються спеціальні методи: динамічного програмування, локальної оптимізації, стохастичні, гілок і меж та ін.

Позначимо через $g_i(q_i)$ ціну продукції i-го виробника при обсязі замовлення q_i. Розглянемо задачу розподілу замовлення величини V між m виробниками таким чином, щоб мінімізувати вартість замовлення. Потрібно так визначити величини $q_i \geq 0$, щоб загальний обсяг замовлення був не меншим, ніж V, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \geq V,$$

а вартість замовлення $L = \sum_{i=1}^{m} s_i(q_i)$, де $s_i(q_i) = q_i \cdot g_i(q_i)$, була мінімальною. Складність розв'язання цієї задачі зумовлена тим, що функції $g_i(q_i)$ розривні (мають стрибки).

На конкретному прикладі [9] проілюструємо розв'язання даної задачі за допомогою методу динамічного програмування. Маємо трьох виробників, дані про яких наведено в табл. 2.1. Нехай $V = 14$, а кожен виробник має не більше 10 одиниць продукції.

Таблиця 2.1

1-й виробник	q_1	5	8	10
	g_1	6	5	3
2-й виробник	q_2	3	6	10
	g_2	5	3	2
3-й виробник	q_2	4	9	10
	g_3	4	2	1

Розглянемо залежність $g(V)$ при $1 \leq V \leq 16$. Верхню межу призначаємо більшою, ніж необхідна величина замовлення ($V = 14$). Це слід зробити для того, щоб виявити можливі мінімуми функції $g(V)$ при $V > 14$. Верхню межу обмежено місткістю складу, розміром оборотних коштів і т. д.

Перший виробник може забезпечити обсяг закупівель від 1 до 10 одиниць. Визначаємо мінімальні вартості закупівель у нього продукції в кількості від 1 до 10 одиниць товару. Дані наведено в таблицю 2.2.

Таблиця 2.2

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(V)$	6	12	18	24	25	30	35	24	27	30

Додаємо до розгляду другого виробника й шукаємо мінімальні вартості закупівель у двох виробників при обсязі закупівель від 1 до 16 одиниць товару. Для цього перебираємо всі варіанти розподілу замовлень між виробниками, що забезпечують поточну величину замовлення й вибираємо найдешевший варіант. В окрему таблицю заносимо кількість одиниць товару, що замовляють у кожного виробника в оптимальному варіанті. Наприклад, замовлення $V = 4$ можна сформувати п’ятьма способами: замовити весь обсяг у першого виробника; замовити чотири одиниці товару у першого й одну одиницю в другого; три одиниці товару в першого й дві у другого й т. д. При переборі варіантів закупівель обсягів, більших, ніж 10, необхідно враховувати обмежені можливості постачальників. Мінімальні вартості закупівель заносимо в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$S(V)$	5	10	9	12	15	12	14	16	18	20	26	32	38	36	38	40

На наступному кроці додаємо до розгляду третього виробника. Шукані мінімальні вартості замовлень одержуємо аналогічно випадку з двома постачальниками. Наприклад, замовлення $V = 4$ можна одержати такими п'ятьма способами: замовити всі чотири одиниці товару в третього виробника; замовити три одиниці в третього й одну у перших двох виробників; замовити дві одиниці товару в третього й дві одиниці в перших двох і т. д. При цьому використовується отримана на попередньому кроці табл. 2.3. Вибравши кращий варіант і знайшовши аналогічним чином для всіх обсягів $1 \le V \le 16$, одержимо підсумкову залежність $L(V)$ (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$L(V)$	4	8	9	8	10	12	14	16	9	10	15	18	19	22	21	22

Аналізуючи дані табл. 2.4, можна зробити висновок, що замовлення в 3, 5, 6, 7, 8 і 14 одиниць товару недоцільні. У випадку $V = 14$ вигідно закуповувати не 14 одиниць продукції, а 15 одиниць. Звертаючись до відповідних таблиць з оптимальними варіантами замовлень, знаходимо, скільки продукції необхідно замовити в кожного постачальника.

Узагальнюючи розглянуту методику, можна одержати рекурентне співвідношення

$$f_j(n) = \min_{y_j}\left[s_j(y_j) + f_{j-1}(n - y_j)\right], \quad j = 1, 2, ..., s;$$

$$f_0(n) \equiv 0.$$

Мінімум береться за цілими значеннями $y_j \le n$, де $n = 0, 1, 2, ..., V_{\max}$ (у розглянутому вище прикладі $V_{\max} = 16$). Якщо ж потрібно закупити продукції більше, ніж є в постачальника, то при програмній реалізації алгоритму у відповідний елемент таблиці слід занести дуже велике число, щоб при мінімізації відкинути неможливі варіанти.

Випадок декількох незв'язаних товарів зводиться до незалежного розв’язання задач для кожного виду продукції.

Можливі випадки взаємозалежної ціни на різні номенклатури. Наприклад, при купівлі певного обсягу однієї номенклатури (або заданого комплекту) продавець знижує ціни на деякі інші види продукції або зобов'язує оптового покупця купувати деякі супутні товари. Така ситуація можлива у тому випадку, коли виробник бажає мотивувати або примусити посередників продавати нову продукцію. Ця стратегія цін дозволяє забезпечити максимальні обсяги виробництва нової продукції й позбавляє виробника від конкурентної боротьби, коли на початковому етапі обсяги продажів невеликі, і виробник перекладає складності конкурентної боротьби й пошук кінцевих споживачів на посередників. Ці обставини ускладнюють задачу розподілу замовлень між постачальниками при багатономенклатурних закупівлях.

3. ТРАНСПОРТНА ЛОГІСТИКА

3.1. Загальні положення

Транспорт – це галузь матеріального виробництва, що здійснює перевезення людей і вантажів. У структурі суспільного виробництва транспорт належить до сфери виробництва матеріальних послуг.

У тому випадку, коли обсяги транспортної роботи виділяються у великий самостійний масив, виникає ряд специфічних задач, які належать до задач транспортної логістики. Тактичні питання включають диспетчеризацію, вибір маршрутів, перевізників, спільне планування транспортних і складських процесів, а операційні – завантаження транспорту, пакування, організацію безпеки й збереження вантажу, обмін даними між учасниками логістичного процесу й т. д. Межі між тактичними й операційними питаннями часто є розмитими.

Суперечливість умов задачі транспортної логістики, а саме своєчасне й повне задоволення потреб у перевезеннях, з одного боку, раціональне використання провізних можливостей – з іншого, породжує відповідні дві групи методів її розв'язання. До першої групи можна віднести методи теорії управління запасами й методи планування доставки за графіком, що приділяють основну увагу першій умові задачі, а до другої – методи маршрутизації, які оптимізують за вибраним критерієм використання рухомого складу при заданих обмеженнях на обсяг перевезень, час у наряді й т. д.

Задачі вибору типу й виду транспортного засобу виникають у організацій, що мають власний транспортний підрозділ, а також у фірм-перевізників. Визначальними факторами при її розв'язанні є характеристики вантажу, що потребує перевезення, відстань, на яку перевозиться вантаж, транспортні маршрути, час на доставку й час на вантажно-розвантажувальні роботи і т. д. Бальна методика вибору подібна в загальних рисах до методики вибору постачальника, тому докладно не розглядається.

3.2. Планування перевезень

Нерівномірність виробничих процесів у постачальників і споживачів спричиняє істотні коливання добових потреб у перевезеннях й обмежує застосування регулярних маршрутів і графіків руху автомобілів. Буфером, що згладжує нерівномірність виробництва, переміщення й споживання, є запаси продукції, на які на підприємствах встановлюються норми, виходячи з мінімуму витрат на зберігання, транспортування й втрат від дефіциту.

Якщо вважати нормативні запаси відправників і одержувачів

заданими умовами виробництва, що обслуговується, то умова своєчасності перевезення буде означати виконання її в такі строки й у таких обсягах, які забезпечують підтримку запасів відправника й одержувача в межах нормативних рівнів. Транспортний процес регулюється за допомогою інформації про фактичні поточні запаси відправників та одержувачів порівняно з їхніми нормативами.

Знаючи норматив товарного запасу, фактичний запас, наявний на початок доби, й середньодобову інтенсивність випуску продукції, можна розрахувати припустимий інтервал часу відправлення. Аналогічно розраховується припустимий інтервал доставки, на якому гарантовано своєчасне поповнення запасу споживача. Інтервали відправлення й доставки в загальному випадку не збігаються в часі, але для збалансованих виробництва й споживання мають загальну область перетину. Перевезення необхідно планувати саме в області перетину даних інтервалів, оскільки в цьому періоді й у постачальника, і в споживача є об'єктивна потреба в перевезенні. Виконання її поза цим інтервалом (що має назву нормативного) спричиняє втрати або у відправника, або в одержувача, або на транспорті. Важливо зазначити, що всередині нормативного інтервалу перевезення може бути виконано в кожний найбільш зручний для автопідприємства момент часу, для якого визначаються обсяг вантажу, накопичений у постачальника, й обсяг, необхідний споживачеві. Потреба дорівнює мінімуму з даних двох обсягів.

Вищевикладений підхід справедливий для однорідного вантажу. Якщо виникає потреба доставки різних видів номенклатур декільком споживачам, задача оптимізації значно ускладнюється. Для встановлення раціональної черговості перевезень різних вантажів для різних клієнтів, яка буде забезпечувати своєчасність доставки, виникає проблема кількісного порівняння різних потреб, тобто проблема визначення їхніх пріоритетів.

Виділяють три основні параметри, за якими розрізняються потреби і які впливають на пріоритет перевезення: час, обсяг і вартість вантажу. Пріоритет перевезення $W(t)$ обернено пропорційний залишку нормативного інтервалу доставки ($T_{\text{д}} - t$), тобто чим ближче строк доставки, тим вище пріоритет, який прямо пропорційний обсягу вантажу $q(t)$, що очікує перевезення, і його вартості g, яка визначає втрати від заморожування коштів, вкладених у запас. Щоб урахувати вплив усіх параметрів, уводиться функція

$$W(t) = \frac{q(t) \times g}{T_{\text{д}} - t},$$

яка має назву *функції терміновості перевезення* (ФТП) [2]. Вона являє собою гіперболу, яка в міру наближення строку доставки $T_{\text{д}}$

задає більшу швидкість зростання пріоритету (крива ОАС) (рис. 3.1). Робоча область ФТП обмежується точкою $T' = T - t_{\text{e}}$, оскільки рейс має плануватися з урахуванням часу на його виконання t_{e}.

Ця точка визначає норматив W_N, у межах якого забезпечується своєчасне обслуговування, а за його межами виникає порушення строків доставки. За точкою T' продовження функції (крива АВ) відображає передбачуваний характер втрат у системі несвоєчасного обслуговування (і будується для можливості одержання на ЕОМ деякого прийнятного рішення у випадку виходу значень ФТП у неробочу область).

Різна швидкість зміни ФТП на різних ділянках нормативного інтервалу часу на доставку обумовлює можливість регулювання пріоритетів різних потреб. Їхнє співвідношення буде залежати від моменту часу, в який здійснюється порівняння.

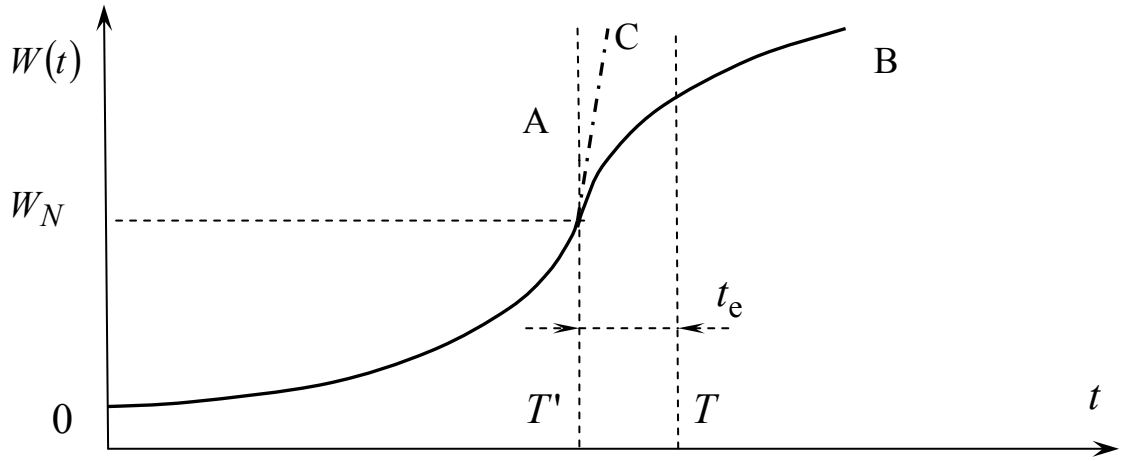

Рис. 3.1. Графік функції терміновості перевезення

На рис. 3.2 показано можливий перерозподіл пріоритетів перевезень двох вантажів з урахуванням їх зниження в моменти призначення рейсів. У цей момент потреба знижується пропорційно обсягу відправлення, після чого знову зростає в процесі виробництва й споживання й т. д.

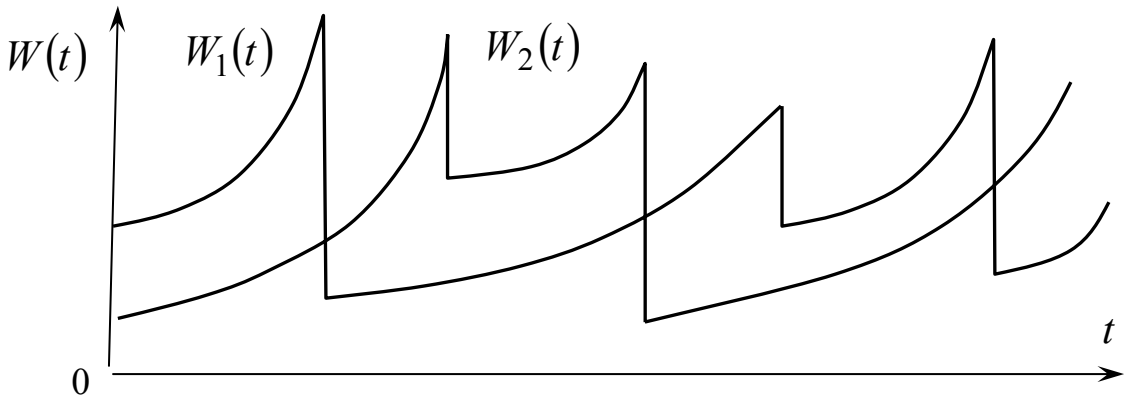

Рис. 3.2. Пріоритети перевезення двох вантажів

Якщо простежити зміну функції терміновості перевезення за планову добу для деякої ланки «постачальник – споживач», то в роботі автотранспортного підприємства з обслуговування цієї ланки можна виділити дві складові: суму площ, вищу від нормативу W_N, який характеризує частку несвоєчасного обслуговування, й всі значення функції нижчі за норматив, що відбивають своєчасні рейси. Тоді рівень обслуговування $U_{\text{обсл}}$ можна оцінити відношенням площі своєчасного обслуговування до загальної площі:

$$U_{\text{обсл}} = \frac{W_N T}{W_N T + S_{Ш}}.$$

Тут $S_{Ш}$ – сума «штрафних» площ, вища від нормативу W_N,

$$S_{Ш} = \sum_{i=1}^{k} \left[\int_{t_{1i},i}^{t_{2i}} W_i(t)dt - (t_{2i} - t_{1i})W_N \right],$$

де k – кількість затримок доставки (відправлення); t_{1i} – ліва межа інтервалу *i*-ї затримки; t_{2i} – права межа інтервалу *i*-ї затримки.

Звідси випливає, що при плануванні рейсів не є обов'язковим постійне прагнення до якнайшвидшого виконання кожного замовлення при низьких значеннях ФТП. Основна вимога – підтримка пріоритету перевезень у робочій області. Таким чином, нерівномірність виробництва й споживання, що зумовлює коливання строків відправлення й доставки вантажів, згладжується регулюванням пріоритетів потреб у перевезеннях за допомогою ФТП, забезпечуючи тим самим можливість своєчасного обслуговування кожного відправника й одержувача.

Згідно з алгоритмом, запропонованим у роботі [2], побудова плану перевезень здійснюється під час імітації на ЕОМ виробничо-транспортного процесу й розбивається на послідовність кроків. На кожному кроці розв’язання проводиться за два етапи:

1) розрахунок й упорядкування потреб у перевезеннях за їхніми пріоритетами;
2) оптимізація розподілу автомобілів за впорядкованими потребами.

Обслуговувана система являє собою сукупність ланок «постачальник – споживач». У загальному випадку будь-яке обслуговуване підприємство може виступати і як відправник, і як одержувач різних вантажів. Потреби в перевезеннях не стабільні в часі, тобто строки й обсяги перевезень не фіксовані, для однієї ланки «постачальник – споживач» можуть виконуватися декілька рейсів за добу, перевезювані вантажі допускають зберігання.

Для кожного відправника й одержувача задаються:

- середня інтенсивність випуску (споживання) продукції (береться згідно з виробничими програмами клієнтів);

- нормативні запаси продукції (якщо нормативи невідомі, то задаються середні фактичні розміри запасів, можливість скорочення яких буде перевірятися наступними прогонами імітаційної моделі);

- поточні фактичні запаси, наявні на початок доби (ці дані надходять щодня диспетчерові АТП від клієнтів і є аналогом замовлень на перевезення);

- вартість вантажів;

- мінімальний обсяг відправлення, зумовлений розміром тари, і коефіцієнт місткості у використовуваному типі рухомого складу;

- кількість вантажно-розвантажувальних постів, години роботи й перерв, середня швидкість навантаження - розвантаження однієї тонни вантажу.

Далі визначаються необхідні кількість і вантажопідйомність автомобілів із зазначенням маршрутів і погодинних графіків їхньої роботи, при якій:

1) відправлення й доставки виконуються в строки, що забезпечують підтримку запасів відправників та одержувачів у межах нормативів;

2) досягається максимально можлива продуктивність одиниці вантажопідйомності парку рухомого складу.

На першому етапі планування виконуються розрахунок й упорядкування потреб у перевезеннях за їхніми пріоритетами, на другому – розподіл автомобілів за впорядкованими потребами. Дана задача розв’язується за допомогою евристичного алгоритму.

Через мінливість пріоритетів потреб кожен момент часу, в який аналізується їхній стан, характеризується своїм набором більш термінових і менш термінових потреб. Дану впорядковану множину доцільно розбити на групи, в які об’єднуються потреби з близькими пріоритетами, що далі вважаються рівнозначними. Це дає можливість вибору рейсів і дозволяє оптимізувати розподіл автомобілів усередині однієї групи. Задоволення потреб починається з групи вищого пріоритету. Після того як всі рейси для цієї групи сплановано, здійснюється перехід до наступної групи й т. д.

З часом потреби змінюють свої відносні пріоритети, тому склад груп рівнозначних потреб постійно обновлюється. З наближенням строку доставки відбувається збільшення її пріоритету, і будь-яка потреба може потрапити в групу термінових, задоволення яких обов'язково виконується незалежно від переваг АТП. Таким чином, виключається можливість нескінченного відкладання невигідного замовлення.

При розподілі вільних автомобілів за рівнозначними потребами розв’язується задача оптимізації використання рухомого складу:

потрібно розподілити m автомобілів за n потребами відповідно до вибраного критерію. Може бути вибрано будь-який критерій, який мінімізує витрати транспортних ресурсів (мінімум транспортних витрат, максимальна продуктивність рухомого складу тощо).

Результатами планування є плани-графіки роботи автомобілів у формі шляхових листів і диспетчерські карти вантажно-розвантажувальних робіт у відправників і одержувачів. Усі плани-графіки мають бути ув'язані між собою й забезпечувати узгодження роботи автотранспорту, відправників і одержувачів на рівні оперативного планування.

Викладений алгоритм ілюструє проблему диспетчерського супроводу й організації перевезень. Складання розкладів маршрутів машин і обсягів вантажу, що перевозиться, належить до теорії розкладів (теорії календарного планування). У випадках проектування перевезень великого обсягу й підвищеної складності є обґрунтованим імітаційне моделювання.

3.3. Сіткові моделі

Сіткові оптимізаційні моделі зазвичай є окремими випадками моделей лінійного й цілочислового програмування. Методики розв’язання таких задач [10] (симплекс-алгоритм, алгоритми Гоморі й т. ін.) розглядалися раніше у відповідних курсах. Тому алгоритми їх розв’язання не наводяться. Основну увагу приділено постановкам і деяким прикладним аспектам задач логістики.

3.3.1. Класична транспортна задача

Транспортна задача (задача про прикріплення постачальників до споживачів) є типовою для промислових фірм, що мають кілька підприємств, складів, оптових баз та інших ринків збуту. Модель застосовується при розв’язанні планових задач. При цьому протягом планового періоду обсяги випуску й попиту, а також номенклатура замовлень вважаються постійними.

Математична постановка задачі має вигляд

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (3.1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i\ ,\ i=1,2,...,m \ \text{(пропозиція)}, \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j\ ,\ j=1,2,...,n \ \text{(попит)}, \qquad (3.3)$$

$$x_{ij} = 0,1,2,..., \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \,. \tag{3.5}$$

Витрати на перевезення одиниці вантажу з пункту відправлення i в пункт призначення j дорівнюють c_{ij}. Цільовою функцією є план перевезень, який мінімізує загальні транспортні витрати.

Умова (3.5) про рівність попиту й пропозиції вводиться для зручності розв'язання задачі. У тому випадку, коли пропозиція перевищує попит або попит перевищує пропозицію, умова (3.5) досягається шляхом введення фіктивного споживача або відповідного фіктивного постачальника.

У математичній моделі (3.1) – (3.5) передбачено, що як вантаж розглядається тільки однорідний вид продукції (однопродуктова модель). Справа в тому, що при задоволенні вимог споживачів у моделі не розрізняються джерела поставок.

Щоб уникнути цього обмеження, багатопрофільні фірми можуть розробляти окремі плани перевезень кожного з основних видів продукції (що належать до групи А в АВС-аналізі), а доставку інших видів товарів організовувати з міркувань практичної зручності.

Крім того, можливе введення узагальненої міри кількості всіх видів продукції, якою може бути вага. При обчисленні c_{ij} припускають, що одиниця ваги містить у собі всі види продуктів, які необхідні в пункті призначення в заданих пропорціях. Тому розв'язок являє собою лише оцінки запланованих поставок, спираючись на які вибирають такі обсяги перевезень, які зручніше реалізувати на практиці.

Іноді на шукані змінні x_{ij} необхідно накласти додаткові обмеження за пропускними здатностями. Найпростіший вид обмежень визначається нерівністю $x_{ij} \le u_{ij}$. Можливі обмеження й більш загального вигляду. Можуть мати місце ситуації, коли обмеження виявляються настільки жорсткими, що задача взагалі не має припустимого розв'язку.

У ряді випадків у фірм може виникнути потреба в зміні плану перевезень у зв'язку з сезонними коливаннями попиту або змінами обсягів випуску продукції. Якщо не можна утворювати запаси, то задача зводиться до розв'язання декількох незалежних задач, наприклад для кожного місяця. Однак більшість фірм має у своєму розпорядженні можливості створення запасів і ці запаси можна включити в транспортну модель.

Припустимо, наприклад, що фірмі, яка має два підприємства й трьох споживачів, потрібно розробити план розподілу запасів на кожний місяць. Припустимо також, що фірма застосовує стратегію, яка

передбачає відсутність запасів на початок року. Позначимо через S_i, де $i = 1,2,...12$, запас продукції першого підприємства на кожен місяць. Аналогічно величини S_i, де $i = 13,14,...,24$, позначають запас продукції другого підприємства. Попит споживачів позначимо через D_j, $j = 12(k-1)+m$, де k – номер споживача, а m – місяць.

Деякі змінні потрібно виключити з розгляду, щоб уникнути поставок у середині року для задоволення попиту на початку року (наприклад $x_{6,25}$). При розрахунку c_{ij} для тих невідомих, що залишились, необхідно враховувати витрати на зберігання запасів.

3.3.2. Модель з проміжними пунктами

Велике значення має узагальнення класичної транспортної задачі шляхом включення в неї випадків, коли деякі пункти служать лише для перевалки вантажів. Проміжні пункти мають місце в розподільних системах, що включають виробників, мережу магазинів і регіональні оптові бази. Метою задачі є перерозподіл запасів при мінімальних загальних транспортних витратах.

На мережі маршрутів перевезень вузли, в яких є надлишок товару, називаються *джерелами*, а яким потрібен додатковий запас – *стоками*. Всі інші вузли йменуються *проміжними*.

Одна з постановок задачі полягає в мінімізації виразу вигляду (3.1), що являє собою сумарну вартість перевезень. Для кожного складу (кожного вузла мережі) існує одне рівняння балансу. Кожна дуга мережі описується однією змінною x_{ij}, яка являє собою кількість вантажу, що має бути відправлена з пункту i в пункт j. Праворуч від знака рівності в рівнянні балансу додатним числом записують кількість запасів, що підлягає розподілу. Від'ємне число відповідає потребам складу в додаткових запасах.

Поширеним різновидом задачі про призначення є задача пошуку найкоротшого (або найдешевшого) маршруту в мережі, що з'єднує початковий (джерело) і кінцевий (стік) вузли. При цьому передбачається наявність одиничного надлишкового запасу в джерелі й одиничному попиті в стоці. Всі інші вузли мережі вважаються проміжними пунктами. Ця задача може бути ефективно розв'язана методом динамічного програмування, що й буде показано в п. 3.3.5.

3.3.3. Моделі призначень

Задачу про призначення можна коротко сформулювати в такий спосіб. Задано n робіт, кожну з яких може виконати кожен з n виконавців. Вартість виконання роботи i виконавцем j дорівнює c_{ij}.

Потрібно розподілити виконавців по роботах таким чином, щоб мінімізувати загальні витрати.

Змінні, що описують задачу, визначаються так: $x_{ij} = 1$, якщо робота i виконується виконавцем j, і $x_{ij} = 0$ – в інших випадках. У цьому разі задача зводиться до мінімізації виразу

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (3.6)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,2,...,\ n, \qquad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,2,...,\ n. \qquad (3.8)$$

Припустимий розв'язок містить n змінних, що дорівнюють одиниці, тоді як будь-який базисний розв'язок включає $2n-1$ змінних. Створено кілька ефективних методів розв'язання цієї задачі, відмінних від симплексного методу, які основані на алгоритмах пошуку максимального потоку й найкоротшого маршруту [11].

Узагальненням цієї задачі є розподільна задача (узагальнена транспортна задача, задача про розташування флоту й т. д.). Задача має таку інтерпретацію. Нехай є n транспортних маршрутів, і за j-м маршрутом потрібно виконати b_j рейсів. У наявності є транспортні одиниці m типів. Резерви корисного часу транспортної одиниці типу i становлять a_i. На виконання транспортною одиницею типу i рейсу j потрібен час t_{ij}, а витрати на рейс становлять c_{ij}. Через x_{ij} позначено кількість рейсів, що має виконати транспортна одиниця i на маршруті j. Потрібно мінімізувати вираз (3.1) за умов

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \le a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ \ (x_{ij} \ge 0, \text{ де } x_{ij} \text{ – цілі}).$$

Перша умова виражає обмеження на фонди часу кожної транспортної одиниці, а друга вказує на те, що всі рейси мають бути виконані.

До аналогічної моделі зводиться задача про вибір засобів доставки вантажу. У цьому випадку через i позначено вантажоутворювальні пункти з обсягом вантажу в них a_i. Існує n видів транспорту доставки вантажу. Вантажопідйомність j-го засобу позначено через p_j, а наявний його парк – через N_j. Вантажі підлягають доставці в центральний пункт (на склад), витрати при

здійсненні однією одиницею засобу доставки типу j з пункту i дорівнюють c_{ij}. Через x_{ij} позначено кількість засобів доставки типу j, що відправляється з пункту i.

Потрібно мінімізувати вираз (3.1) за умов

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \geq a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq N_j\ \ (x_{ij} \geq 0, \text{ де } x_{ij} \text{ – цілі}).$$

Ця задача може бути доповнена врахуванням підготовчих робіт, пов'язаних з виходом кожної транспортної одиниці на відповідний маршрут. Така обставина досить часто має місце в задачах транспортної логістики. Нехай випуск транспортної одиниці типу i на маршрут j пов'язано з підготовчими роботами, що потребують часу τ_{ij} й коштів d_{ij}. Тоді сумарні витрати становитимуть

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(x_{ij}\right),$$

де $c_{ij}\left(x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, & x_{ij} > 0. \end{cases}$

Обмеження на фонд часу набувають вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\left(x_{ij}\right) \leq a_i, \text{ де } t_{ij}\left(x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ t_{ij}x_{ij} + \tau_{ij}, & x_{ij} > 0. \end{cases}$$

Обмеження на рейси й умови невід'ємності й цілочисловості x_{ij} зберігаються.

Ця задача належить до задач з фіксованими доплатами, причому доплати входять і у цільову функцію, і в обмеження. Задачі такого типу розв'язуються шляхом введення додаткових змінних і зведення цих задач до класичних задач цілочислового програмування [10].

3.3.4. Задача комівояжера

Ця задача належить до такої ситуації: комівояжер, виїхавши з вузла 1, збирається відвідати кожний з n вузлів мережі по одному разу, і повернутися до нього знову. Відстань між вузлами i і j дорівнює c_{ij}. У логістиці ця задача відповідає вибору оптимального маршруту кругового розвозу вантажу однією машиною постачальника (перевізника) декільком клієнтам або пошуку кільцевого маршруту для внутрішньозаводського транспорту. Крім того, до цієї задачі зводиться задача вибору оптимального порядку виробництва декількох типів виробів на одному обладнанні, коли час переналагодження

обладнання після випуску виробу виду i для виду j дорівнює c_{ij}.

Повертаючись до вихідної задачі, приймемо $x_{ij} = 1$, якщо в маршрут входить переїзд із вузла i у вузол j ($i \neq j$), і $x_{ij} = 0$ – в інших випадках. При зазначених умовах задача зводиться до мінімізації виразу (3.6), у якому $c_{ii} = \infty$, при обмеженнях (3.7) – від'їзд і (3.8) – прибуття.

Розв'язок задачі в такій постановці може не містити оптимального маршруту, а являти собою кілька незв'язаних циклів. Тому умови задачі про призначення (3.7) і (3.8) необхідно доповнити умовою наявності тільки одного циклу. Для розв'язання отриманої комбінаторної задачі цілочислового програмування зазвичай застосовується метод гілок і меж. Існують кілька модифікацій методу, які використовують при розв'язанні задачі комівояжера [11], а саме метод завдання маршрутів, метод часткових циклів і метод виключення підциклів, який буде викладено нижче.

На початку ітерації k відома верхня межа (оцінка) x_0^k оптимального значення цільової функції. Можна прийняти x_0^1 таким, що дорівнює досить великому циклу, наприклад сумі $(c_{12} + c_{23} + c_{34} + ... + c_{n1})$, що відповідає циклу, який включає проїзд з міста 1 у місто 2, …, у місто n і далі в місто 1. Крім того, є основний список задач про призначення. Всі ці задачі мають вигляд (3.6) – (3.8), але відрізняються одна від одної тим, що в них різні величини c_{ij} дорівнюють нескінченності (досить великому числу). На ітерації 1 основний список складається з задачі про призначення (3.6) – (3.8). Підциклом називається цикл, що містить не всі n міст.

На ітерації k треба виконати такі кроки:

1. Припинити обчислення, якщо основний список порожній. У противному разі вибрати одну задачу, викресливши її з основного списку.

2. Розв'язати вибрану задачу про призначення (за допомогою методів дискретного програмування [10, 11]). Якщо оптимальне значення цільової функції більше за x_0^k або дорівнює йому, то прийняти $x_0^{k+1} = x_0^k$ й повернутися до кроку 1. У противному разі перейти до кроку 3.

3. Якщо отриманий оптимальний розв'язок вибраної задачі є циклом, то зафіксувати його, прийняти x_0^{k+1} таким, що дорівнює відповідному оптимальному значенню цільової функції, й повернутися до кроку 1. У противному разі перейти до кроку 4.

4. Зупинитися у вибраному оптимальному розв'язку на підциклі,

що містить мінімальну кількість міст. Кожному x_{ij} в цьому підциклі поставити у відповідність задачу про призначення й занести її в основний список, прийнявши відповідне значення $c_{ij} = \infty$. Залишити всі інші коефіцієнти тими самими, що й на кроці 1. Прийняти $x_0^{k+1} = x_0^k$. Повернутися до кроку 1.

Щоб проілюструвати алгоритм, розв'яжемо задачу комівояжера для п'яти міст. Необхідні дані (відстані c_{ij}) наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	∞	10	25	25	10
m_2	1	∞	10	15	2
m_3	8	9	∞	20	10
m_4	14	10	24	∞	15
m_5	10	8	25	27	∞

Приймаємо на першій ітерації як припустимий розв'язок такий цикл: місто 1 - місто 2, …, місто 5 - місто 1. Значення цільової функції при цьому $x_0^1 = 65$. Основний список містить тільки цю задачу. Перейшовши до кроку 2, бачимо, що одержаний оптимальний розв'язок містить два підцикли ($x_{15} = x_{51} = 1$ і $x_{23} = x_{34} = x_{42} = 1$), а значення цільової функції дорівнює 60, що приводить до кроку 3. Оскільки отриманий оптимальний розв'язок містить два підцикли, переходимо до кроку 4. Вибираємо підцикл $x_{15} = x_{51} = 1$, тому що в нього входить менша кількість міст. Вносимо дві задачі в основний список, прийнявши в одній з них $c_{15} = \infty$, а в іншій $c_{51} = \infty$ і залишивши всі інші значення c_{ij} без змін. Приймаємо $x_0^2 = x_0^1 = 65$.

Повертаючись до кроку 1, вибираємо задачу, в якій $c_{15} = \infty$, назвавши її задачею 2. Оптимальне значення цільової функції відповідної задачі дорівнює 65. Це значення являє собою нижню межу для будь-якого циклу, що виключає маршрут з міста 1 у місто 5. Оскільки цикл довжиною 65 уже є, то немає потреби розглядати цю задачу. Відповідно до кроку 2 приймаємо $x_0^2 = x_0^2 = 65$ й повертаємося до кроку 1. Вибираємо задачу, що залишилася, в якій призначено $c_{51} = \infty$, і називаємо її задачею 3. Розв'язавши її, одержуємо оптимальне значення цільової функції, яке дорівнює 62, і переходимо до кроку 3. Далі знаходимо відповідний оптимальний

розв'язок $x_{15} = x_{52} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$, що є циклом. Фіксуємо знайдений розв'язок, прийнявши $x_0^4 = 62$, й повертаємося до кроку 1. Виявляємо, що основний список порожній, внаслідок чого розрахунок припиняємо.

Використання підциклів як джерел для формування нових задач на кроці 4 є відмінною рисою цієї модифікації методу. У цьому варіанті кілька задач, включених в основний список, можуть виявитися тотожними. При програмній реалізації алгоритму краще розв'язати надлишкові задачі, ніж організувати перевірку повторень.

3.3.5. Розв'язання задачі про найкоротший маршрут методом динамічного програмування

У напрямленій ациклічній мережі завжди можна позначити вузли цілими числами від 1 до n таким чином, що для кожної дуги (i, j) виконується нерівність $i < j$. Припустимо, що необхідно знайти найкоротший шлях від вузла 1 до вузла n. Нехай l_i – довжина найкоротшого шляху від вузла 1 до вузла i. За визначенням $l_1 = 0$. З визначення l_i випливає, що $l_i + c_{ij}$ дорівнює довжині найкоротшого шляху від вузла 1 до вузла j за умови, що останньою дугою є дуга (i, j). Найкоротший шлях від вузла 1 до вузла j повинен містити деяку дугу як кінцеву, тому

$$l_j = \min_{i|(i,j)} (f_i + c_{ij}). \qquad (3.9)$$

Оскільки для будь-якого вузла $i < j$, то вираз (3.9) можна використати для послідовного обчислення l_j при $j = 2, 3, ..., n$.

Алгоритм зворотного прогону:

1. Прийняти $v_1 = 0$, $v_k = \infty$ для $k = 2, 3, ..., n$ і $j = 2$.
2. Для кожної дуги (i, j), яка входить у вузол j, прийняти
$$v_j = \min(v_j, v_i + c_{ij}). \qquad (3.10)$$
3. Зупинитися, якщо $j = n$. У противному разі прийняти $j = j + 1$ і повернутися до кроку 2.

Слід зазначити, що назва «алгоритм зворотного прогону» не зовсім удала, оскільки обчислення ведуться від джерела до стоку.

Алгоритм прямого прогону:

1. Прийняти $v_1 = 0$, $v_k = \infty$ для $k = 2, 3, ..., n$ і $i = 1$.
2. Для кожної дуги (i, j), яка виходить із вузла i, прийняти
$$v_j = \min(v_j, v_i + c_{ij}). \qquad (3.11)$$

3. Зупинитися, якщо $j = n$. У противному разі прийняти $i = i + 1$ і повернутися до кроку 2.

В алгоритмах прямого й зворотного прогонів, хоча й відмінних, передбачається одне додавання й одне порівняння на кожну дугу. Отже, обидва алгоритми мають однаково високу швидкодію. Проте існує тонка відмінність [12]. В алгоритмі прямого прогону дуги розглядаються для тих вузлів, найкоротші шляхи до яких відомі, тобто дуги, що виходять з вузла i, є основою обчислень, коли $v_i = l_i$. У другому алгоритмі розглядаються дуги для тих вузлів, найкоротші шляхи до яких ще не відомі, тобто дуги, що входять у вершину j, використовуються, коли ще l_j не відома.

Саме через цю обставину перевага найчастіше віддається алгоритму прямого прогону. Цей алгоритм можна застосовувати при будь-якій структурі множини найкоротших шляхів.

Досить легко знайти найдовший шлях в ациклічній напрямленій мережі: необхідно замінити $\min$ на $\max$ у (3.9) – (3.11) і на першому кроці алгоритмів прийняти $-\infty$ замість $+\infty$.

3.3.6. Використання лінійних моделей у логістиці

Застосування лінійних моделей при розв’язанні практичних задач логістики пов’язано з певними труднощами. Використання моделі має бути обґрунтованим з погляду її потенційного внеску в прибутковість підприємства. Практика показує, що основні витрати пов'язані з вирішенням таких проблем:

1. *Визначення й уточнення рамок аналізу.* Як правило, в більшості випадків тип задачі оптимізації не є очевидним. Створення лінійної математичної моделі відбувається в результаті проб і помилок, консультацій з керівництвом і т. ін. Необхідно уважно підходити до вибору критерію ефективності (цільової функції). Іноді доводиться розглядати кілька цільових функцій, щоб з'ясувати, чи не приводять вони до різних стратегій. Такими критеріями можуть бути критерії мінімуму простою транспортних засобів, мінімуму руху порожняком, мінімуму часу на виконання завдання, мінімуму витрат або досягнення мінімального ризику. На створення моделі йде близько 30 % загальних зусиль.

2. *Одержання необхідних даних.* При розв’язанні практичних задач доводиться враховувати сотні або тисячі обмежень. При цьому кількість невідомих перевищує кількість останніх у кілька разів. Одержання необхідних даних є трудомісткою задачею. Для її виконання цілком може знадобитися 50% трудовитрат, пов'язаних з практичним використанням методів дослідження операцій.

3. *Знаходження розв’язку* завдяки широкому використанню

сучасних програм займає найбільш незначну частку сумарних витрат, пов'язаних з оптимізацією.

4. *Аналіз на чутливість.* Отриманий розв’язок необхідно ретельно вивчити з погляду здорового глузду й за необхідності скорегувати модель. Крім того, обов'язковим є аналіз розв’язку на чутливість, щоб з'ясувати, наскільки істотною є залежність розв’язку від точності інформації про ті або інші дані.

Зокрема, керівництво може зацікавитися тим, який прибуток може бути отриманий при зменшенні вимог до якості послуг, або до якого рівня мають змінитися ціни на перевезення в нового типу транспортного засобу, щоб він був включений у план перевезення, або тим, наскільки підвищення інтенсивності роботи впливає на зниження витрат, тощо.

3.4. Інші задачі транспортної логістики

Створення великих транспортних систем пов’язано з розв’язанням комплексу задач транспортної й розподільної логістики. Реальна система постачання, як правило, містить у собі декілька пов'язаних між собою складів низки ступенів, що мають різні обсяг і спеціалізацію зберігання. При виборі каналу розподілу відбувається вибір форми руху товарів – транзитної або складської. При виборі логістичного ланцюга здійснюється вибір конкретних дистриб'ютора, перевізника, страховика, експедитора, банкіра й т. д.

Оптимізація роботи такої системи пов'язана з пошуком мінімуму витрат системи в цілому. Як правило, зі збільшенням кількості проміжних складів транспортні витрати на доставку вантажу споживачам зменшуються, а витрати на зберігання й доставку на склади – збільшуються.

Система з прямими зв'язками «постачальник – споживач» (транзитні поставки) має такі переваги:

- прискорюється реакція виробників на вимоги замовників;
- зменшується кількість переналагоджень обладнання;
- знижується закупівельна ціна.

Однак надмірне використання транзиту приводить до завищення потреби тих замовників, у яких сумарна потреба в плановану періоді менша від транзитної норми. На користь постачання з проміжними складами говорять такі аргументи:

- сполучаються поставки для груп споживачів;
- зменшується час на доставку для ліквідації дефіциту;
- зменшується сукупний страховий запас;
- зникає проблема транзитної норми поставки;
- здешевлюється додаткове дороблення продукції з урахуванням потреб конкретного споживача.

4. ЛОГІСТИКА ЗАПАСІВ

4.1. Проблеми управління запасами

Запаси належать до числа об'єктів, що потребують значних капіталовкладень, і тому являють собою один з факторів, який визначає політику підприємства й впливає на рівень логістичного обслуговування в цілому.

Необхідність створення запасів спричиняють такі фактори:

1. Дискретність поставок.
2. Випадкові коливання:
   - у попиті за період між поставками;
   - в обсязі поставок (наприклад сільгосппродукції або води в системі водоймищ);
   - у тривалості інтервалу між поставками.
3. Передбачувані зміни кон'юнктури:
   - сезонність попиту;
   - сезонність виробництва;
   - інфляційні очікування;
   - очікуване підвищення ціни на товар.
4. Зменшення витрат при придбанні великої партії товару за рахунок знижок на ціну й зниження транспортних витрат.
5. Відстрочка виплати ПДВ за рахунок заморожування оборотних коштів у запас.

Перелічені фактори, групуючись, збільшують потребу в створенні запасів. Але існує ряд факторів на користь зменшення запасів:

- плата за зберігання надлишкового запасу;
- упущений дохід (зв'язування оборотних коштів у запас);
- втрати в кількості (розкрадання, розкладання й т. д.);
- старіння (моральне зношування), характерне для модних товарів, побутової електроніки, засобів мобільного зв'язку, програмного забезпечення, відповідної літератури й т. ін.

За функціональною ознакою матеріальні запаси підрозділяють на *товарні* й *виробничі*. Товарні – це готова продукція в постачальників (збутова), на складах і базах (складська). Мета створення виробничих запасів – забезпечити безперебійність виробничого процесу. Обидва види запасів можна поділити на запаси *поточні, страхові* й *сезонні*. Іноді додатково виділяють запас, що перебуває на шляху між ланками системи або фазами виробництва.

Запаси поточні – це основна частина виробничих і товарних запасів. Вони забезпечують безперервність виробничого або торговельного процесу між черговими поставками.

Запаси страхові (резервні, або «буферні») призначено для безперервного забезпечення матеріалами чи товарами виробничого або торговельного процесу у випадку різних непередбачуваних

обставин, наприклад таких:

- відхилення в періодичності й обсязі партій поставок від передбачених договором;
- можливі затримки матеріалів або товарів у дорозі при доставці від постачальників;
- непередбачене зростання попиту.

Запаси сезонні утворюються при сезонному характері виробництва, споживання або транспортування. Прикладом сезонного характеру виробництва може служити виробництво сільськогосподарської продукції. Сезонний характер споживання має споживання бензину під час збиральних жнив.

Крім того, окремо виділяють такі категорії запасів.

Запаси просування готової продукції формуються й підтримуються в дистрибутивних каналах для швидкої реакції на проведену фірмою маркетингову політику просування товару на ринок, яка зазвичай супроводжується широкомасштабною рекламою в засобах масової інформації. Ці запаси мають задовольнити можливе різке збільшення попиту на продукцію фірми.

Спекулятивні запаси зазвичай створюються фірмами для матеріальних ресурсів (компонентів, напівфабрикатів) з метою захисту від можливого підвищення цін на них або введення протекціоністських квот або тарифів.

Застарілі (неліквідні) запаси утворюються внаслідок погіршення якості товарів під час зберігання, а також морального зношування через розбіжність логістичних циклів у виробництві й дистрибуції з життєвим циклом товару.

У свою чергу, наявність дефіциту запасів призводить до трьох видів витрат, які перелічені нижче в порядку збільшення їхнього негативного впливу:

- витрати в зв'язку з невиконанням замовлення (затримкою з відправленням замовленого товару) – додаткові витрати на просування й відправлення товарів того замовлення, яке не можна виконати за рахунок наявних товарно-матеріальних запасів;

- витрати в зв'язку з втратою збуту – витрати, які виникають у випадках, коли постійний замовник купує товар в якійсь іншій фірмі (такі витрати вимірюються в показниках вигоди, втраченої через нездійснення торговельної угоди);

- витрати в зв'язку з втратою постійного замовника – витрати, що виникають у випадках, коли відсутність запасів спричиняє не тільки втрату тієї або іншої торговельної угоди, але й те, що замовник починає шукати й знаходить інші джерела постачання.

Перші два види належать до числа так званих тимчасових витрат фірми в результаті прийняття альтернативного курсу. Третій же вид витрат важко обчислити, оскільки гіпотетичні замовники різні й

відповідні витрати теж. Однак для фірм важливо, щоб оцінка цього виду витрат була якнайближчою до суми витрат, які могли б мати місце в дійсності. Важливим наслідком втрати постійного замовника є те, що замовник, знайшовши іншого постачальника, починає з ним постійно працювати й, отже, приносити прибуток конкурентові, який підвищує його конкурентоспроможність. Тому у ряді випадків має сенс працювати в збиток для того, щоб зберегти клієнта. Необхідно мати на увазі, що на виробництві вартість дефіциту сировини більша, ніж просто ціна упущених торговельних угод або нереалізованих замовлень. До неї входять і втрати часу на виготовлення продукції, і втрати робочого часу, й можливі втрати часу через перерви при переходах від одного технологічного процесу до іншого.

Управління запасами (Inventory Control, Inventory Management) полягає у встановленні моментів і обсягів замовлення на поповнення запасів і розподіл знову прибулої партії по ланках системи постачання. Сукупність правил, за якими приймаються ці рішення, називається *стратегією* управління запасами.

При визначенні норм товарних запасів використовують три групи методів: евристичні, методи техніко-економічних розрахунків та економіко-математичні.

Евристичні методи припускають використання досвіду фахівців, які вивчають звітність за попередній період, аналізують ринок й ухвалюють рішення щодо мінімально необхідних запасів, основані значною мірою на суб'єктивному розумінні тенденцій розвитку попиту. Метод розв’язання задачі (з групи евристичних), що використовується у цьому випадку, називається дослідно-статистичним. Якщо поставлена задача в області управління запасами досить складна, то може використовуватися досвід не одного, а декількох фахівців. Аналізуючи потім за спеціальним алгоритмом їхні суб'єктивні оцінки ситуації й пропоновані рішення, можна одержати досить правильне рішення, яке мало чим відрізняється від оптимальних (метод експертних оцінок).

Суть методу техніко-економічних розрахунків полягає в розподілі сукупного запасу залежно від цільового призначення на окремі групи, наприклад номенклатурні позиції (або асортиментні позиції у торгівлі). Далі для виділених груп окремо розраховують страховий, поточний і сезонний запаси, кожний з яких, у свою чергу, може бути поділений на деякі елементи. Наприклад, страховий запас може бути поділений на випадок підвищення попиту або порушення строків завезення матеріалів (товарів) від постачальників. Метод техніко-економічних розрахунків дозволяє досить точно визначати необхідний розмір запасів, однак трудомісткість його велика. При застосуванні економіко-математичних методів попит найчастіше являє собою випадковий процес і може бути описаний методами математичної статистики й

теорії масового обслуговування.

Темп зростання запасів повинен трохи відставати від темпу зростання попиту, що забезпечує можливість прискорення оборотності оборотних коштів.

4.2. Класифікація моделей управління запасами

Під *системою постачання* мається на увазі сукупність складів, між якими під час операцій постачання здійснюється транспортування товару. Функція витрат складається й мінімізується для системи в цілому, а не для кожного складу окремо. Можливі два варіанти побудови системи постачання: децентралізований (однокаскадний) і ешелонований (багатокаскадний). Багатокаскадні системи поділяються на лінійні й пірамідальні.

Крім того, системи постачання класифікуються за кількістю номенклатурних позицій і стабільністю властивостей майна, що зберігається. Задачі з великою кількістю позицій вдається звести до однономенклатурних, якщо кожна позиція поставляється незалежно (а штрафи підсумовуються) або товари поставляються комплектами.

Усі системи постачання залежно від кількості періодів, на які плануються операції, можна поділити на статичні (один період) і динамічні (багатоперіодні). До статичних задач можна віднести всі ситуації, де відносно підсумкового показника неважливий момент платежу. У динамічних задачах ураховується вигода від розстрочки платежів. Так, якщо платіж відбувається через k періодів після угоди, то відповідні витрати $\widetilde{L}_k = \alpha^{k-1} L_k$, де $\alpha = (1+E)^{-1} \le 1$ – дисконт-фактор, E – норма ефективності грошових вкладень в оборотні кошти. Тим самим усі витрати зводяться до дійсного моменту часу. Другою особливістю динамічних моделей є залежність початкового запасу в кожному періоді від рішень, прийнятих у попередніх періодах.

Попит на предмети постачання може бути: стаціонарним або нестаціонарним (зокрема періодичним), детермінованим або стохастичним, безперервним або дискретним, залежним або незалежним від попиту на інші товари.

Протягом тривалого проміжку часу не можна очікувати стаціонарний попит, однак, регулярно переглядаючи останній, можна вважати його кусково-стаціонарним. Критерієм переходу від детермінованого попиту до ймовірнісного є коефіцієнт варіації, що перевищує 0,2. Дискретність попиту характерна для дорогих об'єктів або об'єктів, які мають малу інтенсивність попиту в розглядуваний період. Якщо ж кількість одиниць у замовленнях велика, то має сенс перейти до більш зручних моделей з безперервним попитом. У динамічних задачах, навпаки, проводять дискретизацію попиту.

Особливим класом задач є дослідження ситуацій, в яких у зв'язку

з новизною техніки й відсутністю досвіду експлуатації зразків відомо тільки тип розподілу відмов, але не його параметри. У цих випадках застосовуються адаптивні стратегії управління запасами.

Поповнення запасів завжди відбувається з деякою випадковою затримкою щодо моменту замовлення. Однак роль і тривалість цієї затримки залежать від конкретних умов, що дозволяє в ряді випадків спростити задачу. Ступінь можливого спрощення визначає один з таких варіантів: миттєва поставка, затримка поставки на фіксований строк, затримка на випадковий інтервал часу, розподілений за відомим імовірнісним законом.

Крім того, обсяг поставки може як дорівнювати замовленню, так і бути випадковою величиною.

Функції витрат (цільова функція) утворюють критерій ефективності прийнятої стратегії й ураховують такі витрати: витрати на зберігання, транспортні витрати, витрати, пов'язані з замовленням кожної нової партії, витрати на штрафи.

Витрати зберігання:

- пропорційні залишку до кінця періоду;
- є нелінійною функцією середнього додатного запасу або залишку.

Штрафи:

- пропорційні обсягу й тривалості середньої недостачі;
- пропорційні недостачі до кінця періоду;
- постійні (при ненульовій недостачі);
- є нелінійною функцією перелічених вище факторів.

Обмеження:

- за максимальним обсягом (вагою, вартістю) запасів;
- максимальним обсягом (вагою, вартістю) поставки;
- імовірністю недостачі.

Стратегія управління запасами вважається відомою, й задача зводиться до визначення декількох констант – параметрів стратегії. Оптимізація найчастіше проводиться в класі найпростіших стратегій – періодичних і з критичними рівнями. У періодичних стратегіях замовлення провадиться в кожному періоді T, у стратегіях з критичними рівнями – при зниженні поточного запасу до порога замовлення s або нижче нього. Найпростіші стратегії розрізняються й за способом визначення обсягу замовлення: замовлення або має постійний обсяг q, або є таким, що запас після поповнення досягає максимального рівня S. У такий спосіб одержуємо чотири найпростіші стратегії: (T,S), (s,q), (s,S) і (T,q). Остання модель не має зворотного зв'язку, тому не може бути застосована.

Для різних груп АВС-аналізу застосовується різна періодичність перевірок T: від декількох тижнів для групи А до декількох місяців для групи С.

Періодична модель з граничним верхнім рівнем (T, S) легко вбудовується в схеми календарного планування й гнучко реагує на зміни попиту. Наслідками фіксованої періодичності поповнення є зайві транспортні витрати після періодів з низьким попитом і дефіцит після високого попиту. Тому страхові запаси в періодичних стратегіях збільшено. У багатономенклатурних задачах для забезпечення сполучення замовлень періоди для кожної з номенклатурних позицій мають бути кратними деякому базисному періоду.

Стратегія (s, q) не є досить гнучкою і тому повільно реагує на попит, що призводить до частих недостач.

4.3. Управління запасами однорідного продукту на ізольованому складі

4.3.1. Детермінований стаціонарний попит

Розглянемо модель з постійними інтенсивностями попиту μ й поставок λ. Ця модель відрізняється розтягнутістю поставок у часі й добре описує роботу трубопровідних транспортних систем. Графік зміни рівня запасу показано на рис. 4.1.

Повний цикл роботи системи дорівнює T. Вважаючи витрати на зберігання й штрафи пропорційними середньому запасу (дефіциту) й часу їх існування, одержуємо функцію витрат за цикл

$$L_T = g + h \int_0^{t_1+t_2} y(t)dt - p \int_{t_1+t_2}^{T} y(t)dt, \qquad (4.1)$$

де g – фіксовані витрати, пов'язані з запуском виробництва або доставкою, h – вартість зберігання продукції, p – ціна штрафу при дефіциті.

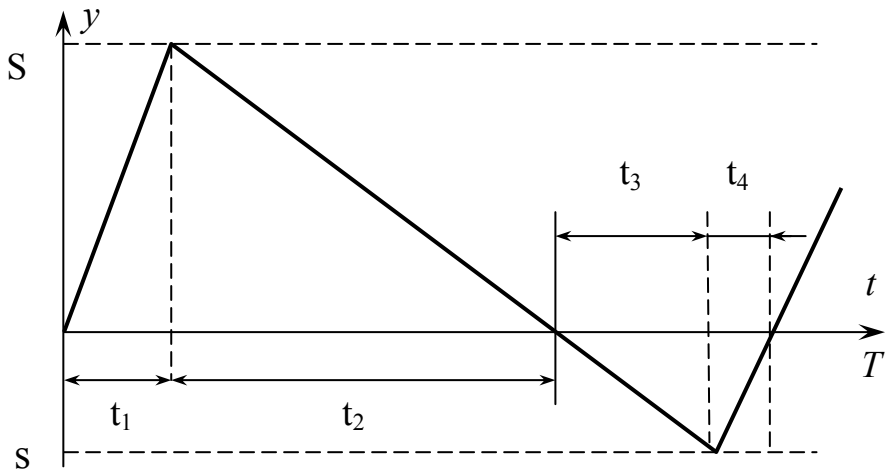

Рис. 4.1. Коливання рівня запасів за період

Очевидно, що

$$y(t)=\begin{cases}(\lambda-\mu)t,\ 0\le t\le t_1,\\ S-\mu(t-t_1),\ t_1<t\le t_1+t_2+t_3,\\ -s+(\lambda-\mu)(t-t_1-t_2-t_3),\ t_1+t_2+t_3<t\le T.\end{cases}$$

Максимальний дефіцит виражається через граничний запас як

$$s=\frac{T-(t_1+t_2)}{t_1+t_2}S.$$

Підставивши $t_1=\dfrac{S}{\lambda-\mu}$ й $t_2=\dfrac{S}{\mu}$ у попередню формулу, одержуємо

$$s=\frac{\mu}{\lambda}(\lambda-\mu)T-S.$$

З урахуванням лінійності зміни рівня запасу функція витрат (4.1) набуває вигляду

$$L_T=g+\frac{1}{2}hS(t_1+t_2)+\frac{1}{2}ps(T-t_1-t_2),$$

звідки витрати за одиницю часу

$$L=\frac{g}{T}+\frac{h\lambda S^2}{2\mu(\lambda-\mu)T}+\frac{p\lambda}{2\mu(\lambda-\mu)T}\left[\frac{\mu}{\lambda}(\lambda-\mu)T-S\right]^2=$$

$$=\frac{1}{T}\left[g+\frac{(h+p)\lambda S^2}{2\mu(\lambda-\mu)T}\right]+\frac{p\mu}{2\lambda}(\lambda-\mu)T-pS. \qquad (4.2)$$

Для пошуку екстремуму знайдемо похідні від L за S й T і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial S}=\frac{1}{T}\frac{(h+p)\lambda S}{\mu(\lambda-\mu)T}-p=0; \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T}=-\frac{1}{T^2}\left[g+\frac{(h+p)\lambda S^2}{2\mu(\lambda-\mu)T}\right]+\frac{p\mu}{2\lambda}(\lambda-\mu)=0. \qquad (4.4)$$

Система рівнянь (4.3) і (4.4) має розв’язок

$$S^*=\sqrt{\frac{2\mu g\left(1-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)}{h\left(1+\dfrac{h}{p}\right)}},\quad T^*=\sqrt{\frac{2g\left(1+\dfrac{h}{p}\right)}{\mu h\left(1-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)}}. \qquad (4.5)$$

При цьому функція витрат за одиницю часу (4.2) досягає мінімуму

$$L^* = \sqrt{\frac{2\mu g h\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{1+\frac{h}{p}}}. \qquad (4.6)$$

Момент пуску виробництва визначається досягненням дефіциту

$$s^* = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{2\mu g\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{h\left(1+\frac{h}{p}\right)}}. \qquad (4.7)$$

Модель планування дефіциту на інтервалі часу $t_3 + t_4$ має сенс у тих випадках, коли витрати на зберігання продукції є набагато більшими, ніж будь-які витрати, пов'язані з відсутністю запасу протягом невеликого проміжку часу. Ця ситуація має два варіанти.

У першому з них попит, що виникає в період відсутності запасу, залишається незадоволеним. Адміністрація супермаркету, наприклад, може ухвалити рішення щодо зниження рівня запасів великогабаритної продукції. Це рішення призведе до того, що в кожному циклі протягом декількох днів запасів даної продукції не буде. Через зниження обсягів продажів і у деякому сенсі втрату довіри клієнтів з'являться певні витрати. Адміністрація супермаркету буде змушена зіставити ці витрати й величину економії, отриманої внаслідок відсутності запасів продукції.

Можливий й інший випадок. Наприклад, у магазині з продажу електротоварів приймається рішення про скорочення запасу певного виду товарів, тому що в цих запасах заморожується велика кількість капіталу. Однак у цьому випадку, якщо запасів не буде, а покупцеві знадобиться саме цей товар, то власник магазина, найімовірніше, виразить готовність прийняти замовлення покупця й забезпечити його необхідним товаром відразу ж після одержання наступних партій. Власник магазину зазнає деяких витрат, пов'язаних з підтримкою системи замовлень, але й у цьому випадку їх варто зіставити з величиною економії від зменшення запасів.

Основна різниця між двома описаними варіантами полягає в тому, що в першому з них після одержання нових поставок замовлення покупців не виконуються, отже, максимальний рівень запасів збігається з розміром одержуваного замовлення. У другому випадку частина продукції з нової поставки йде на задоволення замовлень клієнтів, тому максимальний рівень запасів дорівнює різниці між розміром замовлення й максимальним попитом, що виникає за відсутності запасів.

Із співвідношень (4.5) і (4.6) як окремі випадки виводяться й інші

більш прості формули управління запасами, наприклад формули Уілсона:

$$S^* = \sqrt{\frac{2\mu g}{h}},\ T^* = \sqrt{\frac{2g}{\mu h}},\ L^* = \sqrt{2\mu g h}. \qquad (4.8)$$

В їх основі лежать гіпотези про високий штраф ($h/p \approx 0$) і миттєве надходження запасів ($\mu/\lambda \approx 0$).

Обсяг партії q, що замовляється, за період дорівнює μT. Треба зазначити, що графік функції $L(q)$ досить пологий в околі мінімуму. Це дозволяє змінювати q з урахуванням практичної зручності (повне завантаження машини, зручна періодичність поставок і т. ін.) без істотного збільшення витрат.

Економічні коефіцієнти, що входять у формули (4.5) і (4.6), можна вважати сталими лише в першому наближенні – у деякому діапазоні обсягів партії, що замовляється. Так, ціна замовлення g й ціна зберігання h можуть бути східчастими функціями. У таких випадках необхідно задати апріорне значення q_0 (наприклад середину припустимого діапазону), розрахувати $h(q_0)$ й $g(q_0)$ і за допомогою наведених вище формул знайти q_1. Якщо значення збігаються, то розв'язок є остаточним. У противному разі обчислення повторюють для $h(q_1)$ й $g(q_1)$.

Інтерес становить задача визначення ціни виробу w з урахуванням залежності від її інтенсивності попиту μ. Припустимо, що попит задовольняється повністю, а собівартість продукції становить u. Використовуючи (4.6), а також умову високої ціни штрафу, для доходу за одиницю часу можна записати

$$L = (w-u)\mu(w) - \sqrt{2gh\mu(w)\left[1 - \frac{\mu(w)}{\lambda}\right]}.$$

Максимальний дохід досягається за умови $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$, тобто при

$$\frac{\partial \mu(w)}{\partial w} = \frac{\mu(w)}{u - w + \sqrt{\frac{gh}{2\mu(w)}} \cdot \frac{1/\mu(w) - 2/\lambda}{\sqrt{1/\mu(w) - 1/\lambda}}}.$$

Зокрема, при першому наближенні, коли залежність інтенсивності попиту від ціни вважається лінійною, одержуємо відносно w алгебричне рівняння четвертого ступеня. При реальних параметрах це рівняння має один додатний розв'язок, що входить в область припустимих значень функції $L(w)$ й забезпечує максимум цільової функції.

Існують аналітичні розв'язки задач управління запасами, які узагальнюють запропоновану модель на товари, вартість яких постійно змінюється внаслідок природних витрат, старіння або інфляції [3].

4.3.2. Нестаціонарний детермінований попит

Часто у виробництві й торгівлі виникає задача мінімізації витрат за декілька періодів відповідно до відомої програми споживання. Розглянемо n періодів тривалістю T. Пронумеруємо інтервали й уведемо такі позначення:

- z_k – залишок від $(k-1)$-го періоду;
- x_k – попит у k-й період;
- S_k – запас, створений у k-й період ($S_k \geq x_k$);
- $h_k(S_k - x_k)$ – витрати на зберігання надлишкового запасу в k-й період;
- $c_k(S_k - z_k)$ – витрати на доведення запасу до величини S_k.

Сумарні витрати на постачання розраховуються за формулою

$$L_{nT} = \sum_{k=1}^{n} [c_k(S_k - z_k) + h_k(S_k - x_k)]. \qquad (4.9)$$

Для мінімізації цільової функції L_{nT} використовується метод динамічного програмування [4].

Відповідно до принципу оптимальності Р. Беллмана для адитивної цільової функції розв'язки на всіх інтервалах, що залишилися, повинні становити оптимальну поведінку щодо стану, отриманого в результаті попереднього розв'язання, незалежно від раніше ухвалених рішень і початкового стану.

Метод динамічного програмування розглядався у підрозд. 3.3.5.

Мінімальні витрати за останній період становитимуть

$$L_T(z_n) = \min_{S_n \geq z_n} [c_n(S_{n-1} - z_n) + h_n(S_n - x_n)].$$

Витрати за два останніх періоди

$$L_{2T}(z_{n-1}) = \min_{S_{n-1} \geq z_{n-1}} [c_{n-1}(S_{n-1} - z_{n-1}) + h_{n-1}(S_{n-1} - x_{n-1}) + L_T(z_n)].$$

Для $k = 2, 3, ..., n$ маємо

$$L_{kT}(z_{n-k+1}) = \min_{S_{n-k+11} \geq z_{n-k+1}} \Big[c_{n-k+1}(S_{n-k+1} - z_{n-k+1}) +$$

$$+ h_{n-k+1}(S_{n-k+1} - x_{n-k+1}) + L_{(k-1)T}(S_{n-k+1} - x_{n-k+1}) \Big]. \qquad (4.10)$$

У процесі мінімізації витрат для пошуку $\{S_k\}$ необхідно

використати властивості функцій $\{c_k\}$ й $\{h_k\}$. У типовому для практики випадку, коли дані функції є зростаючими й такими, що дорівнюють нулю при нульовому аргументі, оптимальний запас для останнього періоду становить

$$S_n = \begin{cases} x_n, & z_n \le x_n, \\ z_n, & z_n > x_n. \end{cases}$$

Звідси легко знайти L_T. Очевидно, що для будь-якого періоду оптимальна стратегія має вигляд

$$S_k^* = \begin{cases} S_n, & z_n \le S_n, \\ z_n, & z_n > S_n, \end{cases}$$

причому функція $L_{kT}(x_{n+1-k})$ досягає максимуму при $z_{n+1-k} = S_k$.

Ці співвідношення дозволяють побудувати простий алгоритм чисельного розв'язання задачі. Установимо діапазони зміни для S_k й z_k. Очевидно, що запас на кожен період має бути не більшим за попит весь час, який залишився. Із цієї вимоги випливає й умова для залишків: $0 \le z_k \le \sum_{i=k}^{n} x_i$. Ці діапазони розбиваються на інтервали з деяким кроком Δ (який може дорівнювати одиниці для товару, що вимірюється в штуках) і для всіх припустимих $\{z_k\}$ обчислюються оптимальні S_n й $L_T(z_n)$. Далі чисельно мінімізуються за S_{n-1} суми

$$c_{n-1}(S_{n-1} - z_{n-1}) + h_{n-1}(S_{n-1} - x_{n-1}) + L_T(z_n)$$

з урахуванням отриманої на попередньому кроці таблиці значень $L_T(z_n)$. У підсумку можна одержати таблиці значень $L_{2T}(z_{n-1})$, S_{n-1} і т. д. Результатом чергового кроку будуть таблиці $L_{(n-1)T}(z_2)$ й $S_2(z_2)$. Мінімум суми

$$c_1(S_1 - z_1) + h_1(S_1 - x_1) + L_{(n-1)T}(S_1 - x_1)$$

дасть підсумкове значення витрат $L_{nT}(z_1)$ і вкаже оптимальний запас у першому періоді S_1. Переглядаючи таблиці в зворотному порядку, легко одержати оптимальну послідовність запасів: аргумент z_k, за яким вибирається S_k ($k \ge 2$), дорівнює $(S_{k-1} - x_{k-1})$.

Особливості методу:

- функції витрат $\{L_i\}$ не обов'язково повинні мати похідну й можуть задаватися у вигляді таблиці;
- гарантується одержання глобального мінімуму;
- додаткові обмеження звужують простір пошуку й тим самим полегшують одержання розв'язку;

- взявши кількість періодів з деяким запасом, можна визначити чутливість розв'язку;
- доведена опуклість (увігнутість) функції витрат істотно спрощує аналіз розв'язку.

У розглядуваній моделі досягається економічна оптимізація, яка основана, з одного боку, на досягненні рівноваги між зростанням витрат на придбання товару й зростанням витрат на зберігання – з іншого. У результаті оптимізації можливі значні коливання рівня запасів протягом розглядуваних періодів. Ця ситуація характерна для фірми, що займається оптовою торгівлею, коли вигідно закуповувати товар великими партіями за оптовою ціною й поступово його реалізовувати. Планування ж виробництва продукції виробничою фірмою потребує доповнення моделі економічним фактором, що не брався до уваги. Цей фактор – вартість зміни обсягу виробництва.

Значне зростання виробництва пов'язане з такими додатковими витратами: рекрутинг додаткового персоналу, оплата понаднормової роботи робітникам, оплата освітлення й опалення в нічні зміни, оплата пусконалагоджувальних робіт на обладнанні, виведеному з консервації або недавно закупленому, й т. ін.

Скорочення виробництва спричиняє таке: падіння трудової дисципліни, простій обладнання (який знижує ефективність використання основних фондів і призводить до зменшення конкурентоспроможності фірми), простій людей, що стимулює їх на пошук іншого місця роботи, зниження контролю над виробництвом (призводить до розкрадань). На все це потрібні додаткові витрати.

Узагальнена модель має вигляд [11]

$$L_{nT} = \sum_{k=1}^{n} C_k\left(z_k, v_k, v_{k-1}\right) \to \min,$$

де v_k – випуск продукції протягом періоду k.

Витрати за період k можуть, наприклад, обчислюватися як

$$C_k\left(z_k, v_k, v_{k-1}\right) = C_k\left(z_k, v_k\right) + w\left(v_k, v_{k-1}\right),$$

де перший доданок ураховує витрати, пов'язані з виробництвом і зберіганням продукції, а другий являє собою вартість зміни обсягу виробництва при переході від випуску v_{k-1} до випуску v_k.

Функція витрат згладжування в найпростіших випадках може мати вигляд

$$w\left(v_k, v_{k-1}\right) = \begin{cases} a_k \cdot \left(v_k - v_{k-1}\right), & v_k \geq v_{k-1,} \quad a_k > 0, \\ b_k \cdot \left(v_{k-1} - v_k\right), & v_k \leq v_{k-1,} \quad b_k > 0. \end{cases}$$

або

$$w\left(v_k, v_{k-1}\right) = a_k \cdot \left(v_k - v_{k-1}\right)^2, \qquad a_k > 0,$$

Нехай, як і раніше, $L_k(z, y)$ – мінімальні витрати для k відрізків, що залишились, при початковому рівні запасів z і впуску на попередньому відрізку y; $v_k(z, y)$ – випуск, що дозволяє досягти $L_k(z, y)$; x_k – попит на продукцію на відрізку k, віддаленому від кінця планового періоду на k відрізків (включаючи той, що розглядається).

Тоді рекурентне співвідношення набуває вигляду

$$L_{kT}(z, y) = \min_{v} \left\{ C_k(v, z + v - x_k, y) + L_{(k-1)T}(z + v - x_k, v) \right\},$$

$$k = 1,2,...,n.$$

Потрібно визначити $L_{nT}(z_0, y_0)$, де y_0 – випуск продукції на відрізку, що передує першому відрізку. Спочатку обчислюємо

$$L_{1T}(z, y) = C_1(x_1 - z_1, 0, y)$$

для $z = 0, 1, \ ..., x_1$ і $y = 0,1,2,...,x_1 + x_2$.

Відмінність цього рекурентного співвідношення від (4.10) полягає у необхідності обчислення $L_{kT}(z, y)$ для всіх можливих *пар* значень z і y. З теоретичної точки зору рекурентні методи можна узагальнити, врахувавши ще більшу кількість факторів, наприклад випуск продукції за декілька попередніх періодів або зміну рівня запасів.

4.3.3. Випадковий попит при миттєвій поставці («задача газетяра»)

Найпростішим випадком управління запасами при ймовірнісному попиті є однократне прийняття рішення щодо поповнення запасу при миттєвій поставці (статична модель). Часто ця задача називається задачею газетяра, оскільки в ній ставиться питання про те, скільки газет повинен узяти розповсюдник, щоб мінімізувати збитки від непроданих газет й втрачені вигоди при незадоволеному попиті. Популярним її прикладом є задача про новорічні ялинки. Задача добре описує специфіку торгівлі супермодними, сезонними або швидкопсувними товарами (хліб, дозрілі банани, концертні квітки). Крім того, її застосування може бути пов'язане з поставками запасних частин і додаткового обладнання до унікальних комплексів на плановий строк експлуатації (турбогенератори, реактори, кораблі й т. д.). Справа в тому, що через необхідність повторного пуску (або простою) і виробництва запчастини можуть бути поставлені окремо від основного обладнання за більш високою ціною.

Нехай z – запас матеріальних ресурсів до початку операції, S – запас після поповнення, x – випадковий попит, $f(x)$ – щільність розподілу попиту, $c(S - z)$ – витрати на поповнення запасу.

Передбачається, що поставка відбувається до приходу першої

вимоги. Якщо до кінця операції залишився незатребуваний ресурс $(Y-x)>0$, то система постачання зазнає надлишкової витрати на зберігання $h(S-x)$, але може частково компенсувати збитки за рахунок продажу ресурсу за $v(S-x)$. При неповному задоволенні попиту $x>S$ склад сплачує штраф, пропорційний недостачі $p(x-S)$. Математичне сподівання сумарних витрат

$$L=\int_0^S[h(S-x)-v(S-x)]f(x)dx+\int_S^\infty p(x-S)f(x)dx+c(S-z). \quad (4.11)$$

Продовжимо функцію $c(S-x)$ аналітично в область $S-z<0$ і будемо вважати цільову функцію визначеною для $S\geq 0$ незалежно від рівня запасів. Обчислимо похідну за S і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial L(S,z)}{\partial S}=\int_0^S[h'(S-x)-v'(S-x)]f(x)dx-$$

$$-\int_S^\infty p(x-S)f(x)dx+c'(S-z)=0.$$

Ті розв'язки рівняння $L'(S,z)=0$, яким відповідає додатна друга похідна, дадуть відносні мінімуми $L(S,z)$. Їх може бути декілька (рис. 4.2). Абсцису абсолютного мінімуму позначимо через S_1, а абсциси наступних відносних мінімумів – через S_3, S_5 і т. д.

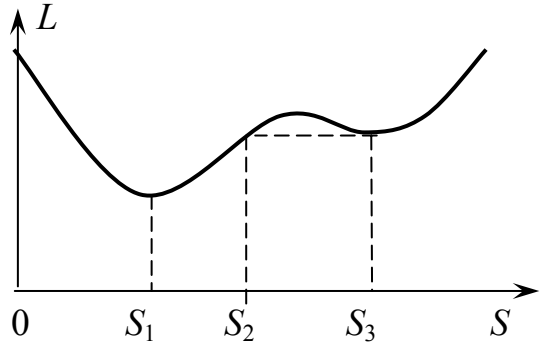

Рис. 4.2. Математичне сподівання витрат

Нехай далі S_2, S_4, … – точки, що задовольняють умови $S_1<S_2<S_3<S_4<....$ й $L(S_2)=L(S_3)$; $L(S_4)=L(S_5)$ і т. д.

Тоді оптимальна стратегія буде такою:

- при $z<S_1$ запас треба довести до рівня S_1;
- при $S_1\leq z\leq S_2$ поставку не слід замовляти;
- при $S_2\leq z\leq S_3$ запас потрібно довести до S_3 й т. д.

Розглянемо найбільш простий випадок, коли $h(u)$, $c(u)$ і $h(u)$ – лінійні функції, а незатребуваний запас втрачається. Формула витрат (4.11) за період набуває вигляду

$$L(S,z)=h\int_0^S(S-x)f(x)dx+p\int_S^\infty(x-S)f(x)dx+c(S-z). \quad (4.12)$$

З умови

$$\frac{\partial L(S,z)}{\partial S} = h\int_0^S f(x)dx - p\int_S^\infty f(x)dx + c = hF(S) - p[1-F(S)] + c = 0$$

випливає

$$F(S^*) = \frac{p-c}{p+h}, \tag{4.13}$$

де $F(S)$ – інтегральна функція розподілу попиту за період T.

Для експоненціального закону розподілу маємо $S^* = \bar{x}\ln\frac{p-c}{p+h}$, де $\bar{x} = \lambda T$ – середній попит за період.

Для розподілу Релея має місце рівняння

$$1 - \exp\left(-\frac{(S^*)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{p-c}{p+h},$$

звідки випливає $S^* = \sigma\sqrt{2\ln\frac{p-c}{p+h}}$.

При дискретному попиті оптимальний запас S^* вибирають з умов

$$\begin{aligned} L(S^*+1) - L(S^*) &\geq 0, \\ L(S^*-1) - L(S^*) &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Можна показати, що ці умови еквівалентні нерівності

$$\sum_{x=0}^{S^*-1} p(x) \leq \frac{p-c}{p+h} \leq \sum_{x=0}^{S^*} p(x). \tag{4.15}$$

Принцип перевірки зміни знака функції при одиничному прирості аргументу використовується в багатьох інших економічних задачах і називається *маргінальним аналізом*.

У ряді випадків штраф може нараховуватися пропорційно не обсягу недостачі, а часу існування дефіциту. Функція витрат (4.12) у цьому випадку набуває вигляду

$$L(S,z) = h\int_0^S (S-x)f(x)dx + p\int_S^\infty \left(1-\frac{S}{x}\right)f(x)dx + c(S-z).$$

Прирівняємо до нуля її похідну за запасом:

$$h\int_0^S f(x)dx - p\int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx + c = 0.$$

Для існування екстремумів необхідне виконання $c < p\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$.

Наведені вище формули належать до статичної моделі з мінімізацією витрат за період. Однак доведено, що вони правильні й для нескінченнокрокової моделі з накопиченням витрат, що дисконтують, і перенесенням дефіциту в черговий період при множенні ціни закупівлі c на множник $1-\alpha$. У динамічних задачах зі скінченною кількістю кроків (див. підрозд. 4.3.4) оптимальні рівні запасів будуть знаходитися між розв'язками для статичного й динамічного випадків:

$$S_1 \le S_2 \le ... \le S_{\infty}.$$

Ці ж міркування стосуються й періодичних стратегій із затримкою поставок, якщо ця затримка кратна періоду й дорівнює kT. У цьому випадку наявний запас розглядається як сума фізичної наявності й усіх раніше зроблених, але ще не виконаних замовлень, а розподіл попиту замінюється на $(k+1)$-кратну згортку розподілу одноперіодичного попиту [3, 10].

4.3.4. Управління запасами при фіксованій затримці поставок

У реальних системах управління запасами завжди існує інтервал між моментом замовлення й поставками. Урахування цієї затримки ускладнює модель і тому є небажаним. Але виникають випадки, коли цього фактора уникнути неможливо. Найпростішим варіантом такої моделі є модель з фіксованою затримкою поставок τ [13].

За відсутності регламентованого споживання (наприклад виробничої програми) періодична стратегія є недоцільною, а сучасні технології контролю запасів дозволяють контролювати запаси в режимі «on line». У цьому випадку має сенс застосування граничних стратегій, зокрема (s,q).

Розглянемо дискретну модель, в якій:

- $c(x)$ – витрати на реалізацію замовлення,

$$c(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ g + c \cdot x, & x > 0; \end{cases}$$

- h – вартість зберігання одного виробу протягом одиничного інтервалу часу;

- μ – очікувана кількість виробів, яку запитують клієнти протягом одиничного інтервалу часу;

- τ – інтервал попередження, тобто тривалість часу від моменту розміщення замовлення до моменту отримання виробів;

- μ_τ – очікувана кількість виробів, що запитують покупці протягом

часу τ (очевидно, що $\mu_\tau = \mu \cdot \tau$);

- z – запас (вважаємо неперервною змінною);

- x_τ – фактичний обсяг попиту в період від моменту розміщення замовлення до його виконання;

- $f_\tau(x_\tau)$ – розподіл попиту на інтервалі попередження; вважаємо, що функція $f_\tau(x_\tau)$ не залежить від часу досягнення запасом свого критичного значення;

- s – нижній критичний рівень запасу ($s > 0$);

- q – обсяг поставки ($q \geq x_\tau$);

- p – штраф за одиничну недостачу.

Складова цільової функції, яка визначається витратами на реалізацію замовлення й поставку, дорівнює $g\mu/q + c\mu$. Перший доданок являє собою середнє значення накладних витрат за одиницю часу, а другий – середні витрати на закупівлю товару.

Для визначення очікуваних витрат на зберігання запасів і штрафних виплат розглянемо типові графіки рівня запасів (рис. 4.3).

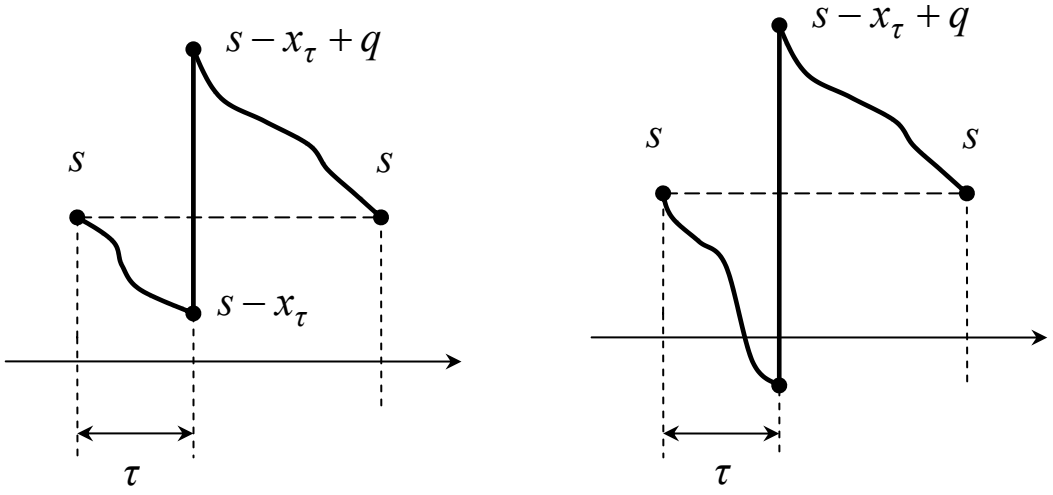

Рис. 4.3. Величина запасу за період між поставками

Ці графіки ілюструють дві можливі ситуації: коли фактичний обсяг попиту на інтервалі попередження менший від критичного рівня запасів ($s - x_\tau > 0$) і коли більший від нього. Як наближення припустимо, що при $s < x_\tau$ рівень запасів дорівнює нулю в момент часу, який безпосередньо передує надходженню поповнення. Тоді математичне сподівання середнього рівня запасів на інтервалі попередження τ дорівнює

$$\sum_{x_\tau=0}^{s} \left[s + (s - x_\tau)\right] \frac{f_\tau(x_\tau)}{2} + \sum_{x_\tau=s+1}^{\infty} s \frac{f_\tau(x_\tau)}{2}. \qquad (4.16)$$

Математичне сподівання рівня запасів на відрізку після поповнення до чергового замовлення дорівнює

$$\frac{1}{2}\left[\left(s-\mu_\tau+q\right)+s\right]. \qquad (4.17)$$

Додавати треба «зважені» значення (4.16) і (4.17) шляхом множення виразів на μ_τ / q і $\left(1-\mu_\tau / q\right)$ відповідно. Після виконання цих операцій і низки перетворень отримаємо математичне сподівання рівня запасів на одиничному відрізку часу

$$\frac{\mu_\tau}{2q}\left[-2s+\mu_\tau-q+s+\sum_{x_\tau=0}^{s}\left(s-x_\tau\right)f_\tau\left(x_\tau\right)\right]+\frac{1}{2}\left(2s-\mu_\tau+q\right). \qquad (4.18)$$

Математичне сподівання дефіциту виробів протягом інтервалу попередження

$$\sum_{x_\tau=s+1}^{\infty}\left(x_\tau-s\right)f_\tau\left(x_\tau\right). \qquad (4.19)$$

Додавши витрати на реалізацію замовлення й поставку з (4.18), помножені на h, і з (4.19), помножені на p, отримаємо математичне сподівання витрат за одиницю часу:

$$L=\frac{g\mu}{q}+c\mu+h\left(\frac{q}{2}-\mu_\tau+s\right)+\left(\frac{h\mu_\tau}{2q}+\frac{\mu p}{q}\right)\sum_{x_\tau=s+1}^{\infty}\left(x_\tau-s\right)f_\tau\left(x_\tau\right). \qquad (4.20)$$

Знайшовши частинну похідну $\frac{\partial L}{\partial q}$, прирівнявши її до нуля і розв'язавши отримане рівняння, знаходимо

$$q^*=\sqrt{\frac{2g\mu}{h}+\left(\mu_\tau+\frac{2\mu p}{h}\right)\sum_{x_\tau=s+1}^{\infty}\left(x_\tau-s\right)f_\tau\left(x_\tau\right)}. \qquad (4.21)$$

Позначимо $F_\tau\left(y\right)=\sum_{x_\tau=0}^{y}f_\tau\left(x_\tau\right)$. Тоді можна показати, що оптимальне значення s являє собою найменше з цілих чисел, які задовольняють умову

$$F_\tau\left(y\right)>R, \qquad (4.22)$$

де $R=1-\frac{hq}{0{,}5h\mu_\tau+\mu p}$.

Обсяги замовлення q і порогового рівня запасу s є оптимальними, якщо вони одночасно задовольняють умови (4.21) і (4.22). Для розв'язання цієї задачі запропоновано такий ітераційний алгоритм:

Крок 1. Прийняти початкове пробне значення $q = \sqrt{2g\mu / h}$ (формула Уілсона).

Крок 2. Обчислити R, використовуючи чергове значення q, а потім з умови (4.22) знайти відповідне значення s.

Крок 3. Припинити обчислення, якщо нове пробне значення s збіглося з попереднім. У противному разі за допомогою (4.21) обчислити нове пробне значення q і перейти до кроку 2.

Слід зробити деякі зауваження стосовно використання даної моделі на практиці. У моделі постулюється, що економічні показники, а також розподіл рівнів попиту не змінюються в часі. Тому через деякий час необхідно переглядати ці показники й корегувати параметри стратегії. Якщо економічні показники й розподіл рівнів попиту змінюються швидко, але прогнозовано, то можливе використання методу динамічного програмування.

Треба бути обережними при розрахунках розподілу попиту й враховувати нову інформацію. Не слід орієнтуватися й на екстремальні значення попиту. Найчастіше попит апроксимують за допомогою нормального розподілу.

4.4. Багатономенклатурні задачі

4.4.1. Класифікація номенклатурних позицій

Система постачання фірм містить, як правило, десятки, сотні, а в роздрібній торгівлі й машинобудуванні – й десятки тисяч номенклатурних одиниць. Додатково збільшують кількість номенклатур відмінності виробів за вагою, кольором, фасоном, покриттям, номіналом (місткістю, потужністю, продуктивністю й т. д.) й видом і кратністю пакування.

У більшості випадків номенклатури поділяють на групи (схема ABC), підхід до яких здійснюється диференційовано. Ранжирування проводять за вартісним попитом. Підхід може бути узагальнений застосуванням XYZ-аналізу або ранжируванням номенклатур за ступенем критичності й труднощів ліквідації дефіциту.

Складні аналітичні методики прогнозування й оптимізації запасів рекомендуються для групи А. В особливих випадках є доцільним імітаційне моделювання. До таких ситуацій відносять: залежний попит, спільне замовлення зі знижками, ешелоновані системи постачання, перехідні (нестаціонарні) режими роботи.

Для управління запасами виробів групи В застосовуються розрахунок граничних стратегій, формули Уілсона й т. д.

Для виробів групи С рішення приймаються за сукупністю. Із цієї групи в групу В можуть бути переведені важливі й перспективні номенклатури, до яких керівництво має особливий інтерес.

Інформація про попит реєструється укрупнено (наприклад, вимірюється в коробках). По цій групі зазвичай створюють великий страховий запас, тому що це коштує недорого.

У ряді випадків задачу управління запасами вдається розчленити на ряд однопродуктових. Але в тих випадках, коли допускається сполучення замовлень за декількома номенклатурними позиціями (загальний постачальник), штрафи нараховуються з урахуванням забезпечення комплектності, а якщо є загальні обмеження, оптимізація повинна проводитися для даної групи номенклатур, що об'єднані одним або декількома із перелічених факторів.

4.4.2. Поставки за системою кратних періодів

У більшості випадків вартість поставки з N позицій від одного постачальника можна подати у формі

$$g(n) = g_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i ,$$

де g_0 – вартість акту замовлення.

При високій ціні штрафу й незалежних замовленнях з оптимальною для кожної позиції періодичністю відповідно до формул Уілсона (4.8) сумарні витрати за одиницю часу становитимуть

$$L = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2(g_0 + g_i)\lambda_i h_i} .$$

При одночасному замовленні всіх N номенклатурних позицій його періодичність у загальному випадку буде відрізнятися від оптимальної періодичності кожного з компонентів, що призведе до деякого збільшення витрат. З іншого боку, це дозволить заощадити на замовленнях. При даній організації сумарні витрати за одиницю часу

$$L = \frac{1}{2} T \sum_{i=1}^{N} \lambda_i h_i + \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N} g_i .$$

При оптимальному виборі T витрати становитимуть

$$L = \sqrt{2 \sum_{i=0}^{N} g_i} \sqrt{\sum_{i=0}^{N} \lambda_i h_i} .$$

Переваги незалежної й повністю сполученої організації поставок має організація поставок за системою кратних періодів. При цьому окремі номенклатури з подібними значеннями вартісного попиту поєднуються в спільно замовлювані групи. Це дозволяє одержати малу розбіжність між груповими й індивідуальними оптимумами. А за рахунок кратності періодів постачання у групах вдається досягти частого сполучення замовлень.

Розглянемо задачу про розрахунок оптимальної системи кратних періодів, у якій принаймні одна з номенклатур замовляється в кожному базисному періоді T.

Уведемо такі позначення: $\langle k \rangle$ – множина номенклатур з періодичністю поставок kT; n_k – кількість елементів такої множини.

Для деяких k відповідні множини можуть бути й порожніми. Витрати на постачання i-ї номенклатури за одиницю часу

$$L_i = \frac{1}{2}\lambda_i h_i k_i T + \frac{g_i}{k_i T} \text{ при } k_i \geq 2.$$

Для номенклатур першої множини

$$L_i = \frac{1}{2}\lambda_i h_i T + \frac{g_i}{T} + \frac{g_o}{n_1 T}.$$

Необхідно вибрати базисний період T і зробити розбиття всіх номенклатур на зазначені вище множини таким чином, щоб витрати

$$L(T) = \frac{1}{2}T\sum_{i=1}^{N}\lambda_i h_i k_i + \frac{1}{T}\left(g_0 + \sum_{i=1}^{N}\frac{g_i}{k_i}\right) \qquad (4.23)$$

були мінімальними. Знайдемо похідну при фіксованих $\{k_i\}$:

$$\frac{dL}{dT} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i h_i k_i - \frac{1}{T^2}\left(g_0 + \sum_{i=1}^{N}\frac{g_i}{k_i}\right).$$

Друга похідна завжди додатна. Очевидно, що при досить великому періоді T усі номенклатури будуть закуповуватися одночасно, а похідна в цьому випадку буде додатною. З іншого боку, при дуже малому періоді T кожна номенклатура буде закуповуватися окремо, а похідна буде від'ємною.

Коефіцієнти при T і T^{-1}, що входять у (4.23), змінюються при перегрупуванні номенклатур, яка пов'язана з переходом номенклатури множини $\langle k \rangle$ у множину $\langle k-1 \rangle$ при збільшенні T. Умовою переходу є нерівність

$$\frac{1}{2}\lambda_i h_i k_i T + \frac{g_i}{k_i T} \geq \frac{1}{2}\lambda_i h_i (k_i - 1)T + \frac{g_i}{(k_i - 1)T}.$$

Момент переходу визначається рівністю правої й лівої частин. Звідси випливає

$$T_i^r = \sqrt{\frac{2g_i}{\lambda_i h_i k_i (k_i - 1)}} \qquad (4.24)$$

(верхній індекс «r» означає праву межу інтервалу).

Тепер необхідно розташувати всі номенклатури в порядку зростання відношень $\{g_i/(\lambda_i h_i)\}$ і перенумерувати їх заново. Тоді

умову (4.24) буде виконано насамперед для першого елемента множини $\langle k \rangle$. Нехай у точці T_i^r номенклатура i перейшла із множини $\langle k \rangle$ у множину $\langle k-1 \rangle$. Очевидно, що функція $L(T)$ безперервна. Стрибок похідної в точці перегрупування становить

$$\Delta = \frac{1}{2}\lambda_m h_m (k_m - 1 - k_m) - \frac{g_m}{(T_m^r)^2}\left(\frac{1}{k_m - 1} - \frac{1}{k_m}\right) = -\lambda_m h_m .$$

Функція $L(T)$ безперервна, кусково-опукла й має від'ємні стрибки похідної на правих межах інтервалів сталості угруповань. Мінімум функції $L(T)$ дорівнює найменшому з її мінімумів, що досягаються при перегрупуванні номенклатур. Прирівнюючи до нуля похідну, одержуємо

$$T^* = \sqrt{2G/H}\,,\ L^* = \sqrt{2GH}\,, \qquad (4.25)$$

де $G = g_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{g_i}{k_i}$, $\quad H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i h_i k_i$.

У свою чергу,

$$\Delta G_m^r = \frac{2g_m}{k_m(k_m - 1)}, \quad \Delta H_m^r = -\lambda_m h_m .$$

Зменшення сумарних витрат можливе лише за умови $\Delta G / G < |\Delta H| / H$, або $\Delta G / |\Delta H| < G / H$. Неважко показати, що ця умова еквівалентна умові

$$T_m^r < T^* .$$

З формули (4.24) видно, що величина T_m^r швидко зростає зі зменшенням k_m, тоді як T^* збільшується дуже повільно. Отже, виконання умови $T_m^r \geq T^*$ для всіх m говорить про недоцільність подальшого збільшення T, тому що мінімуми L^* будуть зростати.

Аналогічні міркування можуть бути проведені й для зростаючих коефіцієнтів $\{k_m\}$ при русі по осі T у бік зменшення базисного періоду. Розрахункове співвідношення для лівої межі інтервалу сталості угруповань

$$T_m^l = \sqrt{\frac{2g_m}{\lambda_m h_m k_m (k_m + 1)}}\,. \qquad (4.26)$$

Формули для розрахунку ΔG й ΔH набувають вигляду

$$\Delta G_m^l = -\frac{2g}{k_m(k_m + 1)},\ \Delta H_m^l = \lambda_r h_r .$$

Умовою доцільності зменшення періоду T з одночасним збільшенням коефіцієнтів $\{k_m\}$ стає нерівність

$$T_m^l > T^*.$$

З наведених міркувань випливає, що графіки функцій $L(T)$ і $L'(T)$ мають вигляд, показаний на рис. 4.4.

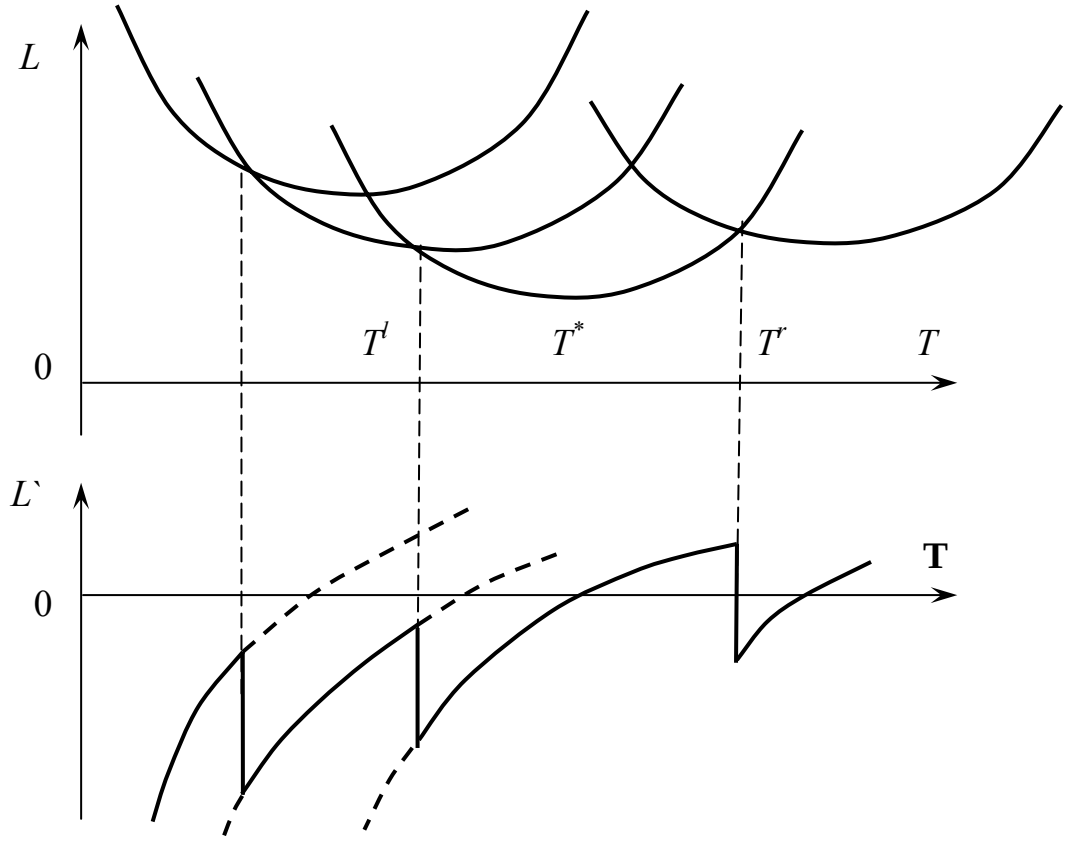

Рис. 4.4. Функція витрат та її похідна

У роботі [4] запропоновано такий алгоритм планування багатономенклатурних поставок:

1. Упорядкувати номенклатури за зростанням відношень $\{g_i/(\lambda_i h_i)\}$ і зробити перенумерацію.
2. Вибрати початкове наближення для базисного періоду T_0.
3. Розрахувати для нього оптимальний набір коефіцієнтів $\{k_i^0\}$.
4. Знайти для цих коефіцієнтів за формулами (4.23) і (4.25) T^* і L^*.
5. Розрахувати праві $\{T_i^r(k_i^0)\}$ й ліві $\{T_i^l(k_i^0)\}$ межі інтервалу сталості угруповань за формулами (4.24) і (4.26).
6. Установити на нуль покажчик key напрямку зміни T.
7. Якщо існує таке i, що $T_i^r < T^*$, прийняти $key = 1$. І якщо існує

таке i, що $T_i^l > T^*$, то прийняти $key = -1$.

8. Поки $key = -1$, встановити $key = 0$. Розрахувати ΔG й ΔH для всіх позицій, для яких $\{T_i^l\} > T^*$, знайти $\sum \Delta G$ й $\sum \Delta H$. Замінити для всіх цих номенклатур k_i на $k_i + 1$ й розрахувати нові $\{T_i^l\}$. Обчислити нові значення $G := G + \Delta G$, $H := H + \Delta H$ і перерахувати за ними T^* й L^*. Якщо були коректування, встановити $key = -1$ й повернутися до початку пункту.
9. Поки $key = 1$, встановити $key = 0$. Розрахувати ΔG й ΔH за всіма номенклатурами, для яких $\{T_i^r\} < T^*$, знайти $\sum \Delta G$ й $\sum \Delta H$. Замінити для всіх цих номенклатур k_i на $k_i - 1$ й розрахувати нові $\{T_i^l\}$. Обчислити нові значення $G := G + \Delta G$, $H := H + \Delta H$ і перерахувати за ними T^* й L^*. Якщо були коректування, встановити $key = 1$ й повернутися до початку пункту.
10. Відновити первісну нумерацію й видати T^*, L^* і набір $\{k_i\}$. Кінець алгоритму.

Процес збільшення (зменшення) T закінчується за обмежену кількість кроків. Як початкове значення можна прийняти

$$T^0 = \sqrt{2(g_0 + g_1)/(\lambda_1 h_1)}.$$

У процесі початкового групування номенклатурних позицій кожній з них має бути поставлено у відповідність таке k, при якому витрати на її поставку будуть мінімальними. За умовою $k_1 = 1$. При зростанні $\{g_i/(\lambda_i h_i)\}$ за i, що забезпечується попереднім упорядкуванням, індивідуальні періоди, а отже, й $\{k_i\}$ будуть зростати за i. Це дозволяє не перевіряти i-ту позицію на значення k_i, менші від k_{i-1}. Збільшення ж k_i обґрунтоване при

$$\left(\frac{\lambda_i h_i}{2} kT + \frac{g_i}{kT}\right) - \left(\frac{\lambda_i h_i}{2}(k+1)T + \frac{g_i}{(k+1)T}\right) \geq 0,$$

або

$$\lambda_i h_i \leq \frac{2g_i}{k(k+1)} = R_k(T).$$

Підставляючи в цю формулу T_0, одержуємо

$$R_k(T) = \frac{g_i \lambda_1 h_1}{(g_0 + g_i)k(k+1)}.$$

Для i-ї номенклатури оптимальним є найменше k, при якому $\lambda_i h_i \geq \frac{2g_i}{k(k+1)}$. При реалізації запропонованого алгоритму обчислюється ряд R_k. Потім для всіх номенклатур, для яких $\lambda_i h_i \geq R_1$, призначається $k_1 = 1$, а для тих номенклатур, у яких $R_m \leq \lambda_i h_i < R_{m-1}$, – $k_i = m$.

Додатковими аргументами на користь об'єднання замовлень є оптові знижки й можлива вимога постачальника про вартість кожного замовлення, не нижчого від деякої норми [4]. Цей алгоритм можна модифікувати для врахування вищенаведеної організації поставок.

4.4.3. Імовірнісний попит. Періодична стратегія

Розглядувана в цьому підрозділі модель управління запасами припускає, що тривалість періоду фіксована, а всі вартісні параметри й розподіли попиту задані в розрахунку на цей період. Затримка поставки зневажливо мала. Витрати на зберігання прийнято пропорційними залишкам до кінця періоду. Штрафи передбачаються пропорційними максимуму зваженого очікуваного дефіциту:

$$\max_i p_i \int_{S_i}^{\infty} (x - S_i) f_i(x) dx.$$

З урахуванням витрат на доведення вихідних рівнів запасу $\{z_i\}$ до розрахункових мінімізації підлягає сума витрат за період

$$L(\vec{S}) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i(S_i - z_i) + h_i \int_0^{S_i} (S_i - x) f_i(x) dx \right] +$$

$$+ \max_i p_i \int_{S_i}^{\infty} (x - S_i) f_i(x) dx. \qquad (4.27)$$

Це рівняння записано з урахуванням того, що ймовірність нульового замовлення нульова й фіксована ціна замовлення виплачується в кожному періоді, а тому з розгляду виключається. З рівняння (4.27) випливає, що транспортні витрати й витрати на зберігання можуть бути скорочені без якого-небудь збільшення штрафу, тобто вирівнюванням зважених очікуваних дефіцитів через зменшення запасів. У цьому випадку можемо записати

$$p_i \int_{S_i}^{\infty} (x - S_i) f_i(x) dx = p_1 \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1) f_1(x) dx,$$

звідки

$$p_i \left[\int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx \right] dS_i = p_1 \left[\int_{S_1}^{\infty} f_1(x) dx \right] dS_1, \qquad \frac{dS_i}{dS_1} = \frac{p_1 \int_{S_1}^{\infty} f_1(x) dx}{p_i \int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx}.$$

Здиференціювавши (4.27) за S_1 й прирівнявши похідну до нуля, одержимо умову

$$\sum_{i=1}^{N} \left[c_i + h_i \int_{0}^{S_i} (S_i - x) f_i(x) dx \right] \frac{p_1 \int_{S_1}^{\infty} f_1(x) dx}{p_i \int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx} - p_1 \int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx = 0.$$

Таким чином, оптимальний набір $\{S_i\}$ для функції витрат (4.27) можна знайти з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \left(\frac{c_i + h_i}{\int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx} - h_i \right) - 1 = 0, \\ p_i \int_{S_i}^{\infty} (x - S_i) f_i(x) dx - p_1 \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1) f_1(x) dx = 0, \end{cases} \tag{4.28}$$

де $i = 2, 3, ..., N$.

Наслідком з першого рівняння є умова існування невід'ємного розв'язку цієї системи $\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{p_i} < 1$. Якщо ця умова не виконується, то необхідно впорядкувати всі номенклатурні позиції за зростанням $p_i \bar{x}_i$ й прийняти $S_i = 0$ для найменшого числа перших позицій, поки умову існування невід'ємного розв'язку не буде виконано.

Розв'язати систему нелінійних рівнянь (4.28) можливо тільки чисельно. Зокрема, для цього може бути використано алгоритм Ньютона. Початкове наближення для ітераційного процесу пошуку розв'язку може бути знайдено з рівнянь для незалежної мінімізації

витрат по кожній з номенклатур. Знайдений розв'язок необхідно перевірити на невід'ємність і у випадку необхідності прийняти всі від'ємні запаси такими, що дорівнюють нулю, й, виключивши відповідні номенклатури з розгляду, знову розв'язати систему (4.28).

Використовуючи аналогічні міркування, можна одержати варіанти основної системи рівнянь для інших способів побудови функції витрат, наприклад, при витратах на зберігання товару й штрафах за «імпульсами» додатного залишку й дефіциту або при врахуванні штрафів за зваженими ймовірностями недостачі [3, 4]. Останній варіант є переважним, коли важко або неможливо оцінити економічні втрати від недостачі й призначити відповідні штрафи.

Викладені результати належать до статичної моделі. Однак для варіантів задачі з перенесенням дефіциту вони застосовуються й у схемі з нескінченною кількістю періодів – із заміною, що вже обговорювалася, c на $c(1-\alpha)$.

Можна вважати, що й у моделі з імовірнісним попитом кращий результат також досягається при організації постачання за системою кратних періодів. При цьому в два рази збільшується кількість невідомих, різко ускладнюється розрахунок штрафів, а функція витрат стає розривною. Висока розмірність задачі й велика кількість точок розриву ускладнюють застосування виключно градієнтних методів. Описаний нижче наближений алгоритм дозволяє розв'язати задачу й полягає в поділі задачі на умовно незалежні етапи.

1. Випадковий попит на кожну з номенклатурних позицій змінюємо на детермінований з тією ж середньою інтенсивністю. Далі за допомогою алгоритму, описаного в підрозд. 4.4.2, розраховуємо систему кратних періодів постачання, тобто оптимальний базисний період T і набір чисел $\{k_i\}$. Отримані періоди вважаються остаточними й подальшому коректуванню не підлягають. Середнє значення й дисперсію попиту приймаємо пропорційними $\{k_i T\}$, після чого вибираємо апроксимуючі розподіли.

2. Складаємо функцію додаткових витрат, що виникають через відхилення попиту від його середнього значення за період KT, де K – найменше загальне кратне чисел $\{k_i\}$. Для цього:

- обчислюємо витрати на зберігання надлишків для i-ї номенклатури за період $k_i T$ і помножуємо на K / k_i;
- ці витрати додаємо за номенклатурними позиціями:

$$L_{KT}^{(s)} = KT \sum_{i=1}^{N} h_i \int_0^{S_i} (S_i - x) f_i(x) dx; \qquad (4.29)$$

- обчислюємо очікувані штрафи як добуток на K штрафів за першою (з найбільшим $\lambda_i h_i$) номенклатурою за базовий період;

- результати додаємо й ділимо на KT .

У підсумку одержуємо цільову функцію

$$L(\vec{S}) = \sum_{i=1}^{N} h_i \int_0^{S_i} (S_i - x) f_i(x) dx + \frac{1}{T} p_1 \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1) f_1(x) dx, \quad (4.30)$$

мінімізація якої розглянутим вище способом приводить до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{p_i} \left(\left[\int_{S_i}^{\infty} f_i(x) dx \right]^{-1} - 1 \right) - \frac{1}{T} = 0,$$

$$p_i \int_{S_i}^{\infty} (x - S_i) f_i(x) dx - p_1 \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1) f_1(x) dx = 0,$$

де $i = 2,3,...,N$.

Аналогічно можуть бути отримані варіанти цільової функції (4.30) і відповідної системи й для іншого методу нарахування штрафів.

4.4.4. Планування запасів при обмеженнях

У розглянутих вище моделях мінімізувалися сумарні витрати з урахуванням штрафу. Часто штраф важко піддається економічному оцінюванню. У таких випадках мінімізуються витрати на замовлення й зберігання запасів при заданій імовірності комплектного забезпечення попиту. При комплектуванні запасних частин часто виникає задача, двоїста зазначеній: знайти набір $\{S_i\}$, при якому сумарні витрати не перевищували б фіксовану величину, а ймовірність комплектного забезпечення попиту була б максимальною. Можливі й інші види обмежень, наприклад, за об'ємом складу, обсягом або вартістю закуповуваної партії тощо.

У магазинах наявність прилавків або вільної площі є чинником, який накладає додаткові обмеження. У цьому випадку адміністрація повинна вирішити, який простір слід виділити для кожного виду продукції. Більшість систем управління запасами містить у собі відразу кілька магазинів, наприклад центральний універмаг і більш дрібні підпорядковані йому торговельні точки. У цій ситуації доводиться ухвалювати рішення щодо того, які товари слід зберігати й продавати тільки в центральному універмазі, які – тільки в дрібних магазинах, а які – й у центральному, і в підпорядкованих йому магазинах. Крім того, необхідно вирішити, в якому обсязі й з якою частотою необхідно замовляти кожен вид товарів. Потрібно порівняти витрати зберігання запасів на різних рівнях з адміністративними й транспортними витратами, пов'язаними з частою доставкою товарів

від центрального універмагу в підпорядковані йому магазини. Математичну модель, що описує такого роду проблеми, можна побудувати тільки за умови прийняття досить великої кількості припущень, що спрощують задачу. Якщо система управління запасами є настільки складною, набагато більш корисними при її моделюванні можуть виявитися імітаційні методи.

При безперервно високому попиті подібні задачі для одного складу ефективно досліджуються за допомогою невизначених множників Лагранжа.

На практиці найчастіше мають місце обмеження у вигляді нерівностей. Однак якщо обмеження задано на деякий дефіцитний ресурс, використання якого обов'язково поліпшує цільову функцію, то умовний екстремум завжди виявляється на межі області.

Якщо цільова функція така, що ослаблення обмежень не дає суворо монотонного її поліпшення, то можлива наявність внутрішніх екстремумів, які відповідають нелімітованим обмеженням. У цьому випадку необхідно знайти безумовний екстремум і перевірити виконання обмежень, порушені обмеження ввести в задачу у вигляді рівності, і так доти, доки всі обмеження не виявляться виконаними.

Наприклад, нехай обмеження за ймовірністю забезпечення попиту має вигляд

$$\prod_{i=1}^{N} \int_0^{S_i} f_i(x)dx \geq Q,$$

або, що те ж саме,

$$\sum_{i=1}^{N} \ln \int_0^{S_i} f_i(x)dx \geq \ln Q.$$

Якщо витрати на зберігання обчислюються за (4.29), то оптимальний набір $\{S_i\}$ випливає з розв'язання системи

$$\begin{cases} h_i \int_0^{S_i} f_i(x)dx + \xi \dfrac{f_i(S_i)}{\int_0^{S_i} f_i(x)dx} = 0, \quad i = 1,2,...,N, \\ \sum_{i=1}^{N} \ln \int_0^{S_i} f_i(x)dx - \ln Q = 0. \end{cases}$$

У випадку обмеження за вагою (обсягом, вартістю) запасів вигляду $\sum_{i=1}^{N} r_i S_i \leq R$ й для витрат, що розраховуються згідно з (4.30), маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{h_i + \xi r_i}{p_i} \left\{ \left[\int\limits_{S_i}^{\infty} f_i(x)dx \right]^{-1} - 1 \right\} - \dfrac{1}{T} = 0, \\ p_1 \int\limits_{S_1}^{\infty} (s - S_1) f_1(x)dx - p_i \int\limits_{S_i}^{\infty} (s - S_i) f_i(x)dx = 0, \quad i = 1,2,..., N, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} r_i S_i - R = 0. \end{cases}$$

Цей підхід може бути використано лише за умови повного задоволення попиту й відсутності дефіциту. Якщо це обмеження порушується при розрахованих на першому кроці величинах $k_i T$, то задачі визначення оптимальних періодів постачання й нормативних запасів поділити не вдається. Однак знаходження розв'язку можна звести до задачі одномірного пошуку базисного періоду T.

Для розв'язання цієї задачі можна з успіхом застосувати й метод динамічного програмування. Припустимо, що

$$\varphi_i(S_i) = \int\limits_{0}^{S_i} h_i(S_i - x) f_i(x)dx + \int\limits_{S_i}^{\infty} p_i(x - S_i) f_i(x)dx.$$

Позначимо через $L_k^*(R)$ мінімальні витрати, що досягаються при виконанні умови $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i S_i = R$ для k номенклатур, запаси яких будуть визначені в останню чергу. Очевидно, що

$$L_1^*(R) = \min_{0 \le S_1 \le R/r_1} \varphi_1(S_1),$$

$$L_2^*(R) = \min_{0 \le S_2 \le R/r_2} \left[\varphi_2(S_2) + L_1^*(R - r_2 S_2) \right].$$

Збільшуючи кількість номенклатур, зрештою можна прийти до

$$L_N^*(R) = \min_{0 \le S_N \le R/r_N} \left[\varphi_N(S_N) + L_{N-1}^*(R - r_N S_N) \right].$$

Для розв'язання задачі необхідно розрахувати таблицю оптимальних $S_1^*(z)$ і відповідних їм значень функції $L_1^*(z)$ для всіх можливих значень z на інтервалі $[0, R]$ з кроком Δz. Мінімізуючи суми $L_2^*(R) = \varphi_2(S_2) + L_1^*(R - r_2 S_2)$ за S_2 з використанням розрахованої на попередньому кроці таблиці $L_1^*(z)$, одержуємо нову таблицю

оптимальних $S_2^*(z)$ і зв'язаних з ними мінімумів $L_2^*(z)$ і т. д.

Переглядаючи таблиці в зворотному порядку, легко отримати оптимальні значення $\{S_i^*\}$:

$$S_i^* = S_i^*\left(R - \sum_{k=i+1}^{N} r_k S_k^*\right), \qquad i = N-1, N-2, ..., 1.$$

Має сенс N-й етап мінімізації проробити в повному обсязі, тобто для всіх можливих z з $[0, H]$, не обмежуючись обчисленням $S_N^*(R)$ й $L_N^*(R)$. Це дозволяє уніфікувати етапи алгоритму й дає цінну для практики інформацію про вплив обсягу H на досяжний мінімум витрат. Із цих же міркувань слід використати в розрахунках не фактичний резерв, а трохи більшу величину – $\widetilde{H} > H$. Такий підхід дозволяє оцінити й виграш від ослаблення обмежень.

Основні труднощі обчислювання при реалізації цього алгоритму полягають у необхідності багаторазової мінімізації функцій вигляду $\varphi_i(S_i) + L_{i-1}^*(R - r_{i-1}S_{i-1})$. За наявності додаткової інформації про структуру зазначених функцій, таких, як опуклість або ввігнутість, задача може бути спрощена [10].

Ряд задач управління запасами пов'язаний з необхідністю задоволення декількох обмежень одночасно, наприклад, за вагою, обсягом і вартістю. Ці задачі можуть бути зведені до багатовимірних (за кількістю обмежень) задач динамічного програмування.

4.5. Складування

Сучасний великий склад – це складне технічне спорудження, що складається з численних взаємозалежних елементів, має певну структуру й виконує ряд функцій з перетворення матеріальних потоків, а також комплектацію, перероблення й розподіл вантажів між споживачами. При цьому можливе різноманіття параметрів, технологічних й об'ємно-планувальних рішень, конструкцій обладнання й характеристик різноманітної номенклатури вантажів, що переробляються на складах, відносить склади до складних систем. Водночас склад є тільки елементом системи більш високого рівня – логістичного ланцюга, що й формує основні технічні вимоги до складської системи, встановлює задачі й критерії її оптимального функціонування, диктує умови перероблення вантажу. Отже, склад має розглядатися не ізольовано, а як інтегрована складова частина логістичного ланцюга.

До основних функцій складу можна віднести такі:

- перетворення виробничого асортименту у споживчий відповідно

до попиту, тобто створення необхідних асортиментів для виконання замовлень клієнтів;

- складування й зберігання, які дозволяють вирівнювати часову різницю між випуском продукції і її споживанням і дають можливість здійснювати безперервне виробництво й постачання на базі створених товарних запасів; зберігання товарів необхідне також і у зв'язку з сезонним споживанням деяких товарів;

- унітизація й транспортування вантажів; для скорочення транспортних витрат склад може здійснювати функцію об'єднання (унітизацію) невеликих партій вантажів для декількох клієнтів до повного завантаження транспортного засобу;

- надання послуг, серед яких: підготовка товарів для продажу; перевірка функціонування приладів й обладнання, монтаж; надання продукції товарного вигляду; попереднє оброблення; транспортно-експедиційні послуги.

Принципи організації матеріальних потоків на складі:

1. Пропорційність. Зв’язані між собою операції складського процесу (розвантаження, прийняття товару й т. ін.) мають бути пропорційними, а саме відповідати одна одній за пропускними властивостями або швидкістю.

2. Паралельність. Одночасне виконання окремих операцій на всіх стадіях процесу.

3. Ритмічність. Є основою постійності в затратах енергії, часу, праці протягом всього робочого дня (зміни). Необхідно добиватися ритмічності надходження товарів від постачальників і відповідної ритмічності їх відпуску.

4. Прямоточність. Означає максимальне спрямлення технологічних маршрутів як у горизонтальному, так і у вертикальному напрямках. Створює умови для скорочення затрат при однаковій потужності складу й закладається при плануванні.

Існують кілька основних проблем, успішне вирішення яких може гарантувати ефективне функціонування складського господарства:

- вибір між власним складом або складом загального користування ("Make or buy problem?");
- кількість складів, розмір і розташування складської мережі;
- вибір системи складування.

4.5.1. Вибір між власним складом або складом загального користування

Існують дві основні альтернативи: придбання складів у власність або використання складів загального користування. Комбінація власного складу й складу загального користування особливо приваблива й економічно обґрунтована, якщо фірма реалізує свою

продукцію в багатьох різних регіонах й у випадку сезонного попиту на товар. Це рішення має бути спрямоване на пошук компромісу. Обидва випадки мають переваги й недоліки. При виборі одного з них часто вирішальною є умова мінімуму витрат. Критичним фактором економічності складу фірми (власного складу) є стабільно високий оборот. На користь вибору власного складу можна віднести стабільно постійний попит з насиченою щільністю ринку збуту на території, що обслуговується. На власних складах краще підтримуються умови зберігання й контролю за продукцією. Керівництву фірми в таких умовах легше коректувати стратегію збуту й підвищувати перелік пропонованих клієнтові послуг, що дає можливість зміцнювати свої позиції в конкурентній боротьбі. Складам загального користування слід віддавати перевагу при низьких обсягах обороту фірми або сезонності попиту на товар. До вибору складу загального користування вдаються у випадках, коли фірма впроваджується на новий ринок, де рівень стабільності продажів або невідомий, або непостійний. Склади загального користування не потребують приватних інвестицій фірми в розвиток складського господарства, до того ж скорочуються фінансові ризики від володіння своїми власними складами, збільшується гнучкість у потребі складської площі (можна змінювати орендовані складські потужності й строки їх орендування).

4.5.2. Кількість, розмір і розташування складів

Малі й середні фірми, що обмежують збут своєї продукції одним або декількома сусідніми регіонами, мають, як правило, один склад. Як варіант можуть бути два склади: один поблизу офісу для дрібних клієнтів і ще один (у промисловій зоні) для великих. Для великих же фірм з великим національним або міжнаціональним ринком це завдання виявляється дуже складним, і під час його вирішення доводиться переборювати значні труднощі.. При цьому найпоширеніші два варіанти розташування складської мережі: централізоване (наявність одного складу) й децентралізоване (розосередження ряду складів у різних регіонах збуту). Територіальне розташування складів і їхня кількість визначаються потужністю матеріальних потоків і їхньою раціональною організацією, попитом на ринку збуту, розмірами регіону збуту й концентрацією в ньому споживачів, відносним розташуванням постачальників і покупців, особливостями комунікаційних зв'язків і т. д.

Задача розташування й формування складської мережі, як і майже будь-яка логістична задача, є оптимізаційною, оскільки будівництво нових і купівля вже діючих складів і їх експлуатація пов'язані зі значними капіталовкладеннями. Потрібно забезпечити, поряд з підвищенням рівня обслуговування споживачів, скорочення витрат обігу залежно від наближення до своїх клієнтів.

Точність у розрахунках складського простору багато в чому залежить від правильного прогнозу попиту на продукцію даного складу й визначення необхідних запасів (виражених у натуральних величинах). Ця задача розв’язується за допомогою існуючих комп'ютерних програм, які аналізують множину можливих варіацій.

При виборі місця розташування складу з числа конкурентоспроможних варіантів оптимальним уважається той, який забезпечує мінімум сумарних витрат на будівництво й подальшу експлуатацію складу й транспортні витрати на доставку й відправлення вантажів. Витрати на транспорт включають первісні капіталовкладення в розвиток транспортної мережі (на будівництво й реконструкцію під'їзних доріг, придбання рухомого складу, будівництво гаражів, об'єктів ремонтного господарства й т. д.) і експлуатаційні витрати на доставку й відправлення вантажів (витрати, пов'язані з транспортуванням вантажу, утриманням і ремонтом транспортних засобів, пристроїв і об'єктів).

При збільшенні потужності й розмірів складів питомі капітальні витрати на одну тонну вантажообігу й запаси зберігання скорочуються, що говорить на користь будівництва дуже великих складів. Однак, з іншого боку, це найчастіше призводить до скорочення кількості складів, а отже, збільшення транспортних витрат при доставці.

4.5.3. Вибір системи складування

Логістичний процес на складі досить складний, оскільки потребує повної погодженості функцій постачання запасами, перероблення вантажу й фізичного розподілу замовлень. Практично логістика на складі охоплює всі основні функціональні області, які розглядаються на мікрорівні. Тому логістичний процес на складі набагато ширше технологічного процесу й включає:

- постачання запасами;
- контроль за поставками;
- розвантаження й приймання вантажів;
- внутрішньоскладське транспортування й перевалку вантажів;
- складування й зберігання вантажів;
- комплектацію замовлень клієнтів і відвантаження;
- транспортування й експедицію замовлень;
- збір і доставку порожніх товароносіїв;
- контроль за виконанням замовлень;
- інформаційне обслуговування складу;
- забезпечення обслуговування клієнтів (надання послуг).

Функціонування всіх складових логістичного процесу має розглядатися у взаємозв'язку й взаємозалежності. Такий підхід

дозволяє не тільки чітко координувати діяльність служб складу, він є основою планування й контролю за просуванням вантажу на складі з мінімальними витратами.

Координація служби закупівлі здійснюється під час операцій з постачання запасами й за допомогою контролю за супроводом поставок. Основна задача постачання запасами полягає в забезпеченні складу товаром (або матеріалом) відповідно до можливостей його перероблення на даний період при повному задоволенні замовлень споживачів. Тому визначення потреби в закупівлі запасів має проводитися в повній погодженості зі службою продажів і наявною потужністю складу.

Облік і контроль за надходженням запасів і відправленням замовлень дозволяє забезпечити ритмічність перероблення вантажопотоків, максимально використовувати наявний об'єм складу, підтримувати необхідні умови зберігання, скоротити строки зберігання запасів і тим самим збільшити оборот складу.

При здійсненні *розвантаження й приймання вантажів* необхідно орієнтуватися на умови поставки укладеного договору. Відповідно підготовляються місця розвантаження під зазначений транспортний засіб (трейлер, хура, контейнер) і необхідне вантажно-розвантажувальне обладнання. Спеціальне оснащення місць розвантаження й правильний вибір обладнання дозволяють ефективно проводити розвантаження (у найкоротший термін і з мінімальними втратами вантажу), у зв'язку з чим скорочуються простої транспортних засобів, а отже, й знижуються витрати обігу.

Проведені на даному етапі операції включають: розвантаження транспортних засобів, контроль документальної й фізичної відповідності замовлень поставки, документальне оформлення прибулого вантажу через інформаційну систему, формування складської вантажної одиниці.

Внутрішскладське транспортування припускає переміщення вантажу між різними зонами складу: з розвантажувальної рампи в зону приймання, звідти - в зону зберігання, комплектації й на навантажувальну рампу. Транспортування вантажів усередині складу має здійснюватися при мінімальній протяжності в часі й просторі за наскрізними «прямоточними» маршрутами.

Процес *складування* полягає в розміщенні й складанні вантажу на зберігання. Основний принцип раціонального складування – ефективне використання об'єму зони зберігання. Передумовою цього є оптимальний вибір системи складування й, у першу чергу, складського обладнання. Для впорядкованого зберігання вантажу й економічного його розміщення використовують систему адресного зберігання за принципом твердого (фіксованого) або вільного (вантаж розміщується на будь-якому вільному місці) вибору місця

складування.

Транспортування й експедиція замовлень можуть здійснюватися як складом, так і самим замовником. Найпоширенішою й економічно обґрунтованою є централізована доставка замовлень складом. У цьому випадку завдяки комплектації вантажів і вибору оптимальних маршрутів доставки (див. розд. 3) досягається значне скорочення транспортних витрат і з'являється реальна можливість здійснювати поставки дрібними й більш частими партіями, що приводить до скорочення непотрібних страхових запасів у споживача.

Збір і доставка порожніх тароносіїв відіграють істотну роль у статті витрат. Тароносії (піддони, контейнери, інша тара) при внутріміських перевезеннях найчастіше бувають багатооборотними, а тому потребують повернення відправникові.

Інформаційне обслуговування складу передбачає управління інформаційними потоками і є сполучним стрижнем функціонування всіх служб складу. Залежно від технічної оснащеності управління інформаційними потоками може бути як самостійною системою (на механізованих складах), так і складеною підсистемою загальної автоматизованої системи управління матеріальними й інформаційними потоками (на автоматизованих складах).

Інформаційне обслуговування охоплює: оброблення вхідної документації, пропозицій за замовленнями постачальників; оформлення замовлень постачальників; управління прийманням і відправленням; контролювання готівки на складі; приймання замовлень споживачів; оформлення документації відправлення; диспетчерську допомогу, включаючи оптимальний вибір партій відвантаження й маршруту доставки; оброблення рахунків клієнтів; обмін інформацією з оперативним персоналом і верхнім ієрархічним рівнем; різну статистичну інформацію.

Склад забезпечує виконання послуг *після продажу* товару: установку виробів, гарантійне обслуговування, забезпечення запчастинами, тимчасову заміну товарів, приймання дефектної продукції і її заміну.

Логістичне обслуговування покупців, що успішно здійснюється, може легко стати найважливішою, до того ж стратегічною, ознакою, що вигідно відрізняє дану фірму від конкурентів. Тому при організації логістичного процесу необхідно добиватися:

- раціонального планування складу при виділенні робочих зон;
- ефективного використання простору при розміщенні обладнання, що дозволяє збільшити потужність складу;
- мінімізації маршрутів внутрішскладського перевезення;
- здійснення комплектації партій відвантажень і застосування централізованої доставки (скорочує транспортні витрати);
- максимального використання можливостей інформаційної

системи, що значно скорочує час й витрати, пов'язані з документообігом й обміном інформацією, й т. д.

Система складування припускає оптимальне розміщення вантажу на складі й раціональне управління ним. Вибір раціональної системи складування має здійснюватися в такому порядку:

1. Визначають:
   - місце складу в логістичному ланцюзі та його функції;
   - загальну спрямованість технічної оснащеності складської системи (механізована, автоматизована, автоматична);
   - задачу, якій підпорядковано розроблення системи складування.
2. Вибирають елементи кожної складської підсистеми.
3. Створюють комбінації вибраних елементів усіх підсистем.
4. Здійснюють попередній вибір конкурентноздатних варіантів з усіх технічно можливих.
5. Проводять техніко-економічне оцінювання кожного конкурентоспроможного варіанта.
6. Здійснюють альтернативний вибір раціонального варіанта.

Склад має місце в різних функціональних областях логістики (постачальницькій, виробничій і розподільній).

Склади виробничої логістики пов'язані з обробленням вантажу щодо постійної номенклатури, яка надходить й іде зі складу з певною періодичністю й малим строком зберігання, що дозволяє досягти автоматизованого оброблення вантажу або високого рівня механізації проведених робіт.

Склади розподільної логістики, основне призначення яких – перетворення виробничого асортименту в торговельний і безперебійне забезпечення різних споживачів, включаючи роздрібну мережу, становлять найбільш численну й усередині себе різноманітну групу. Вони можуть належати як виробникам, так і оптовій торгівлі.

Склади готової продукції й розподільні склади виробників у різних регіонах збуту (філіальні склади) займаються обробленням тарних і штучних вантажів однорідної номенклатури зі швидкою оборотністю, які реалізуються великими партіями. Це дає можливість здійснювати автоматизоване й високомеханізоване оброблення вантажу.

Склади оптової торгівлі товарами народного споживання в основному забезпечують постачання роздрібної мережі й дрібних споживачів. Такі склади, у силу свого призначення, концентрують запаси з дуже широкою номенклатурою вантажу й нерівномірною оборотністю товару, який реалізується різними партіями поставки. Усе це робить недоцільним впровадження автоматизованого оброблення вантажів на таких складах. Тут необхідно здійснювати механізоване оброблення вантажів і, можливо, навіть з ручною комплектацією.

5. ЕЛЕМЕНТИ РОЗПОДІЛЬНОЇ ЛОГІСТИКИ

5.1. Основні задачі

Розподільна логістика – це комплекс взаємозалежних функцій, реалізованих у процесі розподілу матеріального потоку між різними оптовими покупцями, тобто в процесі оптового продажу товарів [1].

Об'єкт вивчення в розподільній логістиці - матеріальний потік на стадії руху від постачальника до споживача. Предмет вивчення – раціоналізація процесу фізичного просування продукту до споживача.

Задачі розподільної логістики [14]:

1. *На мікрорівні:*

- планування процесу реалізації товару;
- організація одержання й оброблення замовлення;
- вибір виду упаковки, прийняття рішень про комплектацію, організація виконання операцій, які передують відвантаженню;
- організація відвантаження продукції;
- організація доставки й контроль за транспортуванням;
- організація післяреалізаційного обслуговування.

2. *На макрорівні:*

- вибір схеми розподілу матеріального потоку;
- визначення оптимальної кількості розподільних центрів;
- визначення оптимального місця розташування розподільних центрів (складів) на території, що обслуговується;
- розрахунок оптимального рівня запасів на кожному складі.

Таким чином, наявність великої кількості зв’язаних між собою розподільних центрів розширює спектр задач складської логістики. Необхідність оптимізації роботи системи в цілому призводить до виникнення нових задач.

Перевагою, якої набуває система з імовірнісним попитом, є поява можливості об’єднання резервів на окремих складах для покриття дефіциту на деяких з них. Відмова від оптимізації запасів на кожному складі окремо дозволяє за рахунок незначного зростання штрафів у добре забезпечених складах досягти зниження штрафів у системі в цілому й зменшити сумарний запас.

У децентралізованій системі має сенс розглядати такі задачі:

- організація поповнення сумарного запасу системи;
- оптимальний перерозподіл наявного запасу;
- організація розподілу нової партії товару між складами.

5.2. Задача про оптимальний перерозподіл запасу

Розглянемо задачу про зберігання однорідного продукту в системі складів. У більшості практичних випадків вартість і умови зберігання у всіх складів розподільної системи приблизно однакові. Тому вартість

витрат на зберігання вважається незалежною від прийнятого рішення стосовно розподілу запасів по складах і мінімізуються лише витрати на штрафи й перерозподіл запасів. Введемо такі позначення:

- c_{ij} – ціна одиничного перевезення між складами $i-j$, $j,i=1,2,...,n$;

- q_{ij} – обсяг перевезення між цими складами;

- z_j – наявний запас на складі j;

- p_j – ціна штрафу на складі j;

- M^- – множина складів, які отримують запас при перерозподілі;

- M^+ – множина складів, які віддають запас при перерозподілі.

У такому разі математичне сподівання витрат за термін до чергової поставки становить

$$L=\sum_{j\in M^-}p_j\int\limits_{z_j+\sum\limits_{i\in M^+}q_{ij}}^{\infty}\left(x-z_j-\sum_{i\in M^+}q_{ij}\right)f_j(x)dx+$$

$$+\sum_{i\in M^+}p_i\int\limits_{z_i-\sum\limits_{j\in M^-}q_{ij}}^{\infty}\left(x-z_j-\sum_{j\in M^-}q_{ij}\right)f_i(x)dx+\sum_{j\in M^-}\sum_{i\in M^+}c_{ij}q_{ij}\,.$$

Щільності й штрафи обчислено в розрахунку за час очікування поставки. Нижні межі інтегрування являють собою оптимальні запаси після перерозподілу. Таким чином, умова оптимальності перевезення q_{ij} (i – постачальник, j – одержувач) набуває вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ij}}=-p_j\int\limits_{S_j}^{\infty}f_j(x)dx+p_i\int\limits_{S_i}^{\infty}f_j(x)dx+c_{ij}=0\,.$$

Для розділення складів на множини M^- і M^+ можна, тимчасово незважаючи на транспортні витрати, мінімізувати суму штрафів у системі

$$L_p=\sum_{i=1}^{n}p_i\int\limits_{S_i}^{\infty}(x-S_i)f_i(x)dx$$

за умови, що сумарний запас у системі залишиться незмінним. Здиференціювавши цей вираз за $\{S_i\}$, отримаємо систему рівнянь для умовно оптимальних запасів

$$p_i\int\limits_{\tilde{S}_i}^{\infty}f_i(x)dx=p_1\int\limits_{\tilde{S}_1}^{\infty}f_1(x)dx,\;\; i=2,...,n\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{S}_i = \sum_{i=1}^{n} z_i \,.$$

Зрозуміло, що

$$i \in M^+, \text{ якщо } \widetilde{S}_i < z_i,$$

$$i \in M^-, \text{ якщо } \widetilde{S}_i > z_i.$$

При $\widetilde{S}_i = z_i$ склад у перерозподілі участі не бере.

Оскільки при перерозподілі запас у постачальника зменшується, а у одержувача зростає, то ліва частина виразу (5.1) буде збільшуватися:

$$-p_j \int_{S_j}^{\infty} f_j(x)dx + p_i \int_{S_i}^{\infty} f_j(x)dx + c_{ij} < 0. \qquad (5.1)$$

В оптимальній точці цей вираз дорівнює нулю. Отже, в початковому стані запасів має виконуватися умова (5.1) для всіх пар складів, що беруть участь у перерозподілі. Перевірка даних співвідношень дозволяє сформувати множини $\{U_i\}$ одержувачів складу i й множини $\{V_j\}$ постачальників складу j, а також уточнити списки одержувачів і постачальників стосовно їх скорочення.

У процесі перерозподілу нові напрямки не виникають, а списки одержувачів і постачальників скорочуються. Випишемо рівняння (5.1) для всіх пар при початковому стані запасів і підсумуємо їхні квадрати за кожним постачальником і одержувачем. У результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u_i \left(p_i \int_{S_i}^{\infty} f_i(x)dx \right)^2 - \sum_{j \in U_i} \left(p_j \int_{S_j}^{\infty} f_j(x)dx - c_{ij} \right)^2 = 0, \quad i \in M^+, \\ v_i \left(p_j \int_{S_j}^{\infty} f_j(x)dx \right)^2 - \sum_{i \in V_j} \left(p_i \int_{S_i}^{\infty} f_i(x)dx + c_{ij} \right)^2 = 0, \quad j \in M^-. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Тут через u_i і v_j позначено кількість елементів множин U_i і V_j відповідно. Розв'язок можна знайти за допомогою чисельних методів. На кожній ітерації слід:

- контролювати невід'ємність запасів у постачальника;
- за необхідності змінювати крок;
- виключати перевезення, що стали нераціональними;
- корегувати множини U_i, V_j і M^+, M^-.

Розрахунок треба припинити, коли множина M^- стане порожньою. Тоді стануть порожніми й інші множини.

Далі, зіставляючи обсяги запасів $\{S_i^*\}$ на кожному складі після перерозподілу з початковими запасами, можна знайти загальний обсяг поставок, одержаних (відправлених) даним складом. Розв'язавши відповідну транспортну задачу, знаходимо остаточний розподіл $\{S_i^*\}$. Наведемо алгоритм:

1. Знайти умовно оптимальні запаси $\{\tilde{S}_i\}$.
2. Згідно з (5.1) визначити початкові множини постачальників і одержувачів.
3. Розрахувати $p_i \int_{z_i}^{\infty} f_i(x)dx$ для всіх $i \in M^+ \cup M^-$.
4. Для всіх $j \in M^-$ прийняти V_j порожнім, $v_j = 0$.
5. Для всіх $i \in M^+$ виконати таке:
   - прийняти $U_i = 0$ порожнім, $u_i = 0$;
   - для всіх $j \in M^-$, які задовольняють умову (5.1), занести j в множину U_i і замінити u_i на $u_i + 1$, а також занести i в множину V_j і замінити v_j на $v_j + 1$.
6. Для всіх $i \in M^+$, якщо $u_i = 0$, виключити склад i із числа постачальників.
7. Для всіх $j \in M^-$, якщо $v_j = 0$, виключити склад j із числа одержувачів.
8. Розв'язок системи (5.2) буде являти собою оптимальні запаси $\{S_i^*\}$.
9. Сформувати остаточні множини постачальників і одержувачів, для чого для всіх i:
   - обчислити $q_i = S_i^* - z_i$;
   - якщо $q_i > 0$, віднести цей склад до одержувачів з загальною потребою q_i, при $q_i < 0$ - до постачальників з наявністю $-q_i$.
10. Розв'язати транспортну задачу про перевезення вантажу $\sum_{i \in M^-} q_i$ від постачальників до одержувачів.
11. Видати як результат обсяги й напрямки перевезень. Кінець алгоритму.

Задача значно спрощується при розподілі по складах зовнішнього поповнення. Така постановка задачі часто має місце в реальних розподільних системах, коли, наприклад, національний виробник реалізує свою продукцію через декілька регіональних оптових складів. Зауважимо, що іноді промислові потужності виробника знаходяться в кількох місцях.

Припустимо, що весь вантаж q надходить на вузловий склад і звідти розподіляється по складах у кількості $\{q_j\}$ з транспортними витратами $\{c_j q_j\}$. Тоді функція витрат набуде вигляду

$$L = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \int_{z_j+q_j}^{\infty} (x - z_j - q_j) f_j(x) dx + c_j q_j \right)$$

за умови $\sum_{j=1}^{n} q_j = q$. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p_j \int_{z_j+q_j}^{\infty} f_j(x) dx = c_j + \lambda, \quad j = 2,...,n, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = q, \end{cases} \tag{5.3}$$

де λ – множник Лагранжа.

5.3. Перерозподіл багатономенклатурних запасів

Задача оптимізації постачання N номенклатурних позицій у n підприємств також складається з двох етапів: постачання ресурсів у систему в цілому й розподіл запасів. Для приблизних розрахунків припустимо планування постачання в систему за загальним періодом постачання. Отже, оптимальний період постачання

$$T^* = \sqrt{\frac{2g_\Sigma}{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k h_k}},$$

а обсяг поставок за номенклатурою k буде $q_k = \lambda_k T^*$.

Задача розподілу запасу в багатономенклатурній системі може бути сформульована в двох варіантах. Якщо штрафи за окремими позиціями на кожному складі додаються, то розв'язок може бути отриманий незалежним застосуванням методики для однономенклатурного запасу. В іншому випадку, коли необхідне

комплектне задоволення попиту, то штрафи нараховуються за максимумом зваженого дефіциту. У даному випадку необхідність перерозподілу визначається станом запасу всіх номенклатурних позицій. Завжди проявляється одна найбільш дефіцитна („ключова”) номенклатура, наявний запас якої повністю визначає суму штрафу.

Таким чином, задачу можна розбити на три етапи:

1) виділення ключової номенклатури;
2) розподілення оптимальним чином її запасу;
3) розподілення запасів інших позицій таким чином, щоб штрафи за ними на всіх складах не перевищували штрафів для ключової номенклатури, а транспортні витрати були мінімальними.

З найбільшою ймовірністю „ключовою” номенклатурою слід вважати ту, для якої максимальна зважена ймовірність дефіциту у системі в цілому, тобто досягається $\max\limits_{k} \overline{p}_k \int\limits_{z_{\Sigma,k}}^{\infty} f_{\Sigma,k}(x)dx$, де $\overline{p}_k$ – середнє значення штрафів номенклатури k по всіх складах системи.

Алгоритм розрахунку:

1. Розрахувати сумарні запаси $\{z_{\Sigma,k}\}$ за всіма номенклатурами.
2. Розрахувати зважені ймовірності й вибрати з них номенклатуру k_0, для якої цей добуток максимальний.
3. Для номенклатури k_0 розрахувати для всіх складів j нормативні запаси $\{S^*_{j,k_0}\}$ за допомогою методу, який описано у попередньому розділі.
4. Розв’язати рівняння

$$\overline{p}_{j,k} \int\limits_{\widetilde{S}_{j,k}}^{\infty} \left(x - \widetilde{S}_{j,k}\right) f_{j,k}(x)dx = p_{j,k_0} \int\limits_{S^*{}_{j,k_0}}^{\infty} \left(x - S^*{}_{j,k_0}\right) f_{j,k_0}(x)dx \quad (5.4)$$

   відносно запасів $\{\widetilde{S}_{j,k}\}$, $j = 1,...,n$, $k = 1,...,N$.
5. Розрахувати для всіх номенклатур k різниці між запасами, які потрібні для зрівноваження штрафів, й тими, що є в наявності:

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{S}_{j,k} - \sum_{j=1}^{n} z_{j,k}\,.$$

6. Якщо серед цих різниць немає додатних, перейти до етапу 8.
7. Вибрати ту номенклатуру k_1, для якої q_k максимальне, й замінити k_0 на k_1. Перейти до етапу 3.
8. Розрахувати $q_{j,k} = z_{j,k} - S_{j,k}$ за всіма позиціями й складами.

9. Сформувати значення надлишків і дефіцитів за всіма j і k:

$$\Delta^{+}_{j,k} = \begin{cases} q_{j,k},\ q_{j,k} > 0; \\ 0, \quad q_{j,k} \le 0; \end{cases} \qquad \Delta^{-}_{j,k} = \begin{cases} -q_{j,k},\ q_{j,k} < 0; \\ 0, \quad q_{j,k} \ge 0. \end{cases}$$

10. Занести $\left\{\Delta^{-}_{j,k}\right\}$ і $\left\{\Delta^{+}_{j,k}\right\}$ до таблиці умови транспортної задачі.
11. Перейти до вибору обсягів перевезень $\left\{q_{ij,k}\right\}$ за мінімумом транспортних витрат:
    а) призначити $c_{ij,k} = c_{ij} \cdot c_k$, що зазвичай виконується на практиці;
    б) вибрати $\min c_{ij}$;
    в) для даної пари складів обчислити $q_{ij,k} = \min\left\{\Delta^{-}_{j,k}, \Delta^{+}_{i,k}\right\}$ й скорегувати залишки шляхом їх зменшення на $q_{ij,k}$; зробити це для всіх k; якщо на складі j всі $\left\{\Delta^{-}_{j,k}\right\}$ дорівнюють нулю, то склад j потрібно виключити з числа одержувачів; якщо на складі i всі $\left\{\Delta^{+}_{i,k}\right\}$ дорівнюють нулю, то склад i слід виключити з числа постачальників;
    г) для цієї ж пари складів обчислити обсяги перевезень у зустрічному напрямку $q_{ji,k} = \min\left\{\Delta^{+}_{j,k}, \Delta^{-}_{i,k}\right\}$, скорегувати залишки, списки одержувачів і постачальників;
    д) перевірити, чи залишився хоча б один одержувач (чи має місце $\Delta^{-}_{j,k}$); якщо так, то знайти мінімальний елемент у тій частині таблиці, що залишилась; перейти до шагу в).
12. Кінець алгоритму.

Задача про розподіл поповнення розв'язується аналогічно: виявляється найдефіцитніша номенклатура й відносно неї розв'язується система (5.3). При розв'язанні системи (5.4) визначаються необхідні запаси, підраховується їхня сума й порівнюється з наявним запасом. При остаточному виявленні ключової номенклатури знову розв'язується система (5.3) і призначаються обсяги поставок $q_{j,k}$ за всіма j,k до зрівняння штрафів. Надлишкова частина (в даному випадку) поставок направляється за найбільш дешевими маршрутами з урахуванням вільного місця на складах.

Модифікація алгоритму дозволить одержати наближену методику розв'язання задачі з урахуванням фіксованих величин транзитних норм q_{ij} і фіксованих надбавок g_{ij} на маршруті $i - j$.

Бібліографічний список

1. *Гаджинский А.М.* Логистика / А.М. Гаджинский. – М.: ИВЦ "Маркетинг", 1999. – 228 с.
2. *Мешкова Л.Л.* Логистика в сфере материальных услуг (На примере снабженческо-заготовительных и транспортных услуг) / Л.Л. Мешкова, И.И. Белоус, Н.М. Фролов. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. – 188 с.
3. *Рыжиков И.Ю.* Теория очередей и управление запасами / И.Ю. Рыжиков. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
4. *Рыжиков Ю.И.* Управление запасами / И.Ю. Рыжиков. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятности и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
6. *Шрайбфедер Дж*. Эффективное управление запасами: пер. с англ. / Дж. Шрайбфедер. – 2-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.
7. *Петерс Э.* Порядок и хаос на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цепи и изменчивость рынка: пер. с англ. / *Э. Петерс.* – М.: Мир, 2000. – 333 с.
8. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: в 3 т. / *Г. Вагнер.* – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 336 с.
9. *Баркалов С.А.* Задачи управления материально-техническим снабжением в рыночной экономике / С.А. Баркалов, В.Н. Бурков, П.Н. Курочка, Н.Н. Образцов. – М.: ИПУ РАН, 2000. – 58 с.
10. *Корбут А.А.* Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1996. – 368 с.
11. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: в 3 т. / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972. – Т. 2. – 488 с.
12. Исследование операций: в 2 т. / пер. с англ.; под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 712 с.
13. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: в 3 т. / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972. - Т. 5. – 501 с.
14. *Алесинская Т.В.* Основы логистики. Общие вопросы логистического управления / Т.В. Алесинская. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. – 121 с.

Зміст

1. Вступ. Предмет і завдання логістики……..…… 3
1.1. Основні визначення логістики……... 5
1.2. Основні принципи логістики……... 8
2. Елементи логістики закупівель…… 11
2.1. Потреби й поставки. Вибір постачальника…… 12
2.2. Статистичний аналіз потреб…….. 16
2.2.1. ABC- й XYZ-аналіз…… 16
2.2.2. Функція розподілу потреб…… 17
2.2.3. Прогнозування потреб…….. 19
2.2.4. Застосування кореляційно-регресійного аналізу... 24
2.2.5. Кореляційний аналіз у багатономенклатурних задачах……. 25
2.3. Задача розподілу замовлень між постачальниками…… 25
3. Транспортна логістика…… 29
3.1. Загальні положення……. 29
3.2. Планування перевезень……. 29
3.3. Сіткові моделі……..... 34
3.3.1. Класична транспортна задача…… 34
3.3.2. Модель з проміжними пунктами…… 36
3.3.3. Моделі призначень…… 36
3.3.4. Задача комівояжера……. 38
3.3.5. Розв'язання задачі про найкоротший маршрут методом динамічного програмування……... 41
3.3.6. Використання лінійних моделей у логістиці…… 42
3.4. Інші задачі транспортної логістики……... 43
4. Логістика запасів…….. 44
4.1. Проблеми управління запасами……... 44
4.2. Класифікація моделей управління запасами…… 47
4.3. Управління запасами однорідного продукту на ізольованому складі…… 49
4.3.1. Детермінований стаціонарний попит…… 49
4.3.2. Нестаціонарний детермінований попит……... 53
4.3.3. Випадковий попит при миттєвій поставці («задача газетяра»)…… 56
4.3.4. Управління запасами при фіксованій затримці поставок…… 59
4.4. Багатономенклатурні задачі…….. 62
4.4.1. Класифікація номенклатурних позицій…..……..... 62
4.4.2. Поставки за системою кратних періодів……..... 63
4.4.3. Імовірнісний попит. Періодична стратегія…….. 68
4.4.4. Планування запасів при обмеженнях…….. 71
4.5. Складування…….. 74

4.5.1. Вибір між власним складом або складом загального користування……. 75

4.5.2. Кількість, розмір і розташування складів…… 76
4.5.3. Вибір системи складування……. 77
5. Елементи розподільної логістики…….. 81
5.1. Основні задачі…….. 81
5.2. Задача про оптимальний перерозподіл запасу…… 81
5.3. Перерозподіл багатономенклатурних запасів…….. 85
Бібліографічний список ……..... 88

Курєннов Сергій Сергійович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЛОГІСТИКИ

Редактор А.М. Ємленінова

Зв. план, 2008
Підписано до друку 26.11.2008
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 5. Обл.-вид. арк. 5,62. Наклад 100 прим.
Замовлення 501. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http:// www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17