

*Канд. техн. наук, доцент Д. И. Костюк*

## НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ УДАРА ЗУБЬЕВ ПРЯМОЗУБЫХ КОЛЕС

«При конструировании новых машин добиваться снижения их веса при улучшении их качества» — такова директива XIX съезда партии.

Для выполнения этой директивы необходимо провести большую работу по повышению качества расчёта, конструированию и изготовлению машин, по изучению и внедрению методов упрочнения деталей и т. д.

Совершенствование метода расчета зубчатых колес в указанных проблемах занимает не последнее место. Общеизвестно, что качество зубчатой передачи в значительной мере предопределяет конструктивные и эксплуатационные качества многих современных машин и механизмов.

Высокие требования к современным зубчатым колесам, предназначенным для передачи больших мощностей при окружных скоростях, достигающих иногда до 150 м/сек, определяют то внимание, которое уделяется советскими специалистами проблеме прочности зубчатых колес.

Дискуссионные статьи, помещенные в журнале АН СССР [1,2], поставили уже давно назревший вопрос о необходимости разработки научно обоснованного метода расчёта зубьев. Справедливо указывается, что для решения этой задачи необходимо привлечь широкий коллектив советских специалистов.

Критически используя достижения научной мысли, в частности, результаты экспериментов исследовательских лабораторий, а также опыт передовых заводов, можно создать вполне надежный метод расчета зубьев, удовлетворяющий современным требованиям.

Работы А. И. Петрусевича [3,4] могут быть положены в основу дальнейших теоретических разработок, но ряд выводов, сделанных им, необходимо уточнить и, соответственно видоизменив, распространить на различные передачи, а не только на усредненные со стандартными зубьями.

Теоретические выводы дают результаты, соответствующие идеализированным условиям работы колес. Для того, чтобы эти результаты совпадали с действительными, вводят различные поправочные коэффициенты, которые могут быть определены в тщательно поставленных экспериментах. Методика экспериментов так же, как и сами экспериментальные установки, должны подвергнуться широкому критическому обсуждению. Только при этом условии введенные в расчетные формулы поправочные коэффициенты будут наиболее соответствовать действительности.

В настоящей работе дано уточненное решение одного из вопросов, связанных с определением динамической нагрузки на зубья в прямозубых цилиндрических колесах.

Скорость удара, являясь одной из величин, определяющих силу удара прямозубых колес, находится различными методами.

А. И. Петрусевич определяет ее на основании геометрических соображений [3]. Формулы для скорости кромочного и срединного удара полу-



чены им сравнительно просто, но ряд допущений, принятых при выводе этих формул, не дает возможности судить о степени их точности.

Профессор Н. А. Калашников [5] и М. С. Полоцкий [6] определяют скорость удара, исходя из уравнения зазоров между кромкой зуба ведомого и профилем ведущего колеса. Авторы считают вывод и результаты весьма сложными, поэтому предлагают приближенные зависимости, степень точности которых также не устанавливают.

В процессе зацепления кромка зуба ведомого колеса при кромочном ударе или кромка зуба ведущего колеса при срединном ударе будет изнашиваться. Учесть влияние износа на скорость удара методами, описанными в ряде работ [3, 5, 6], невозможно.

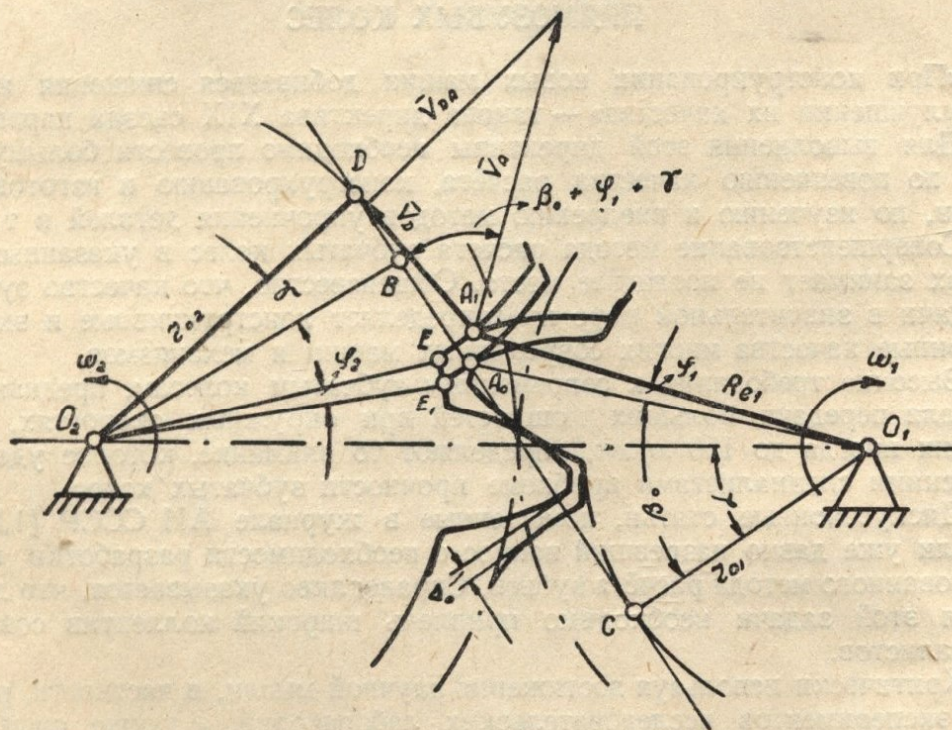


Рис. 1.

Предлагаемый нами метод дает возможность:

а) сравнительно просто и точно определить скорость удара зубьев при любом зацеплении (нулевом, смещенно-нулевом, смещенном) и при любом заданном износе кромки;

б) легко определить условие отрыва неударяющейся пары зубьев при срединном ударе и

в) установить связь между силой срединного удара и силой кромочного удара, что имеет решающее значение при суждении об изгибной и контактной прочности зубьев.

Рассматривается зацепление абсолютно жестких зубьев перед срединным ударом (рис. 1). Кромка  $A$  зуба ведущего колеса сошла с теоретической части линии зацепления  $BC$  и находится в точке  $A_1$ . Угол поворота первого (ведущего) колеса за время, прошедшее с момента положения кромки  $A$  на теоретической части линии зацепления (точка  $A_0$ ), обозначен через  $\varphi_1$ .

$A_1D$  — касательная к основной окружности ведомого колеса,  
 $D$  — точка касания.



Зубчатый механизм в данном положении заменяется кинематически тождественным шарнирным четырехзвенником  $O_1 A_1 D O_2$ .

Из четырехзвенника имеем:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA}. \quad (1)$$

Имея в виду, что векторы  $\bar{v}_D$  и  $\bar{v}_{DA}$  взаимно перпендикулярны, зависимость между модулями векторов  $v_D$  и  $v_A$  напишется так:

$$v_D = v_A \cos(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma), \quad (2)$$

где  $\beta_0$  определяется из уравнения:

$$\cos \beta_0 = \frac{r_{01}}{R_{e1}},$$

а

$$\gamma = \angle BO_2D.$$

Связь между углом  $\gamma$  и углом  $\varphi_2$  — углом поворота второго (ведомого) колеса за время, прошедшее с момента положения кромки  $A$  на теоретической части линии зацепления (точка  $A_0$ ), до рассматриваемого момента, устанавливается на основании чертежа:

$$\overline{A_0B} + \overline{BD} = \overline{DA_1} + \overline{EE_1},$$

или

$$BC - \sqrt{R_{e1}^2 - r_{01}^2} + r_{01}\gamma = \sqrt{A^2 + R_{e1}^2 - 2AR_{e1}\cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1) - r_{01}^2} + r_{01}\varphi_2, \quad (3)$$

где  $A$  — межцентровое расстояние,

$r_{01}$  и  $r_{02}$  — радиусы основных окружностей колес,

$R_{e1}$  — радиус головок первого колеса.

Длина теоретического отрезка линии зацепления

$$BC = A \sin \alpha.$$

Из уравнения (3) имеем:

$$\gamma = \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)} - M + \varphi_2, \quad (4)$$

где

$$K = \frac{A^2 + R_{e1}^2}{r_{02}^2} - 1, \quad (5)$$

$$L = \frac{2AR_{e1}}{r_{02}^2}, \quad (6)$$

$$M = \frac{A \sin \alpha - \sqrt{R_{e1}^2 - r_{01}^2}}{r_{02}}. \quad (7)$$

Уравнения (2) и (4) при  $v_A = R_{e1} \frac{d\varphi_1}{dt}$  дают:

$$v_D = R_{e1} \frac{d\varphi_1}{dt} \cos[\beta_0 + \varphi_1 + \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)} - M + \varphi_2]. \quad (8)$$

Когда точка контакта — кромка зуба ведущего колеса сойдет с теоретической линии зацепления  $BC$ , передаточное отношение не будет постоянным: ведомое колесо будет вращаться замедленно, а ведущее — ускоренно. Величины замедления и ускорения зависят, кроме геометрии зацепления, от масс, связанных с ведущим и ведомым валами, и от жесткости валов.

Учитывая лишь геометрию зацепления, скорость любой точки того или другого колеса можно определить, задаваясь законом движения одного из колес.



Обычно принимают [3, 6], что ведущее колесо и после схода кромки с теоретической линии зацепления вращается с постоянной угловой скоростью.

При  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = \text{const}$  дифференцированием уравнения (8) получаем:

$$\frac{dv_D}{dt} = \omega_D^t = r_{0_2} \epsilon_2 = -R_{e_1} \omega_1 \left[ \omega_1 + \frac{L \omega_1 \sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}} + \frac{d\varphi_2}{dt} \right] \times \sin[\beta_0 + \varphi_1 + \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)} - M + \varphi_2]. \quad (9)$$

Следовательно, закон изменения углового ускорения ведомого колеса напишется так:

$$\epsilon_2 = -\frac{R_{e_1}}{r_{0_2}} \omega_1 \left[ \omega_1 + \frac{L \omega_1 \sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}} + \frac{d\varphi_2}{dt} \right] \times \sin[\beta_0 + \varphi_1 + \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)} - M + \varphi_2]. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует:

- а) при постоянной угловой скорости ведущего колеса угловое замедление ведомого колеса не постоянно,
- б) с увеличением угла  $\varphi_1$  оно монотонно возрастает,
- в) величина  $\epsilon_2$  зависит от  $\omega_1$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  и от коэффициентов сдвига при нарезании зубьев колес.

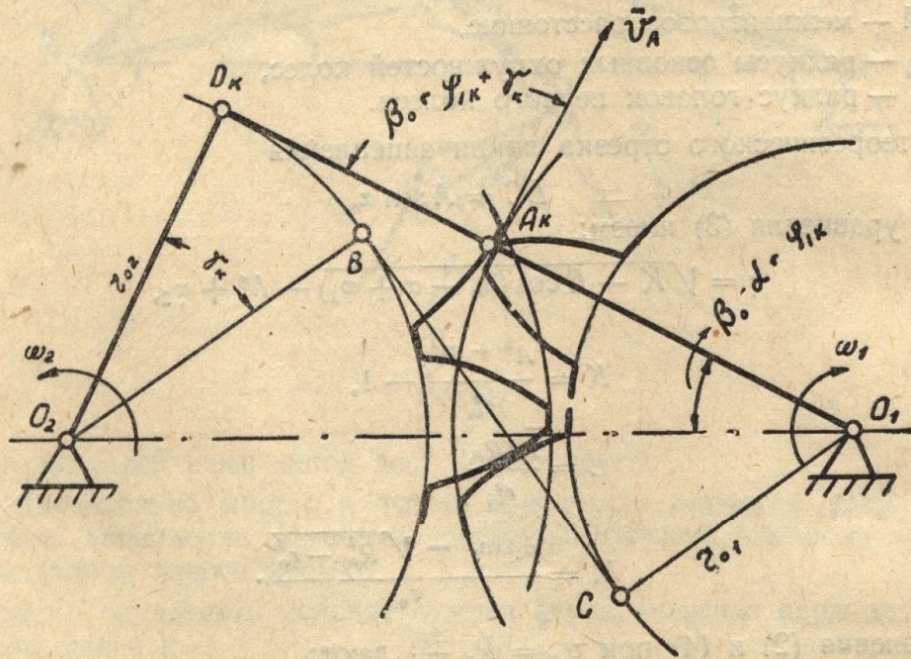


Рис. 2.

Для суждения о степени увеличения замедления найдем значения  $\epsilon_2$  для двух значений  $\varphi_1$ .

В начальный момент, когда кромка А совпадает с точкой  $A_0$ ,

$$\varphi_1 = 0; \varphi_2 = 0; \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)} - M = 0;$$

угловое ускорение ведомого колеса, на основании уравнения (10), равно:

$$\epsilon_{2 \text{ нач}} = -\frac{R_{e_1}}{r_{0_2}} \omega_1^2 \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - \alpha)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha)}} + \frac{i_{12} + 1}{i_{12}} \right] \sin \beta_0. \quad (11)$$



Второе значение  $\varepsilon_2$  (назовем его конечным) найдем для положения, изображенного на рис. 2. Такое положение возможно лишь при чрезмерно большой ошибке в основном шаге.

В конечном положении заменяющий шарнирный четырехзвенник будет  $O_2D_kA_kO_1$ . Угловая скорость ведомого звена  $O_2D_k$  равна нулю, то есть  $\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$ ;

$$\sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_{1k}) = \frac{r_{02}}{A};$$

$$\beta_0 + \varphi_{1k} + \gamma_k = \beta_0 + \varphi_{1k} + \sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_{1k})} - M + \varphi_2 = 90^\circ.$$

Следовательно, из уравнения (10) имеем:

$$\varepsilon_2 \text{ конечн.} = -\frac{Re_1}{r_{02}} \omega_1^2 \left[ 1 + \frac{L \cdot \frac{r_{02}}{A}}{2 \sqrt{K - L \sqrt{1 - \left(\frac{r_{02}}{A}\right)^2}}} \right]. \quad (12)$$

Угол  $\varphi_{1k}$  находится из уравнения:

$$\sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_{1k}) = \frac{r_{02}}{A} = \frac{z_2 \cos \alpha}{z_1 + z_2}, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — угол зацепления.

Найдем возможное максимальное значение угла поворота ведущего колеса  $\varphi_{1\Delta_0}$  за время заполнения зазора  $\Delta_0$ , где  $\Delta_0$  — вероятная наибольшая разность между основными шагами ведущего и ведомого колеса.

Считая движение ведомого колеса равнозамедленным с замедлением  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2 \text{ нач}}$ , что даст несколько завышенное значение  $\varphi_{1\Delta_0}$ , имеем:

$$\Delta_0 = r_{01}\varphi_{1\Delta_0} - r_{02}\varphi_2, \quad (14)$$

$$\varphi_{1\Delta_0} = \omega_1 t, \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \omega_2 t - \frac{\varepsilon_2 t^2}{2} \quad (16)$$

Решая совместно уравнения (14), (15) и (16), находим

$$\varphi_{1\Delta_0} = \omega_1 \sqrt{\frac{2\Delta_0}{\varepsilon_2 r_{02}}}. \quad (17)$$

На основании (11), (12), (13) и (17) были произведены вычисления для трех стандартных передач. При вычислении  $\varphi_{1\Delta_0}$  принят  $m = 5$  мм, а  $\Delta_0 = 42,3 \cdot 10^{-3}$  мм (3 класс точности).

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Передача	Число зубьев	$\varepsilon_{2 \text{ нач}}$	$\varepsilon_{2 \text{ конечн.}}$	$\varphi_{1k}$	$\varphi_{1\Delta_0}$
I	$z_1 = 20$ $z_2 = 60$	$-0,347\omega_1^2$	$-0,63\omega_1^2$	$33^\circ 30'$	$2^\circ 23'$
II	$z_1 = 30$ $z_2 = 30$	$-1,935\omega_1^2$	$-2,84\omega_1^2$	$19^\circ 50'$	$1^\circ 26'$
III	$z_1 = 60$ $z_2 = 20$	$-13,75\omega_1^2$	$-17,1\omega_1^2$	$9^\circ 10'$	$0^\circ 40'$



На рис. 3 приведены графики изменения  $\epsilon_2$  для этих же передач (ординаты в разных масштабах). Заштрихованные части графиков показывают участки, соответствующие времени заполнения возможного максимального зазора при обработке зубьев по третьему классу точности.

Полученные результаты показывают, что допущение  $\epsilon_2 = \epsilon_{2нач} = const$  не вносит существенной ошибки ни для замедляющих, ни для ускоряющих передач.

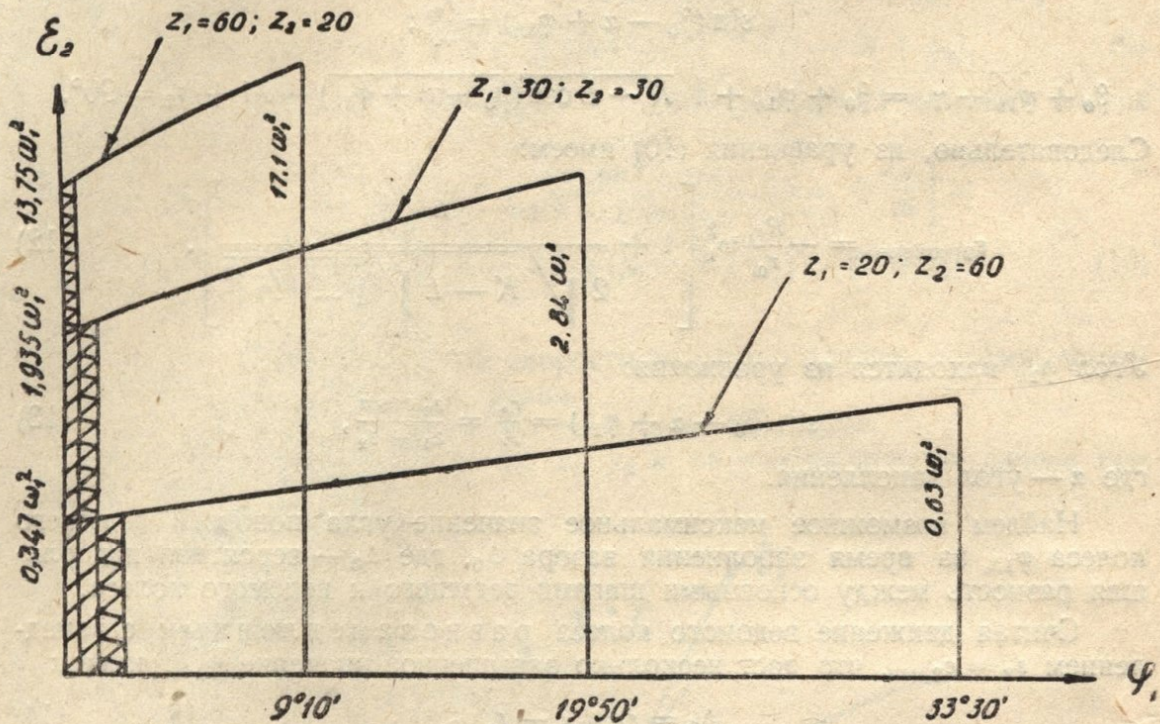


Рис. 3.

При равнозамедленном движении ведомого колеса и абсолютно жестких зубьях время заполнения зазора определится по формуле:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta_0}{\epsilon_2 r_{02}}}$$

Скорость срединного удара в начальный момент

$$v_c = r_{02} \epsilon_2 t = \sqrt{2\Delta_0 r_{02} \epsilon_2} \quad (18)$$

Принимая для  $\epsilon_2$  начальное значение из уравнения (11), получим:

$$v_c = \omega_1 \sqrt{2\Delta_0 R_{e1} \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - \alpha)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha)}} + \frac{z_1 + z_2}{z_2} \right] \sin \beta_0} \quad (19)$$

В этой формуле значения  $K$  и  $L$  находятся по уравнениям (5) и (6),  $\sin \beta_0$  определяется из равенства

$$\sin \beta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_{01}}{R_{e1}}\right)^2}$$

$\alpha$  — угол зацепления.

Формула (19) справедлива для любого зацепления.

В случае износа кромки можно принять, что изношенная часть представляет поверхность кругового цилиндра. В таком случае во все расчетные формулы необходимо подставить вместо  $R_{e1}$  радиус точки сопряжения профиля изношенной кромки с эвольвентной частью профиля того же зуба.

Уравнение (19) показывает, что скорость срединного удара зависит от  $\omega_1$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $m$ ,  $\Delta_0$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — коэффициентов смещения. Поэтому в случаях



исправленных зацеплений упрощенного выражения для определения скорости дать нельзя.

Для нулевого зацепления ( $\alpha = 20^\circ$ , колеса стандартные) формула (19) преобразуется к таким видам:

$$v_c = C_1 v \sqrt{\frac{\Delta_0}{d_1}} \quad (20)$$

$$\text{или } v_c = C_2 v \sqrt{\frac{\Delta_0}{A_0}}, \quad (21)$$

где  $v_c$  — скорость срединного удара в см/сек,

$v$  — окружная скорость в см/сек,

$\Delta_0$  — вероятная наибольшая разность между основными шагами ведущего и ведомого колес в мм;

$d_1$  — диаметр начальной (делительной) окружности ведущего (первого) колеса в мм,

$A_0$  — межцентровое расстояние рассматриваемого нулевого зацепления в мм,

$C_1$  и  $C_2$  — постоянные величины для данной передачи, причем

$$C_1 = \sqrt{4 \cos 20^\circ \frac{R_{e1}}{r_{o1}} \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - 20^\circ)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - 20^\circ)}} + \frac{z_1 + z_2}{z_2} \right] \sin \beta_0},$$

а

$$C_2 = C_1 \sqrt{\frac{z_1 + z_2}{2z_1}}$$

Значения  $C_1$  и  $C_2$  приведены в таблицах 2 и 3 (стр. 16 и 17).

Уравнения (20) и (21) для определения скорости срединного удара получены при допущении, что ведущее колесо и после схода кромки с теоретической линии зацепления вращается с постоянной угловой скоростью.

Такое предположение более приближается к действительности в ускоряющих передачах, так как в этом случае с ведущим валом связаны большие массы, чем с ведомым, что и обеспечивает большую его равномерность хода.

В замедляющих передачах естественно предположить равномерность вращения ведомого колеса.

В таком случае, то есть при  $\omega_2 = \text{const}$ , дифференцированием уравнения (2) получается:

$$\frac{dv_D}{dt} = 0 = \frac{dv_A}{dt} \cos(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma) - v_A \sin(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma) \cdot (\varphi_1' + \gamma') \dots \quad (22)$$

Но  $\frac{dv_A}{dt} = R_{e1} \varepsilon_1$ , а, на основании уравнения (4),

$$\varphi_1' + \gamma' = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{L \frac{d\varphi_1}{dt} \sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}} + \omega_2,$$

и уравнение (22) дает:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \left[ \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{L \frac{d\varphi_1}{dt} \sin(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha + \varphi_1)}} + \omega_2 \right] \text{tg}(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma). \quad (23)$$

В начальный момент, когда кромка  $A$  совпадает с точкой  $A_0$   $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ;  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ ;  $\gamma = 0$ , угловое ускорение ведущего колеса будет равно:

$$\varepsilon_{1\text{нач}} = \omega_1^2 \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - \alpha)}{2\sqrt{K - L \cos(\beta_0 - \alpha)}} + \frac{z_1 + z_2}{z_2} \right] \text{tg} \beta_0 \quad (24)$$



Таблица 2

Значения  $C_1$  для стандартных колес

$z_1 \backslash z_2$	18	20	22	24	26	28	30	35	40	50	60	70	80	90	100
18	3,655	3,681	3,770	3,862	3,890	4,275	4,43	4,73	4,210	4,110	4,350	4,280	4,330	5,802	5,801
20	3,361	3,492	3,561	3,541	3,590	3,700	3,76	3,801	3,835	3,890	4,000	4,010	3,880	5,081	4,831
22	3,110	3,202	3,240	3,254	3,284	3,425	3,501	3,51	3,540	3,621	3,790	3,801	3,811	4,561	4,162
24	2,931	3,021	3,028	3,060	3,060	3,155	3,22	3,36	3,375	3,380	3,561	3,602	3,621	4,201	4,031
26	2,778	2,860	2,867	2,871	2,891	2,950	3,970	3,120	3,122	3,201	3,360	3,420	3,507	3,878	3,841
28	2,657	2,723	2,725	2,750	2,754	2,820	2,820	2,940	2,975	3,050	3,202	3,275	3,381	3,640	3,652
30	2,558	2,619	2,622	2,643	2,648	2,680	2,701	2,735	2,840	2,921	3,055	3,120	3,241	3,442	3,481
35	2,372	2,419	2,421	2,440	2,448	2,460	2,470	2,540	2,58	2,662	2,803	2,841	2,921	3,081	3,163
40	2,246	2,286	2,291	2,280	2,279	2,295	2,315	2,365	2,4	2,471	2,570	2,641	2,711	2,822	2,915
50	2,081	2,103	2,098	2,096	2,090	2,101	2,105	2,140	2,173	2,202	2,295	2,362	2,422	2,495	2,58
60	1,981	1,995	1,984	1,982	1,970	1,973	1,981	2,038	2,048	2,065	2,125	2,175	2,235	2,285	2,362
70	1,908	1,917	1,909	1,902	1,892	1,890	1,891	1,905	1,925	1,957	2,010	2,025	2,101	2,142	2,211
80	1,862	1,860	1,852	1,850	1,833	1,830	1,830	1,840	1,850	1,875	1,918	1,955	1,998	2,03	2,091
90	1,823	1,827	1,808	1,801	1,785	1,780	1,780	1,788	1,795	1,810	1,850	1,881	1,921	1,942	2,002
100	1,792	1,795	1,773	1,770	1,750	1,740	1,745	1,745	1,750	1,767	1,791	1,822	1,855	1,882	1,931



Таблица 3

Значения  $C_2$  для стандартных колес

$z_1$ \ $z_2$	18	20	22	24	26	28	30	35	40	50	60	70	80	90	100
18	3,655	3,591	3,586	3,610	3,580	3,870	3,962	4,112	3,581	3,388	3,5	3,391	3,464	4,490	4,461
20	3,448	3,492	3,478	3,382	3,375	3,423	3,435	3,370	3,320	3,250	3,263	3,218	3,030	3,880	3,740
22	3,265	3,283	3,203	3,182	3,156	3,239	3,261	3,165	3,120	3,07	3,133	3,080	3,040	3,590	3,241
24	3,165	3,165	3,099	3,060	3,000	3,040	3,061	3,080	3,021	2,908	2,98	2,951	2,920	3,341	3,182
26	3,066	3,069	2,992	2,929	2,890	2,901	2,870	2,912	2,838	2,790	2,841	2,835	2,855	3,110	3,050
28	2,995	2,998	2,911	2,861	2,804	2,820	2,770	2,784	2,741	2,694	2,74	2,741	2,778	2,946	2,921
30	2,950	2,925	2,850	2,810	2,748	2,730	2,702	2,635	2,658	2,610	2,64	2,638	2,686	2,810	2,811
35	2,878	2,841	2,760	2,710	2,653	2,611	2,570	2,540	2,501	2,451	2,49	2,459	2,475	2,565	2,598
40	2,847	2,802	2,721	2,632	2,561	2,530	2,518	2,445	2,401	2,341	2,343	2,340	2,349	2,398	2,438
50	2,856	2,792	2,680	2,602	2,522	2,481	2,430	2,360	2,305	2,202	2,2	2,181	2,182	2,201	2,234
60	2,921	2,821	2,711	2,620	2,533	2,475	2,426	2,371	2,290	2,171	2,125	2,098	2,091	2,087	2,111
70	2,982	2,863	2,762	2,661	2,571	2,502	2,440	2,330	2,260	2,140	2,09	2,095	2,093	2,018	2,040
80	3,070	2,951	2,820	2,720	2,620	2,540	2,478	2,334	2,266	2,141	2,05	2,021	1,998	1,97	1,982
90	3,154	3,028	2,882	2,788	2,663	2,582	2,519	2,375	2,290	2,142	2,048	2,010	1,980	1,942	1,951
100	3,241	3,107	2,952	2,840	2,720	2,658	2,569	2,442	2,318	2,162	2,048	2,003	1,969	1,93	1,931





Скорость срединного удара при равноускоренном движении ведущего колеса и равномерном движении ведомого колеса, на основании уравнений (18) и (24), равна:

$$v_c = \sqrt{2\Delta_0 r_{01} \varepsilon_{1нач}} = \sqrt{2\Delta_0 r_{01} \omega_1^2 \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - \alpha)}{2\sqrt{K} - L \cos(\beta_0 - \alpha)} + \frac{z_1 + z_2}{z_2} \right] \operatorname{tg} \beta_0} = \\ = \omega_1 \sqrt{2\Delta_0 R_{e1} \left[ \frac{L \sin(\beta_0 - \alpha)}{2\sqrt{K} - L \cos(\beta_0 - \alpha)} + \frac{z_1 + z_2}{z_2} \right] \sin \beta_0},$$

то есть равна скорости, определенной предположением равномерного вращения ведущего колеса.

У реальных колес первоначальный нормальный зазор между ударяющейся парой зубьев будет меньше  $\Delta_0$  на величину  $\vartheta = \frac{p_H}{c}$ , называемую компенсируемой ошибкой, где

$p_H$  — удельная нормальная нагрузка на зубья,

$c$  — удельная жесткость пары зубьев, находящихся в кромочном зацеплении.

Следовательно, скорость срединного удара реальных колес определится по уравнениям:

$$v_c = C_1 v \sqrt{\frac{\Delta_0 - \vartheta}{d_1}}, \quad (25)$$

$$v_c = C_2 v \sqrt{\frac{\Delta_0 - \vartheta}{A_0}}. \quad (26)$$

\* \* \*

Установим связь между скоростями срединного и кромочного ударов, на основании которой можно будет также установить зависимости между силой срединного и кромочного ударов.

Скорость срединного удара равна разности между скоростью точки, лежащей на основной окружности ведущего колеса, с одной стороны, ведомого колеса, с другой — в момент заполнения зазора, возникшего вследствие ошибки в основном шаге.

Из рис. 1 имеем:

$$v_c = r_{01} \frac{d\varphi}{dt}; \quad \bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA},$$

или

$$v_D = v_A \cos(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma) = R_{e1} \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma)$$

Следовательно,

$$v_c = r_{01} \frac{d\varphi_1}{dt} - R_{e1} \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\beta_0 + \varphi_1 + \gamma) \dots \quad (27)$$

✓ Кромочный удар происходит, когда основной шаг ведомого колеса больше основного шага ведущего. В таком случае кромка ведомого колеса  $G$  войдет в контакт с профилем зуба ведущего колеса до теоретической линии зацепления (рис. 4). Скорость кромочного удара равна разности между скоростью точки  $F$  и проекцией скорости точки  $G$  на направление  $FG$ , то есть на нормаль к профилю ведущего колеса в точке первоначального контакта ударяющихся зубьев.

Имея в виду, что перед ударом угловые скорости колес постоянны и равны, соответственно,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из чертежа имеем:

$$v_F = r_{01} \omega_1 = r_{02} \omega_2; \quad v_G \cos(\beta_0 + \varphi_2 + \gamma) = R_{e2} \omega_2 \cos(\beta_0 + \varphi_2 + \gamma).$$

Следовательно, скорость кромочного удара будет равна:

$$v_k = r_2 \omega_2 - R_{e2} \omega_2 \cos(\beta_0 + \varphi_2 + \gamma). \quad (28)$$



Уравнения (27) и (28) показывают:

- 1) скорости кромочного и срединного удара для передач со стандартными колесами и с  $i = 1$  равны между собой;
- 2) скорость кромочного удара для замедляющей передачи равна скорости срединного удара для ускоряющей (и наоборот), вычисленных, исходя из предположения, что замедляющая и ускоряющая передачи образованы одной и той же парой колес, то есть изменяется лишь направление потока энергии. Ошибки в шаге в том и другом случае одинаковы.

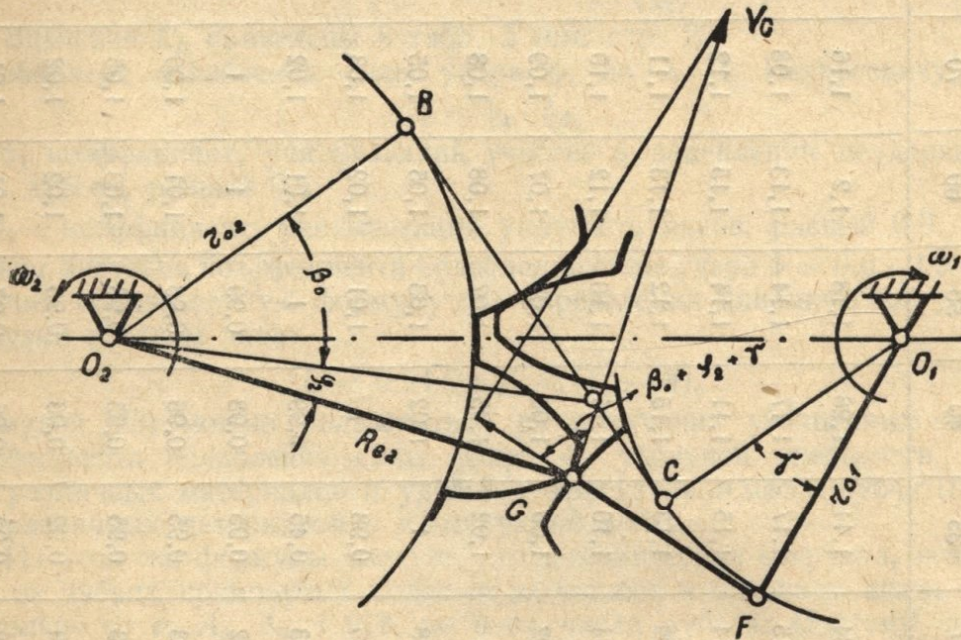


Рис. 4.

В таком случае соотношения между скоростями срединного и кромочного ударов легко устанавливаются на основании таблицы 3.

Результаты вычислений сведены в таблицу 4 (см. стр. 20).

\* \* \*

Динамическая удельная нагрузка  $U$ , возникающая из-за ошибок в основном шаге, определяется [4] по формуле:

$$U = \psi V_c \sqrt{mc} \tag{29}$$

или на основании (25) или (26):

$$U = \psi C_1 v \sqrt{\frac{mc(\Delta_0 - \vartheta)}{d_1}} \tag{30}$$

и

$$U = \psi C_2 v \sqrt{\frac{mc(\Delta_0 - \vartheta)}{A_0}}, \tag{31}$$

где  $\psi$  — коэффициент ослабления силы удара,

$m$  — удельная эффективная масса зубчатых колес в  $\frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}^2}$ ,

$c$  — удельная жесткость зубьев в  $\text{кг/см}^2$ .

Если принять, (по А. И. Петрусевичу), для цельнокованных стальных шестерни и колеса

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,0000036 d_1^2 i_{12}^2 \text{ кг сек}^2}{1 + i_{12}^2 \text{ см}^2},$$

а  $c = 165000 \text{ кг/см}^2$ ,



Таблица 4

Значения  $\frac{v_c}{v_k}$  для стандартных колес

$z_2 \backslash z_1$	18	20	22	24	26	28	30	35	40	50	60	70	80	90	100
18	1	1,01	1,10	1,14	1,18	1,30	1,34	1,44	1,26	1,18	1,2	1,16	1,14	1,40	1,38
20	0,99	1	1,06	1,07	1,10	1,14	1,15	1,17	1,17	1,14	1,13	1,08	1,09	1,28	1,16
22	0,91	0,941	1	1,05	1,05	1,11	1,14	1,15	1,11	1,14	1,15	1,12	1,08	1,20	1,10
24	0,88	0,931	0,95	1	1,01	1,06	1,09	1,13	1,15	1,12	1,13	1,11	1,07	1,20	1,12
26	0,85	0,91	0,95	0,99	1	1,03	1,04	1,10	1,15	1,10	1,12	1,10	1,08	1,17	1,12
28	0,77	0,88	0,90	0,94	0,97	1	1,02	1,06	1,08	1,08	1,07	1,09	1,09	1,13	1,14
30	0,741	0,87	0,88	0,91	0,96	0,99	1	1,02	1,05	1,07	1,08	1,08	1,08	1,11	1,09
35	0,70	0,86	0,87	0,88	0,91	0,99	0,48	1	1,02	1,03	1,05	1,05	1,05	1,09	1,07
40	0,80	0,86	0,90	0,87	0,87	0,92	0,96	0,98	1	1,01	1,02	1,03	1,05	1,05	1,05
50	0,85	1,87	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,46	0,99	1	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03
60	0,83	0,89	0,87	0,88	0,84	0,915	0,92	0,95	0,98	0,99	1	1	0,97	0,98	0,99
70	0,86	0,93	0,90	0,9	0,91	0,912	0,93	0,95	0,96	0,98	1,01	1,00	0,95	0,98	0,99
80	0,88	0,91	0,43	0,94	0,93	0,915	0,93	0,95	0,95	0,98	1,03	1,05	1	0,99	0,99
90	0,71	0,78	0,84	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,96	0,96	1,02	1,02	1,01	1	1,01
100	0,72	0,86	0,91	0,90	0,90	0,91	0,92	0,93	0,95	0,97	1,01	1,01	1,01	0,99	1



то из уравнения (31) получим упрощенное выражение для динамической удельной нагрузки:

$$U = \psi C_3 v \sqrt{A_0 (\Delta_0 - \vartheta)}, \quad (32)$$

где  $v$  — окружная скорость в  $см/сек$ ,  $\Delta_0$ ,  $\vartheta$  и  $A_0$  — в  $см$  (можно  $v$  брать в  $м/сек$ , тогда  $\Delta_0$  и  $\vartheta$  в  $\mu$ );

$$C_3 = C_2 \frac{0,12z_2}{z_1 + z_2} \sqrt{\frac{165}{1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2}}.$$

Значения  $C_3$  приведены в табл. 5 (см. стр. 22).

Коэффициент ослабления силы удара  $\psi$ , по А. И. Петрусевичу, равен

$$\psi = \psi_1 \cdot \psi_2,$$

где  $\psi_1$  коэффициент, учитывающий участие в зацеплении неударяющейся пары зубьев, равный 0,6,

$\psi_2$  — коэффициент, учитывающий упругость валов, равный 0,9.

Приняв значение коэффициента ослабления силы удара  $\psi = 0,6 \cdot 0,9 = 0,54$ , получим окончательную формулу для определения динамической удельной нагрузки в таком виде:

$$U = 0,54 C_3 v \sqrt{A_0 (\Delta_0 - \vartheta)}. \quad (33)$$

Формулой (33) можно пользоваться до получения уточненных значений коэффициента ослабления силы удара  $\psi$ , удельной жесткости зубьев для различных материалов и удельной эффективной массы зубчатых колес для различных материалов и конструкций колес.

Из этой же формулы следует, что динамическая нагрузка, возникающая на зубьях прямозубых колес из-за ошибок в основном шаге, зависит не только от  $v$ ,  $A_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $i$  и  $\vartheta$ , но и от числа зубьев. Поэтому формулу А. И. Петрусевича можно считать верной только при определенном числе зубьев на ведущей шестерне\*.

Простые подсчеты на основании таблицы показывают, что результаты вычислений по формуле (33) и по формуле А. И. Петрусевича совпадают лишь при  $z_1 = 30$  и  $z_2 = 30 \div 100$ .

При  $z_1 < 30$  по формуле (33) динамическая нагрузка получается больше, чем по формуле А. И. Петрусевича, а при  $z_1 \geq 40$  — меньше.

Отсюда вытекает преимущество мелкомодульных шестерен, у которых, кроме указанного,  $\Delta_0$  меньше, чем у крупномодульных. Применяя минимальный модуль, допустимый из условия изгибной прочности прямого зуба, получают значительный выигрыш в весе колес.

\* \* \*

Выше отмечалось, что естественнее предполагать равномерность вращения большого колеса после схода кромки ведущей шестерни с теоретической линии зацепления. Малое колесо в таком случае вращается либо ускоренно (передача замедляющая, малое колесо — ведущее), либо замедленно (передача ускоряющая, малое колесо — ведомое).

Для ускоряющей передачи угловое замедление малого колеса (ведомого) определится по уравнению (11), а для замедляющей передачи угловое ускорение малого колеса (ведущего) — по уравнению (24).

При достаточно больших значениях  $\omega_1$  силы инерции малого колеса, возникшие в момент схода контактной кромки с теоретической линии зацепления, дадут момент, превышающий внешний момент, приложенный к этому колесу. В таком случае произойдет отрыв боковой поверхности

\* Формула  $U = 0,8 v \sqrt{\frac{A_0 (\Delta_0 - \vartheta)}{i}}$  выведена А. И. Петрусевичем для замедляющей передачи.



Значение  $S_3$  для стандартных колес

Таблица 5

$z_1$ \ $z_2$	18	20	22	24	26	28	30	35	40	50	60	70	80	90	100
18	2,002	1,95	1,932	1,909	1,849	1,757	1,782	1,906	1,568	1,313	1,190	1,034	0,945	1,124	1,037
20	1,871	1,900	1,900	1,821	1,759	1,799	1,722	1,771	1,527	1,333	1,186	1,059	0,963	1,126	0,942
22	1,760	1,804	1,821	1,726	1,705	1,72	1,646	1,66	1,497	1,323	1,182	1,083	0,979	1,068	0,903
24	1,656	1,710	1,667	1,664	1,638	1,642	1,594	1,592	1,469	1,312	1,246	1,104	0,997	1,042	0,922
26	1,592	1,633	1,603	1,609	1,572	1,579	1,549	1,549	1,448	1,306	1,217	1,121	1,029	1,038	0,938
28	1,519	1,563	1,553	1,538	1,530	1,537	1,500	1,472	1,425	1,301	1,219	1,119	1,051	1,035	0,949
30	1,42	1,501	1,500	1,506	1,479	1,485	1,496	1,453	1,404	1,995	1,215	1,126	1,056	1,028	0,959
35	1,353	1,383	1,366	1,396	1,388	1,391	1,388	1,386	1,363	1,274	1,195	1,132	1,071	1,034	0,98
40	1,244	1,285	1,294	1,309	1,314	1,313	1,324	1,327	1,324	1,258	1,205	1,140	1,081	1,040	8,995
50	1,095	1,139	1,158	1,179	1,184	1,196	1,209	1,230	1,249	1,204	1,188	1,143	1,097	1,058	1,023
60	0,994	1,029	1,050	1,069	1,089	1,079	1,104	1,050	1,165	1,163	1,160	1,134	1,102	1,172	1,048
70	0,911	0,95	0,973	0,989	1,004	1,025	1,034	1,074	1,099	1,021	1,133	1,117	1,100	1,076	1,060
80	0,874	0,881	0,905	0,965	0,941	0,974	0,977	1,018	1,042	1,079	1,098	1,097	1,090	1,075	1,058
90	0,806	0,825	0,849	0,869	0,883	0,903	0,920	0,960	0,992	1,032	1,057	1,074	1,073	1,063	1,057
100	0,768	0,784	0,804	0,821	0,847	0,855	0,876	0,927	0,951	0,993	1,024	1,042	1,056	1,054	1,052



зуба ведомого колеса от кромки ведущего. Значение скорости срединного удара тогда не определяется уравнениями (25) и (26), а зависит от величины внешнего момента, приложенного к малому колесу (шестерне) и момента инерции шестерни и масс, жестко с ней связанных.

Обозначим:

$M_{ш}$  — удельный внешний момент, приложенный к шестерне (малому колесу),

$I_{ш}$  — удельный момент инерции масс шестерни и жестко связанных с ней деталей относительно оси вращения.

Установим условие отрыва зуба ведомого колеса от кромки ведущего колеса в зависимости от величины окружной скорости колес. Условие отрыва напишется так:

$$J_{ш} \epsilon_{ш} > M_{ш}$$

Это неравенство на основании уравнения (18) дает:

$$\frac{v_c^2}{2\Delta_0 r_{ош}} > \frac{M_{ш}}{I_{ш}} \quad (34)$$

Считая, что на валу шестерни не закреплено других масс, кроме самой шестерни с моментом инерции  $J_{ш} = 36 \cdot 10^{-7} \cdot d_{ш}^2 r_{ош}^2 \frac{кг \cdot см \cdot сек^2}{см}$ , из (20) и (34) получаем:

$$\frac{C_1^2 v_{отр}^2 \Delta_0}{2\Delta_0 r_{ош} d_1} > \frac{\rho_n r_{ош}}{36 \cdot 10^{-7} \cdot d_{ш}^2 r_{ош}^2},$$

или

$$v_{отр} \geq \frac{1000}{C_1 d_{ш}} \sqrt{\frac{\rho_n d_1}{1,8}}, \quad (35)$$

где  $d_1 = d_{ш}$  для замедляющей передачи и  $d_1 = d_h$  — для ускоряющей передачи в см;

$\rho_n$  — удельное нормальное давление на зубья от момента  $M_{ш}$ , в  $\frac{кг}{см}$ .

Из уравнения контактной прочности зубьев имеем:

$$\rho_n = \frac{R_c^2 \frac{d_{ш}}{2} \sin \alpha \cdot \frac{d_h}{d_{ш}}}{0,145^2 K \cdot E \cdot \left(\frac{d_h}{d_{ш}} + 1\right)} \quad (36)$$

где  $R_c$  — допускаемое контактное напряжение сдвига для прямозубых колес в  $кг/см^2$ ,

$K$  — коэффициент нагрузки,

$E$  — модуль упругости в  $кг/см^2$ .

Подставив значение  $\rho_n$  в неравенство (35), получим для стандартных стальных колес  $\left[\alpha = \alpha_0 = 20^\circ; E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}\right]$ :

$$v_{отр} \geq \frac{1,465 R_c}{C_1} \sqrt{\frac{d_1}{K d_{ш} \left(1 + \frac{z_{ш}}{z_h}\right)}}. \quad (37)$$

Если принять для Ст45 улучшенной  $R_c = 1750 \frac{кг}{см^2}$  и среднее значение  $K = 1,5$ , то для ускоряющих передач с  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{20}{100}$  получим:

$$v_{отр} \geq 890 \text{ см/сек.}$$



Для замедляющих передач при тех же значениях  $R_c$ ;  $K = 1,5$  и  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{100}{20}$  условием отрыва будет  $v_{отр} \geq 1065 \frac{см}{сек}$ .

При  $z_1 = z_2 = 30$ ;  $v_{отр} \geq 550 \frac{см}{сек}$ .

Результаты приведенных вычислений показывают, что окружная скорость, обуславливающая отрыв ведомого колеса в момент схода кромки ведущего колеса с теоретической части линии зацепления, изменяется в больших пределах. Величина ее зависит от конструкции ведомого колеса, допускаемого контактного напряжения сдвига и чисел зубьев на колесах. В передачах с небольшим числом зубьев и малым передаточным числом отрыв происходит сравнительно при небольших окружных скоростях.

Из уравнения (37) имеем для замедляющих передач, которые находят преимущественное использование в машинах:

$$v_{отр} = \frac{1,465 R_c}{C_1} \sqrt{\frac{1}{K \left(1 + \frac{z_{ш}}{z_k}\right)}}. \quad (37a)$$

Следовательно, для заданных чисел зубьев шестерни и колеса минимальная окружная скорость, при которой произойдет отрыв зубьев в начальный момент кромочного зацепления перед срединным ударом, прямо пропорциональна допускаемому контактному напряжению сдвига.

На рис. 5 приведены графики минимальной окружной скорости отрыва при кромочном зацеплении перед срединным ударом для различных значений чисел зубьев шестерни и колеса, осуществляющих передаточные числа от 1 до 5. После отрыва малое колесо находится под действием момента  $M_{ш}$  и момента трения в подшипниках.

Пренебрегая им, угловое ускорение (или замедление) малого колеса определится из уравнения:

$$M_{ш} = I_{ш} \epsilon'_{ш};$$

то есть

$$\epsilon'_{ш} = \frac{M_{ш}}{I_{ш}}. \quad (38)$$

Следовательно, начальная скорость при срединном ударе, на основании уравнения (18), определится так ( $\omega_k = \text{const}$ ):

$$v'_c = \sqrt{2\Delta_0 r_{ош} \epsilon'_{ш}} = \sqrt{\frac{2\Delta_0 r_{ош} M_{ш}}{I_{ш}}}$$

или

$$v'_c = \sqrt{\frac{2\Delta_0 \rho_n}{m_{ш}}}, \quad (39)$$

где  $m_{ш}$  — масса малого колеса, приведенная к основной окружности.

Для стандартных стальных колес уравнение (39) принимает вид:

$$v'_c = 0,0147 R_c \sqrt{\frac{\Delta_0}{K d_{ш} \left(\frac{z_{ш}}{z_k} + 1\right)}}, \quad (40)$$

где  $d_{ш}$  — диаметр начальной (делительной) окружности малого колеса в см,

$\Delta_0$  — в микронах,

$K$  — коэффициент нагрузки



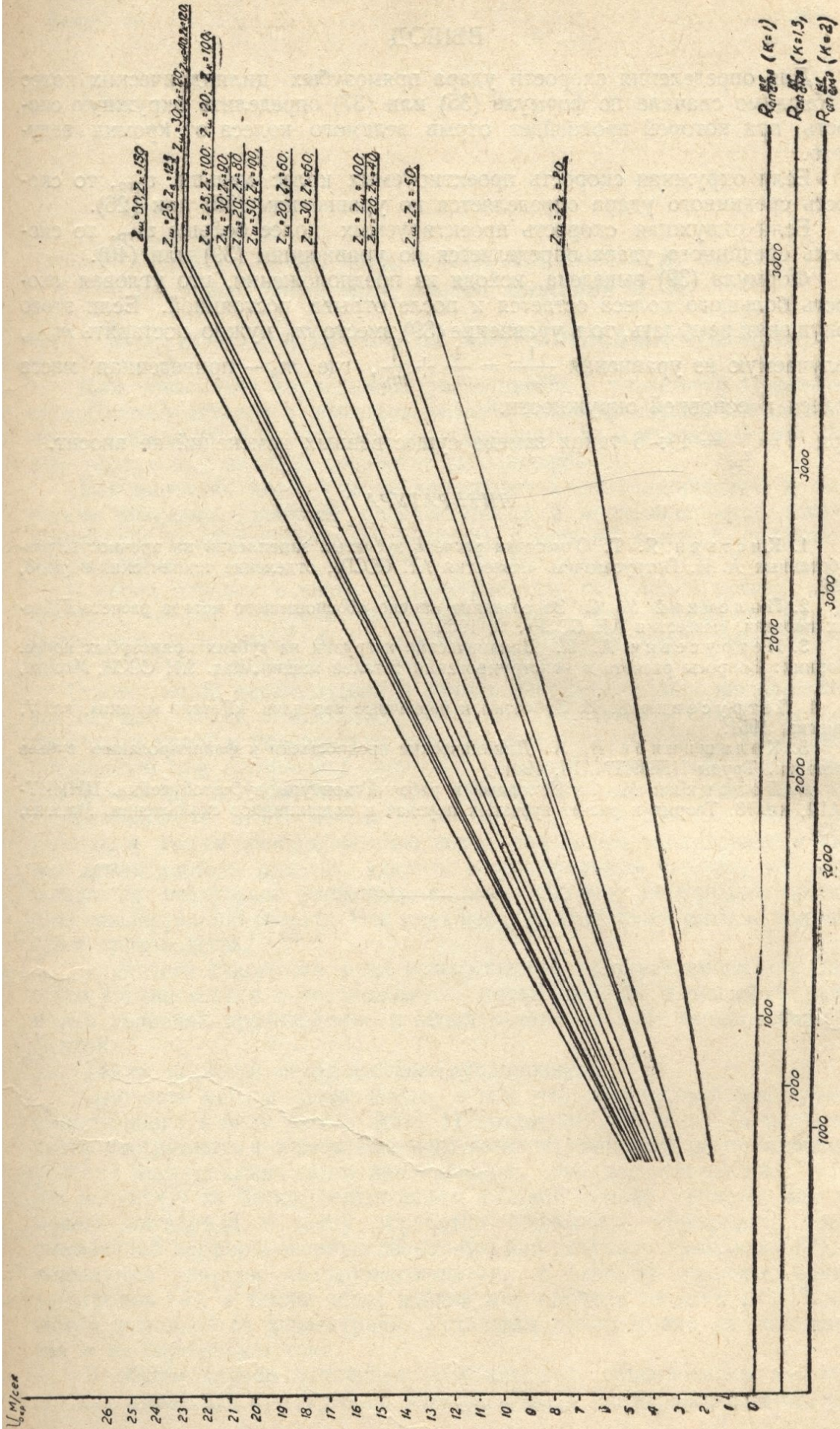


Рис. 5.



## ВЫВОД

Для определения скорости удара прямозубых цилиндрических колес необходимо сначала по формуле (35) или (37) определить окружную скорость, при которой произойдет отрыв ведомого колеса от кромки ведущего.

Если окружная скорость проектируемых колес меньше  $v_{отр}$ , то скорость срединного удара определяется по уравнениям (25) или (26).

Если окружная скорость проектируемых колес больше  $v_{отр}$ , то скорость срединного удара определяется по уравнениям (39) или (40).

Формула (39) выведена, исходя из предположения, что угловая скорость большого колеса остается и после отрыва постоянной. Если этого допущения не делать, то в уравнение (39) вместо  $m_{ш}$  нужно поставить  $m_{эфф}$ , получаемую из уравнения  $\frac{1}{m_{эфф}} = \frac{1}{m_{ш}} + \frac{1}{m_k}$ , где  $m_k$  — приведенная масса колеса к основной окружности.

При  $i = \frac{z_k}{z_{ш}} = 4 \div 6$  такая замена существенных изменений не вносит.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кистьян Я. Г. О методах расчета зубчатых зацеплений на прочность, разработанных А. И. Петрусевичем. «Известия АН СССР», отделение технических наук, 8, 1952.
2. Полоцкий М. С. За создание научно обоснованного метода расчета зубчатых передач. «Известия АН СССР», 9, 1952.
3. Петрусевич А. И. Динамические нагрузки на зубьях прямозубых колес. Сборник: Вопросы расчета и конструирования деталей машин, изд. АН СССР, Москва, 1942.
4. Петрусевич А. И. Зубчатые и червячные передачи. «Детали машин», гл. V, Машгиз, 1951.
5. Калашников Н. А. Динамические предпосылки к фланкированию зубьев шестерен. Труды ЦНИИТМАШ, 1941.
6. Полоцкий М. С. Исходный и рабочий контуры зубчатой рейки. ЦНИИТМАШ, кв. 13. Теория и расчет зубчатых передач и подшипников скольжения. Машгиз, 1948.