МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”

В.П. Мигаль, І.А. Клименко, О.С. Фомін

КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ

Навчальний посібник

Харків “ХАІ” 2008

УДК 535.14+535.12 (075.8)

Мигаль В.П. Коливання й хвилі: навч. посіб. / В.П. Мигаль, І.А. Клименко, О.С. Фомін. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т “Харк. авіац. ін-т”, 2008. – 106 с.

Розглянуто коливання й хвилі різної природи. Застосовано активну оболонку, що сприяє розвитку вмінь систематизувати матеріал, робити підсумки й узагальнення. Задіяно елементи активізації самонавчання, спрямовані на підвищення інтересу студентів до матеріалу, а також наведено завдання, що забезпечують перевірку глибини засвоєння матеріалу й розуміння ключових термінів. У кінці кожного розділу матеріал узагальнено у формі діалогу у віртуальній аудиторії.

Для студентів, що вивчають курси “Фізика” і “Експериментальна й теоретична фізика”.

Іл. 30. Табл. 23. Бібліогр.: 11 назв

Р е ц е н з е н т и: д-р фіз.-мат. наук, проф. А.М. Єрмолаєв,
д-р техн. наук В.К. Комарь

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Для кожного студента характерні індивідуальний рівень знань, власний досвід, свої вміння, навички й цінності. Глибоке засвоєння навчального матеріалу неможливе без самостійних міркувань і критичного осмислення. Тому саме самостійна робота відіграє основну роль у розвитку пізнавальних здібностей і зумовлює готовність використання набутих знань у повсякденній діяльності. Щоб оволодіти навичками ефективної самостійної роботи, необхідно їх цілеспрямовано формувати й розвивати певні вміння: виділяти головне, систематизувати матеріал, робити підсумки й узагальнення, а також самостійно контролювати ступінь розуміння матеріалу. Посібник скеровано на вироблення навичок систематизації й узагальнення знань у процесі підготовки до лабораторних робіт, модулів та іспитів. За допомогою порад і навчальних указівок реалізуються два взаємозв'язаних методичних прийома, спрямованих на розвиток умінь. Певна послідовність навчальних указівок, тез і узагальнень, ключових запитань, проблем, таблиць сприяє глибокому осмисленню й покращує запам'ятовування матеріалу.

Перший важливий методичний прийом, який використано в посібнику, – це визначення мети вивчення матеріалу на початку кожного розділу, що акцентує увагу на ключових питаннях, які безпосередньо пов'язані з рубриками «ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО» та «ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ».

Відомо також, що набагато легше запам'ятовується матеріал, якщо його можна пов'язати із власним досвідом, чому сприяють помітки «Вражаючий факт!». Розвитку вмінь переформульовувати інформацію і робити висновки з неї сприяють вказівки «Зверніть увагу!», «ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ», «ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ». На формування вміння самостійно виділяти важливі положення (концепції та принципи) спрямовані вказівки «ВИДІЛІТЬ ГОЛОВНЕ». В посібнику виведення деяких законів і формул запропоновано як завдання «Аналітикам». Рубрика «Допитливим» сприяє збільшенню зацікавленості й розвитку творчих здібностей.

Другий важливий методичний прийом – рубрика «ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ». Це не просто огляд розділу, а, скоріше, написаний у формі запитань і відповідей діалог у віртуальній аудиторії, що допомагає систематизувати матеріал розділу, сконцентрувати увагу на головному й сприяє розвитку критичного мислення. Більш того, узагальнення матеріалу розділу має прямий зв'язок із метою його вивчення, що дозволяє визначити, наскільки виконано поставлені задачі.

Посібник присвячено вивченню коливань і хвиль – широко поширених періодичних процесів, які включають коливання різних систем (маятники, стрижні, кварцові резонатори, електричні коливальні контури й ін.), а також хвилі різної природи (у воді, сейсмічні, звукові, електромагнітні, рентгенівське й γ-випромінювання).

Незалежно від фізичної природи коливань і хвиль їх математичний опис багато в чому універсальний. Він однаковий для різноманітних фізичних процесів (механічних, електромагнітних тощо). Теоретичний перехід від коливально-хвильових явищ одної природи до іншої загалом часто зводиться до формальної заміни позначень. Тому головна мета посібника – ознайомити студента з основними принципами, спільними для всіх коливальних процесів і хвильових явищ, а не спеціальне вивчення окремо одне від одного механічних, електромагнітних й інших коливань і хвиль. У рамках єдиного підходу розглянуто різні типи коливань, які залежно від характеру впливу поділяються на вільні (власні), згасаючі, змушені, автоколивання й параметричні коливання. Одночасно звернуто увагу на математичну й фізичну простоту трактування й аналізу цілком реалістичних моделей коливальних систем. Такий підхід до вивчення коливань дозволяє переносити закономірності, отримані при вивченні одного виду коливань, на коливання іншої природи. Виявляється, що в багатьох випадках простіше виконати вимірювання електричних величин, а не механічних. Так, миттєву швидкість маятника виміряти складно, в той час як нема проблеми зареєструвати за допомогою осцилографа миттєве значення сили струму. Широке використання моделей і послідовне їх ускладнення дають можливість навчитися виділяти головне у реальних фізичних процесах і враховувати тільки суттєві фактори.

Крім того, посібник ставить за мету показати широку придатність і універсальний характер коливальних процесів і принципів і проілюструвати їх конкретними прикладами й цікавими явищами. Ці приклади допоможуть студентові у самостійному пошуку подібності між різними реальними коливальними і хвильовими явищами й сприятимуть застосуванню таких аналогій до нових явищ. У посібнику широко використовуються моделі різного рівня і електромеханічна аналогія, є система самоконтролю засвоєння матеріалу. Функцію узагальнення й структуризації матеріалу ефективно виконують порівняльні таблиці й діаграми з концептуальними зв'язками. Все це разом з використанням ряду відомих прийомів активізації навчальної діяльності сприяє формуванню системності логічного пізнання.

Розділ 1. ВІЛЬНІ НЕЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

Цей розділ присвячено загальному ознайомленню з дивовижним світом коливань. Наведено їхні класифікацію й основні параметри. Зосереджено увагу на способах опису й графічного відображення коливань. Засвоївши їхні основні принципи, можна суттєво спростити вивчення наступних розділів, оскільки ті ж самі підходи використовуються при розгляді згасаючих і змушених коливань, а також хвильових процесів. В цьому розділі показано, що електричні й механічні коливання мають багато спільного й можуть бути описані за допомогою однакових за формою диференціальних рівнянь.

МЕТА ВИВЧЕННЯ Після вивчення даного розділу й виконання завдань Ви повинні:	
Вміти	1) дати визначення ключовим термінам; 2) пояснити, які параметри визначають енергію коливань.
Знати	1) способи визначення параметрів коливань; 2) області застосування коливань і переваги методів дослідження, що базуються на порівнянні коливань з еталонними.

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Коливання – це:

- джерело хвиль різної природи (звукові, сейсмічні, хвилі на воді, радіохвилі (в тому числі світлові) тощо);
- джерело інформації про коливальну систему (кристалічні ґратки, двигун, ракету, Землю, серце тощо);
- засіб отримання інформації про віддалені й невідомі об’єкти (радіо– і гідролокація, дефектоскопія, ультразвукове дослідження в медицині);
- причина катастроф (руйнування мостів, літальних апаратів, цунамі, землетруси тощо);
- основа функціонування генераторів і багатьох сенсорів фізичних величин;
- основа багатьох новітніх технологій.

1.1. Коливання в природі й техніці

Коливальні процеси досить поширені в природі й знаходять використання в техніці (табл. 1.1). Дійсно, повторюваність у часі властива не тільки коливанням струни, маятника, напруги між обкладками конденсатора в коливальному контурі, але й багатьом біопроцесам (дихання, серцебиття), природним явищам (морські припливи, землетруси й т. ін.). У техніці коливанння відіграють як позитивну роль (радіотехніка, акустика, технологія тощо), так і негативну (коливання мостів, елементів конструкції багатоповерхових будівель, крил літаків, корпусів ракет, які можуть призвести до катастрофічних наслідків).

Таблиця 1.1

Використання коливань

Розділ техніки	Напрямок використання
Будівництво літаків, ракет, мостів	Запобігання резонансу
Техніка надвисоких частот	Технологія, медицина, локація
Енергетика	Генератори, трансформатори
Радіотехніка й телекомунікації (стільниковий зв'язок та ін.)	Засоби передачі й приймання сигналу
Комп’ютерна техніка	Запис, оброблення й відтворення інформації
GPS-системи	Навігація, охоронні системи
Акустика	Дефектоскопія, гідролокація

1.2. Коливальний процес і його кінематичні характеристики

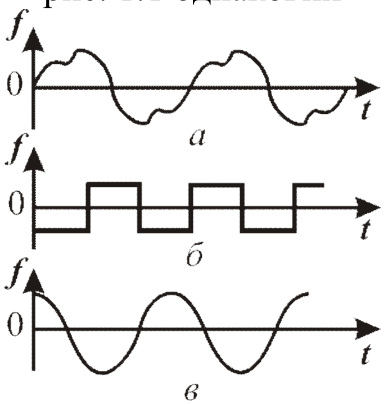
Коливальний процес відбувається з повторенням станів системи у часі. У механічних коливань це періодичні перетворення кінетичної енергії в потенціальну й навпаки, в електромагнітних – періодичні перетворення енергії електричного поля в енергію магнітного поля й навпаки. Вони супроводжуються повторюваною зміною параметрів стану коливальної системи (зміщення, заряду, струму, напруги). В атомах, молекулах і кристалах коливаються складові частини. Отже, коливання – це дуже поширений вид руху. Хоча природа коливань різна, описуються вони одними диференціальними рівняннями й, відповідно, однаковою залежністю характерних параметрів від часу. Залежно від характеру фізичних процесів, зміни стану системи з часом, способу збудження виділяють декілька видів коливань (табл. 1.2).

Коливальний цикл. Коливання, що інтегрально описуються рівнянням $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, є наслідком дій повертальної (квазіпружної) сили $F = -kx$ і інерції. Повертальна сила прагне повернути рухомий елемент системи в стан рівноваги, спричиняє його рух з прискоренням. Чим більше зміщення

x, тим більша повертальна сила. Знак мінус означає, що напрямок сили протилежний зміщенню. Інерція системи протидіє будь-якій зміні стану руху, отже зберігає швидкість. Це сприяє тому, що рухомий елемент «проскакує» стан рівноваги. Так система здійснює коливальний цикл.

Таблиця 1.2

Класифікація коливань

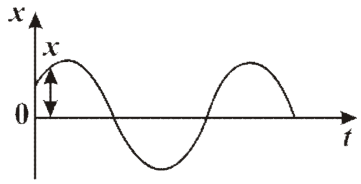
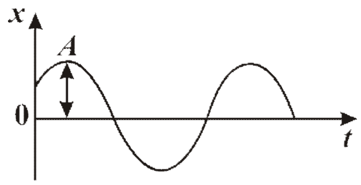
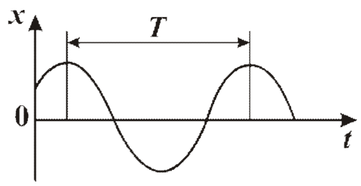
Ознака	**Вид коливань**	**Пояснення або визначення**
Характер фізичних процесів	Механічні, електромагнітні, електромеханічні й інші	Коливання різної фізичної природи описуються однаковими характеристиками й рівняннями
Характер залежності від часу	Періодичні – коливання, які характеризуються такими функціями, що при будь-якому t значення $f(t+T)=f(t)$ (рис. 1.1). Неперіодичні – якщо $f(t+T)\neq f(t)$. Гармонічні – окремий випадок періодичних коливань, які описуються виразом $f(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ (рис. 1.1, *в*)	Період коливань T на рис. 1.1 однаковий  Рис. 1.1. Періодичні коливання
Спосіб збудження	Вільні (власні)	Коливання, які відбуваються за рахунок *одноразово* наданої енергії
	Змушені	Коливання, які відбуваються при *періодичному* зовнішньому впливі
	Автоколивання	Незгасаючі коливання, які виникають і підтримуються у системі за рахунок *безперервного* підведення енергії від зовнішнього джерела

Зверніть увагу! *Різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й рівняннями. Тому використовується єдиний підхід до вивчення коливань різної фізичної природи.*

Основні поняття й терміни. Коливальний рух системи інтегрально описується рівнянням $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, основні параметри якого наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Основні поняття й терміни

Фізична величина	**Графік або формула**	**Визначення**
Зміщення x		Миттєве значення величини, яка змінюється з часом за гармонічним законом (наприклад, зміщення від стану рівноваги)
Амплітуда A		Максимальне зміщення x. Оскільки cos змінюється у межах від –1 до +1, то x може набувати значень від $-A$ до $+A$
Фаза коливань $\omega_0 t + \varphi$	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, фаза – аргумент косинуса або синуса	Миттєвий «знімок» коливальної системи в момент часу t
Колова (циклічна) частота ω_0	$\omega_0 = 2\pi\nu$	Кількість коливань N за 2π секунд
Початкова фаза коливань φ	При $t = 0$ $x = A\cos\varphi$	Величина, яка визначає стан коливальної системи у початковий момент часу
Період $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$		Проміжок часу, протягом якого фаза змінюється на 2π. Найменший проміжок часу, через який повторюються значення всіх фізичних величин
Частота коливань ν	$\nu = \dfrac{N}{t} = \dfrac{1}{T}$	Кількість повних коливань, що здійснюються за одиницю часу
Одиниця частоти 1 Гц	1 Гц – частота періодичного процесу, при якому за 1 с відбувається один коливальний цикл	

? *Допитливим*	Фаза одного коливання зростає повільніше, ніж іншого. Що можна сказати про періоди цих коливань?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Фаза – це*:**

- зростаюча функція часу, яка ніколи не зменшується;
- аргумент косинуса або синуса, який визначає стадію коливань;
- кутова міра часу, який минув з початку коливань;
- величина, що визначає стан коливальної системи в кожний момент часу;
- миттєвий «знімок» коливальної системи.

***Амплітуда – це*:**

- максимальне значення зміщення x;
- завжди додатна величина;
- величина, яка визначається енергією коливань.

***Циклічна частота – це*:**

- швидкість зміни фази;
- кількість повних коливань N, що здійснюються за 2π секунд.

Зверніть увагу! *За час T здійснюється одне повне коливання й фаза коливань отримує приріст* 2π*, тобто* $\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi$.

Аналітикам 1.1	Покажіть, як змінюються з часом швидкість і прискорення в коливальному процесі. Чому зсув фаз між зміщенням і швидкістю дорівнює $\pi/2$, а між зміщенням і прискоренням – π?

Зверніть увагу! *1. В коливальному циклі прискорення й зміщення змінюються в протифазі, тобто повертальна сила й інерція виконують протилежні функції. 2. Гармонічні коливання – єдиний тип коливань, форма яких не спотворюється в процесі відтворення.*

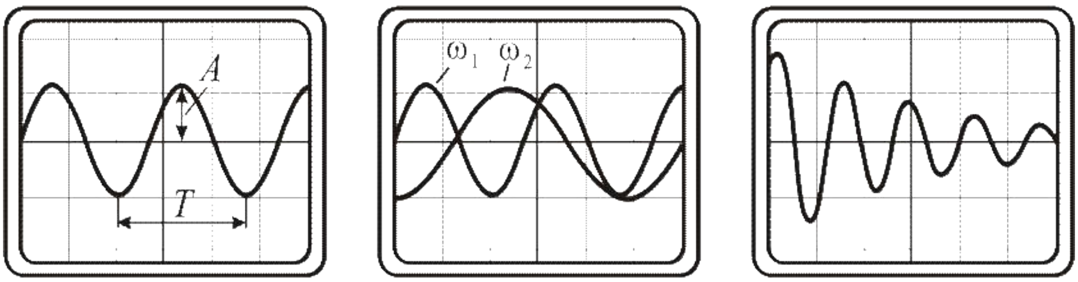
Вражаючий факт!	Людське вухо – надзвичайно чутливий механізм для розпізнавання звукових коливань, який здатний відчувати діапазон частот від 16 до 20000 Гц. При цьому професійні музиканти можуть розпізнавати частоти, які відрізняються на одиниці герц.

1.3. Способи графічного відображення гармонічного руху

Проаналізуємо коливання, дивлячись під різними кутами зору.

1. Осцилограма. Графічне відображення простого гармонічного руху – синусоїда або косинусоїда. Якщо рух ніжки камертона, до якої приклеєно п’єзоперетворювач, відобразити на екрані осцилографа, то можна отримати гармонічне коливання (рис. 1.2).

Осцилограми й, відповідно, осцилографи (прилади для їх спостереження) дуже зручні для інженерів, оскільки вони дозволяють наочно спостерігати форму сигналу і його спотворення (табл. 1.4).



а *б* *в*

Рис. 1.2. Осцилограми: *а* – гармонічне коливання; *б* – два гармонічних коливання з різними частотами; *в* – згасаючі коливання

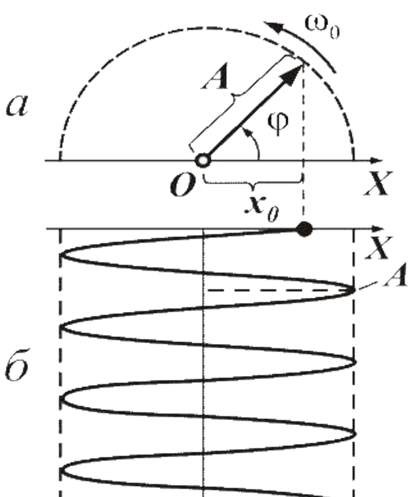


Рис. 1.3. Графічне відображення коливань методом вектора, який обертається (*а*), і його проекція (*б*)

2. Векторна діаграма. Існує ще й векторне відображення коливань, запропоноване Френелем, яке широко застосовується в хвильовій оптиці й теорії електричних кіл (див. табл. 1.4). У його основу покладено зв’язок між рухом по колу й гармонічними коливаннями. Тому обертання вектора амплітуди в літературі також називають методом векторної діаграми.

Розглянемо вектор $\vec{A}$, який починається у довільній точці O на осі x під кутом φ_0. Модуль вектора $\vec{A}$ дорівнює амплітуді A коливання (рис. 1.3). Проекція вектора $\vec{A}$ на вісь OX дорівнює зміщенню x_0 у момент початку відліку часу $(t = 0)$, тобто $x_0 = A\cos\varphi_0$.

Таблиця 1.4

Переваги й недоліки методів відображення коливань

Графічне відображення	**Переваги ⊕ й недоліки ⊖ відображення**
Осцилограма	⊕ можливість безпосереднього визначення періоду T, частоти ν (циклічної частоти ω), амплітуди сигналу A, різниці фаз $\Delta\varphi$; ⊖ малопридатна для спостереження суперпозиції коливань
Векторна діаграма	⊕ зручно визначати амплітуду A, початкову фазу φ, амплітуду при суперпозиції коливань однакової частоти; ⊖ обмежені можливості при визначенні параметрів згасаючих коливань, перехідних процесів
Фазова площина	⊕ можливість якісного аналізу й моделювання зміни станів лінійних і нелінійних коливальних систем; ⊕ можливість прогнозування розвитку періодичних процесів при різних початкових умовах; ⊕ зручність визначення амплітуди, початкової фази, власної частоти, періоду, часу релаксації й логарифмічного декремента згасання; ⊖ недостатня наочність

Обертатимемо вектор амплітуди навколо осі, яка проходить через точку O і перпендикулярна до площини рисунка, з кутовою швидкістю ω_0. За проміжок часу t вектор амплітуди повертається на кут $\omega_0 t$. Проекція вектора $\vec{A}$ в цьому положенні на вісь OX $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. За час T, що дорівнює періоду коливань, вектор амплітуди повертається на кут 2π, а проекція його кінця робить одне повне коливання навколо стану рівноваги O. Отже, вектор амплітуди, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0, повністю характеризує гармонічне коливання.

3. Метод фазової площини. Для аналізу періодичного руху зручно користуватись методом фазової площини (див. табл. 1.4). Значення зміщення x і швидкості зміни зміщення $\dot{x} = dx/dt$ у будь-який момент часу характеризують стан системи. Йому відповідає певна точка на площині (x, $\dfrac{\dot{x}}{\omega_0}$), яка називається площиною станів, або фазовою площиною. Тоді в кожний момент часу одному стану системи відповідає певна точка на фазовій площині, яку називають зображувальною точкою, а лінію, яку описує на фазовій площині зображувальна точка, – **фазовою траєкторією**. Сукупність усіх можливих фазових траєкторій формує фазовий портрет коливальної системи (рис. 1.4). Фазова траєкторія є напрямленою кривою (див. стрілки на рис. 1.4).

? *Допитливим*	У динаміці обертального руху ω означає кутову швидкість, а для гармонічних коливань ω – циклічна, або колова, частота. За якої умови кутова швидкість може бути циклічною частотою?
Аналітикам 1.2	Покажіть, що фазовим портретом гармонічних коливань є коло, радіус якого дорівнює амплітуді.

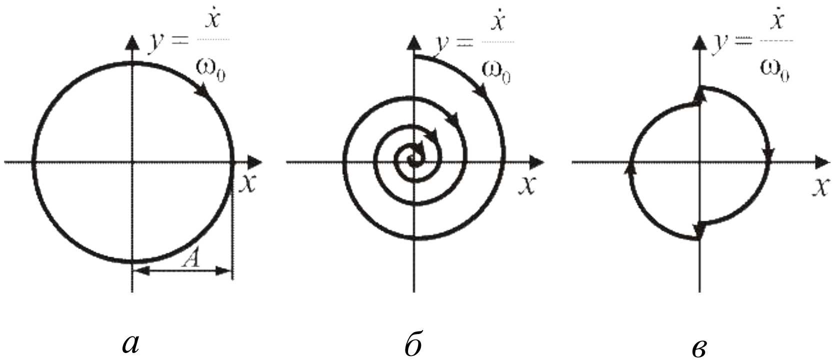


Рис. 1.4. Фазові портрети математичного маятника (*а*), згасаючих коливань (*б*) і годинника (*в*)

Зверніть увагу! *Наявність замкнених фазових траєкторій вказує на періодичність руху*.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Осцилограма – це*:**

- наочне відображення будь-якого руху, що характеризується тим чи іншим ступенем повторюваності в часі значень фізичних величин.

***Фазова площина – це*:**

- двовимірний простір, який наочно відображає суттєві особливості поведінки коливальної системи (стани рівноваги, характерні траєкторії й т.ін.).

***Векторна діаграма – це*:**

- найпростіша геометрична модель коливального процесу;
- спосіб перетворення динамічної задачі в статичну.

ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте, виділіть головне й доповніть висновки з підрозділу**.**

1.4. Диференціальне рівняння гармонічних коливань

Рівняння руху. Одновимірне рівняння Ньютона для частинки масою m, на яку діє зовнішня сила $\vec{F}$, має вигляд $m\ddot{x} = F(x)$, де крапками вгорі ($\ddot{x}$) позначено другу похідну координати частинки x з часом, тобто прискорення $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$. Таке позначення похідних запропоновано Ньютоном та є зручним і типовим у механіці, електротехніці й т. ін.

При дії тільки повертальної сили F_n рівняння руху тягарця на пружині можна записати як

$$m\ddot{x} = -kx.$$

? ***Допитливим***	Чому гармонічні коливання – найбільш поширений вид коливань?

Інший вигляд рівняння руху. Врахуємо, що повертальна сила є градієнтом потенціальної енергії $V(x)$, тобто $F(x) = -\frac{dV}{dx}$. Тоді рівняння руху частинки масою m в полі $V(x)$ запишемо у вигляді

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}.$$

Отже, рух частинки залежить від форми потенціалу $V(x)$, а саме від його кривизни. Якщо потенціал має форму параболи (рис. 1.5), то його мінімум визначає стан рівноваги. У цій точці сила $F(x) = 0$, а отже, і $\ddot{x} = 0$. Таким чином, форма потенціалу визначає характер повертальної сили.

Перевірте теорію	Візьміть аркуш паперу й зігніть його у формі параболи (див. рис. 1.5, б). Покладіть кульку або круглий олівець на край паперу й відпустіть його. Спостерігайте коливальний рух. Визначте частоту коливань.

? ***Допитливим***	Чому частота коливань у попередньому досліді залежить від кривизни потенціалу?

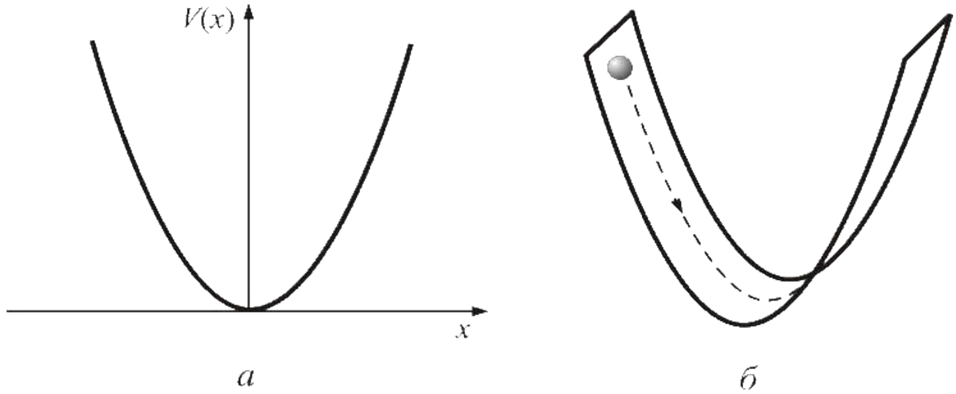


Рис. 1.5. Форма потенціалу (*а*) і модельний експеримент (*б*)

Розкладемо потенціал у степеневий ряд біля стану рівноваги x_0:

$$V(x)=V(x_0)+\frac{1}{2}\omega_0^2(x-x_0)^2+\ldots,$$

де величина $\omega_0^2=\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ відповідно до рис. 1.5 буде додатною.

Тоді рівняння руху набуває звичайного вигляду $m\ddot{x}=-\omega_0^2 x$.

Частинка здійснює коливальний рух біля стану x_0 з частотою ω_0. Отже, частота визначається лише формою потенціалу.

Прикладом сил, що задовольняють співвідношення $F=-kx$, є пружні сили. Повертальні сили F, які мають іншу природу, ніж пружні сили, але також задовольняють умову $F=-kx$, інколи називаються квазіпружними, а $k=m\omega_0^2$ – коефіцієнтом квазіпружної сили.

Лінійне диференціальне рівняння. Зміну стану будь-якої системи можна математично відобразити за допомогою диференціального рівняння. Лінійне диференціальне рівняння, яке описує коливання, використовується у фізиці досить часто, тому слід вивчити його краще. Для прямолінійних коливань уздовж осі OX прискорення $a=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$.

Тоді

$$m\ddot{x}=-kx,\ \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0, \tag{1.1}$$

або

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0. \tag{1.2}$$

Це диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань, збуджених повертальною силою. Власна частота коливань ω_0 визначається параметрами коливальної системи $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$, тобто відношенням сил пружності й сил інерції. Дійсно, якщо помножити чисельник і знаменник на x, то $\omega_0^2 = \frac{kx}{mx} = \frac{|F_n|}{mx}$. Отриманий вираз дозволяє визначити фізичний зміст квадрату циклічної частоти.

Зверніть увагу! ω_0^2 *– це модуль повертальної сили на одиницю маси й одиницю зміщення. Чим більше повертальна сила в системі, тим більша частота коливань. Наприклад, найбільші сили в природі (ядерні) породжують гамма-випромінювання – найбільш високочастотне електромагнітне випромінювання.*

Той факт, що ω_0 визначається параметрами коливальної системи, використовують на практиці для аналізу й зіставлення пружних властивостей реальних об'єктів, наприклад, для визначення якості загартування стальної деталі шляхом порівняння тональності звуків (тобто власної частоти ω_0), які виникають при ударі по ній і еталонній деталі.

Диференціальне рівняння очима інженера. Сучасний інженер повинен не стільки вміти розв'язувати диференціальні рівняння, скільки відчувати їхній розв'язок. Тому крок за кроком подивимось на диференціальне рівняння (1.2) очима інженера.

КРОК 1. Спростимо диференціальне рівняння (1.2). Нехай відношення $\frac{k}{m} = 1$. Тоді рівняння набуває вигляду $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$. Його розв'язок легко знайти, якщо відповісти на таке запитання: яка функція, якщо її двічі здиференціювати, переходить сама у себе зі знаком мінус? Це $x_1 = \cos t$ або $x_2 = \sin t$. Після диференціювання видно, що $dx_1/dt = -\sin t$, $dx_2/dt = \cos t$, а $d^2x_1/dt^2 = -\cos t$ і $d^2x_2/dt^2 = -\sin t$.

КРОК 2. Помножимо отриманий розв'язок на сталу A, тобто $x_1 = A\cos t$ і $x_2 = A\sin t$. Після диференціювання видно, що $dx_1/dt = -A\sin t$, $dx_2/dt = A\cos t$, а $d^2x_1/dt^2 = -A\cos t$ і $d^2x_2/dt = -A\sin t$. Як бачимо, лінійні диференціальні рівняння мають важливу властивість: виявляється, якщо помножити розв'язок рівняння на сталу, то знову можна отримати розв'язок. Отже, функція Ax так само добре задовольняє рівнянню, як і функція x. Проте не визначено відношення сталих k і m, а тому зробимо наступний, третій, крок.

КРОК 3. Змінимо шкалу часу: замість t візьмемо $\omega_0 t$, тобто розв'язок рівняння повинен мати вигляд $x_1 = A\cos\omega_0 t$. Тоді після другого диференціювання отримаємо $d^2x_1/dt^2 = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t$ або $d^2x_2/dt^2 = -A\omega_0^2 \sin\omega_0 t$. Це рівняння збігається з (1.2), якщо $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Тепер можна зрозуміти фізичний зміст ω_0: вона визначає власну одиницю часу коливальної системи, тобто період коливання $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Очевидно, що чим більше маса тіла m, тим повільніше воно буде коливатися. Інерція у цьому випадку буде більшою, і, якщо сила не зміниться, їй знадобиться більше часу для розгону й гальмування. Якщо взяти більш жорстку пружину, то рух має здійснюватися швидше. Отже, зі збільшенням жорсткості пружини k період коливань T зменшується.

? ***Допитливим***	Збільшення амплітуди коливань у два рази відповідає збільшенню швидкості й прискорення в два рази. Чи зміниться при цьому період коливань?

Частинний (окремий) розв'язок. Окремими розв'язками диференціального рівняння будуть функції

$$x_1 = A\cos\omega_0 t \text{ і } x_2 = B\sin\omega_0 t.$$

Це стає очевидним, якщо згадати, що функції $\cos t$ і $\sin t$ переходять самі у себе зі знаком мінус при двоpазовому диференціюванні.

Початкові умови. Загальний розв'язок. Частинний розв'язок відповідає тільки певним початковим умовам коливального процесу, тобто розв'язок $x_1 = A\cos\omega_0 t$ відповідає випадку, коли в початковий момент пружина розтягнута, а швидкість тягарця дорівнює нулю. Розв'язок $x_2 = B\sin\omega_0 t$ буде відповідати стану системи, в якому в початковий момент часу $t = 0$ зміщення $x = 0$ і швидкість системи υ максимальна. Припустимо, що спостереження за коливальною системою почали в момент $t = 0$, коли вона знаходилася в будь-якому проміжному стані між рівноважним і крайнім. Очевидно, що функція повинна допускати зміщення початку відліку часу. Така властивість характерна, наприклад, для функції $x = A\cos\omega_0(t - t_1) = A\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, де $\omega_0 t_1 = \varphi -$ початкова фаза.

Зверніть увагу! *Вигляд розв'язку диференціального рівняння вільних гармонічних коливань визначається саме початковими умовами, тобто значеннями* $x(t)$ *і* $\dot{x}(t)$ *при* $t = 0$.

Використовуючи відомий тригонометричний вираз, далі можна записати $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A(\cos\omega_0 t \cos\varphi - \sin\omega_0 t \sin\varphi)$, звідки

$x = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t$, де $A_1 = A\cos\varphi$ і $A_2 = -A\sin\varphi$. Зрозуміло, що будь-який з вищезазначених виразів можна використовувати для написання загального розв'язку диференціального рівняння $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, тобто у вигляді

$$x = A\cos\omega_0 (t - t_1), \qquad (1.3)$$

$$\text{або } x = a\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.4)$$

$$\text{або } x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\,. \qquad (1.5)$$

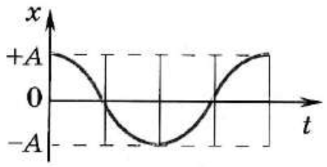
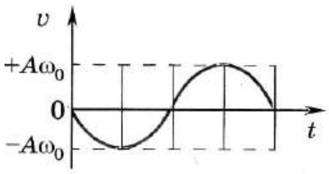
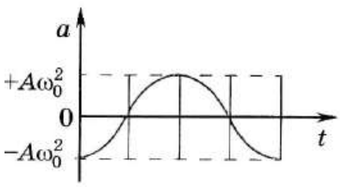
? *Допитливим*	В яких випадках зручно користуватися загальним розв'язком (1.5)?

Звідки взяти A, B, a, φ? З початкових умов. Нехай $x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$. Тоді $x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$, тобто $x_0 = A$. До того ж $\upsilon_0 = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t = -A \cdot 0 + B\omega_0 = B\omega_0$, тобто $B = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}$. Знаючи A і B, можна знайти a й φ.

Запам'ятайте! *Початкові умови визначають амплітуду A й початкову фазу φ, параметри системи – власну частоту ω_0 (період коливань T).*

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО ***Диференціальне рівняння гармонічних коливань – це*:** ✧ рівняння руху, записане у стандартній для математики диференціальній формі; ✧ математичне відображення динаміки зміни стану коливальної системи; ✧ шлях знаходження параметрів, з якими зв'язана частота коливань системи; ✧ основа для математичного моделювання можливих станів коливальної системи.

Ідея Галілея	Незалежність періоду коливань математичного маятника від амплітуди наштовхнула Галілея на ідею використати маятник як регулятор у годинниках.

<table>
<tr><th colspan="2">ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ</th></tr>
<tr><th colspan="2">Зміщення, швидкість і прискорення</th></tr>
<tr><td colspan="2">Матеріальна точка здійснює прямолінійні гармонічні коливання вздовж осі координат x біля стану рівноваги, який взято за початок координат</td></tr>
<tr><td>Зміщення
</td><td>$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$</td></tr>
<tr><td>Швидкість
</td><td>$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) =$$ $$= A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$</td></tr>
<tr><td>Прискорення
</td><td>$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$ $$= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$</td></tr>
<tr><td>Зівставлення величин</td><td>Амплітуди швидкості й прискорення відповідно дорівнюють $\upsilon_{max} = A\omega_0$ і $a_{max} = A\omega_0^2$. Швидкість випереджає зміщення на $\pi/2$, а прискорення – на π.
У момент часу, коли $x = 0$, швидкість υ набуває найбільшого значення; коли x набуває максимального від’ємного значення, прискорення a має найбільше додатне значення (див. рисунки)</td></tr>
<tr><td>Повертальна сила, яка діє на матеріальну точку</td><td>Сила пропорційна зміщенню матеріальної точки й спрямована у протилежний бік (до стану рівноваги):
$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx$$</td></tr>
</table>

1.5. Моделі коливальних систем

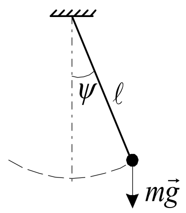
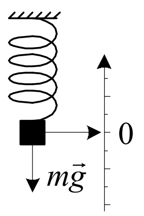
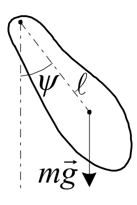
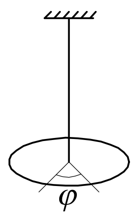
У більшості випадків системи дуже складні, тому для полегшення розуміння коливальних явищ важливо вміти відокремлювати суттєве від другорядного, тобто необхідно ідеалізувати. Для цього використовуються моделі – абстрактні образи реальних або уявних об'єктів.

Зверніть увагу! *Вміння правильно ідеалізувати й моделювати є одною з умов успішної інженерної діяльності.*

Наприклад, коливання тіла на реальній пружині є досить складним, але якщо уявно замінити пружину на ідеальну без маси, то суттєво полегшиться розуміння коливального процесу. У фізиці існує низка типових моделей, до яких намагаються звести реальні процеси. Моделі коливальних систем наведено в табл. 1.5.

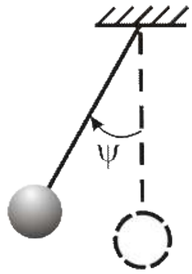
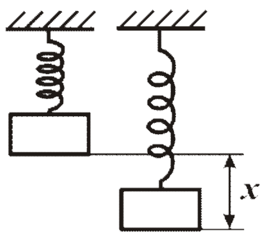
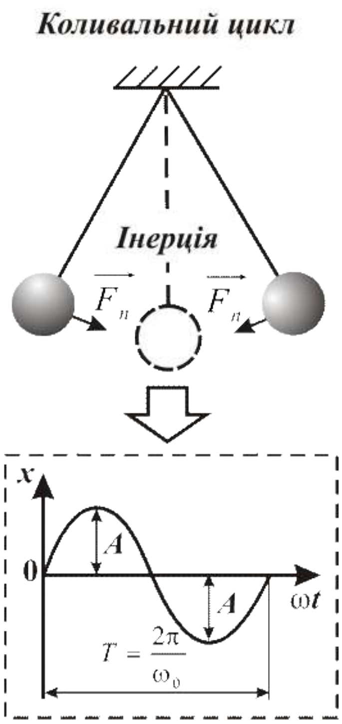
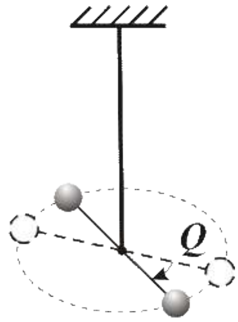
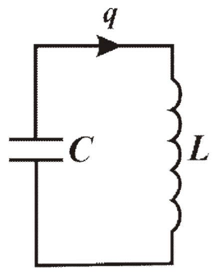
Таблиця 1.5

Моделі механічних коливальних систем

Модель		**Рівняння руху**	**Диференціальне рівняння**	**Частота, період коливань**	**Умовні позначення**
Математичний маятник		$m\ddot{\psi} = -\dfrac{mg\psi}{\ell}$	$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$	$\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$	ℓ – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння
Пружинний маятник		$m\ddot{x} = -kx$	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса
Фізичний маятник		$I\ddot{\psi} = -mg\ell\psi$	$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$	$\omega_0^2 = \dfrac{mg\ell}{I}$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell'}{g}}$	$\ell' = \dfrac{I}{m\ell}$ – зведена довжина фізичного маятника
Крутильний маятник		$I\ddot{\varphi} = -D\varphi$	$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$	$\omega_0^2 = \sqrt{\dfrac{D}{I}}$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{D}}$	D – кутова жорсткість

Зверніть увагу! *Моделі й рівняння руху різні, а диференціальні рівняння однакові.*

Узагальнена модель коливальної системи «гармонічний осцилятор». Рівняння типу $\ddot{\alpha}+\omega_0^2\alpha=0$, де α – будь-яка величина, що описує систему, яка називається гармонічним осцилятором. Його розв'язком є вираз $\alpha=\alpha_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$. Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники й коливальний контур.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО		
Моделі	**Гармонічний осцилятор**	**Терміни**
  	 	 
x, ψ – зміщення, *T – період,* $\omega T=2\pi$, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$		*Q, q – зміщення,* $A=X_{max}$ *– амплітуда,* $(\omega_0 t+\varphi)$ *– фаза,* φ *– початкова фаза,* ω_0 *– циклічна частота*

Коливання гармонічного осцилятора є точною або наближеною моделлю в багатьох фізичних та інженерних задачах.

Запам'ятайте! *Однакові за виглядом диференціальні рівняння мають однакові за виглядом розв'язки.*

Аналітикам 1.3	Покажіть, що формулу для періоду T математичного маятника можна отримати, якщо розглядати математичний маятник як окремий випадок фізичного, в якому всю масу зосереджено в центрі мас C на відстані L від підвісу.

? ***Допитливим***	Математичний маятник довжиною l здійснює коливання у ліфті. Чи впливає на період коливання T маятника рух ліфта вгору або вниз з прискоренням a?

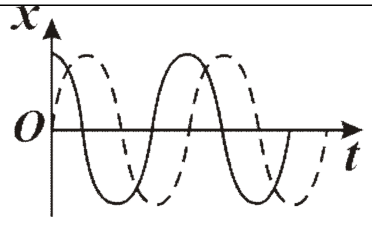
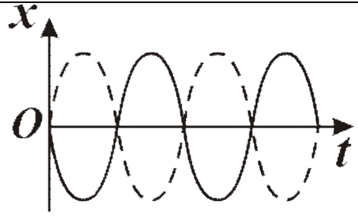
ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Модель коливальної системи – це*:**

- спрощене подання реальних коливальних систем;
- засіб для моделювання складних коливальних процесів у природі;
- уявний об’єкт, властивості якого відповідають основним властивостям реальних коливальних систем;
- засіб визначення характеристичних ознак і параметрів коливальної системи.

Гармонічний осцилятор – це універсальна модель, яка описує різні за природою коливальні процеси подібними диференціальними рівняннями.

ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Інтегральна форма гармонічного руху	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$
Диференціальна форма гармонічного руху	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
Фізичний зміст ω_0^2	$\omega_0^2 =$ *повертальна сила* F_n */(одиниця маси • одиниця зміщення)*
Фаза коливань як миттєвий «знімок» гармонічного осцилятора	
Зсув фази $\frac{\pi}{2}$	Зсув фази π
	

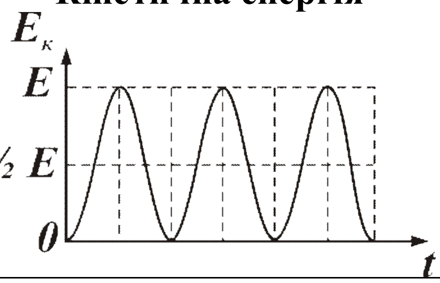
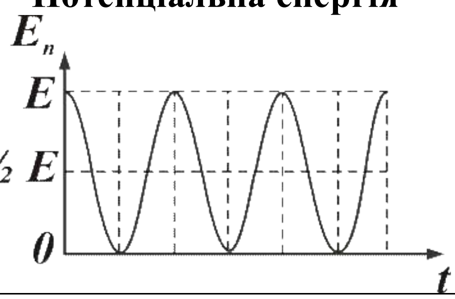
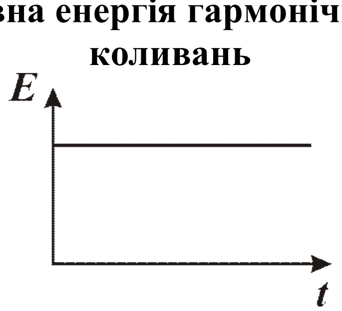
1.6. Енергетичні співвідношення

Повертальна сила є консервативною. Тому повна енергія гармонічного коливання залишається сталою. У процесі коливання відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну й навпаки (табл. 1.6).

Аналітикам 1.4	Покажіть, що швидкість зміни потенціальної енергії маятника дорівнює швидкості зміни його кінетичної енергії.

Таблиця 1.6

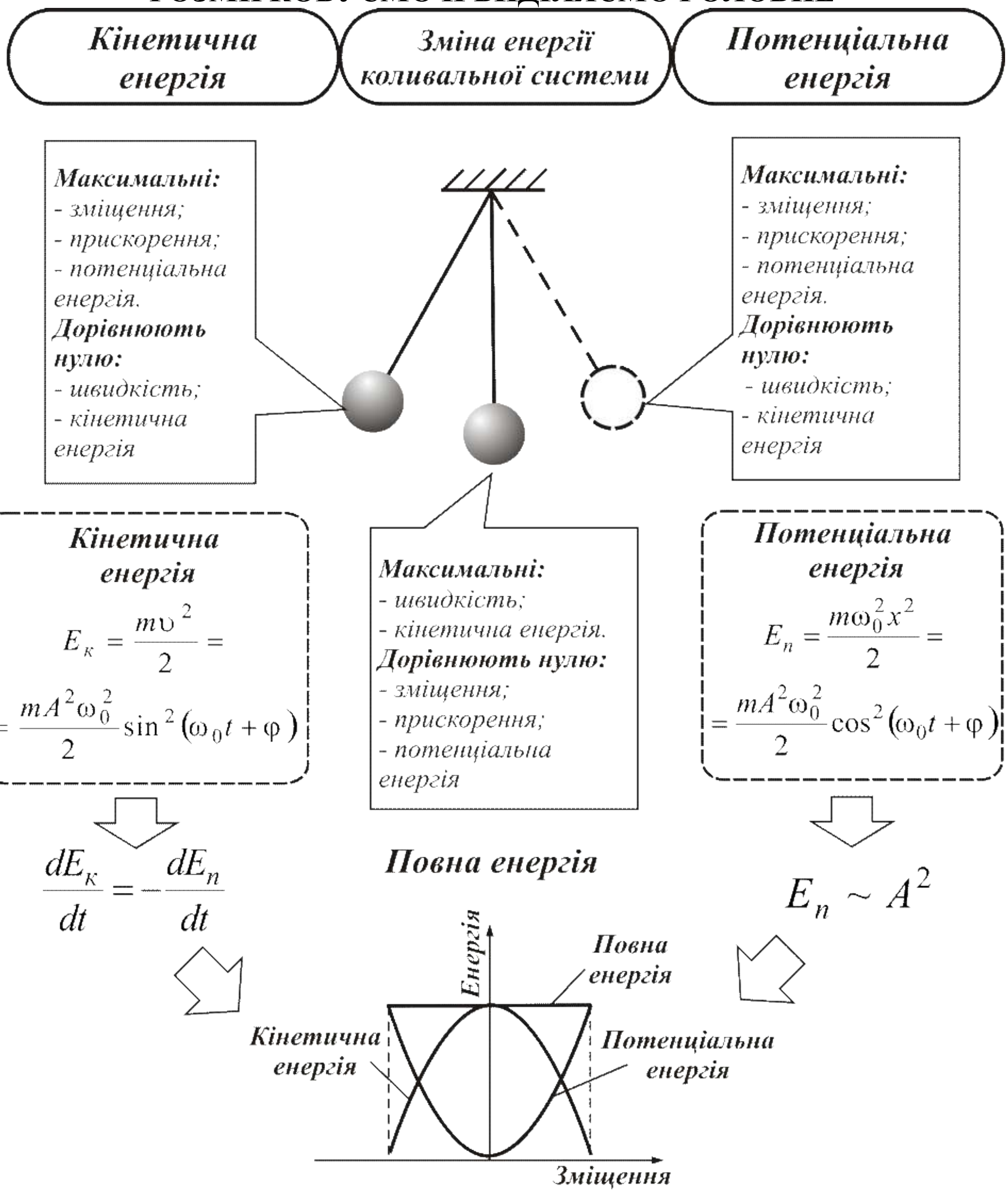
Енергетичні співвідношення

Енергія матеріальної точки, яка здійснює коливання	
Кінетична енергія 	$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) =$ $= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$
Потенціальна енергія 	$E_п = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) =$ $= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$. **Гармонічні коливання здійснюються під впливом квазіпружної сили** F
Частота змін $E_к$ **і** $E_п$	$E_к$ **і** $E_п$ **змінюються з частотою** $2\omega_0$, **тобто з частотою, яка вдвічі перевищує власну частоту**
Повна енергія гармонічних коливань 	$E = E_п + E_к = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$. **Повна енергія залишається сталою. Оскільки квазіпружна сила є консервативною, то у даному випадку виконується закон збереження енергії**

У момент найбільшого відхилення маятника зі стану рівноваги повна енергія складається лише з потенціальної енергії. При проходженні маятником стану рівноваги повна енергія складається лише з кінетичної енергії, яка в цей момент є максимальною.

Зверніть увагу! *Зсув фаз між кінетичною й потенціальною енергіями дорівнює π, що забезпечує сталість повної енергії.*

РОЗМІРКОВУЄМО Й ВИДІЛЯЄМО ГОЛОВНЕ



Вражаючий факт!	У 2005 році дослідники із Штутгарта й Монпельє виготовили шедевр мініатюризації – крутильний маятник на одній вуглецевій нанотрубці. Тестове тіло мікронних розмірів пружно коливалося на цьому маятнику, навіть коли його повернули на 180 градусів.

? ***Допитливим***	Чому перехід енергії одного виду в інший здійснюється на подвоєній частоті порівняно з частотою зміни зміщення?

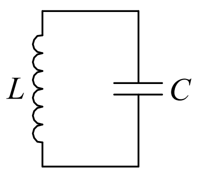
1.7. Коливальний контур. Електромеханічна аналогія

? ***Допитливим***	Заряджений конденсатор підмикають до індуктивності й опору. Що відбувається із зарядом на конденсаторі?

У випадку LC-кола повертальна сила виникає внаслідок взаємного відштовхування між електронами, яке протидіє їх накопиченню на одній із пластин конденсатора. Інерція системи визначається індуктивністю, що протидіє зміні величини струму (закон Ленца для самоіндукції) (табл. 1.7).

Таблиця 1.7

Коливання у коливальному контурі

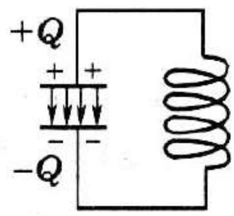
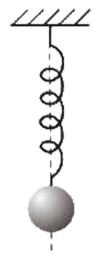
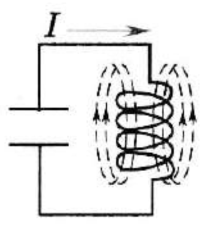
Модель «Коливальний контур»	**Рівняння руху**	**Диференціаль-не рівняння**	**Частота, період коливань**	**Умовні позначення**
	$L\dfrac{dI}{dt}=-\dfrac{q}{C}$	$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$	$\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ $T=2\pi\sqrt{LC}$	q – заряд конденсатора; L – індуктивність контура; C – ємність контура

Історична довідка. Ще у XIX сторіччі вченими Саварі й Б. Федерсеном було помічено, що при малому опорі лейденської банки електричний розряд має коливальний характер. При цьому одна іскра складалася із цілого ряду послідовних розрядів, інтенсивність яких поступово зменшувалася. Федерсену навіть вдалося визначити час кожного розряду, і він виявився точно пропорційним кореню квадратному із добутку ємності кола на його індуктивність. Цими експериментами було розпочато еру створення, дослідження й використання електричних коливань.

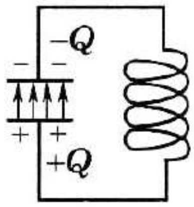
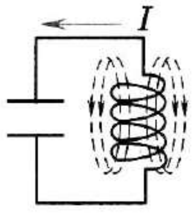
Розглянемо коливальний контур і пружинний маятник, в яких спостерігаються періодичні процеси перетворення потенціальної енергії в кінетичну й навпаки (табл. 1.8).

Таблиця 1.8

Електромеханічна аналогія

Аналогії між електромагнітними коливаннями в ідеалізованому контурі (електричний опір *R*=0) і механічними коливаннями				
t	Послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі $(R=0)$		Коливальний контур	Пружинний маятник
	Процеси у конденсаторі	Процеси у котушці		
$t=0$	Початок розрядки конденсатора	Починає протікати струм	 $E_п=\frac{Q^2}{2C}$	 $E_п=\frac{kx^2}{2}$
$t=\frac{1}{4}T$	Конденсатор розряджено	Струм досягає найбільшого значення	 $E_к=\frac{LI^2}{2}$	 $E_к=\frac{m\upsilon^2}{2}$

Закінчення табл. 1.8

Аналогії між електромагнітними коливаннями в ідеалізованому контурі (електричний опір *R*=0) і механічними коливаннями				
$t=\frac{1}{2}T$	Перезарядка конденсатора	Сила струму дорівнює нулю	 $E_n=\frac{Q^2}{2C}$	 $E_n=\frac{kx^2}{2}$
$t=\frac{3}{4}T$	Конденсатор знову розряджено	Струм максимальний, але напрямлений у протилежний бік	 $E_к=\frac{LI^2}{2}$	 $E_к=\frac{m\upsilon^2}{2}$

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Енергетичні співвідношення при коливаннях – це*:**

- відображення рівняння руху;
- відображення закону збереження енергії;
- засіб визначення амплітуди коливань;
- перехід кінетичної енергії системи в потенціальну й навпаки;
- визначення енергії через квадрат амплітуди A^2 коливань;
- визначення енергії через квадрат циклічної частоти ω^2;
- можливість виявити електромеханічні аналоги.

Обміркуйте, порівняйте й доповніть висновки.

Чи правильно Ви розумієте ключові терміни?

Амплітуда коливань – с. 10. Власна частота коливань – с. 10. Фаза коливань – с. 10. Початкова фаза коливань – с. 10. Фазова площина – с. 13. Повертальна сила – с. 16. Енергія коливань – с. 24.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

1. Який рух називається коливальним?
2. Чим амплітуда коливань відрізняється від зміщення?
3. Назвіть фізичні чинники, які визначають характер коливального циклу.
4. Чи може за чверть періоду зміна кінетичної енергії бути більшою за її максимальне значення?
5. Які особливості аналізу коливальної системи за допомогою фазової площини?
6. Частота коливань зросла в k разів і в стільки ж разів зменшилась амплітуда. Чи змінилась енергія коливань?

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Які фізичні чинники визначають коливальний цикл?

- Коливальний цикл визначають повертальна сила й інерція.

Які параметри коливань визначають їхню енергію?

- Квадрат амплітуди й квадрат частоти власних коливань.

У чому полягає подібність коливань математичного й фізичного маятників?

- Період коливань *математичного* маятника визначається його довжиною, а період коливань *фізичного* маятника – його зведеною довжиною.

Чому періоди коливань маятників визначаються лише їхніми характеристиками й не залежать від способу збудження коливань?

- Тому що спосіб збудження коливань визначає лише початкову фазу й амплітуду.

Чому гармонічний осцилятор є найуніверсальнішою моделлю коливальної системи?

- Тому що різні за природою коливальні процеси описуються такими ж диференціальними рівняннями, що й коливання гармонічного осцилятора.

Які моделі коливальних систем Ви знаєте?

- Фізичний, крутильний, математичний, пружинний маятники й коливальний контур.

Яка властивість маятника лежить в основі роботи годинника, хронометра?

- В основі роботи годинника (хронометра) лежить незалежність періоду коливань маятника від амплітуди.

Які природні процеси відображає й моделює пружинний

маятник?

Коливання атомів, ядер, молекул, крил літака, мостів тощо.

ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

Якісні задачі

1. Які коливання називаються пружними, квазіпружними?
2. Які коливання називаються вільними та в якому випадку вони будуть власними?
3. Чому дорівнюють шлях і переміщення за період коливань для частинки, яка коливається з амплітудою A?
4. Для коливань двох частинок $A_1 = A_2 = A$, $T_1 = kT_2$. Які максимальні швидкості й прискорення обох частинок?
5. Побудуйте графіки залежності переміщення й шляху від часу для частинки, яка гармонічно коливається з амплітудою A.
6. Дайте фізичне пояснення залежності енергії від частоти ω й амплітуди A коливань.

Аналітикам 1.1. Швидкість і прискорення в коливальному процесі

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \upsilon_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^{\,2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^{\,2} x,$$

де $\upsilon_0 = A\omega_0$ – амплітуда швидкості, $a_0 = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення.

Аналітикам 1.2. Коли будь-яка система здійснює коливання, її стан змінюється й відповідна йому точка переміщується на фазовій площині. Якщо коливання здійснюються за гармонічним законом, то $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, а $\dfrac{\dot{x}}{\omega} = -A\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Ці рівняння є параметричними рівняннями лінії (траєкторії), по якій переміщується точка на фазовій площині. Якщо його виключити шляхом піднесення отриманих рівнянь до

квадрата і їх додавання, то одержимо, що $x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = A^2$. Це рівняння кола, радіус якого дорівнює амплітуді A.
Аналітикам 1.3. Формулу для періоду T математичного маятника можна отримати з виразу $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$, якщо розглядати математичний маятник як окремий випадок фізичного, в якому всю масу зосереджено в центрі мас C на відстані L від осі підвісу, що дорівнює довжині l нитки математичного маятника. Тоді $J = ml^2$ і $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
Аналітикам 1.4. Потужність P осцилятора дорівнює скалярному добутку векторів сили $\vec{F}$ на швидкість $\vec{\upsilon}$. Тому енергію осцилятора можна знайти з рівняння руху. Для цього помножимо рівняння руху $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ скалярно на швидкість $\upsilon = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Отримаємо, що $m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} = -kx\cdot\frac{dx}{dt}$, тобто $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = -d\left(\frac{kx^2}{2}\right)$. Звідси видно, що $\frac{dE_к}{dt} = -\frac{dE_n}{dt}$. Простим диференціюванням можна перевірити, що $P = \frac{d}{dt}\left[E_k + E_n\right]$.

Розділ 2. ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Розділ присвячено загальному розгляду додавання гармонічних коливань. Це процес, який відбувається згідно з принципом суперпозиції. В цьому розділі описано методи, за допомогою яких можна на практиці визначати параметри невідомих коливань, а також керувати ними.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">МЕТА ВИВЧЕННЯ
Після вивчення даного розділу й виконання завдань Ви повинні:</td></tr>
<tr><td>Вміти</td><td>1) дати визначення ключовим термінам;
2) пояснити, як змінити фазу або задати амплітуду, частоту коливань.</td></tr>
<tr><td>Знати</td><td>1) способи визначення параметрів коливань;
2) області використання й переваги методів дослідження й аналізу, що базуються на додаванні коливань.</td></tr>
</table>

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Суперпозиція (адитивне додавання) коливань використовується для такого:

- визначення параметрів невідомих коливань (частоти, фази, амплітуди);
- керування параметрами відомих коливань (двигуна, ракети тощо);
- випробовування мостів, будинків у зонах підвищеної сейсмічної активності, літальних апаратів тощо;
- синтезу звуку музичними інструментами й модуляції в радіозв'язку;
- перетворення гармонічного руху в обертальний;
- аналізу будь-якого періодичного сигналу (теорема Фур'є);
- гармонічного аналізу складних коливань.

Ідея Фур'є	У 1822 р. Фур'є було доведено теорему, яка здійснила революцію у фізиці. Вона дозволила будь-який періодичний процес розглядати як результат суперпозиції простих гармонічних процесів.

Запам'ятайте! *Додавання коливань базується на принципі суперпозиції.*

2.1. Принцип суперпозиції

Незалежність дії сил і полів різної природи притаманна багатьом явищам і процесам, тому не дивно, що більшість природних явищ описуються лінійними диференціальними рівняннями. Такі рівняння мають безліч розв’язків, а сума будь-яких розв’язків є також розв’язком. Саме цю унікальну властивість рівнянь відображає принцип суперпозиції, який лежить в основі додавання коливань. З іншого боку, складне коливання будь-якої лінійної системи еквівалентно коливанням групи гармонічних незалежних осциляторів, частоти яких відповідають частотам власних гармонік даної системи, що покладено в основу гармонічного аналізу. Будь-яка коливальна система може одночасно здійснювати декілька коливань. Окремі коливання складаються при цьому в результуюче, параметри якого можна визначати відомими методами. Принцип суперпозиції розглядається у механіці, електродинаміці, теорії поля й квантовій механіці. Цей принцип має фундаментальне значення, бо він відображає незалежність окремих складових різних за природою процесів. Дивлячись «очима математика», можна сказати, що принцип суперпозиції – це наслідок лінійності диференціальних рівнянь, які описують різні процеси. Результуюче коливання у цьому випадку є сумою окремих коливань.

Принцип суперпозиції: якщо тіло одночасно здійснює декілька коливань, то ці коливання додаються незалежно одне від одного, тобто не впливають одне на одне. Оскільки зміщення й амплітуду можна подати у вигляді векторів, то амплітуду й зміщення результуючого коливання також можна обчислити відомими методами як графічно, так і алгебрично.

? *Допитливим*	Як можна використати метод векторної діаграми для додавання коливань з близькими частотами?

2.2. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку

Додавання коливань однакового напряму використовують при такому:
- випробовуванні будинків у зонах підвищеної сейсмічної активності;
- визначенні власних частот елементів аерокосмічної техніки;
- визначенні амплітуди й фази невідомого коливання.

? *Допитливим*	Чому небезпечно їздити на автомобілі, в якому не функціонують амортизатори?

Згадайте спосіб подання коливань за допомогою методу вектора амплітуди, що обертається. Проаналізуйте додавання коливань з однаковими й близькими частотами, які наведено в табл. 2.1.

Аналітикам 2.1	Знайдіть аналітично суму двох гармонічних коливань, у яких: *а*) частоти й фази однакові, але амплітуди різні; *б*) частоти й амплітуди однакові, але фази відстають на φ.

2.3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

У природі й техніці додавання механічних взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти – це засіб одержання впорядкованих коливань, які породжують лінійно поляризовані або поляризовані за колом або еліпсом хвилі (див. табл. 2.1).

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, що додаються, різні, то замкнена траєкторія результуючого коливання досить складна.

Замкнені траєкторії точки, яка здійснює одночасно два взаємно перпендикулярних коливання з кратними частотами $n\omega_1$ і $m\omega_2$, де n і m – цілі числа, називаються ***фігурами Ліссажу***. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, що додаються (табл. 2.2).

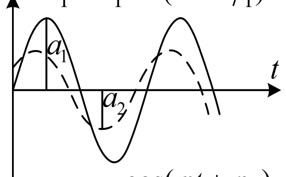
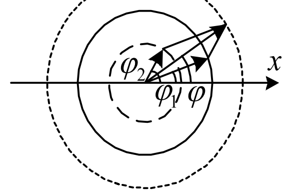
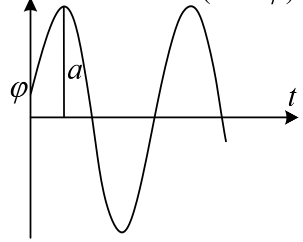
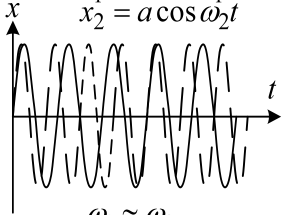
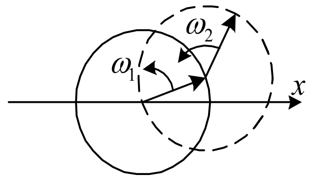
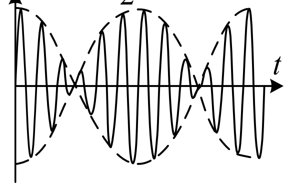
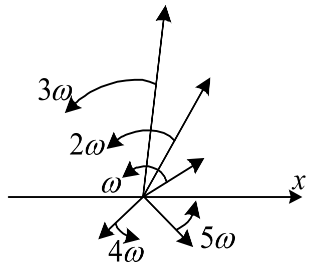
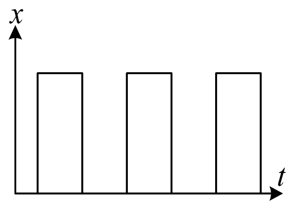
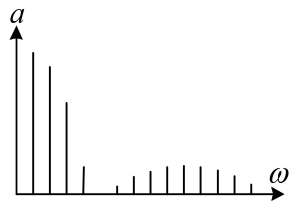
Розглянемо вигляд результуючого коливання при $\omega_1 = \omega_2$ залежно від $\Delta\varphi$. При $\Delta\varphi = 0$ можна розділити одне рівнняння на інше. Тоді отримаємо, що $y/x = a_y/a_x$ і $y = \dfrac{a_y}{a_x}x$, тобто рівняння прямої лінії.

При $\Delta\varphi = \pi/2$ вигляд траєкторії можна одержати, якщо розділити x на a_x, а y на a_y. Піднесемо обидва рівняння до квадрата й додамо їх. Звідси отримаємо, що $\dfrac{x^2}{a_x} + \dfrac{y^2}{a_y} = (\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2 = 1$, тобто тіло буде рухатися за еліпсом з півосями a_x і a_y.

При довільних частотах $\omega_1 \neq \omega_2$ траєкторії виявляються досить складними. Так, при $\omega_2 = 2\omega_1$ або $\omega_2 = 3\omega_1$ тіло буде здійснювати, відповідно, 2 або 3 коливання в одному напрямку і за той же час одне коливання – в іншому.

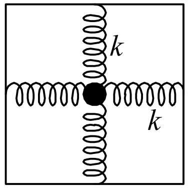
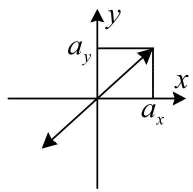
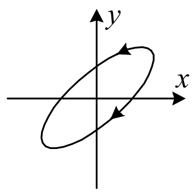
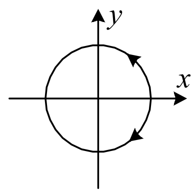
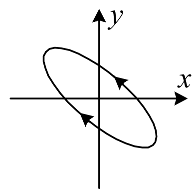
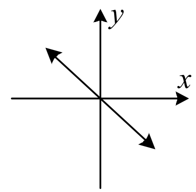
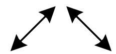
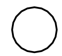
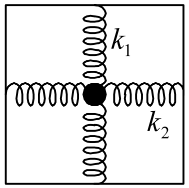
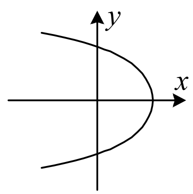
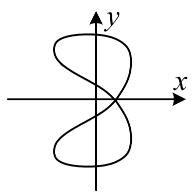
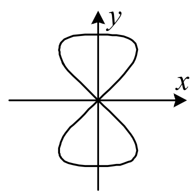
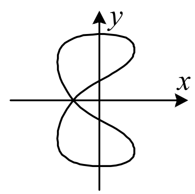
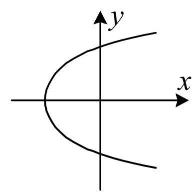
Таблиця 2.1

Додавання коливань одного напрямку

$x_1(t) + x_2(t)$	Векторна діаграма	Результуючі коливання	Інформація, отримана з векторної діаграми
$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$		$x = a \cos(\omega t + \varphi)$ 	$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$, $tg\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$
$x_1 = a \cos\omega_1 t$ $x_2 = a \cos\omega_2 t$  $\omega_1 \approx \omega_2$		$\omega_м = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ 	$a_м(t) = 2a\cos\omega_м t$, $\omega_м$ – частота модуляції, $\omega_{сер} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$
Метод Фур'є: будь-яку функцію можна подати як суму гармонічних функцій, тобто $x(t) = \sum a_k \sin k\omega t$, $k = 1,2,...$			Спектр коливань 

Таблиця 2.2

Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Коливання, що додаються	Фаза φ					Інформація
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	
 $x = a_x \sin \omega t$, $y = a_y \sin(\omega t + \varphi)$	 $y = \frac{a_y}{a_x} x$		 $x^2 + y^2 = a^2$		 $y = -\frac{a_y}{a_x} x$	Поляризація:  - лінійна;  - еліптична;  - циркулярна
 $k_2 = 2k_1$, $\omega_2 = 2\omega_1$; $x = a_x \sin \omega t$; $y = a_y \sin(2\omega t + \varphi)$						Спосіб визначення частоти ω, різниці фаз φ

2.4. Спектр коливань і співвідношення невизначеностей

Якщо коливання неперіодичні, то їхній спектр, тобто залежність амплітуди від частоти, буде не лінійчастим, а суцільним. Особливе значення у фізиці має випадок майже періодичних коливань (рис. 2.1). Їхній спектр – це більш-менш вузька лінія, але не безмежно вузька, як у випадку гармонічних коливань. Очевидно, що чим більше час спостереження Δt, тим точніше можна вважати коливання гармонічним, тим більше спектр буде схожий на вузьку лінію і $\Delta\omega$ буде меншою. І, навпаки, при швидкому згасанні Δt стає малою величиною, коливання далекі від гармонічних і лінія розмивається на більше значення $\Delta\omega$. Можна показати, що $\Delta\omega$ і Δt обернено пропорційні одне одному:

$$\Delta\omega\Delta t = const. \tag{2.1}$$

Цей важливий вираз називається ***співвідношенням невизначеностей***. З нього видно, що точно відповісти, коли відбувалися коливання, неможливо. Можна тільки вказати момент часу з певною невизначеністю Δt. А величина $\Delta\omega$ – це невизначеність частоти.

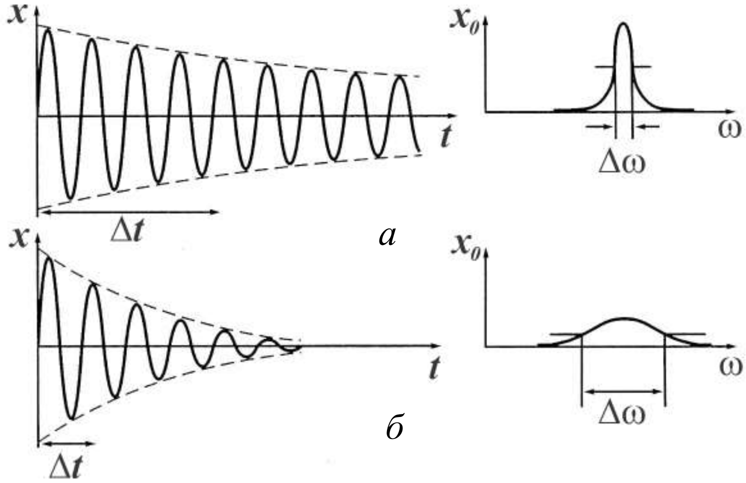


Рис. 2.1. Майже періодичні коливання

Чим більше час життя осцилятора (менше згасання, менші втрати енергії), тим $\Delta\omega$ буде меншою (рис. 2.1, *а*). І, навпаки, для осцилятора, який здійснює коливання при великому згасанні (швидка втрата енергії, малий час життя осциллятора), величина Δt буде малою, а ширина лінії $\Delta\omega$ у спектрі – великою (рис. 2.1, *б*).

2.5. Нелінійні коливання

Далеко не при всяких коливаннях повертальна сила пропорційна зміщенню. Розглянемо, наприклад, ресору автомобіля (рис. 2.2). При невеликих пружних деформаціях згинаються тільки довгі пластини, а при

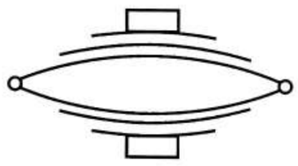


Рис. 2.2. Ресора

великих навантаженнях – вже й більш короткі (й, відповідно, більш жорсткі) пластини. У цьому випадку вираз для повертальної сили можна записати у такому вигляді:

$$F = -kx - px^3. \qquad (2.2)$$

Оскільки потенціальна енергія E_n зв'язана з силою співвідношенням $F = -dE_n/dx$, то це означає, що

$$E_n = \frac{kx^2}{2} + \frac{px^4}{4},$$

тобто причиною коливання є потенціальна яма з більш крутими стінками, ніж у параболи. Тертя пластин одна об одну забезпечує згасання, необхідне для заспокоєння коливань.

2.6. Зв'язані коливання

Зв'язані коливання (це такі, які виникають, коли дві й більше коливальних систем впливають одна на одну) є найбільш розповсюдженими в природі й техніці. Особливий інтерес становлять випадки, коли додаються коливання систем масою M, зв'язаних пружиною з жорсткістю k при довжині підвісу l (рис. 2.3, *а*). Коливання таких систем уже не будуть незалежними, оскільки системи здійснюють обмін енергією. Зв'язок може бути зумовлений пружністю, тертям, інерцією.

Якщо одній із систем надали енергію і вона здійснює коливальний рух, то поступово вона передає свою енергію іншій системі. Швидкість передачі енергії залежить від того, наскільки сильним є між ними зв'язок. Якщо власні частоти обох систем є однаковими, то після того, як система *1* перейде в стан спокою, зміниться напрямок потоку енергії. Обидві системи будуть здійснювати биття, що зсунуті в часі одне від одного на $T/2$. Биття виникають у результаті додавання власних коливань обох систем.

Існують два можливих типи коливань зв'язаних систем, при яких установлюється обмін енергією:

1. Системи коливаються в фазі (синфазно) (рис. 2.3, *б*). Наявність зв'язку не змінює частоту, і обидві системи коливаються з однаковою частотою, яка дорівнює власній частоті.
2. Системи коливаються в протифазі ($\psi_a = -\psi_b$) (рис. 2.3, *в*) внаслідок додаткової жорсткості, яка зумовлена наявністю зв'язку; повертальна сила й частота коливань збільшуються.

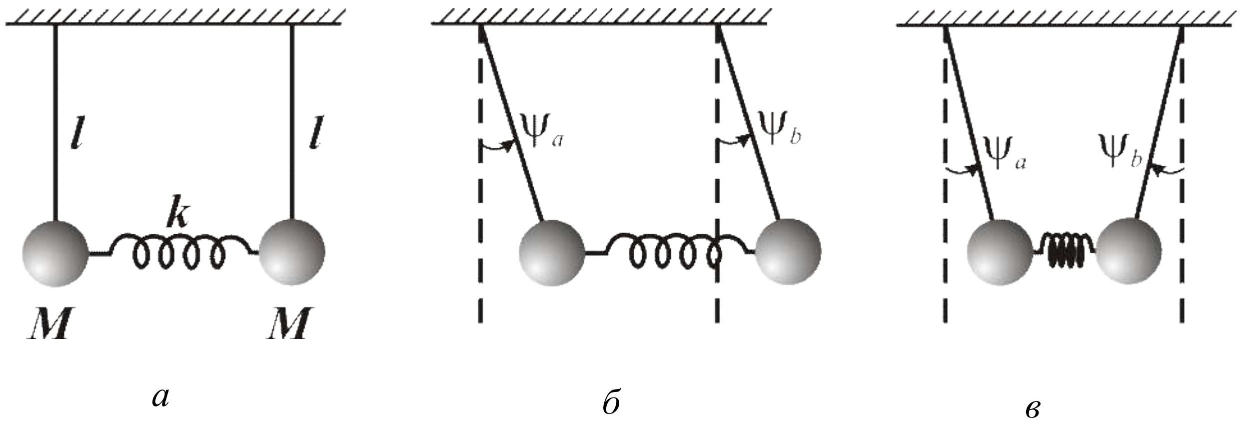


Рис. 2.3. Утворення зв’язаних коливань

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Додавання гармонічних коливань – це спосіб*:**

- відображення принципу суперпозиції;
- визначення амплітуди й фази невідомого коливання;
- керування амплітудою і фазою коливань (використовується для модуляції);
- передачі енергії коливань;
- дослідження нових видів коливань.

Обміркуйте, виділіть головне й доповніть висновки з підрозділу.

Чи правильно Ви розумієте ключові терміни?

Частота модуляції – с. 35. Суперпозиція коливань – с. 35. Биття – с. 35. Векторна діаграма – с. 35. Фігури Ліссажу – с. 36.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

1. При якій різниці фаз амплітуда результуючого коливання, отриманого при додаванні двох однакових коливань, є максимальною або мінімальною: 1) $\pi/2$; 2) 3π; 3) 2π; 4) π; 5) 5π; 6) 0?
2. Два коливання при суперпозиції гасять одне одного. Які їхні амплітуди і яка різниця фаз між ними?
3. Якими мають буди співвідношення між частотами й фазами взаємно перпендикулярних коливань, при додаванні яких виникає фігура Ліссажу у вигляді прямої лінії?
4. Подайте в графічній формі коливання, що є результатом суперпозиції двох коливань одного напрямку з близькими частотами, амплітуди яких відрізняються в 2 рази.

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Суперпозиція коливань лежить в основі гармонічного аналізу. Чому?

- Тому що будь-який періодичний коливальний процес можна подати у вигляді суми гармонічних коливань (теорема Фур'є).

Чому суперпозиція коливань лежить в основі методів випробовування нової аерокосмічної техніки (літальних апаратів тощо), нових технологій, наноелектроніки, радіоелектроніки?

- Додавання коливань лежить в основі **аналізу й синтезу коливань.** Це дозволяє моделювати реальні режими експлуатації техніки.

Додавання взаємно перпендикулярних коливань – це спосіб одержання впорядкованого руху по колу, еліпсу, в площині. Як можна змінити площину коливань математичного маятника?

- Шляхом коливального руху точки підвісу маятника в напрямку, перпендикулярному до напрямку його коливань, з такими ж частотою і фазою,

Як можна знайти фазу коливань?

- Додаванням цього коливання до перпендикулярного до нього з такими ж частотою й амплітудою й відомою фазою. Форма отриманої фігури Ліссажу вкаже на невідому фазу.

Які параметри коливань можна визначити шляхом суперпозиції?

- Частоту, фазу, амплітуду.

Чи можна змінити параметри відомих коливань?

- Так. Для цього також використовують суперпозицію коливань з коливаннями такого ж напрямку, що дозволяє керувати амплітудою і фазою коливань (використовується в модуляції).

ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

Якісні задачі

1. Матеріальна точка бере участь у двох коливаннях з однаковими частотами, амплітудами A й початковими фазами. Знайдіть амплітуду результуючого коливання, якщо коливання відбуваються в одному напрямку.

2. Матеріальна точка бере участь у двох коливаннях з однаковими частотами, амплітудами A й початковими фазами. Знайдіть амплітуду результуючого коливання, якщо коливання взаємно перпендикулярні.

3. Додайте графічно два гармонічних однаково напрямлених коливання, в яких частоти співвідносяться як 1:3, а амплітуди – як 2:1. Чому дорівнює частота складного коливання? Чи буде воно гармонічним, періодичним?

4. У двох однаково напрямлених гармонічних коливаннях з однаковими амплутудами й початковими фазами періоди співвідносяться як 1:1,5. Побудуйте графік складного коливання.

5. Складіть графічно два гармонічних однаково напрямлених коливання однакових періодів, але зміщених за фазою одне відносно одного на π.

Аналітикам 2.1. Розглянемо аналітичний метод знаходження результуючого коливання в деяких простих випадках:

1. Частоти й фази коливань, що додаються, однакові, а амплітуди різні:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi) + A_2\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$
$$= (A_1 + A_2)\cos(\omega_0 t + \varphi) = A_p\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Отже, амплітуда результуючого коливання A_p дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються.

2. Частоти й амплітуди однакові, а фази відрізняються на φ:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_0 t + A\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$
$$= 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\varphi}{2}\right) = A_p\cos\left(\omega_0 t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Амплітуда результуючого коливання x менша від суми амплітуд, що додаються. Якщо $\varphi = \pi$, то вона взагалі дорівнює нулю.

3. Якщо частоти коливань x_1 і x_2 різні, то вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з різною швидкістю, результуючий вектор $\vec{A}$ пульсує за величиною і обертається з несталою швидкістю.

Розділ 3. ЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

Із цього розділу можна дізнатися про те, що всі реальні коливання згасають, а причиною тому є сили тертя, опору тощо. В ньому також наведено необхідні характеристики згасання й показано шляхи покращання функціональних характеристик різних технічних систем.

<table>
<tr><td colspan="2">МЕТА ВИВЧЕННЯ
Після вивчення даного розділу й виконання завдань Ви повинні:</td></tr>
<tr><td>Вміти</td><td>1) дати визначення ключовим термінам;
2) аналізувати згасаючі коливання різної природи.</td></tr>
<tr><td>Знати</td><td>1) способи визначення параметрів, що характеризують згасаючі коливання;
2) шляхи використання згасаючих коливань для покращання функціональних характеристик механічних, електричних, електромеханічних систем.</td></tr>
</table>

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Згасаючі коливання – це:

- джерело згасаючих хвиль різної природи (акустичних, світлових, радіохвиль, на воді, сейсмічних тощо);
- необоротний процесс перетворення механічної або електричної енергії коливальної системи у внутрішню;
- спосіб отримання інформації про джерела дисипації енергії систем (дефекти кристалічних ґрат, двигуна, ракети тощо);
- джерело інформації про стабільність і надійність системи (мостів, двигунів, літальних апаратів тощо);
- акустична емісія при утворенні мікротріщин при руйнуванні матеріалів;
- перспективний засіб збільшення ресурсу механічних систем;
- спосіб одержання параметрів, які визначають якість матеріалів.

3.1. Згасаючі вільні коливання

Згасання вільних коливань маятників є наслідком необоротного перетворення енергії коливань у внутрішню енергію коливальної системи. При цьому втрати енергії коливань в механічних системах зумовлені тертям (внутрішнім і зовнішнім) і випромінюванням пружних хвиль у середовище. У реальній електричній коливальній системі втрати енергії є наслідком нагрівання провідників при протіканні через них струму, розсіювання енергії в діелектрику конденсатора або феромагнетику, котушці індуктивності й випромінювання електромагнітних хвиль у середовище. Отже, внаслідок поступових втрат енергії коливань у системі, що позбавлена можливості отримувати енергію ззовні, відбувається зменшення амплітуди коливань до нуля, тобто їх згасання.

Вражаючий факт!	Шляхом дослідження згасаючих сейсмічних хвиль, спричинених ядерним вибухом у штаті Невада (США), в лабораторіях СРСР визначали потужність бомби.

3.2. Диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок

Рівняння руху для згасаючих коливань. Усі реальні механічні коливальні системи є дисипативними. Енергія коливань такої системи поступово витрачається на роботу проти сил опору, тому вільні коливання завжди згасаючі, тобто їхня амплітуда поступово зменшується до нуля.

Для пружинного маятника масою m, що здійснює малі коливання під дією повертальної сили $F = -kx$, сила опору пропорційна швидкості, тобто

$$F_{on} = -r\upsilon = -r\dot{x}, \tag{3.1}$$

де r – коефіцієнт опору. Виходячи з другого закону Ньютона, рівняння руху для згасаючих коливань має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{3.2}$$

? Допитливим	Яким буде рух, якщо у рівнянні (3.2) знехтувати повертальною силою?

Диференціальне рівняння згасаючих коливань. Запишемо рівняння руху (3.2) у вигляді $\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Введемо позначення $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2\beta$, де β – коефіцієнт згасання, а ω_0 – частота, з якою здійснювалися б вільні коливання за відсутності опору середовища. Тоді рівняння руху можна записати у вигляді **диференціального рівняння згасаючих коливань**

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.3}$$

Аналітикам 3.1	Знайдіть розв'язок рівняння (3.3) шляхом введення нової змінної u, яка зв'язана з x співвідношенням $x = e^{-\beta t}u$.

Розв'язком цього рівняння є функція $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, де A_0 і φ – сталі, які визначаються з початкових умов.

Отже, згасаючі коливання – це коливальний процес, що відбувається за гармонічним законом з частотою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Його амплітуда $A = A_0 e^{-\beta t}$, де A_0 – початкова амплітуда. Величина ω_0 – власна циклічна частота. Таким чином, амплітуда згасаючих коливань експоненціально зменшується з часом і тим скоріше, чим більший коефіцієнт опору й чим менша маса m тіла, яке здійснює коливання.

? Допитливим	Як буде змінюватись амплітуда згасаючих коливань з часом, якщо $\beta = \omega_0$?

Графік залежності зміщення x від часу наведено на рис. 3.1.

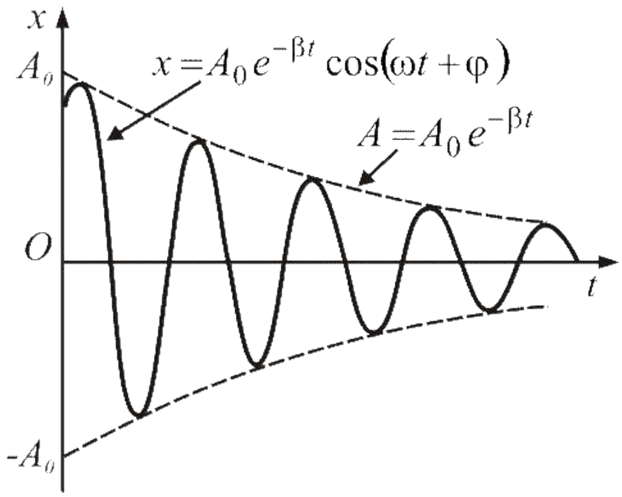


Рис. 3.1. Згасаючі коливання

Згасаючі коливання – неперіодичні коливання, бо в них ніколи не повторюються, наприклад, максимальні значення зміщення, швидкості й прискорення. Проте при згасаючих коливаннях величина x перетворюється з часом в нуль, а також досягає максимальних і мінімальних значень через однакові проміжки часу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}.$$

Тому величину T називають періодом згасаючих коливань.

? Допитливим	Яким буде рух, якщо власна частота коливань менша від коефіцієнта згасання?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
***Згасаючі коливання – це*:** ✧ коливання в реальних системах, в яких наявна дисипація енергії; ✧ наслідок дії сил опору (тертя) в коливальній системі; ✧ коливальний рух, що характеризується зменшенням амплітуди в часі за експоненціальним законом; ✧ повернення стану коливальної системи в стан спокою; ✧ тип руху реальної коливальної системи після одноразового виведення її зі стану рівноваги; ✧ зменшення максимальних значень зміщення, швидкості й прискорення з часом; ✧ процесс, при якому швидкість зменшення амплітуди пропорційна самій амплітуді. Обміркуйте й доповніть висновки з підрозділу.

3.3. Характеристики згасаючих коливань

Основними характеристиками згасаючих коливань є коефіцієнт згасання, декремент згасання, логарифмічний декремент згасання й добротність (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Характеристики згасаючих коливань

Характеристика згасання	**Визначення характеристики згасання**
β – коефіцієнт згасання	$\frac{r}{m} = 2\beta$, $\beta = \frac{1}{\tau}$, де τ – час релаксації в секундах, протягом якого амплітуда зменшується в e разів
D – декремент згасання	$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$ – характеризує відношення амплітуд, що відрізняються на період
λ – логарифмічний декремент згасання	$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau}$ – характеризує згасання за період T
Q – добротність	$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$ – характеризує втрату енергії за період T

?Допитливим	Визначіть ***логарифмічний декремент згасання,*** відобразивши згасаючі коливання у фазовій площині.

Зверніть увагу! *1. Коефіцієнт згасання β характеризує відношення сил опору й сил інерції, а також відображає зменшення амплітуди у звичайному «масштабі» часу, за одиницю якого взято секунду. 2. Логарифмічний декремент відображає згасання у власному «масштабі» часу, тобто за період T.*

Взаємозв'язки між характеристиками згасання:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N = \frac{\pi}{\beta T_o} = \frac{\omega_o}{2\beta} = \frac{1}{r}\sqrt{km}\,.$$

Аналітикам 3.2	Покажіть, що логарифмічний декремент згасання $\lambda = \dfrac{1}{N_e}$, де N_e – кількість коливань, після яких амплітуда зменшується в e разів.

?Допитливим	Одна коливальна система має менший коефіцієнт згасання, а інша – менший ***логарифмічний декремент згасання.*** Яка з них більш якісна?

Зауважте, що при $\lambda << 1$ частота $\omega \approx \omega_0$, а умовний період T згасаючих коливань практично дорівнює періоду T_0 вільних коливань.

Визначати добротність простіше, знаючи кількість коливань N_e, після здійснення яких амплітуда зменшиться в e разів. Якщо $A_1 / A_{N_e} = e$, то ***логарифмічний декремент згасання коливань*** можна записати у вигляді $\lambda = \dfrac{1}{N_e}$, а добротність – $Q = \pi N_e$.

Отже, за залежністю амплітуди коливань від часу зручно визначати добротність.

Вражаючий факт!	Добротність гітарної струни Q дорівнює 120…150, струни скрипки – 300…400, а для кварцового резонатора її значення може досягати 10^7!

Уникайте!	*Уривчастості (фрагментарності) знань.*

3.4. Відображення згасаючих коливань у фазовій площині

Вільні незгасаючі гармонічні коливання на фазовій площині відображаються колом. При відображенні згасаючих коливань отримуємо спіралі, що закручуються (рис. 3.3).

? Допитливим	Рис. 3.2, *б* свідчить про те, що характер β, λ, Q не залежить від амплітуди. Чому? У якому випадку згасання більше: на рис. 3.2, *а* або 3.2, *б*?

Крок спіралі дорівнює $s_n - s_{n+1} = A - Ae^{-\lambda} = A\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

Розклавши $1 - e^{-\lambda}$ у ряд за степенями λ, отримаємо

$$1 - e^{-\lambda} = \left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \ldots\right) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \ldots$$

Звідси наближено можна зробити висновок: якщо $\lambda << 1$, то $s_n - s_{n+1} = A\lambda$, тобто λ відображає зменшення амплітуди A за період T.

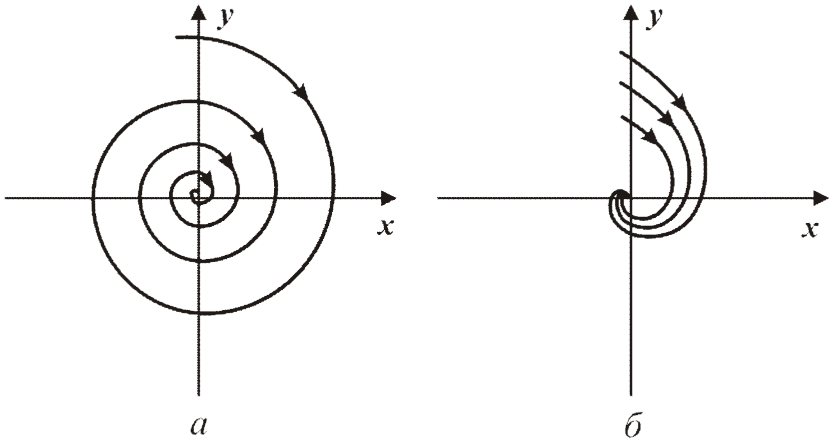


Рис. 3.2. Фазові портрети згасаючих коливань

Запам'ятайте! Характер траєкторії, яка відображає згасаючі коливання на фазовій площині, визначається не коефіцієнтом згасання β, а логарифмічним декрементом λ або добротністю Q.

? Допитливим	Яку інформацію про згасаючі коливання можна отримати з їхніх фазових діаграм?

Практикам	Чому добротність вважають найбільш зручним параметром для кількісної оцінки якості коливальної системи?

Зверніть увагу! *Добуток* $\beta\tau = 1$, *а* $\lambda\tau = T$.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
Ключові параметри згасаючих коливань – це: ✧ амплітуда згасаючих коливань, яка зменшується за експоненціальним законом. ✧ коефіцієнт згасання β і час релаксації τ; ці характеристики, що відображають коливальний процес у реальному часі; коефіцієнт згасання β – єдиний фактор, що визначає швидкість зменшення амплітуди коливань з часом; ✧ логарифмічний декремент згасання λ й добротність Q; вони відображають коливальний процес у природному для коливальної системи «масштабі» часу, який визначається періодом коливання T.
ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ
Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

3.5. Згасаючі механічні й електричні коливання

Розглянемо згасаючі механічні й електричні коливання за допомогою електромеханічних аналогій (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Електромеханічна аналогія для згасаючих коливань

Згасаючі механічні коливання	Згасаючі електричні коливання
Тягарець масою m здійснює коливання на пружині з коефіцієнтом жорсткості k. Сила опору, що діє на тягарець, пропорційна його швидкості: $F_{on} = -r\upsilon = -r\dot{x}$	У послідовному RLC коливальному контурі після його вимикання від джерела здійснюються електричні коливання
Рівняння руху має вигляд $$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0.$$ Поділимо його на m і зробимо заміни $\frac{r}{m} = 2\beta$ і $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Звідси отримаємо диференціальне рівняння механічних згасаючих коливань	Згідно з правилом Кірхгофа $$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$ Поділимо це рівняння на L і зробимо заміни $\frac{R}{L} = 2\beta$ і $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$. Звідси отримаємо диференціальне рівняння електричних згасаючих коливань

Закінчення табл. 3.2

Згасаючі механічні коливання	Згасаючі електричні коливання
$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Розв'язком цього рівняння є функція $x = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, де x_0 – амплітуда коливань у початковий момент часу; β – коефіцієнт згасання; ω – частота коливань, $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$. Амплітуда коливань зменшується за експоненціальним законом: $x(t) = x_0 e^{-\beta t}$	$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Розв'язком цього рівняння є функція $q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, де q_0 – амплітудне значення заряду на конденсаторі у початковий момент часу; β – коефіцієнт згасання; ω – частота коливань, $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$. Амплітуда коливань заряду зменшується за експоненціальним законом: $q(t) = q_0 e^{-\beta t}$

Отже, існує аналогія в параметрах і характеристиках механічних коливальних систем і електричних контурів (табл. 3.3). Вона ґрунтується на подібності диференціальних рівнянь, що описують стани цих систем. Найбільш корисна електромеханічна аналогія при визначенні властивостей складних механічних систем з декількома ступенями вільності, аналітичне дослідження яких шляхом розв'язання диференціальних рівнянь досить трудомістке.

? Допитливим	Чому сьогодні нові автомобілі розробляють і випробовують за рік, а 50 років тому на це йшло 4-5 років?

Таблиця 3.3

Механічні характеристики і їхні електричні аналоги

Механіка	Електрика
Зміщення x	Заряд q
Швидкість $\upsilon = dx/dt$	Струм $I = dq/dt$
Сила F	Напруга U
Імпульс p, $F = dp/dt$	Магнітний потік Φ, $U = d\Phi/dt$
Маса m	Індуктивність L

Закінчення табл. 3.3

Механіка	**Електрика**
Коефіцієнт жорсткості пружини k	Обернена ємність конденсатора $1/C$
Коефіцієнт в'язкого тертя α	Опір R
Закон Ньютона $m\,d\upsilon/dt = F$	$L\,dI/dt = U$
Закон Гука $F = kx$	$U = q/C$
Закон Стокса $F = \alpha\upsilon$	Закон Ома $U = RI$

Основна перевага електромеханічної аналогії – це можливість використання методів розрахунку й аналізу коливальних електричних систем при розгляданні й моделюванні властивостей механічних систем (автомобілів, літальних апаратів тощо), зокрема для розрахунку електромеханічних перетворювачів.

Аналітикам 3.3	Виразіть через параметри контура R, L, C частоту згасаючих коливань, декремент згасання й добротність коливального контуру.

?Допитливим	Чому інколи аналізувати диференціальне рівняння згасаючих коливань краще, якщо в ньому коефіцієнт згасання виразити через добротність, тобто $\ddot{q} + \frac{\omega}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$?

Вражаючий факт!	На деяких кораблях використовують заспокоювачі хитання, що являють собою два з'єднані трубопроводом резервуари, заповнені наполовину водою.

3.6. Аперіодичний рух

Розглянемо зміну характеру згасання зі збільшенням коефіцієнта згасання. Коливання будуть згасаючими, якщо коефіцієнт згасання менший, ніж власна частота коливань, тобто $\beta < \omega_0$. Якщо вона менша, тобто $\beta > \omega_0$, то після одноразового збурення система асимптотично повертається в стан рівноваги. Цей процесс називається асимптотичним згасанням (табл. 3.4). Найбільш швидко він проходить при $\beta = \omega_0$. Це граничний випадок аперіодичного руху (рис. 3.3), який спостерігається при критичному коефіцієнті тертя $r_{кр}$.

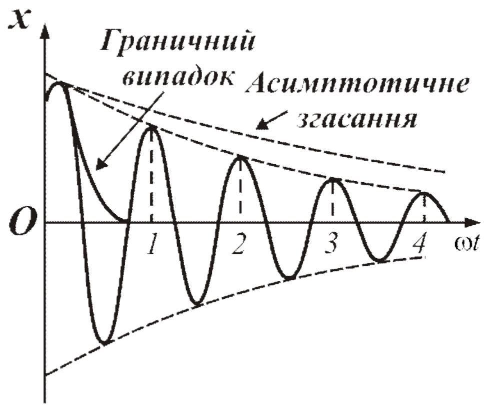


Рис. 3.3. Згасаючі коливання й аперіодичний рух

Таблиця 3.4

Класифікація згасаючих коливань

Параметр / Вид коливань	**Коефіцієнт згасання β**	**Коефіцієнт тертя r**	**Частота ω_0**
Гармонічні коливання	$\beta = 0$	$r = 0$	ω_0
Згасаючі коливання	$\beta < \omega_0$	$r < 2\sqrt{mk}$	$\omega < \omega_0$
Асимптотичне згасання	$\beta > \omega_0$	$r > 2\sqrt{mk}$	$\omega_0 = 0$
Граничний випадок аперіодичного руху	$\beta = \omega_0$	$r = 2\sqrt{mk}$	$\omega -$ уявна величина

Чи правильно Ви розумієте ключові терміни?

Частота згасаючих коливань – с. 44. Коефіцієнт згасання – с. 45. Логарифмічний декремент згасання – с. 45. Декремент згасання – с. 45. Добротність – с. 47. Аперіодичний рух – с. 50.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

- Які сили зумовлюють згасаючі коливання?
- За яких умов у реальній коливальній системі виникають згасаючі коливання?

- Коли при виведенні системи зі стану рівноваги коливальний процес не виникає?
- Назвіть основні характеристики згасаючих коливань.
- У чому полягає обмеженість розглянутого в цьому розділі диференціального рівняння згасаючих коливань? (*Чи точно воно описує реальні згасаючі коливання?*)
- Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних і згасаючих коливань? За яким законом відбувається зміна амплітуди згасаючих коливань з часом?
- У чому полягає зручність аналізу згасаючих коливань за допомогою фазової площини?
- Які параметри електричного коливального контуру і його аналоги для механічної коливальної системи визначають швидкість згасання коливань?

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

1. Згасаючі коливання – це перехідний процес від збурення до спокою, який супроводжується втратою енергії.

Чим визначається швидкість зміни енергії згасаючих коливань?

- Швидкість зміни енергії **згасаючих коливань** пропорційна їхній енергії.

Які параметри визначають енергію згасаючих коливань?

- Квадрат амплітуди **згасаючих** коливань.
- Квадрат частоти коливань.

У чому полягає подібність механічних та електричних згасаючих коливань?

- Вони описуються однаковими рівняннями й характеристиками згасання.

2. Згасаючі коливання є джерелом інформації про індивідуальні особливості коливальної системи.

Які параметри коливальної системи можна визначити із залежності амплітуди від часу?

- Можна визначити сили тертя й опору, час релаксації, повертальну силу.

3. Згасаючі коливання визначають характер перехідних процесів.

Яка характеристика згасаючих коливань визначає час релаксації?

- Час релаксації визначає величина, обернена до коефіцієнта згасання β.

4. Параметри згасання електричних коливань визначаються

характеристиками коливальної системи, а саме ємністю, індуктивністю й опором. Що визначає критичний опір?

- Критичний опір визначає найбільш швидкий перехід від коливань до аперіодичного процесу.

ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

Якісні задачі

1. Чи залежить час припинення коливань маятника від його початкової енергії?
2. В які моменти коливань маятник втрачає енергію найшвидше?
3. Чи зміниться період коливань маятника, якщо його перенести з вакууму в повітря?
4. Визначте логарифмічний декремент згасання, якщо амплітуда згасаючих коливань зменшується за перід у два рази.
5. Через який час згаснуть коливання, якщо їхня частота $\nu = 10^3$ Гц, а $\tau = 10^{-3}$ с?

Аналітикам 3.1. Для розв'язання цього рівняння введемо нову змінну u, яка зв'язана з x співвідношенням $x = e^{-\beta t}u$. Звідси $\dot{x} = \dot{u}e^{-\beta t} - \beta u e^{-\beta t}$, $\ddot{x} = \ddot{u}e^{-\beta t} - 2\beta\dot{u}e^{-\beta t} + \beta^2 u e^{-\beta t}$. Підставляючи ці значення $\dot{x}$ і $\ddot{x}$ у рівняння другого закону Ньютона для згасаючих коливань і скорочуючи всі доданки на множник $e^{-\beta t}$, отримуємо $\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0$. Нехай опір середовища малий і $\omega_0{}^2 > \beta^2$. Тоді можна ввести величину $\omega^2 = \omega_0{}^2 - \beta^2 > 0$. В результаті одержуємо рівняння $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$. Його розв'язок має такий вигляд: $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, де A_0 і φ – сталі, які визначаються з початкових умов. Отже, $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, де $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань, а A_0 – початкова амплітуда.

Аналітикам 3.2. Нехай N – кількість коливань, після яких амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді $\tau = NT$, але $\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau}$, звідки $\tau = \frac{T}{\lambda}$. Порівнявши ці вирази, отримуємо $\frac{T}{\lambda} = NT$ і $\lambda = \frac{1}{N}$.
Аналітикам 3.3. Частота згасаючих коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Урахувавши, що $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а $\beta = \frac{R}{2L}$, одержуємо, що $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Логарифмічний декремент згасання визначається співвідношенням $\lambda = \beta T$. Після підстановки $\beta = \frac{R}{2L}$ і $T = \frac{2\pi}{\omega}$ отримуємо, що $\lambda = \frac{\pi R}{L\omega}$. Якщо контур характеризується невеликим згасанням ($\beta^2 << \omega_0^2$), то $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ і $\lambda \approx \frac{\pi R\sqrt{LC}}{L} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$. Добротність контуру визначається як величина, обернена пропорційно логарифмічному декременту згасання, тобто $Q = \frac{\pi}{\lambda}$ й у випадку слабкого згасання $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Розділ 4. ЗМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

Сучасна техніка потребує високостабільних коливань, якими можна керувати. У цьому розділі пропонується ознайомитися зі способами створення змушених коливань, їх опису, аналізу й використання. Особливу увагу приділено явищу резонансу, без якого існування радіо- і телекомунікацій було б взагалі неможливим.

МЕТА ВИВЧЕННЯ Після вивчення даного розділу й виконання завдань Ви повинні:	
Вміти	1) дати визначення ключовим термінам; 2) аналізувати змушені коливання.
Знати	1) способи визначення параметрів коливальної системи за амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) і фазо-частотною характеристикою (ФЧХ); 2) області використання змушених коливань.

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Змушені коливання лежать в основі:

- акустичної техніки;
- техніки надвисоких частот;
- радіотехніки й телебачення;
- стільникового зв'язку;
- засобів технології приладобудування й машинобудування (кавітаційні ванни, паяння з використанням ультразвуку);
- засобів для діагостики ресурсу вузлів та елементів конструкції машин (вібровипробовування).

Крім того, змушені коливання, що не прогнозуються, є однією з основних причин утворення тріщин у деталях двигунів, силових елементах конструкцій літаків, кораблів, споруд тощо і, як наслідок, аварій.

4.1. Диференціальне рівняння змушених коливань

У всіх реальних коливальних системах має місце дисипація енергії, тобто її розсіювання. Це пов'язано з наявністю сил опору або тертя. Тому на практиці для будь-яких коливань характерне згасання. Проте, щоб краще зрозуміти процеси у реальних коливальних системах, спочатку розглянемо змушенні коливання без згасання.

1. Рівняння руху й диференціальне рівняння змушених коливань без згасання.

Змушувальна сила $F(t)$ може бути складною, але її завжди можна звести до суми гармонічних впливів згідно з теоремою Фур'є.

Запишемо рівняння руху

$$m\ddot{x} = -kx + F(t).$$

Розглянемо коливання пружинного маятника, в якому зовнішня змушувальна сила змінюється за гармонічним законом

$$F(t) = F_0 \cos \omega t.$$

Тоді диференціальне рівняння змушених коливань можна записати у такому вигляді:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos \omega t,\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t, \tag{4.1}$$

де ω_0 – власна частота коливальної системи;

ω – частота змушувальної сили;

F_0 – амплітуда змушувальної сили.

Очевидно, що один з частинних розв'язків цього рівняння буде таким (див. розділ 1):

$$x = A \cos \omega t, \tag{4.2}$$

де A – амплітуда, залежність якої від частоти ω потрібно визначити.

Шукаючи розв'язок диференціального рівняння (4.1) у вигляді (4.2), можна припустити, що при переміщенні тягарця на пружинці вверх і вниз він з часом почне здійснювати коливання з частотою змушувальної сили.

?Допитливим	Чи можна збільшити амплітуду коливань, не змінюючи величину сили? Чи може сила діяти в один бік, а тягарець рухатися в інший?

Дійсно, підставивши (4.2) у (4.1) і зробивши заміну $k = m\omega_0^2$, одержимо

$$-m\omega^2 A \cos \omega t = -m\omega_0^2 A \cos \omega t + F_0 \cos \omega t.$$

З цього рівняння знайдемо залежність амплітуди A від частоти:

$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{4.3}$$

Таким чином, тягарець масою m здійснює коливання з частотою змушувальної сили, яка діє на нього, але амплітуда коливань залежить від співвідношення частот змушувальної сили й власної частоти осцилятора. Ця залежність називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ).

2. Якісний аналіз амплітудно-частотної характеристики.

З рівняння (4.3) видно, що амплітуда змушених коливань залежить від частоти змушувальної сили. Розглянемо якісний графік амплітудно-частотної характеристики, який наведено на рис. 4.1.

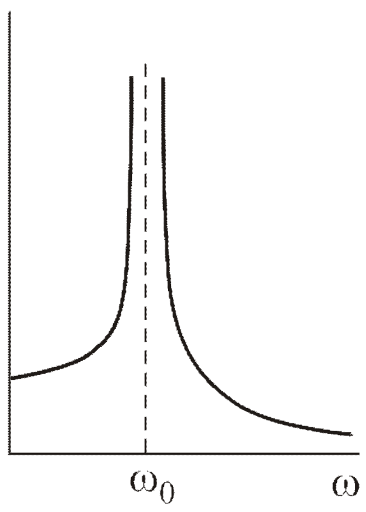


Рис. 4.1. Амплітудно-частотна характеристика

Якщо $\omega = 0$, то $A = A_0 = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$, де A_0 – статична амплітуда. При $\omega \to \infty$ всі криві асиптотично прямують до нуля. Якщо загасання немає ($\beta = 0$), то амплітуда коливань A зростає зі збільшенням циклічної частоти ω змушувальної сили.

На малих частотах $\omega < \omega_0$ тіло рухається синфазно зі змушувальною силою. **На частотах $\omega > \omega_0$ права частина рівняння від'ємна, тобто коливальний рух відбувається у протифазі** зі змушувальною силою. При $\omega = \omega_0$ амплітуда катастрофічно зростає, тому що при одержанні виразу для АЧХ не було враховано згасання. Це резонанс.

У реальних коливальних системах при наближенні до резонансної частоти амплітуда ніколи не досягне нескінченності, але збільшення амплітуди може призвести до руйнування коливальної системи.

3. Диференціальне рівняння змушених коливань зі згасанням і його розв'язок. Розглянемо коливання, які здійснює система, якщо на неї крім повертальної $F_0 = -kx$ і змушувальної $F = F_0 \cos\omega t$ сил діє ще сила опору $F_{оп} = r\dot{x}$.

Рівняння руху змушених коливань

$$m\ddot{x} = -\kappa x - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t,$$

а диференціальне рівняння змушених коливань

$$\ddot{x} + 2\beta\, \dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_0 \cos\omega t,$$

де $\beta = \dfrac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$.

Слід очікувати, що усталені змушені коливання системи, які виникають під дією сили F, також є гармонічними, тобто

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

а їхня циклічна частота дорівнює циклічній частоті змушувальної сили.

?Допитливим	Як буде змінюватись частота коливань у перехідному режимі?

Спочатку спостерігається перехідний процес коливань, при якому домінуючий вплив на характер коливань має сила опору. З часом її вплив слабшає і встановлюється стаціонарний режим.

Амплітуда й початкова фаза. Для знаходження амплітуди A і початкової фази φ використаємо метод векторної діаграми. Знайдемо $\dot{x}$ і $\ddot{x}$. Подамо диференціальне рівняння змушених коливань так, щоб гармонічне коливання $f_o \cos\omega t$ дорівнювало сумі трьох гармонічних коливань, що знаходяться в лівій частині рівняння (рис. 4.2).

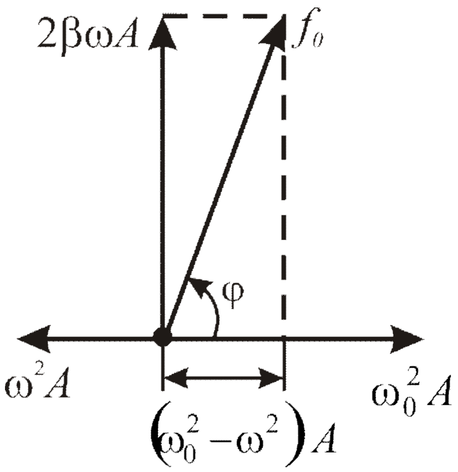


Рис. 4.2. Векторна діаграмма змушених коливань

Аналітикам 4.1	Покажіть, що за допомогою рис. 4.2 можна одержати вираз для амплітуди $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ і початкової фази $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ змушених коливань.

Амплітуда усталених змушених коливань прямо пропорційна амплітуді змушувальної сили F_0, обернено пропорційна масі m системи й зменшується зі збільшенням коефіцієнта згасання β.

Перехідний процес (ПП). Розв'язок диференціального рівняння змушених коливань дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $x_1 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, і частинного розв'язку

$x_2 = A\cos(\omega t - \varphi)$ неоднорідного рівняння. Доданок x_1 відіграє помітну роль лише на початковій стадії процесу виникнення коливань (рис. 4.3). З часом внаслідок експоненціального множника $e^{-\beta t}$ роль доданка x_1 зменшується, а амплітуда змушених коливань зроста доти, доки не досягне сталого значення A.

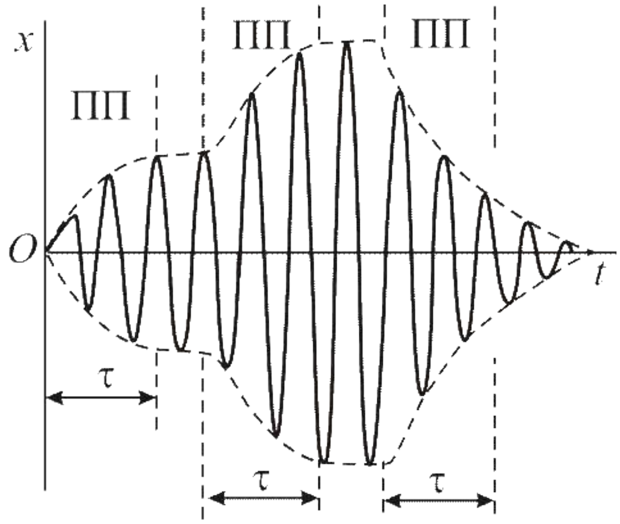


Рис. 4.3. Перехідний процес при змушених коливаннях

Якщо F_0, m і β – сталі величини, то амплітуда усталених змушених коливань залежить тільки від співвідношення між циклічними частотами ω і ω_0 та β.

?Допитливим	Чому тривалість перехідного процесу при ввімкненні й вимкненні F однакова й не залежить від амплітуди?

Слід запам'ятати! Тривалість перехідного процесу визначається часом релаксації $\beta = 1/\tau$. Ця залежність залишається справедливою у всіх випадках. При дії зовнішньої сили в коливальну систему безперервно надходить енергія від зовнішнього джерела, яка витрачається на роботу проти сил опору.

Уникайте!	*Суперечливості знань.*

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
Змушені коливання – це: ✧ коливальний рух на частоті змушувальної сили; ✧ коливальний рух, що характеризується залежністю амплітуди й фази від частоти змушувальної сили; ✧ коливальний рух у фазі зі змушувальною силою на частотах, менших від власної частоти; ✧ коливальний рух у протифазі зі змушувальною силою на частотах більших, ніж власна частота; ✧ катастрофічне зростання амплітуди при збігові частот змушувальної сили й власної частоти системи (резонанс); ✧ відсутність коливального руху на частотах, значно більших від частоти власних коливань; ✧ коливальні процеси у системі, що живиться енергією ззовні. ✧ поява перехідних режимів при ввімкненні (вимкненні) змушувальної сили в системі, в якій присутнє згасання.
ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ Доповніть висновки з підрозділу, використовуючи свої досвід і знання.

4.2. Амплітудно-частотна характеристика. Резонанс

Розглянемо залежність амплітуди A змушених коливань від частоти ω і побудуємо АЧХ $A = f(\omega)$ при різних значеннях коєфіцієнта згасання β (рис. 4.4). Чим менше β, тим вище й правіше лежить максимум кривої.

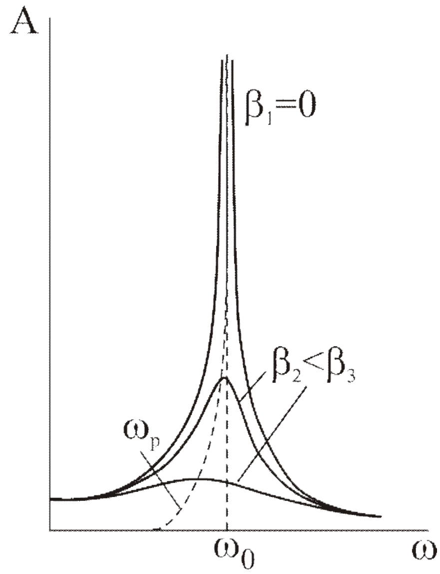


Рис. 4.4. Резонансні криві

Залежність амплітуди усталених змушених коливань від частоти має вигляд

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Явище різкого зростання амплітуди змушених коливань при наближенні частоти змушувальної сили до частоти $\omega_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$, що відповідає максимуму амплітуди, називається резонансом.

Аналітикам 4.2	Покажіть, що резонансна частота має вигляд $\omega_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$.

У консервативній системі $(\beta = 0)$ $\omega_p = \omega_0$, а у дисипативній системі ω_p трохи менша від власної частоти ω_0 системи.

Підставивши ω_p у вираз для амплітуди A змушених коливань, отримаємо вираз для амплітуди при резонансі:

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left[\omega_0{}^2 - \left(\omega_0{}^2 - 2\beta^2\right)\right]^2 + 4\beta^2\left(\omega_0{}^2 - 2\beta^2\right)}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}}.$$

У випадку малого згасання ($\beta^2 << \omega_0^2$) амплітуда при резонансі

$$A_p \sim \frac{F_0}{2\beta\omega_0 m} \sim \frac{\omega_0}{2\beta}\frac{F_0}{m\omega_0{}^2} \sim Q\frac{F_0}{m\omega_0{}^2} = QA_{cm},$$

де Q – добротність коливальної системи, а A_{cm} – статична амплітуда. Отже, добротність характеризує резонансні властивості коливальної системи: чим більше значення Q, тим більше A_p. Оскільки $\frac{F_0}{m\omega_0^2} = A_{cm}$, то $Q = \frac{A_p}{A_{cm}}$.

Зверніть увагу! *Добротність Q відображає відношення резонансної і статичної амплітуд.*

Розглянемо ширину резонансної кривої $\Delta\omega$ на висоті $0{,}7\,A_p$. Відношенню амплітуд струмів при резонансі у коливальному контурі, яке дорівнює 0,7, відповідає відношення потужностей $0{,}7^2 \approx 0{,}5$. Можна показати, що відношення цієї ширини до резонансної частоти дорівнює величині, оберненій добротності контуру.

З енергетичної точки зору резонанс пояснюється тим, що при наближенні частоти ω до власної частоти ω_0 фази зовнішньої сили й швидкості тіла збігаються. Це призводить до збільшення цієї швидкості, енергії тіла, а отже, й амплітуди коливань.

?Допитливим	Чому при резонансі руйнуються мости, літаки, ракети?

Вражаючий факт!	Третій за величиною у світі Текомський міст (Текома Нерроуз, США, штат Вашингтон) було зруйновано поривами вітру 42 милі на годину. Причина його зруйнування – явище резонансу.

Фазочастотна характеристика (ФЧХ). Аналітично ФЧХ відображається виразом $tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. З нього видно, що у випадку $\beta = 0$ зміщення коливальної системи й змушувальна сила мають однакові фази, у всіх інших випадках $\varphi \neq 0$. Залежність φ від ω при різних значеннях β наведено на рис. 4.5. При $\omega = 0$ $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ незалежно від значення β зсув фаз $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто змушувальна сила випереджає за фазою зміщення на $\frac{\pi}{2}$. При подальшому збільшенні ω зсув фаз зростає, і при $\omega >> \omega_0$ $\varphi \to \pi$, тобто зміщення коливальної системи майже протилежне зовнішній силі F.

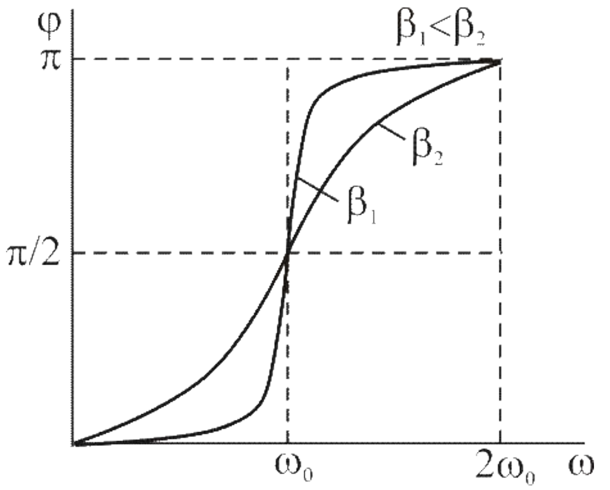


Рис. 4.5. Фазочастотні характеристики

Зверніть увагу! *При проходженні через резонансну частоту фаза коливань змінюється на π.*

Слід запам'ятати! Саме на резонансній частоті створюються умови для найефективнішого накопичення системою енергії, яка надходить від зовнішнього джерела.

4.3. Параметричний резонанс

Параметричними є системи, в яких будь-який параметр змінюється з часом під дією зовнішньої сили за певним законом. Найпростішими для аналізу є параметричні системи, в яких деякий параметр змінюється стрибкоподібно. Наприклад, довжина маятника змінюється двічі за період під дією зовнішньої сили (рис. 4.6). Коли маятник знаходиться в крайніх положеннях (точки *2*, *2′*), довжина зростає на Δl, а коли він проходить стан рівноваги (точка *1*), – зменшується.

?Допитливим	Коли і як на гойдалці найбільш ефективно прикладати силу?

Оскільки в точці *1* на масу діє сума сили тяжіння й відцентрової сили, робота, що витрачається на скорочення підвісу, буде такою:

$$A_1 = 2\Delta l\left(mg + \frac{m\upsilon_м^2}{l}\right).$$

У точках *2* і *2′* присутня лише сила тяжіння, тому робота, яка виконується при подовженні підвісу, буде

$$A_2 = -2\Delta l mg .$$

Тоді сумарна робота

$$A_\Sigma = 2(A_1 + A_2) = 4m\upsilon_м^2\frac{\Delta l}{l}.$$

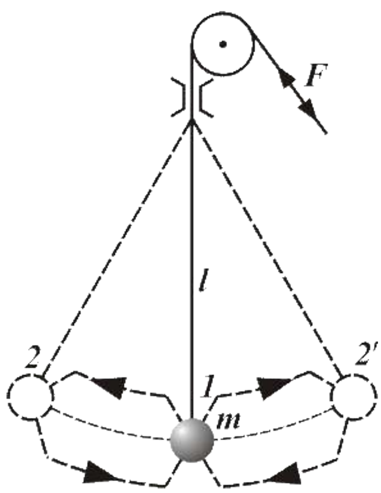


Рис. 4.6. Параметричний резонанс

Очевидно, що ця робота витрачається на збільшення амплітуди маятника. Це означає, що в системі настає **параметричний резонанс.** Параметричне збудження коливань виникає у всіх випадках, коли відношення власної частоти до частоти зміни параметра виявляється близьким до $n/2$, де $n = 1,2,3\ldots$ Параметричне збудження коливань може виникнути й в електричному коливальному контурі, якщо періодично змінювати ємність конденсатора або індуктивність котушки. На цьому принципі створено параметричні генератори змінного струму.

Зауважте! Маятник зі змінною довжиною підвісу є моделлю звичайної гойдалки. Згадайте дитинство, коли Ви, намагаючись розгойдатись, присідали в положенні максимального відхилення і, випрямлялися, коли гойдалка проходила через стан рівноваги.

Запам’ятайте! *Модель – замінник об’єкта досліджень, який дозволяє отримати нове знання про цей об’єкт.*

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
Резонанс **–** це режим змушених коливань системи, в якому підведена до неї ззовні енергія використовується максимально ефективно. ***Резонансна крива характеризується*:** ✧ резонансною частотою ω_p, яка близька до власної частоти ω_0; ✧ шириною кривої $\Delta\omega$ на рівні 0,707 від максимуму амплітуди, яка обернено пропорційна добротності Q; ✧ амплітудою A_p, яка дорівнює добутку добротності на статичну амплітуду коливань: $A_p = Q \cdot A_{ст}$.
ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ Обміркуйте вивчений матеріал, виділіть головне й доповніть висновки з підрозділу.

4.4. Змушені електричні коливання зі згасанням

Скористаємося аналогією між механічними і електричними коливаннями й розглянемо змушені коливання за наявності у колі опору (табл. 4.1), який зумовлює їх згасання. Порівняємо змушені механічні й електричні коливання й покажемо, що вони мають спільну математичну модель.

Таблиця 4.1

Аналогія між змушеними механічними й електричними коливаннями

Змушені механічні коливання	**Змушені електричні коливання**
Тягарець масою m здійснює змушені коливання на пружині жорсткістю k під дією змінної сили $F = F_0 \cos\omega t$. Сила опору пропорційна його швидкості: $F_{оп} = -r\upsilon = -r\dot{x}$	До послідовного RLC коливального контуру підведено напругу, що змінюється за законом $u = U_0 \cos\omega t$
Енергія коливальної системи тягарець – пружина $$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$ Зовнішня періодично діюча сила $F = F_0 \cos\omega t$. Потужність зовнішньої сили	Енергія коливань у коливальному контурі $$E = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$ Зовнішня напруга $u = U_0 \cos\omega t$. Потужність джерела

Закінчення табл. 4.1

Змушені механічні коливання	Змушені електричні коливання
$p = F\upsilon = \upsilon F_0 \cos\omega t$.	$p = iu = iU_0 \cos\omega t$.
Втрати потужності на подолання сил тертя $p_m = F_m\upsilon = r\upsilon^2$.	Втрати потужності на тепло, що виділяється в опорі R, $p_m = i^2 R$.
Рівняння енергетичного балансу $\dot{E}(t) + p_m = p$.	Рівняння енергетичного балансу $\dot{E}(t) + p_{тепл} = p$.
Потужність сил у коливальній системі $\dot{E}(t) = m\upsilon\dot{\upsilon} + kx\dot{x}$.	Потужність сил в коливальній системі $\dot{E}(t) = Li\dot{i} + (1/C)q\dot{q}$.
Ураховуючи, що $\dot{x}(t) = \upsilon$, рівняння набуде вигляду $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$.	Ураховуючи, що $\dot{q}(t) = i$, рівняння набуде вигляду $L\ddot{q} + \dot{q}R + q/C = U_0 \cos\omega t$.
Частинним розв'язком цього рівняння є функція $x = A\cos(\omega t - \varphi)$.	Частинним розв'язком цього рівняння є функція $i = I\cos(\omega t - \varphi)$.
Амплітуда усталених змушених коливань $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$.	Амплітудне значення сили струму $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$.
Зсув фаз між зміщенням і змушувальною силою $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$	Зсув фаз між струмом і напругою $tg\varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

?Допитливим	За рахунок чого при резонансі збільшується амплітуда?

4.5. Автоколивання

?Допитливим	Чому при використанні мікрофону в караоке наближення до акустичної системи супроводжується виникненням сильного шуму?

Одним з найбільш надзвичайних і нетривіальних проявів нелінійності коливальної системи є феномен, який отримав назву ***автоколивання***. Це мимовільний коливальний процесс, який виникає у деяких дисипативних системах. Його характеристики визначаються властивостями самої системи й не залежать від конкретних початкових умов. Автоколивання інколи призводять до руйнування механізмів, споруд і, відповідно, до катастроф.

Класичні приклади автоколивальної системи:

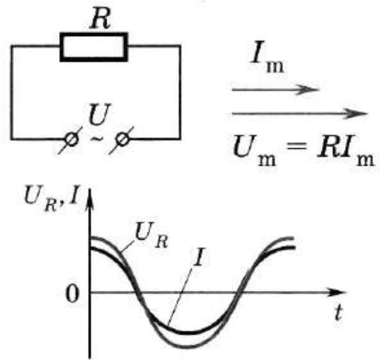
1. Коливання під дією вітру дротів ліній електропередач, труб заводів, радіощогл, нафтових веж, що виникають внаслідок утворення й відриву вихорів.
2. Коливання крил літаків, корпусів ракет при певній швидкості польоту, що отримало назву «флатер». Вони є наслідком утворення крутильних коливань, які підсилюють коливання згину, і навпаки. Так утворюється автоколивальна система з яскраво вираженим зворотним зв’язком.
3. Електронний генератор.

4.6. Фазові співвідношення у колі змінного електричного струму

Фазові співвідношення між струмом і напругою стають наочними при побудові векторної діаграми. Вздовж довільного напрямку, який називають віссю струмів, відкладемо вектор, модуль якого дорівнює I_m (табл. 4.2). Оскільки у колі з активним опором коливання сили струму й напруги збігаються за фазою, то вектор, модуль якого дорівнює U_m, напрямлено уздовж I_m. Отже, зсув фаз між I_m і U_m дорівнює нулю.

Таблиця 4.2

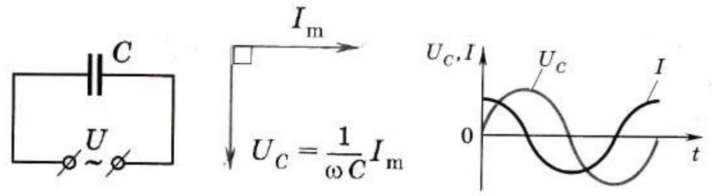
Змінний струм, який протікає через резистор

Напруга, яка прикладається до кінців ділянки кола $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$	Графіки напруги й струму у колі, яке містить тільки резистор 
Струм через резистор $I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R}\cos\omega t = I_m \cos\omega t$	
Амплітуда сили струму $I_m = \frac{U_m}{R}$	

Розглянемо процес протікання струму у колі, яке містить ємність (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

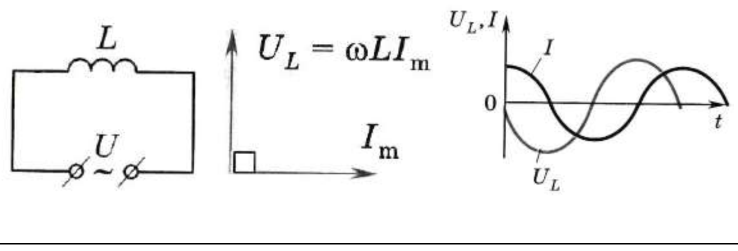
Змінний струм, який протікає через ємність С

Напруга на ділянці кола $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$	Напруга U_C відстає за фазою від струму I на $\pi/2$ у колі, яке містить тільки ємність C 
Заряд на обкладках конденсатора $q = CU = CU_m \cos(\omega t + \varphi)$	
Сила струму $I = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$	$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C U_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$
Амплітуда сили струму	$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{1/\omega C} = \frac{U_m}{R_c}$, $R_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивний ємнісний опір
Напруга на пластинах конденсатора	$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t$

Розглянемо процесс протікання струму у колі, яке містить індуктивність (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

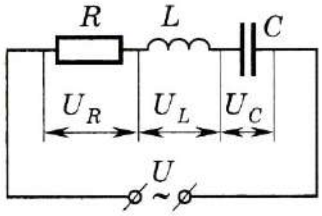
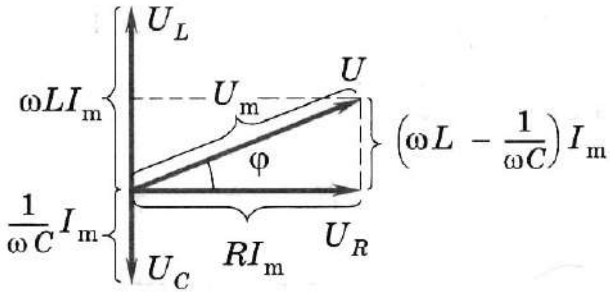
Змінний струм, який протікає через індуктивність L

Напруга на ділянці кола $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$	Напруга U_L випереджає за фазою струм I на $\pi/2$ у колі, яке містить тільки індуктивность L 
Сила струму $I = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$	
Амплітуда сили струму $I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{R_L}$	
Напруга на обкладках індуктивності	$U_L = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi)$

Розглянемо процесс протікання струму у послідовному коливальному контурі (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

Змінний струм, який протікає у послідовному коливальному контурі

<table>
<tr><td>Напруга на ділянці кола</td><td colspan="2">$U = U_m \cos \omega t$

</td></tr>
<tr><td>Сума миттєвих значень напруг на елементах кола</td><td>$U = U_R + U_L + U_C$</td><td>U_R, U_L, U_C – напруги на опорі, котушці індуктивності й конденсаторі</td></tr>
<tr><td>Амплітуда U_m напруги, яка прикладається</td><td colspan="2">Дорівнює векторній сумі амплітуд усіх напруг кола

</td></tr>
<tr><td>Різниця фаз між напругою й силою струму</td><td>$tg\varphi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$</td><td>Знаходиться за векторною діаграмою (див. рисунок)</td></tr>
<tr><td>Амплітудне значення сили струму</td><td>$I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$</td><td>Визначається із прямокутного трикутника на векторній діаграмі:
$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) I_m\right]^2 = U_m^2$</td></tr>
<tr><td>Сила струму</td><td>$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$</td><td>Див. векторну діаграму</td></tr>
<tr><td>Повний опір кола</td><td>$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} =$
$= \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$</td><td rowspan="2">$R$ – активний опір; R_L – реактивний індуктивний опір; R_C – реактивний ємнісний опір</td></tr>
<tr><td>Реактивний опір кола</td><td>$X = R_L - R_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$</td></tr>
</table>

Розглянемо потужність у коли змінного струму, яке містить послідовно з'єднані резистор, котушку індуктивності й конденсатор (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Потужність у колі змінного струму

Миттєве значення потужності	Визначається добутком миттєвих значень напруги й сили струму: $P(t) = U(t)I(t)$
Середня потужність	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$
Коефіцієнт потужності	$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
Діючі (ефективні) значення сили струму й напруги	$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$
Ще одна формула для середньої потужності $\langle P \rangle = IU\cos\varphi$	Потужність, яка виділяється у колі змінного струму, у загальному випадку залежить не тільки від сили струму й напруги, але й від зсуву фаз між ними. Якщо у колі реактивний опір відсутній, то $\cos\varphi = 1$ і $P = IU$. Якщо коло містить тільки реактивний опір ($R = 0$), то $\cos\varphi = 0$ і середня потужність дорівнює нулю, якими б великими не були струм і напруга

Запам'ятайте! *Більша частина вольтметрів і амперметрів вимірюють діючі значення сили струму й напруги.*

Наявність у колі зі зсувом фаз φ реактивної складової струму призводить до необхідності розраховувати мережі й генератори на більші струми, ніж це потрібно. Дійсно, при $\cos\varphi = 0{,}5$ струм у колі вдвічі більший від того, який би протікав при $\cos\varphi = 1$ й тієї ж потужності.

Зважаючи на велике економічне значення розглянутого явища, вживають заходи щодо збільшення коефіцієнта потужності. Основний спосіб – повне завантаження трансформаторів і двигунів кола. Але цей спосіб не завжди можна реалізувати. Тоді намагаються створити умови близькі до резонансу струмів. Для цього, якщо зсув фаз спричинено індуктивністю, паралельно навантаженню вмикають ємність, підібрану так, щоб $\omega C = \frac{1}{\omega L}$. Проте цей спосіб є достатньо дорогим, оскільки для отримання резонансу у споживачів великих потужностей мають бути ввімкнені у коло великі ємності.

Інший спосіб полягає в отриманні на місці реактивної складової струму. Для цього паралельно навантаженню вмикають генератор змінного струму, так званий *синхронний компенсатор*, який виробляє струм, зсунутий за фазою на потрібний кут φ відносно струму у колі. Цей струм від генератора і є реактивною складовою $I\sin\varphi$, яка вже не навантажує мережу і електростанцію.

Для промислових підприємств найменш допустимий коефіцієнт потужності дорівнює 0,85.

ОБМІРКУЄМО, ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Змушені електричні коливання – це*:**

- наслідок дії змінної напруги на електричний коливальний контур;
- залежність амплітуди й фази коливань від частоти змінної напруги;
- перехідні процеси при ввімкненні (вимкненні) змушувальної змінної напруги;
- процеси, що лежать в основі роботи будь-якого радіопередавача (стільниковий зв'язок, телебачення, радіолокация, телеметрія, дистанційне радіокерування тощо).

Чи правильно Ви розумієте ключові поняття й терміни?

Протифаза – с. 57. Резонанс – с. 60. АЧХ – с. 60. Резонансна частота – с. 61. Ширина резонансної кривої – с. 61. ФЧХ – с. 62.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

1. На якій частоті відбуваються змушені коливання?
2. Як впливає частота на фазу змушених коливань?
3. Як отримати максимальне значення сили струму у коливальному контурі?
4. Назвіть основні характеристики змушених коливань.
5. Яким чином можна компенсувати зміну резонансної частоти коливального контуру, що відбулася внаслідок зменшення ємності

конденсатора в два рази?

6. У чому полягають переваги аналізу змушених коливань за допомогою векторної діаграми?

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

1. Вплив частоти змушувальної сили на фазу й амплітуду змушених коливань найбільш повно відображають їхня АЧХ і ФЧХ.

Чим визначається швидкість зміни амплітуди зі зміною частоти коливань?

- Швидкість зміни амплітуди визначається ступенем наближення до резонансної частоти коливань.

У чому полягає подібність механічних і електричних змушених коливань?

- Вони описуються однаковими рівняннями й характеристиками згасання.

2. Змушені коливання є джерелом інформації про індивідуальні особливості коливальної системи.

Які параметри й властивості коливальної системи можна визначити, збуджуючи в ній змушені коливання?

- Резонансну частоту ω_p, власну частоту ω_0, період T, час релаксації τ, логарифмічний декремент згасання λ, добротність Q, АЧХ, ФЧХ.

3. Коефіцієнт згасання визначає тривалість перехідних процесів.

Як зв'язані між собою коефіцієнт згасання й час релаксації?

- Час релаксації τ є величиною, оберненою до коефіцієнта згасання β.

4. Змушені електричні коливання визначаються ємністю, індуктивністю й опором коливального контуру, а також частотою збуджувального сигналу.

5. АЧХ і ФЧХ – найважливіші характеристики коливальної системи.

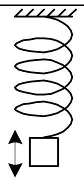
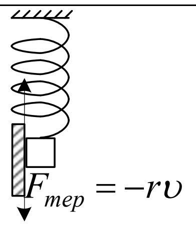
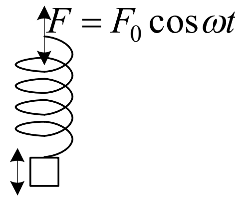
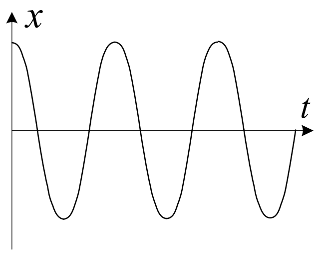
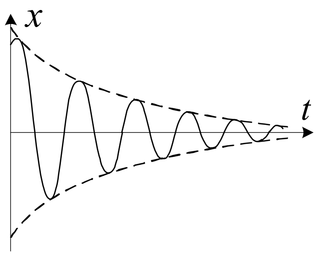
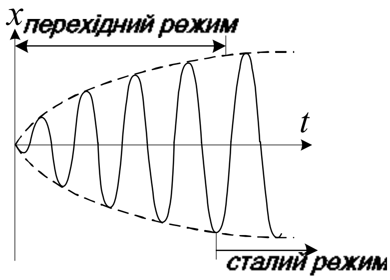
ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

СЛІД ПОРІВНЯТИ, ДОПОВНИТИ Й ЗАПАМ'ЯТАТИ

Моделі й характеристики | **Види коливань** | **Рівняння й параметри**

	Вільні	**Згасаючі**	**Змушені**
Види			
Графіки			
Формули	***Рівняння руху***		
	$m\ddot{x} = -kx$	$m\ddot{x} = -rx - r\upsilon$	$m\ddot{x} = -rx - r\upsilon + F_0 \cos\omega t$
	Диференціальна форма руху		
	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$
	Інтегральна форма руху		
	$x = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$	$x = x_{з.р.} + x_{ч.р.}$
	Можна отримати інформацію про таке:		
	властивості коливальної системи ***(*** k, m ***)*** $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	***вплив середовища на коливальну систему*** ***(*** β, τ, λ, Q ***)***	***АЧХ, ФЧХ, вплив середовища на характер відклику*** ***(*** $\Delta\omega, \omega_p$ ***)***

Якісні задачі

1. Чи залежить час припинення коливань маятника від його початкової енергії?

2. В які моменти коливань маятник втрачає енергію найшвидше?

3. Чи зміниться період коливань маятника, якщо його перенести з вакууму на повітря?

4. Як людина, гойдаючись на гойдалці, може збільшити амплітуду її коливань? Який зв'язок періоду рухів людини з періодом коливань гойдалки?

5. Кладка від вантажу, покладеного на неї, прогнулась на 1 мм. При якій частоті змушених коливань вона може зламатися?

6. Чим відрізняються автоколивання від змушених коливань?

7. Чому і за рахунок чого при резонансі зростає енергія коливальної системи?

Аналітикам 4.1. Задача полягає в знаходженні амплітуди A і початкової фази φ.

Знайдемо $\dot{x}$ і $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\Omega\, t - \varphi) = A\omega^2\cos(\omega\, t - \varphi + \pi).$$

Підставимо вирази для $\ddot{x}$, $\dot{x}$ і x у диференціальне рівняння змушених коливань:

$$A\omega^2\cos(\omega\, t - \varphi + \pi) + 2A\beta\omega\cos\left(\omega\, t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ A{\omega_0}^2\cos(\omega\, t - \varphi) = f_0\cos\omega\, t.$$

З цього рівняння видно, що амплітуда A й фаза φ повинні мати такі значення, щоб гармонічне коливання $f_0\cos\omega t$ дорівнювало сумі трьох гармонічних коливань, які знаходяться в лівій частині рівняння.

Введемо позначення $A_1 = \omega^2 A$, $A_2 = 2\beta\omega A$, $A_3 = \omega_0^2 A$, $A_4 = f_0$.

Тоді $A_1\cos(\omega\, t - \varphi + \pi) + A_2\cos\left(\omega\, t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_3\cos(\omega\, t - \varphi) = A_4\cos\omega\, t.$

Щоб додати ці коливання, використаємо метод векторної діаграми. Спочатку під кутом φ до осі OX за годинниковою стрілкою побудуємо вектор $\vec{A}_3$, а потім під кутом $\frac{\pi}{2}$ відносно вектора $\vec{A}_3$ проти годинникової стрілки – вектор $\vec{A}_2$ і вектор $\vec{A}_1$, який повернуто на кут π відносно вектора $\vec{A}_3$. Додавши три вектори $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, отримаємо вектор $\vec{A}_4$ (див. рис. 4.2). З рис. 4.2. видно, що ${A_4}^2 = (A_3 - A_1)^2 + {A_2}^2$ і, відповідно,

$$f_0^2 = A^2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + A^2(2\beta\omega)^2.$$

Звідси $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$.

Аналітикам 4.2. Якщо є згасання ($\beta \neq 0$), то амплітуда досягає максимального значення, коли вираз $\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]$, який є в знаменнику співвідношення $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, досягає мінімуму. Це відбувається, коли $\dfrac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0.$

Виконуючи диференціювання, отримуємо $-4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\beta^2\omega = 0.$ Це рівняння має два розв'язки: $\omega = 0$, $\omega_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$. Розв'язок $\omega = 0$ відповідає максимуму знаменника виразу для A.

Із інших двох розв'язків лише додатний має фізичний зміст. Отже, ***резонансна частота*** *– частота, при якій амплітуда A коливань досягає максимального значення*, тобто має такий вигляд: $\omega_p = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$.

Розділ 5 . ХВИЛІ В ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Якщо у середовищі з'являється джерело коливань, то від нього починають поширюватися хвилі – особливий вид руху, при якому відбувається передача енергії, імпульсу, моменту імпульсу без перенсення речовини. Саме цей розділ присвячено механізму створення хвиль і їх опису.

<table>
<tr><th colspan="2">МЕТА ВИВЧЕННЯ
Після вивчення цього розділу й виконання завдань Ви повинні:</th></tr>
<tr><td>Вміти</td><td>1) дати визначення ключовим термінам і поняттям і знайти взаємозв'язки між ними;
2) пояснити, які параметри хвилі визначають її енергію, фазову й групову швидкості.</td></tr>
<tr><td>Знати</td><td>1) способи визначення параметрів хвилі з графіків і аналітичних виразів;
2) області використання хвиль різної природи й переваги методів дослідження, що базуються на порівнянні хвиль з еталонними.</td></tr>
</table>

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Хвилі – це поширення коливань у середовищі, які:

1. Бувають різної природи – механічні (звукові, сейсмічні, хвилі на воді тощо), електромагнітні (світло, радіохвилі), хвилі де Бройля.
2. Несуть у собі інформацію про таке:
   - потужність і природу їхніх джерел (ядро, атом, молекула, лазер, ядерний вибух, землетрус тощо);
   - середовище, через яке вони проходять (густина, модуль пружності тощо).
3. Можуть бути:
   - причиною катастроф (землетрус, цунамі);
   - засобом виявлення й зондування віддалених і прихованих об'єктів (локація, дефектоскопія, діагностика стану вузлів механізмів та органів живих організмів);
   - засобом передачі інформації (зв'язок, телебачення тощо).
4. У новітніх технологіях є засобом передачі сили, імпульсу, енергії, моменту імпульсу.

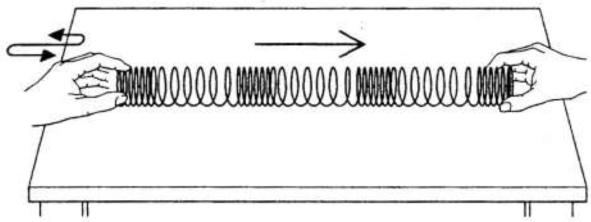
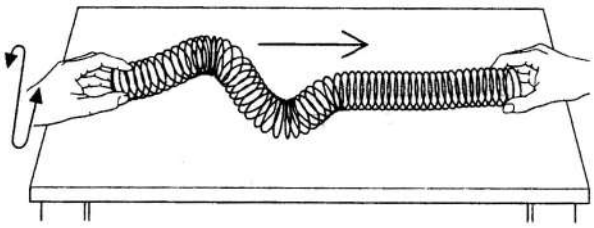
Уникайте!	*Помилкового рівня узагальнення через надмірну деталізацію.*

5.1. Утворення хвиль у пружному середовищі

Хвилею називають поширення збурення деформації ξ в середовищі або просторово-періодичній структурі. Аналітично хвилю описують за допомогою залежності збурення ξ від координат і часу: $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Основні поняття наведено у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Поздовжні й поперечні пружні хвилі

Пружні хвилі	Механічне збурення (деформація), яке поширюється у пружному середовищі
Поздовжні хвилі 	Хвилі, в яких частинки середовища коливаються у напрямку їх поширення. Вони поширюються у середовищах, в яких існують пружні сили при деформаціях стиску й розтягу (тверді тіла, рідини й гази)
Поперечні хвилі 	Хвилі, в яких частинки середовища коливаються у напрямках, що перпендикулярні до напрямку поширення хвилі. Вони поширюються у середовищах, в яких існують пружні сили при деформації зсуву, тобто у твердих тілах

Зверніть увагу! *1. При поширенні хвилі частинки середовища не рухаються разом з хвилею, а коливаються біля свого стану рівноваги.*

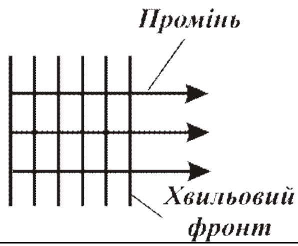
2. Хвилі є новою формою руху – збурення поширюються в деякому середовищі (у воді, землі, струні тощо) без перенесення частинок середовища.

Запам'ятайте!	***Основною властивістю поперечних і поздовжніх хвиль є перенесення енергії без перенесення речовини.***

У тривимірному середовищі поперечні й поздовжні хвилі відрізняються за такими ознаками. Для поперечних хвиль дивергенція збурення дорівнює нулю, тобто $div\xi = 0$. Разом з тим для поздовжніх хвиль ротор збурення дорівнює нулю, тобто $rot\bar{\xi} = 0$. Основні визначення наведено у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Основні визначення

Однорідне середовище	Середовище, фізичні властивості якого не змінюються від точки до точки
Ізотропне середовище	Середовище, фізичні властивості якого однакові у всіх напрямках
Хвильовий фронт	Геометричне місце точок, до яких доходять коливання до моменту часу t. Форма фронту хвилі визначається конфігурацією джерела й властивостями середовища
Хвильова поверхня	Геометричне місце точок, які здійснюють коливання у однаковій фазі. У випадку однорідного ізотропного середовища хвильовий фронт є однією з хвильових поверхонь
Промінь 	Промінь – це лінія, дотична до якої у кожній точці збігається з напрямком поширення хвилі. У випадку однорідного ізотропного середовища промінь – пряма, що перпендикулярна до хвильового фронту й збігається з напрямком перенесення енергії
Плоскі хвилі	Хвилі, для яких хвильові поверхні – сукупність паралельних площин, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Промені у цьому випадку – паралельні прямі, які збігаються з напрямком поширення хвилі
Сферичні хвилі 	Хвилі, для яких хвильові поверхні – сукупність концентричних сфер. Промені у даному випадку напрямлені вздовж радіусів сфер від центру, де знаходиться джерело хвилі

?Допитливим	В яких середовищах можуть породжуватися поперечні й поздовжні хвилі?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Хвилі – це*:**

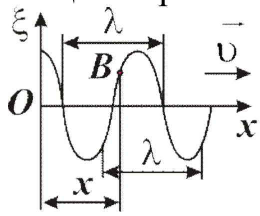
- нова форма руху – перенесення енергії без перенесення речовини;
- поширення коливань у пружному середовищі;
- періодичний процес у часі й просторі;
- поперечний коливальний рух, що формує поперечні хвилі в твердих тілах;
- поздовжній коливальний рух, що формує поздовжні хвилі в твердих тілах, рідинах і газах;
- запізнення коливань з часом у віддаленій точці середовища.

5.2. Гармонічна хвиля і її опис

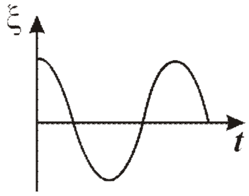
Оскільки хвилі – це поширення коливань у середовищі, то для їх опису необхідно ввести три нових параметри, а саме довжину хвилі λ, хвильове число k і фазову швидкість $\upsilon_ф$ (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Гармонічна хвиля і її опис

Гармонічна хвиля	Пружна хвиля називається гармонічною (рис. 5.1), якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними.  Рис. 5.1. Гармонічна хвиля
Швидкість поширення хвилі (фазова швидкість)	Фізична величина, що визначається відстанню, яка долається хвильовим фронтом за одиницю часу
Залежність між зміщенням ξ частинок середовища й відстанню x від джерела коливань O до цих	$\xi = A\cos(\omega t - kx)$

Закінчення табл. 5.3

частинок (наприклад частинок B), тобто гармонічна поперечна хвиля	
Довжина хвилі $\lambda = \upsilon T$ – відстань, на яку поширюється певна фаза коливань за період T	Відстань між двома найближчими частинками, які коливаються в однаковій фазі
Хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$	Характеризує швидкість зміни фази з відстанню
Відмінність графіків гармонічних хвиль і коливань.  Рис. 5.2. Гармонічне коливання	По суті, це різні графіки. Якщо графік хвилі $\xi(x)$ (див. рис. 5.1) визначає залежність зміщення всіх частинок середовища від відстані до джерела коливань у даний момент часу, то графік коливання – залежність зміщення даної частинки від часу $\xi(t)$ (рис. 5.2)

Ключові терміни: довжина хвилі й хвильове число. Величина $\omega t - kx + \varphi_0$ – фаза плоскої хвилі. Вона змінюється з часом і відстанню. Частота ω є коефіцієнтом пропорційності між фазою φ і часом t, тобто $\varphi = \omega t$, а хвильове число k – це коефіцієнт пропорційності між фазою φ і відстанню, тобто $\varphi_x = kx$. Тому ***хвильове число для коливань в просторі має такий самий зміст, що й циклічна частота для коливань у часі***. Для аналізу поширення коливань у просторі використовують довжину хвилі, яка, по суті, є просторовим періодом коливань $\lambda = \upsilon T$. Тому ***довжина хвилі*** λ ***характеризує коливання в просторі так само, як період*** T ***– коливання в часі***.

Зверніть увагу! *Величина збурення повторює своє значення через* $t = T$ *або через* $x = \lambda$ (*подвійна періодичність), оскільки* $2\pi = k\lambda = \omega T$.

5.3. Рівняння біжучої хвилі

Біжучі хвилі. Це процес поширення у відкритому пружному середовищі механічних хвиль. Його легко зрозуміти й пояснити, якщо звернутись до принципу Гюйгенса, згідно з яким кожна точка середовища, яка бере участь у хвильовому процесі, є джерелом нової елементарної сферичної хвилі. Обвідна цих хвиль утворює хвильовий фронт в наступний момент часу (рис. 5.3).

Рівняння біжучої плоскої хвилі. Рівнянням хвилі є залежність зміщення ξ від координат x, y, z і часу t. Розглянемо плоску хвилю, яка збуджується у площині $x = 0$ і поширюється вздовж осі OX (рис. 5.4).

Нехай коливання в цій площині мають вигляд

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t.$$

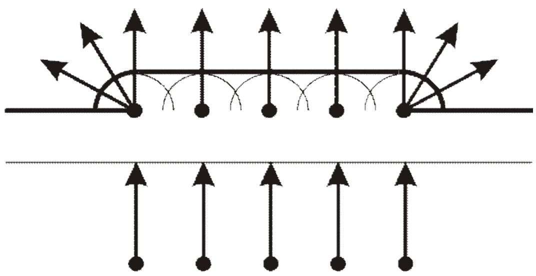


Рис. 5.3. Утворення хвильового фронту

Знайдемо рівняння, яке описує коливання частинок у площині, що відповідає довільному значенню x. Для того, щоб пройти шлях від площини $x = 0$ до цієї площини, хвилі потрібен час $\tau = \frac{x}{\upsilon}$, де υ – швидкість поширення хвилі. Отже, коливання частинок, що лежать у площині x, будуть запізнюватись на час τ від коливань частинок у площині $x = 0$, тобто рівняння хвилі має вигляд

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t-\tau).$$

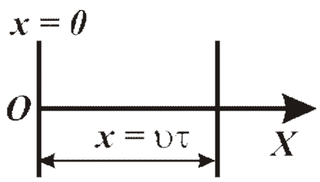


Рис. 5.4. Поширення плоскої хвилі

Ураховуючи, що запізнення $\tau = \frac{x}{\upsilon}$, одержуємо $\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon}\right)$. З виразу $k\lambda = \omega t = \omega\frac{\lambda}{\nu}$ отримуємо, що $k = \frac{\omega}{\upsilon}$. Тоді $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$.

Аналітикам 5.1	Покажіть, що $\xi(x,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kx)$ є рівнянням ***біжучої сферичної хвилі***.

Рівняння біжучої плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі OX, має такий вигляд: $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$. Якщо хвиля поширюється у від'ємному напрямку осі x, то потрібно змінити знак перед kx, тобто $\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$.

? Допитливим	Чому амплітуда плоскої хвилі не залежить від відстані x?

Фазова швидкість плоскої хвилі. Зафіксуємо певне значення фази $\omega t - kx + \varphi_0 = const$. Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x, в якому фаза має зафіксоване значення.

Здиференціюємо вираз для фази:

$$\omega\, dt - kdx = 0,$$

звідки

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \upsilon_{ф}.$$

Отже, швидкість $\upsilon_{ф}$ поширення хвилі є нічим іншим, як швидкістю переміщення фази хвилі, тому її називають ***фазовою швидкістю*** ($\lambda = \upsilon_{ф}T$ і $\lambda\nu = \upsilon_{ф}$).

?Допитливим	Чому збурення з певною частотою спричиняє у різних середовищах хвилі, що відрізняються довжинами хвилі λ?

Якщо плоска хвиля поширюється в довільному напрямку, то

$$\xi(\vec{r}, t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right),$$

де $\vec{k} = k\vec{n}$ – вектор, який дорівнює за модулем хвильовому числу і має напрям нормалі до хвильової поверхні; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки хвильової поверхні.

Рівняння сферичної хвилі. Сферична хвиля створюється точковим джерелом. Хвильові поверхні мають форму сфери. У випадку сферичної хвилі навіть у середовищі, яке не поглинає енергію, амплітуда коливань не залишається сталою, а зменшується з відстанню за законом $\frac{1}{r}$. Це співвідношення справедливе лише для r, що значно більші за розміри джерела.

Аналітикам 5.2	Доведіть, що амплітуда сферичної хвилі зменшується з відстанню за законом $\frac{1}{r}$.

Тому рівняння сферичної хвилі

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

де r – відстань від центра хвилі до точки середовища, яка розглядається.

Напрям поширення сферичної хвилі збігається з напрямком хвильового вектора $\vec{k}$ і є перпендикулярним до хвильової поверхні.

?Допитливим	Чи придатні рівняння ***біжучої плоскої та сферичної хвиль*** для опису повздовжніх і поперечних хвиль?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Біжучі хвилі – це*:**

- періодичний у просторі й часі процес, що породжується збуренням у відкритому середовищі;
- процес перенесення енергії й імпульсу;
- засіб для зондування (дослідження) середовища;
- засіб для впливу в новітніх технологіях (лазерні технології);
- процес, ключовими параметрами якого є три величини:
  - довжина хвилі λ як просторовий період;
  - хвильове число k як швидкість зміни фази з відстанню;
  - фазова швидкість $\upsilon_ф$ як швидкість переміщення фази.

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки з підрозділу.

5.4. Хвильове рівняння

Загальний розв'язок одновимірного хвильового рівняння. Інтегральну форму рівняння плоскої хвилі було одержано шляхом обмірковувань. Зазвичай воно має бути розв'язком диференціального ***хвильового рівняння*** так само, як рівняння гармонічних коливань було розв'язком диференціального рівняння гармонічних коливань (див. підрозд. 2.1).

?Допитливим	Що є математичною ознакою хвильового процесу ?

Для «відтворення» хвильового рівняння використаємо рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку, тобто

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right). \tag{5.1}$$

Шляхом диференціювання (5.1) легко показати, що поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується ***хвильовим рівнянням*** – диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{5.2}$$

або

$$\Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

де υ – фазова швидкість, а Δ – оператор Лапласа.

Аналітикам 5.3	Покажіть, що **хвильове рівняння** має вигляд $\Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$.

Зверніть увагу! *1. Будь-який хвильовий процес математично описується рівнянням вигляду* (5.2). *2. Якщо при аналізі процесу виявляється, що він описується рівнянням вигляду* (5.2), *то цей процес є хвильовим.*

5.5. Швидкість поширення хвиль у пружному середовищі

Фазова швидкість хвилі залежить від властивостей середовища. Розглянемо поширення поздовжньої пружної хвилі у пружному стрижні. Якщо по його торцю вдарити молоточком, то з'явиться ущільнення, яке почне поширюватись уздовж стрижня з фазовою швидкістю (рис. 5.5).

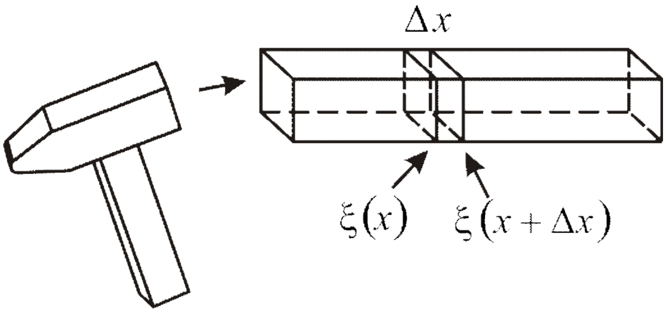


Рис. 5.5. Утворення пружної хвилі

Ущільнення зумовлено деформацією $\xi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}=\frac{d\xi}{dx}$. У свою чергу, деформація створює механічну напругу $\sigma=\frac{F}{S_0}$, де S_0 – площа перерізу стрижня за відсутності деформації. Зв'язок між ними відображає закон Гука $\sigma=E\varepsilon$, де E – модуль пружності, або модуль Юнга.

Запишемо закон Ньютона для частини стрижня, що міститься між площинами x і $x+\Delta x$. Маса цієї частини $\Delta m = \rho_0 S_0 \Delta x$, де ρ_0 – густина матеріалу за відсутності деформації.

Нехай ξ – зміщення центра вказаної частини стрижня (див. рис. 5.5). Тоді згідно з другим законом Ньютона

$$\rho_0 S_0 \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma(x+\Delta x) - \sigma(x) S_0 . \qquad (5.3)$$

Розділимо (5.3) на Δx:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} .$$

Переходимо до межі при $\Delta x \to 0$ і одержимо рівняння

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} .$$

Запишемо його у вигляді

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} .$$

Це хвильове рівняння, яке показує, що ущільнення поширюється вздовж стрижня зі швидкістю

$$\upsilon_ф = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} ,$$

де $\upsilon_ф = \dfrac{d\xi}{dt}$ – фазова швидкість хвилі.

Фазова швидкість зсувної пружної хвилі

$$\upsilon_ф = \sqrt{\frac{N}{\rho_0}} ,$$

де N – модуль зсуву.

Фазова швидкість пружної хвилі в струні

$$\upsilon_ф = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} ,$$

де T – натяг струни, а ρ_l – лінійна щільність струни.

Отже, квадрат фазової швидкості хвилі визначається відношенням пружних та інерційних властивостей середовища. Тому залежність фазової швидкості хвиль від параметрів середовища широко використовується в акустичній діагностиці матеріалів.

?Допитливим	Чому ω_0^2 і $\upsilon_ф^2$ мають подібний фізичний зміст?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
***Хвильове рівняння – це*:** ✧ рівняння в частинних похідних за просторовими координатами x, y, z; ✧ можливість визначення фазової швидкості в конкретному середовищі; ✧ математична модель поширення недиспергуючих хвиль у середовищі; ✧ спосіб аналізу хвиль без дисперсії; ✧ лінійне диференціальне рівняння, розв'язком якого є клас недиспергуючих хвиль.
ВЧИМОСЬ УЗАГАЛЬНЮВАТИ
Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

5.6. Енергія пружної хвилі

Енергія хвилі. Оскільки хвиля – це процес поширення коливань у просторі, то їй притаманна певна енергія.

Нехай у деякому середовищі поширюється в додатному напрямку осі OX плоска хвиля

$$\xi = A\cos(\omega t - kx).$$

Визначимо зміну енергії малого об'єму dV пружного середовища, пов'язану з поширенням у середовищі плоскої хвилі. Оскільки об'єм dV дуже малий, то можна вважати, що всі частинки середовища, які містяться в цьому об'ємі, коливаються в одній фазі, тому їхні швидкості однакові й дорівнюють $\upsilon = \dfrac{d\xi}{dt}$. Кінетична енергія об'єму dV, яка пов'язана з коливальним рухом, $dE_к = \dfrac{\upsilon^2}{2}dm = \dfrac{\rho\upsilon^2}{2}dV$, де $dm = \rho dV$ – маса середовища, обмежена об'ємом dV, ρ – густина середовища.

Тоді $dE_к = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$.

Аналітикам 5.4	Охарактеризуйте процес перенесення енергії хвилею.

Потенціальна енергія $dE_п$ об'єму dV середовища дорівнює його кінетичній енергії:

$$dE_n = dE_к = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_o).$$

Повна механічна енергія коливального руху об'єму dV

$$dE = dE_к + dE_n = \rho A^2\omega^2 dV \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

?Допитливим	Чому механічна енергія коливального руху змінюється з подвійною частотою?

Об'ємна густина енергії хвиль у пружному середовищі (енергія хвилі, зосереджена в одиниці об'єму середовища)

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. В одній і тій самій точці густина енергії змінюється з часом за законом квадрата синуса. Середнє значення квадрата синуса дорівнює $\frac{1}{2}$. Відповідно середнє за часом значення об'ємної густини енергії в кожній точці середовища

$$< w >= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2.$$

Поширення хвиль у пружному середовищі нерозривно пов'язано з процесом перенесення енергії від одних ділянок середовища до інших. Саме тому при хвильовому русі об'ємна густина енергії w коливань у кожній точці середовища змінюється в часі.

?Допитливим	Чому швидкість поширення енергії хвилі збігається з фазовою швидкістю хвилі?

Об'ємна густина енергії

$$w = \rho A^2\omega^2 \, sin^2(\omega t - kx) == \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2[1 - cos\,2(\omega t - kx)] .$$

Швидкість поширення енергії хвилі w дорівнює швидкості переміщення в просторі поверхні, яка відповідає максимальному значенню об'ємної густини енергії $w_{\max}$. Рівняння цієї поверхні $w = w_{\max}$ має вигляд

$$2(\omega t - kx) = \pi.$$

Здиференціюємо цей вираз:

$$\omega\, dt - kdx = 0.$$

Звідси швидкість переміщення поверхні

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon_{\phi}\,.$$

Отже, енергія хвилі поширюється з фазовою швидкістю.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО
***Енергія хвиль – це*:** ✧ відображення балансу пружної енергії для фіксованого об’єму середовища; ✧ джерело інформації про амплітуду або частоту хвиль; ✧ перехід кінетичної енергії системи в потенціальну й навпаки; ✧ гармонічна зміна кінетичної та потенціальної енергій хвилі з подвійною частотою.
ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ
Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

5.7. Густина потоку енергії. Вектор Умова

Потік енергії хвилі. Для характеристики процесу перенесення енергії хвилями введемо поняття про потік енергії. Потоком енергії Φ_E крізь одиничну поверхню площею S називається фізична величина, яка чисельно дорівнює енергії dE, що переноситься через цю поверхню за одиницю часу:

$$\Phi_E = \frac{dE}{dt}\,.$$

Знайдемо потік енергії хвилі, фазова швидкість якої дорівнює $\vec{\upsilon}$, через поверхню dS (рис. 5.6). За час dt хвиля перенесе енергію, що міститься всередині скісного циліндра, об’єм якого $dV = \upsilon\, dt\, \mathrm{d}S_n$, де $dS_n = dS \cdot \cos\alpha$. Тоді $dE = wdV = w\upsilon\, dt\, \mathrm{d}S_n$ і потік енергії $d\Phi_E = w\upsilon\, \mathrm{d}S_n = w\left(\vec{\upsilon}, d\vec{S}\right)$, де w – об’ємна густина енергії хвилі, $d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор поверхні dS.

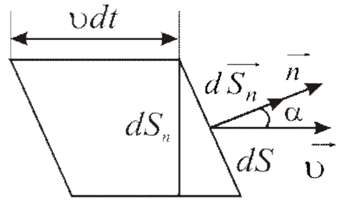


Рис. 5.6. Поширення плоскої хвилі

Вектор Умова. Для характеристики потоку енергії в різних точках простору вводиться векторна величина $\vec{j}$, яка називається густиною потоку енергії.

Густина потоку енергії – векторна величина, яка спрямована у напрямку поширення хвилі й чисельно дорівнює потоку енергії $d\Phi_E$ крізь одиничну площину dS поверхні, що розташована перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:

$$j = \frac{d\Phi_E}{dS_n} = \frac{d\Phi_E}{dtdS_n} = w\upsilon .$$

Оскільки швидкість $\vec{\upsilon}$ – це вектор, модуль якого дорівнює фазовій швидкості хвилі, а напрямок збігається з напрямком поширення хвилі (й перенесення енергії), то $\vec{j} = w\vec{\upsilon}$.

?Допитливим	Чому при пробиванні отвору в бетонній стіні перевагу надають загартованому інструменту?

Вектор густини потоку енергії хвилі, який називається вектором Умова, дорівнює добутку об'ємної густини енергії хвилі й вектора фазової швидкості.

Вектор $\vec{j}$ у різних точках простору має неоднакові значення, а в даній точці простору змінюється з часом за законом квадрата синуса.

Середнє значення вектора Умова

$$<\vec{j}> = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\vec{\upsilon} .$$

Інтенсивність хвилі. Знаючи $\vec{j}$ у всіх точках довільної поверхні S, можна обчислити потік енергії через цю поверхню:

$$\Phi_E = \int_S \vec{j}d\vec{S}.$$

Скалярна величина I називається ***інтенсивністю хвилі*** й дорівнює модулю середнього значення вектора Умова:

$$I = \left|<\vec{j}>\right| .$$

Інтенсивність хвилі чисельно дорівнює енергії, що переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі:

$$I = \upsilon <w> = \frac{1}{2}\rho\upsilon\omega^2 A^2 .$$

Інтенсивність синусоїдальної хвилі пропорційна квадрату її амплітуди.

?Допитливим	В якому середовищі хвиля переносить енергію не вздовж прямої лінії?

Аналітикам 5.5	Доведіть, що баланс енергії для фіксованого об’єму пружного середовища записується у вигляді $div\,\overline{j} = -\dfrac{d\omega}{dt}$.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

Густина потоку енергії – це:

- добуток густини енергії на швидкість;
- вектор Умова, напрямок якого збігається з напрямком вектора швидкості або хвильового вектора;
- потік енергії через одиничну поверхню;
- диференціальна характеристика $\overline{J}$, віднесена до даної точки векторного поля.

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки з підрозділу**.**

Чи правильно Ви розумієте ключові поняття й терміни?

Поперечні й поздовжні хвилі – с. 76. Хвильовий фронт – с. 77. Біжучі хвилі – с. 79. Плоскі хвилі – с. 79. Хвильове число – с. 79. Фазова швидкість – с. 80. Об’ємна густина енергії хвиль – с. 86. Густина потоку енергії – с. 87. Вектор Умова – с. 88.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

1. У яких середовищах можуть поширюватись поперечні й поздовжні хвилі?
2. Як впливає середовище на поширення хвиль?
3. Назвіть основні характеристики біжучої хвилі.
4. Чим відрізняється плоска хвиля від сферичної?
5. Яку інформацію надає аналіз хвиль за допомогою хвильового рівняння?
6. Чим відрізняється густина потоку енергії від інтенсивності хвилі?

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

1. Для опису поширення коливань додатково вводяться три величини: довжина хвилі, хвильове число й фазова швидкість.

Що визначає довжина хвилі?

- Довжина хвилі визначає просторовий період хвилі.

Що визначає хвильове число?

- Хвильове число визначає швидкість зміни фази з відстанню.

Чим визначається фазова швидкість?

- Фазова швидкість визначається відношенням пружних та інерційних характеристик середовища.

2. Динамічну поведінку хвиль у середовищі визначає хвильове рівняння, яке відіграє важливу роль при моделюванні.

Що є наслідком лінійності хвильового рівняння?

- Наслідком лінійності хвильового рівняння є виконання принципу суперпозиції.

Як визначити фазову швидкість хвилі в середовищі з рівняння хвилі?

- Фазова швидкість хвилі в середовищі – це корінь квадратний від відношення похідних другого порядку за часом і координатами.

Які хвилі задовольняють хвильовому рівнянню?

- Хвильовому рівнянню задовольняють тільки недиспергуючі хвилі, тобто хвилі, які не деформуються в середовищі.

Що необхідно для моделювання поширення недиспергуючих хвиль у середовищі ?

- Необхідно знати пружність і густину середовища й граничні умови.

Чим визначається вигляд функції $\xi(x,t)$?

- Вигляд функції $\xi(x,t)$ визначається формою джерела збурення й граничними умовами.

3. Енергетичні співвідношення відіграють важливу роль у техніці.

Як визначається енергія коливань?

- Енергія коливань, що поширюються, визначається добутком квадратів пружних сталих середовища й максимального зміщення, тобто амплітуди.

Як відображається баланс пружної енергії для фіксованого об'єму середовища?

- Баланс пружної енергії відображається рівнянням, подібним до рівняння безперервності.

4. Поняття густини потоку енергії вперше було введено М.О. Умовим і досить широко використовується для опису поширення хвиль різної природи.

Як зв'язані між собою потік енергії й густина потоку енергії?

- Потік енергії дорівнює інтегралу від густини потоку енергії через всю поверхню.

Куди напрямлений вектор Умова?

- Вектор Умова збігається з напрямком вектора фазової швидкості.

5. Для всіх хвиль використовують однакові терміни: хвильова

поверхня, фронт хвилі, стан поляризації.

Чим визначається форма фронту хвилі?

- Форма фронту хвилі визначається геометрією джерела збурень. За формою фронту хвилі класифікуються як плоскі, сферичні, циліндричні, еліптичні.

ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

Якісні задачі

1. Хвиля з середовища A проникає в середовище B, де її швидкість у k разів менша. Які характеристики хвилі змінюються?
2. Чому дорівнює мінімальна відстань у біжучій хвилі між точками середовища, які: а) коливаються у фазі; б) коливаються в протифазі; в) мають протилежні вектори швидкості?
3. В якому середовищі хвиля переносить енергію не по прямій лінії?
4. Чи зміниться потік енергії хвилі, якщо в k разів збільшити амплітуду коливань частинок середовища й довжину хвилі?
5. Джерело хвиль на воді – вертикальні коливання палиці. Яку форму матимуть хвилі, якщо переріз палиці: *а*) трикутник; *б*) квадрат?

Аналітикам 5.1. Рівняння плоскої хвилі можна записати у вигляді $\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\upsilon T}x\right) = A\cos(\omega t - kx)$.

Аналітикам 5.2. Площа сфери пропорційна квадрату радіуса, а енергія не змінюється з відстанню, тому амплітуда сферичної хвилі зменшується з відстанню за законом $\frac{1}{r}$.

Аналітикам 5.3. Для отримання хвильового рівняння здиференціюємо цю функцію двічі за кожною змінною:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2\xi, \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} =$$
$$= -k_x^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2\xi,$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2\xi, \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} =$$
$$= -k_z^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2\xi.$$

Додамо всі похідні за координатами:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2\xi.$$

Зіставимо цю суму з похідною за часом і врахуємо, що $\omega^2 = \upsilon^2 k^2$. Отже, поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується ***хвильовим рівнянням*** – диференціальним рівнянням у частинних похідних

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \text{ або } \Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

де υ – фазова швидкість.

Аналітикам 5.4. Пружна хвиля переносить енергію у формі потенціальної енергії пружної деформації, з одного боку, і кінетичної енергії руху частинок – з іншого.

Енергія пружної хвилі передається від шару до шару, тому що вони деформовані й діють один на одного з певною силою. Паралельно з деформацією шари середовища переміщуються і сила, що діє на них, здійснює роботу, яка перетворюється у енергію пружної деформації та кінетичну енергію сусіднього шару. Таким чином відбувається перенесення енергії при поширенні хвилі.

Аналітикам 5.5. Оскільки $\bar{j} = \omega\bar{\upsilon}$, то $j_x = \omega\frac{dx}{dt}$ і $dj_x = -d\omega\frac{dx}{dt}$. Звідси $\frac{dj_x}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}$. Аналогічні співвідношення можна записати для y і z компонент, тоді в загальному вигляді $\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{\partial j_y}{\partial t} + \frac{\partial j_z}{\partial t} = -\frac{d\omega}{dt} = div\,\bar{j}$.

Розділ 6. СУПЕРПОЗИЦІЯ ХВИЛЬ

Принцип суперпозиції для коливань розглядався раніше, тому в цьому розділі пропонується ознайомитися з його дією при формуванні багатьох хвиль. Показано його вирішальну роль при передачі інформації, а також у перерозподілі енергії у просторі при додаванні когерентних хвиль, який породжує явище інтерференції.

МЕТА ВИВЧЕННЯ Після вивчення даного розділу й виконання завдань Ви повинні:	
Вміти	1) дати визначення ключовим термінам; 2) пояснити, які спільні риси й відмінності мають інтерференція й дифракція хвиль.
Знати	1) основні шляхи використання суперпозиції хвиль для синтезу й аналізу сигналів; 2) основні області застосування суперпозиції хвиль у техніці.

Відкриття короткої хвилі – солітона й хвильового пакета – здійснило справжню революцію у фізиці в ХХ сторіччі, а застосування короткої хвилі – вейвлету – справжню революцію у математиці й фізиці на початку ХХІ сторіччя.

ЧИ ЗНАЄТЕ ВИ? Суперпозиція хвиль – це:

- один із найфундаментальніших принципів макро- і мікросвіту;
- можливість синтезувати хвильовий пакет – сукупність хвиль, що є носієм інформації;
- спосіб утворення й опису стоячих хвиль;
- спосіб зміни стану поляризації поперечної хвилі або керування ним;
- перерозподіл енергії хвиль у просторі (інтерференція й дифракція хвиль);
- засіб оброблення й синтезу сигналів;
- ефективний інструментарій для новітніх нанотехнологій.

6.1. Принцип суперпозиції хвиль

Принцип суперпозиції застосовується у механіці, електродинаміці, квантовій фізиці. Він однаково важливий як у макро-, так і у мікросвіті. Хвилі, які поширюються у середовищі з декількома джерелами коливань, йдуть незалежно одна від одної й після взаємного перетину розходяться далі так, ніби такої зустрічі й не було. Це і є проявом ***принципу суперпозиції. Він справедливий для систем, які описуються диференціальними рівняннями.***

Вражаючий факт!	У великих містах одночасно стільниковим зв’язком можуть користуватися сотні тисяч абонентів, не заважаючи один одному.

У місцях зустрічі хвиль коливання частинок середовища, які спричинені кожною з хвиль, додаються одне до одного. Результат додавання (результуюча хвиля) залежить від співвідношення фаз, просторових періодів і амплітуд хвиль, що накладаються.

Принцип суперпозиції при відклику системи на збурення: відклик системи на дію суми зовнішніх сил дорівнює сумі відкликів на дію кожної з цих сил. Принцип суперпозиції можна застосовувати лише до хвиль з малою амплітудою (звукові хвилі, радіохвилі, світлові хвилі від звичайних джерел світла).

?Допитливим	Чому принцип суперпозиції не виконується для ударних хвиль?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Принцип суперпозиції – це*:**

- ✧ можливість розмовляти одночасно тисячам абонентів стільникового зв’язку;
- ✧ наслідок лінійності диференціальних рівнянь, які описують різні за природою хвильові процеси;
- ✧ відображення незалежності хвиль одна від одної;
- ✧ неспотворення однієї хвилі іншою.

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

6.2. Утворення стоячих хвиль. Рівняння стоячої хвилі та його аналіз

На практиці при суперпозиції падаючої й відбитої від перешкоди хвиль виникає стояча хвиля. Наприклад, стоячі хвилі виникають в органних трубах й інших музичних інструментах.

?Допитливим	Чи переносить енергію й імпульс стояча хвиля?

Стоячі хвилі *– це хвилі, які утворюються при накладанні двох біжучих хвиль з однаковими частотами й амплітудами, що поширюються назустріч одна одній* (рис. 6.1).

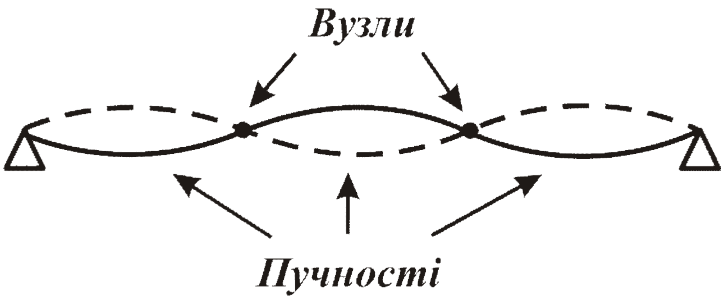


Рис. 6.1. Утворення стоячої хвилі у струні

Нехай дві плоскі хвилі поширюються назустріч одна одній уздовж осі x у середовищі без згасання:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Аналітикам 6.1	Додавши рівняння однакових хвиль, що рухаються назустріч, отримайте ***рівняння стоячої хвилі*** $\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$

Множник $\cos(\omega t)$ показує, що в середовищі виникають коливання з тією ж самою частотою ω, що й коливання зустрічних хвиль.

Множник $2A\,cos(kx)$, який не залежить від часу, визначає амплітуду A_{cm} результуючих хвиль, точніше, амплітуда як величина додатна дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{cm} = \left|2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right| = \left|2A\cos(kx)\right|.$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати x, що визначає положення точок середовища. Точки середовища, де $kx = \pm m\pi$ $(m = 0,1,2,...)$ і амплітуда A_{cm} досягає максимального значення $2A$, називаються ***пучностями стоячої хвилі.***

У точках середовища, де $kx = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $(m = 0,1,2,...)$, амплітуда $A_{ст} = 0$. В цих точках коливання не відбуваються, тому вони називаються ***вузлами стоячої хвилі.***

Виберемо початок відліку x так, щоб початкова фаза φ дорівнювала нулю. Тоді координати пучностей – $x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}$, а вузлів – $x_в = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}$.

Відстань між двома сусідніми пучностями дорівнює $\frac{\lambda}{2}$, а від вузла до найближчої пучності – $\frac{\lambda}{4}$.

?Допитливим	На якій відстані один від одного знаходяться сусідні вузли стоячої хвилі?

Зверніть увагу! *В пучності всі частинки коливаються в однакових фазах. У суміжних пучностях фаза протилежна.*

Стояча хвиля енергію не переносить – повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусіднім вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише переходить з кінетичної енергії в потенціальну пружнодеформованого середовища, і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча й відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію в однакових кількостях і протилежних напрямках.

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Стоячі хвилі – це*:**

- ✧ просторовий перерозподіл пружної енергії;
- ✧ результат суперпозиції однакових хвиль, які рухаються назустріч одна одній;
- ✧ процес переходу кінетичної енергії в потенціальну двічі за період;
- ✧ хвилі, що не переносять енергію й імпульс;
- ✧ процес утворення вузлів і пучностей.

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

6.3. Хвильовий пакет. Групова швидкість

?Допитливим	Як за допомогою хвиль передати інформацію?

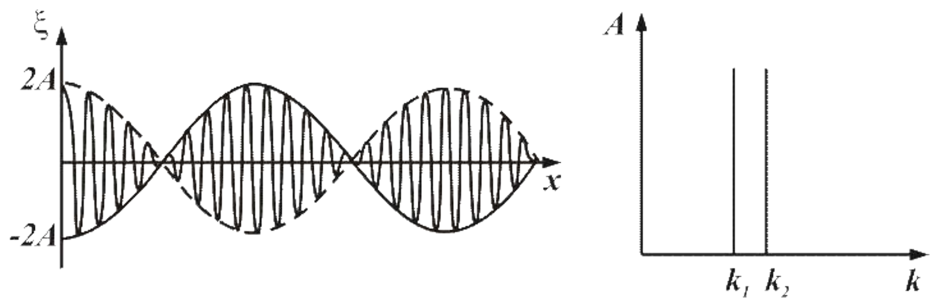
Хвильовий пакет. Монохроматична хвиля не може бути засобом передачі інформації. Для цього її необхідно промодулювати. Складемо хвилі $\xi_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)$ і $\xi_2 = A\cos(\omega_1 t + k_2 x)$ з близькими хвильовими числами k_1 і k_2.

Отримаємо аналог биття (рис. 6.2, *а*), але в просторі

$$\xi = 2A\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)\sin(\omega t - kx),$$

де $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\Delta\omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, $k = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$, $\Delta k = \dfrac{k_2 - k_1}{2}$.

Спектр результуючого коливання буде містити, відповідно, дві складові (рис. 6.2, *б*).



а *б*

Рис. 6.2. Залежність зміщення ξ від x (*а*) й спектр хвилі (*б*)

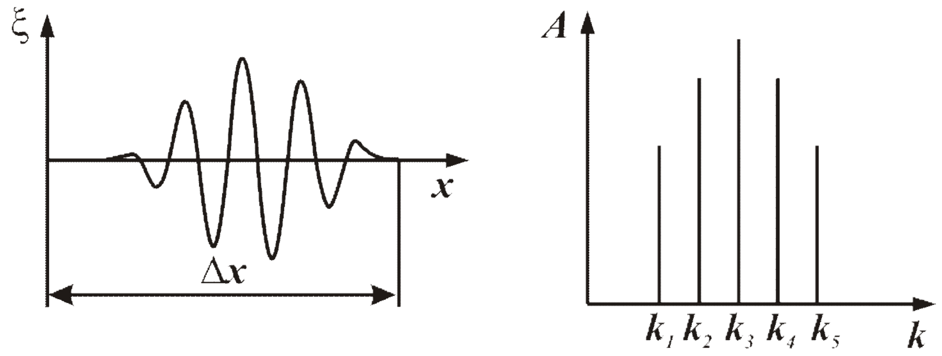
Формула нагадує вираз, що описує биття на різниці частот початкових коливань. У даному випадку амплітуда хвилі – це також хвиля, частота якої дорівнює різниці частот, тобто $\Delta\omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, а хвильове число дорівнює різниці хвильових чисел вихідних хвиль: $\Delta k = \dfrac{k_2 - k_1}{2}$. Тому групова швидкість є відношенням цих різниць: $u = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Якщо додати п'ять або більше хвиль, хвильові числа яких лежать в інтервалі Δk, то їхня суперпозиція й буде формувати хвильовий пакет (рис. 6.3, *а*), спектр якого наведено на рис. 6.3, *б*.

Рівняння хвильового пакета має вигляд

$$\xi = \int\limits_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A\cos(\omega_0 t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega .$$

Ззовні пакета спостерігається деструктивна інтерференція, в результаті якої амплітуда $A = 0$.

Для хвильового пакета виконується принцип невизначеності, тобто $\Delta\omega\Delta t = 1$.



а *б*

Рис. 6.3. Залежність зміщення ξ від x для хвильового пакета (*а*) та її спектр (*б*)

Групова швидкість. Окремі складові хвиль хвильового пакета рухаються з фазовою швидкістю $\upsilon_ф = \omega/k$. Однак сам хвильовий пакет, тобто його обвідна, рухається з іншою швидкістю – груповою (рис. 6.4).

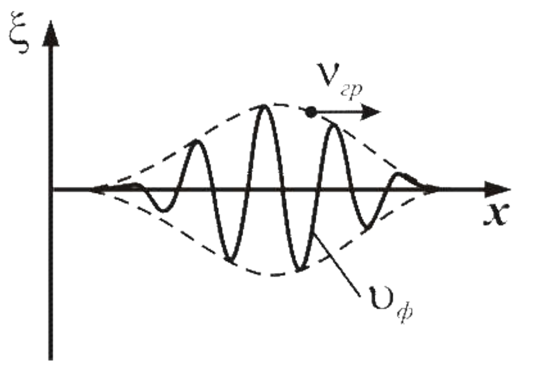


Рис. 6.4. Фазова $\upsilon_ф$ і групова $v_{гр}$ швидкості

Групова швидкість $v_{гр} = d\omega/dk$ – це швидкість перенесення сигналу.

?Допитливим	Швидкість перенесення хвилею інформації дорівнює її фазовій чи груповій швидкості?

Зв'язок між груповою і фазовою швидкостями. Установимо зв'язок між груповою $v_{гр} = d\omega/dk$ і фазовою $\upsilon_ф = \omega/k$ швидкостями.

Групова швидкість

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\upsilon_{ф}k\right) = \upsilon_{ф} + k\frac{d\upsilon_{ф}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}. \tag{6.1}$$

Оскільки $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ і $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$. (6.2)

Підставивши (6.2) в (6.1), отримаємо $v_{гр} = \upsilon_{ф} - \lambda\frac{d\upsilon_{ф}}{d\lambda}$.

З цього виразу випливає, що групова швидкість залежить від довжини хвилі й знака $d\upsilon_{ф}/d\lambda$.

Дисперсія хвиль. Розглядаючи хвильові процеси, принципово розрізняють дві швидкості: фазову $\upsilon_{ф} = \omega/k$, що описує швидкість поширення енергії гармонічної хвилі, й групову $v_{гр} = d\omega/dk$, яка визначає швидкість поширення хвильового пакета (або збурення імпульсного типу), з якою переноситься сигнал. Якщо при поширенні хвильового пакета в середовищі ці швидкості не однакові, то хвильовий пакет спотворюється, в цьому випадку кажуть про наявність дисперсії. Для будь-яких хвиль, фазова швидкість $\upsilon_{ф}$ яких залежить від довжини хвилі λ, слід розрізняти випадки: $d\upsilon_{ф}/d\lambda = 0$ – немає дисперсії; $d\upsilon_{ф}/d\lambda > 0$ – нормальна дисперсія; $d\upsilon_{ф}/d\lambda < 0$ – аномальна дисперсія. Хвилі без дисперсії задовольняють хвильовому рівнянню, загальним розв'язком якого є рівняння біжучої хвилі.

?Допитливим	Чому в диспергуючому середовищі хвильовий пакет «розпливається»?

У радіотехніці можна отримати прямокутну хвилю й здійснити її гармонічний аналіз (рис. 6.5). Основна складова має таку ж «довжину хвилі» , як і прямокутний сигнал. У деяких місцях вона виходить за межі вихідної кривої, а в інших – не доходить до неї. Ці невідповідності форми мають бути скомпенсовані. Тому наступна складова повинна мати «довжину хвилі», що дорівнює $1/3$ основної, тобто втроє більшу частоту. Розбіжності, що залишаються після цієї складової, значною мірою усуваються додаванням невеликої за амплітудою складової, в якій частота в 5 разів більша від частоти вихідної.

Для точного опису прямокутного імпульсу необхідний нескінченний ряд складових, відношення частот яких до частоти вихідної кривої дорівнює 1,3,5,7,.... Однак навіть сума декількох перших складових дає задовільне наближення.

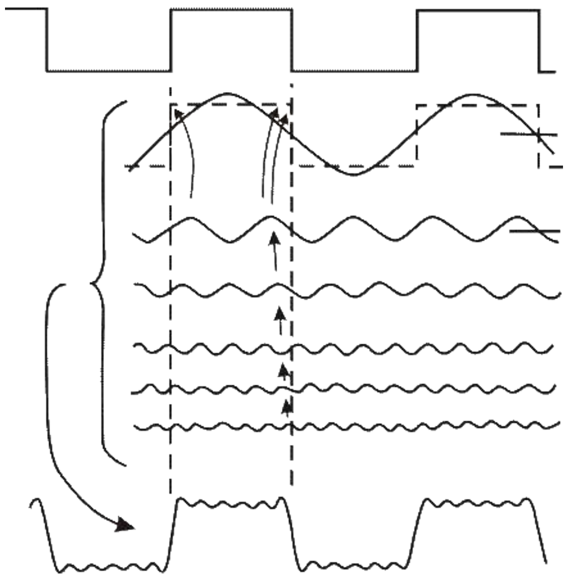


Рис. 6.5. Розкладання прямокутного імпульсу на складові

Гармонічний аналіз можна застосувати до одиничного імпульсу (звук від удару по камертону, радіохвиля, що випромінюється при ударі блискавки), а також до короткого цугу хвиль – хвилеподібного сплеску, який є моделлю мікрочастинки.

<table>
<tr><td>

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Хвильовий пакет – це*:**

- ✧ результат суперпозиції декількох хвиль;
- ✧ засіб передачі інформації;
- ✧ збурення, що рухається з груповою швидкістю;
- ✧ модель частинки в мікросвіті.

***Дисперсія – це*:**

- ✧ наслідок відмінності фазової $\upsilon_ф$ і групової $\nu_{гр}$ швидкостей;
- ✧ спотворення (деформація) форми хвильового пакета;
- ✧ процесс утворення хвиль, які не задовольняють хвильовому рівнянню.

</td></tr>
<tr><td>

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

</td></tr>
</table>

?Допитливим	Чому, якщо мікрофон добре відтворює прямокутний сигнал, він здатний пропускати як дуже високі, так і досить низькі частоти?

6.4. Когерентність хвиль. Перерозподіл інтенсивності хвиль при суперпозиції

Когерентність хвиль. Узгоджене проходження в часі й просторі декількох коливань або хвильових процесів пов'язано з поняттям когерентності. *Дві хвилі називаються когерентними, якщо вони мають однакову частоту й різниця їхніх фаз залишається сталою в часі.*

Інтерференція хвиль. Вона відбувається при накладанні (суперпозиції) двох або кількох когерентних хвиль, при якому має місце стійке в часі взаємне підсилення їх в одних точках простору й ослаблення в інших залежно від співвідношення між фазами цих хвиль.

Розглянемо накладання двох когерентних косинусоїдальних хвиль, які збуджуються точковими джерелами S_1 і S_2 (рис. 6.6):

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) = A_1 \cos \Phi_1;$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) = A_2 \cos \Phi_2.$$

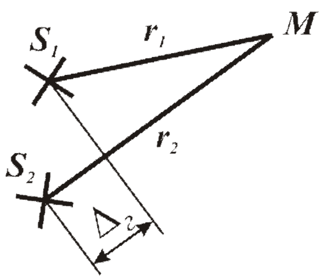


Рис. 6.6. Інтерференція хвиль

Амплітуду A результуючої хвилі в точці M можна визначити, використовуючи теорему косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \times \\ \times \cos[\,k\,(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)]\,.$$

Оскільки для когерентних джерел різниця початкових фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = const$, то результат інтерференції двох хвиль у різних точках залежить від величини $\Delta_г = r_2 - r_1$, яка називається ***геометричною різницею ходу*** променів.

У точках, де $k(r_2 - r_1) = \pm 2m\pi \;\; (m = 0, 1, 2, ...)$, спостерігається ***інтерференційний максимум:*** амплітуда результуючого коливання $A = A_1 + A_2$. У точках, де $k(r_2 - r_1) = \pm(2m+1)\pi \; (m = 0, 1, 2, ...)$, спостерігається ***інтерференційний мінімум:*** амплітуда результуючого коливання $A = |A_1 - A_2|$, m визначає порядок інтерференційного максимуму або мінімуму.

Оскільки хвильове число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, де λ – довжина хвилі в даному середовищі, то при різниці ходу $\Delta_г = \pm 2m\dfrac{\lambda}{2}$ амплітуда результуючого коливання максимальна.

Амплітуда результуючого коливання мінімальна в усіх точках, для яких $\Delta_{г} = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

Інтерференція хвиль призводить до перерозподілу енергії коливань між сусідніми областями середовища.

?Допитливим	Чи можуть інтерферувати хвилі, які поширюються в протилежних напрямках?

На рис. 6.8 наведено дві системи хвиль, які інтерферують.

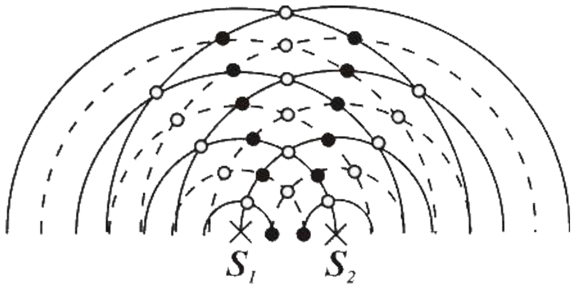


Рис. 6.7. Інтерференція сферичних хвиль

Гребені хвиль зображено суцільними лініями, западини – пунктирними.

У місцях перетину двох гребенів або двох западин розташовано максимуми коливань (о), у місцях перетину гребенів і западин – мінімуми (•).

?Допитливим	Чому на малих відстанях від джерел інтерференція не спостерігається?

ВИДІЛИМО ГОЛОВНЕ Й УЗАГАЛЬНИМО

***Суперпозиція хвиль – це*:**

- інтерференція – перерозподіл енергії сигналу;
- дифракція – перерозподіл енергії при суперпозиції вторинних хвиль;
- утворення максимумів і мінімумів при накладанні хвиль;
- фізична основа дії сучасних приладів (лазер, мазер та ін.);
- засіб досягення просторової локалізації збурень у новітніх технологіях.

ВЧИМОСЯ УЗАГАЛЬНЮВАТИ

Обміркуйте матеріал і доповніть висновки.

Чи правильно Ви розумієте ключові терміни?

Принцип суперпозиції – с. 94. Стоячі хвилі – с. 95. Вузли стоячої хвилі – с. 98. Пучності стоячої хвилі – с. 95. Хвильовий пакет – с. 97. Групова швидкість – с. 98. Дисперсія хвиль – с. 99. Когерентність хвиль – с. 101. Інтерференція хвиль – с. 101.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ РОЗДУМІВ, САМОПЕРЕВІРКИ, ПОВТОРЕННЯ

1. У яких середовищах можуть утворюватись стоячі хвилі?
2. Чи впливає середовище на характеристики стоячих хвиль?
3. Які умови мають задовольняти частоти, амплітуди, фази хвиль, що рухаються назустріч, щоб при їх суперпозиції виникла стояча хвиля?
4. Наведіть основні характеристики стоячої хвилі.
5. За яких умов можлива інтерференція двох хвиль?
6. Чим відрізняється інтерференція від дифракції?
7. Де використовують стоячі хвилі?
8. Чим відрізняється хвильовий пакет від цуга хвилі?

ФОРМУЄМО ЦІЛІСНЕ УЯВЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕННЯ

1. Принцип суперпозиції – один з найфундаментальніших принципів у макро- і мікросвіті.

Для яких хвиль виконується принцип суперпозиції?

- Принцип суперпозиції виконується для різних за природою хвильових процесів, які описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Що фізично відображає принцип суперпозиції?

- Незалежність поширення хвиль одна від одної.
- Адитивність хвильових процесів.

Які нові можливості надає принцип суперпозиції?

- Можна застосувати теорему Фур'є для аналізу будь-якого періодичного сигналу.

2. Стоячі хвилі відіграють важливу роль у науці й техніці.

Наведіть приклади використання стоячих хвиль.

- В акустичних резонаторах, п'єзокварцах, музичних інструментах, при визначенні власних частот коливань елементів авіаційної техніки.

Чим відрізняються стоячі хвилі від біжучих?

- Стоячі хвилі не переносять енергію й імпульс.
- Довжина стоячої хвилі (відстань між двома вузлами) в два рази менша, ніж у біжучої.

Що відображають стоячі хвилі?

- Просторовий перерозподіл пружної енергії.
- Результат суперпозиції однакових хвиль, які рухаються назустріч одна одній.

- Утворення вузлів і пучностей.

3. Хвильовий пакет – це результат суперпозиції декількох хвиль.

З якою швидкістю рухається хвильовий пакет?

- З груповою швидкістю.

Чи змінюється довжина хвильового пакета?

- Тільки в диспергуючому середовищі.

Чому хвильовий пакет широко використовується в мікросвіті?

- Хвильовий пакет є моделлю частинок мікросвіту, що рухаються.

4. Когерентність хвиль – це можливість перерозподілу енергії в просторі й спектрі.

Для чого використовують перерозподіл енергії хвиль у просторі?

- Для здійснення радіозв'язку, технологічного оброблення різних матеріалів, а також для їх дослідження.

Для чого використовують перерозподіл енергії хвиль у спектрі?

- Для модуляції, інтерференціі, дифракції.

ВЧИМОСЯ СИСТЕМАТИЗУВАТИ

Установіть взаємозв'язки між основними фізичними параметрами й законами. Співвіднесіть прочитаний матеріал з власними досвідом і знаннями.

Побудуйте ланцюжки взаємозв'язаних понять, параметрів, процесів, які допоможуть Вам на заняттях, модулі або іспиті. Як перетинаються ці ланцюжки?

Якісні задачі

1. За яких умов у зоні накладання двох хвиль будуть точки, де частинки середовища не братимуть участі в коливаннях?
2. Як зміниться відстань між точками максимумів і мінімумів, якщо частота коливань двох джерел збільшиться?
3. Чи можуть інтерферувати хвилі, які поширюються в протилежних напрямах?
4. Визначте максимальну довжину стоячої хвилі в шнурку довжиною l якщо закріплено: а) один його кінець, б) два його кінці.
5. Від якої перешкоди хвиля не може відбитись?

Аналітикам 6.1. Додавши рівняння $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$ і $\xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$ з урахуванням того, що $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, отримаємо ***рівняння стоячої хвилі***

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(\omega t).$$

Множник $\cos(\omega t)$ показує, що в точках середовища виникає коливання з тією ж самою частотою ω, що й коливання зустрічних хвиль. Множник $2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, який не залежить від часу, виражає амплітуду $A_{ст}$ результуючих хвиль, тобто амплітуда як додатна величина дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{ст} = \left|2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right|.$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати x, яка визначає положення точок у середовищі.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Астахов А.В. Курс физики: в 3 т. /А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – М.: Наука, 1980. – Т. 2. – 359 с.

Астахов А.В. Курс физики: в 3 т. /А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – М.: Наука, 1983. – Т. 3. – 239 с.

Бутиков Е.И. Оптика / Е.И. Бутиков. – М.: Высш. шк., 1987. – 512 с.

Курс фізики / І.Є. Лопатинський, І.Р. Зачек, І.М. Кравчук та ін. – Л.: Афіша, 2003. – 373 с.

Р. Дитчберн. Физическая оптика / Р. Дитчберн. – М.: Наука, 1965. – 631 с.

Савельев И.В. Курс физики: учеб. для втузов /И.В. Савельев. – М.: Наука, 1988 . – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 432 с.

Савельев И.В. Курс физики: учеб. для втузов /И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 304 с.

Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. /Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1983. – Т. 3: Электричество. – 688 с.

Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.

Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: в 10 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966. – Т. 2. – 237 с.

Яворский Б.М. Основы физики: учеб. пособие. – В 2 т. / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: Наука, 1974. – Т. 2: Колебания и волны. Основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел. Физика ядра и элементарных частиц. – 464 с.

Мигаль Валерій Павлович
Клименко Ігор Андрійович
Фомін Олександр Сергійович

КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ

Редактор А. М. Ємленінова

Зв. план, 2008
Підписано до друку
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 5,9. Обл.-вид. арк. 6,68. Наклад 400 прим. Замовлення Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”
61070, Харків-70, вул. Чкалова,17
http://www.khai.edu
Видавничий центр “ХАІ”
61070, Харків-70, вул. Чкалова,17
izdat@khai.edu