УДК 621.44.533.697

Л.Г. Бойко, А.Е. Демин, М.А. Ковалев

МЕТОД РАСЧЕТА ДО- И ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

В настоящее время при численном исследовании трансзвуковых течений, как правило, используется нестационарная форма записи системы уравнений газовой динамики в сочетании с принципом установления по времени. Такой подход является универсальным, и его применение оправдано при наличии в потоке мощных скачков уплотнения и их взаимодействия. При небольших сверхзвуковых скоростях потока ($M \le 1.3 - 1.5$) предпочтительными являются методы, построенные на решении системы уравнений в стационарной форме, имеющие в отличие от названных выше методов меньшую размерность за счет исключения времени как независимой переменной. Вследствие этого такие методы в указанном диапазоне чисел Маха более эффективны.

Одним из классических подходов к расчету стационарных дозвуковых течений является решение уравнения потенциала скорости. Введение искусственной сжимаемости /1/ позволяет расширить область применения этого подхода и сделать его пригодным для расчета трансзвуковых течений. Серьезным недостатком таких методов является допущение о безвихревом характере течения, которое во многих случаях, имеющих практический интерес, неправомерно. Использование представления о функции тока при решении уравнений движения газа позволяет существенно расширить круг решаемых задач.

В данной работе предложен метод расчета до- и трансзвуковых невязких течений в осесимметричных каналах с криволинейными образующими. Система уравнений движения сведена к дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции тока (уравнению функции тока). За счет введения обобщенной системы координат, ось φ которой совпадает с окружным направлением, см. рис. 1, появляется возможность существенно упростить постановку граничных условий и рассчитывать течения в каналах сложной формы.

Вывод основных уравнений приведен в работе /2/. Для случая свободного канала уравнение функции тока имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \xi} = U , \qquad (1)$$

где

$$P = g_{\xi\xi} \frac{1}{\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - g_{\xi\eta} \frac{1}{\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad Q = g_{\xi\eta} \frac{1}{\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - g_{\eta\eta} \frac{1}{\rho\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

$$U = \rho\sqrt{g}\left[\frac{dI^*}{d\psi} - T\frac{dS}{d\psi} - \frac{\Gamma}{r^2}\frac{d\Gamma}{d\psi}\right].$$

Здесь ψ- функция тока, ρ- плотность, T- статическая температура, I^*- полная энтальпия, S- энтропия, Γ- циркуляция, g_{ij}, g- компоненты метрического тензора и его определитель.

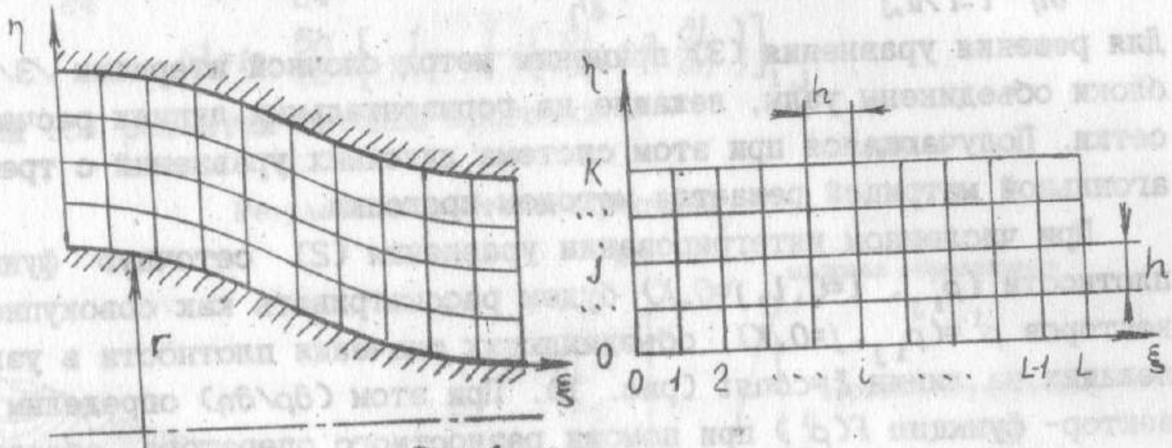

Рис. 1.

Ключевой для рассматриваемого метода является проблема определения плотности, входящей в качестве неизвестной в уравнение функции тока (1). Плотность как функция потока массы является двузначной: одно значение соответствует дозвуковому режиму, а другое- сверхзвуковому, что при расчете околозвуковых течений вызывает затруднения. Для устранения этой неопределенности при определении плотности используем уравнение движения, записанное в следующей форме

$$\vec{v}\times rot\,\vec{v} - grad\, I^* + grad\, I - \frac{k-1}{k}\frac{1}{\rho}\; grad\,(\rho I) = 0.$$

Домножив его скалярно на вектор скорости $\vec{v}$, получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi} + \theta\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = \rho\,\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{I}\left[\frac{\partial I}{\partial\xi} + \theta\frac{\partial I}{\partial\eta}\right], \qquad (2)$$

где

$$\theta = v^{\eta}/v^{\xi} = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]:\left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right].$$

На границах AD и BC задаются значения функции тока. На границах AB и CD считаются известными либо распределение функции тока $\psi=f(\eta)$ (условия I типа), либо распределение ее производной $(\partial\psi/\partial\xi)=f(\eta)$ (условия II типа).

Уравнение функции тока (1) аппроксимируем с помощью центральных разностей

$$P_{i,j+1/2} - P_{i,j-1/2} - Q_{i+1/2,j} + Q_{i-1/2,j} = hU_{i,j}. \qquad (3)$$

Разностные аналоги частных производных ψ, входящие в уравнение (3), запишем в виде, обеспечивающем второй порядок аппроксимации:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]_{i-1/2,j} = \frac{\psi_{i,j}-\psi_{i-1,j}}{h}, \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]_{i,j-1/2} = \frac{\psi_{i,j}-\psi_{i,j-1}}{h},$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]_{i,j-1/2} = \frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}+\psi_{i+1,j-1}-\psi_{i-1,j-1}}{4h},$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]_{i-1/2,j} = \frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}+\psi_{i-1,j+1}-\psi_{i-1,j-1}}{4h}.$$

Для решения уравнения (3) применим метод блочной итерации /3/. В блоки объединены узлы, лежащие на горизонтальных линиях расчетной сетки. Получающаяся при этом система линейных уравнений с трехдиагонльной матрицей решается методом прогонки.

При численном интегрировании уравнения (2) сеточную функцию плотности $\{\rho_{ij},\ i=0,l,j=0,K\}$ будем рассматривать как совокупность векторов $\rho^i=\{\rho_{ij},\ j=0,K\}$, объединяющих значения плотности в узлах, лежащих на линии $\xi=const$ (рис. 1). При этом $(\partial\rho/\partial\eta)$ определим как вектор- функцию $F(\rho^i)$ при помощи разностного оператора, обеспечивающего второй порядок аппроксимации

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right]^i_j = \frac{\rho_{i,j+1}-\rho_{i,j-1}}{2h}, \quad j\neq 0,K,$$

а само уравнение (2) будем рассматривать как систему уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi}=f(\rho,\xi), \quad j=0,\dots,K, \tag{4}$$

где $f(\rho,\xi)=\rho\ \frac{1}{k-1}\ \frac{1}{I}\left[\frac{\partial I}{\partial\xi}+\theta\ \frac{\partial I}{\partial\eta}\right]-\theta\left[\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right]$.

Далее будем опускать индекс j, имея в виду, что при этом значения плотности будут определяться по единому алгоритму для всех $j=0,\dots,K$ для заданного i. Для $i=0$ (рис. 1) значения плотности известны из граничных условий. Для $i=1$ для решения уравнения (4) используется метод Рунге- Кутта

$$\tilde{\rho}^i=\rho^{i-1}+hf(\rho^{i-1},\xi^{i-1}),$$

$$\rho^i=(f(\rho^{i-1},\xi^{i-1})+f(\tilde{\rho}^i,\xi^i))/2,$$

а для $i=2,\dots,L$ используется неявный метод Адамса

$$\rho^i=\rho^{i-1}+h(5f(\rho^i,\xi^i)+8f(\rho^{i-1},\xi^{i-1})-f(\rho^{i-2},\xi^{i-2}))/12. \tag{5}$$

Выражение (5) сводится к системе уравнений

$$a^j\rho_{i,j-1}+b^j\rho_{i,j}+c^j\rho_{i,j+1}=d^j, \quad \text{или}$$

$$A\rho^i=D \tag{6}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} b^0 & c^0 & 0 & \cdots \\ a^1 & b^1 & c^1 & \cdots \\ \vdots & a^{K-1} & b^{K-1} & c^{K-1} \\ \cdots & 0 & a^K & b^K \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} d^0 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^{K-1} \\ d^K \end{bmatrix}.$$

Для определения a, b, c и d рассмотрим (4) для $j=0,\ldots,K$.

При $j=0,K$ $\theta=0$, поэтому $c^j=0$, $a^j=0$,

$$b^j=1-\frac{5h}{12}\left[\frac{1}{k-1}\ \frac{1}{I}\ \frac{\partial I}{\partial \xi}\right]_{i,j},\quad d^j=\rho_{i-1,j}+\frac{h}{12}(8f_{i-1,j}-f_{j-2,j}).$$

Для $j=1,\ldots,K-1$ получим

$$a^j=-\frac{5}{24}\theta,\quad c^j=\frac{5}{24}\theta,\qquad d^j=\rho_{i-1,j}+\frac{h}{12}(8f_{i-1,j}-f_{j-2,j}),$$

$$b^j=1-\frac{5h}{12}\left[\frac{1}{k-1}\ \frac{1}{I}\left[\frac{\partial I}{\partial \xi}+\theta\frac{\partial I}{\partial \eta}\right]\right]_{i,j}$$

Система (5) решается методом прогонки.

Результаты тестового расчета

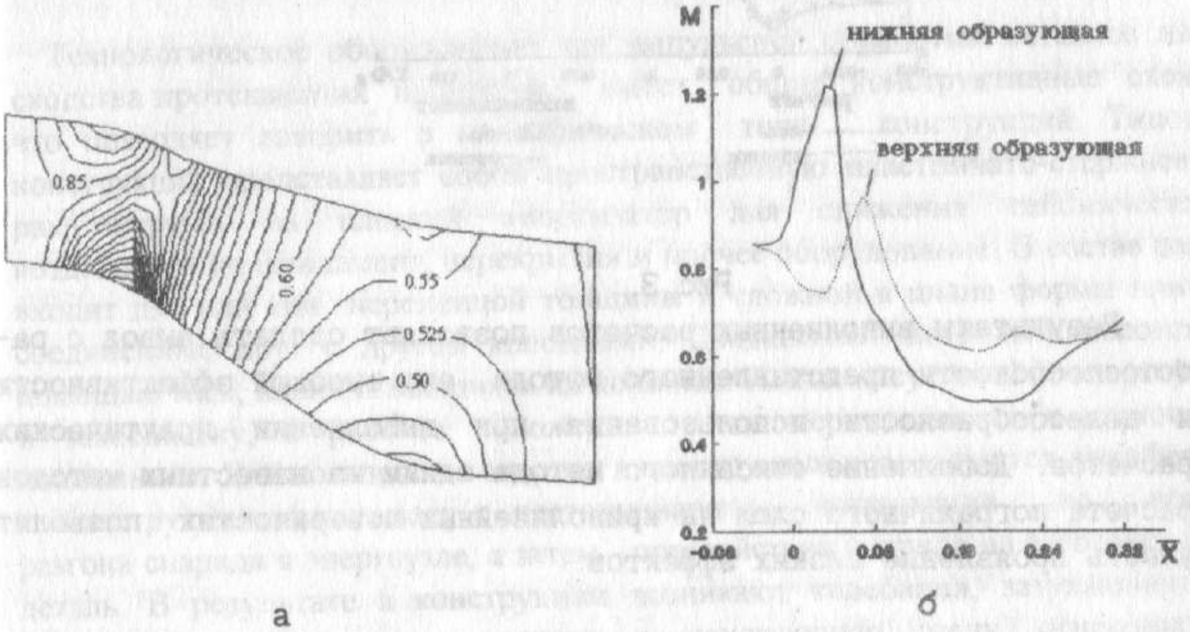

Рис. 2.

В качестве объекта численного исследования выбран переходный канал компрессора современного авиационного двигателя. Для получения трансзвукового режима течения один из тестовых расчетов выполнен при увеличенном по сравнению с номинальным значении расхода, что соответствует значению числа Маха на входе в канал $M=0.82$. На открытых границах расчетной области заданы условия II типа. На рис. 2а, б показаны полученные изолинии чисел Маха и распределение чисел M вдоль образующих канала, демонстрирующие скачок уплотнения на внутренней стенке.

Для оценки достоверности получаемых результатов проведены расчеты течения в сопле Витошинского с различными длинами криволинейного участка. На рис. 3 приведены результаты расчета одного из вариантов сопла на режиме, обеспечивающем скорость на срезе $v_2=100.$ м/с, в сопоставлении с опытными данными, приведенными в работе /4/. Величина среднеквадратичного отклонения, посчитанного для трех вариантов сопла, составляет 5.1%.

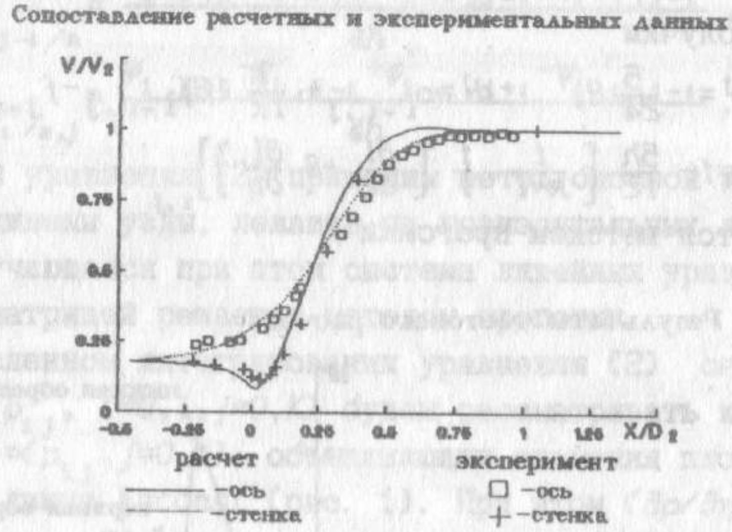

Рис. 3.

Результаты выполненных расчетов позволяют сделать вывод о работоспособности представленного метода, его высокой эффективности и целесообразности использования при выполнении практических расчетов. Дополнение описанного метода одним из известных методов расчета пограничного слоя на криволинейных поверхностях позволит учесть проявление вязких эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хафез М., Лоувелл Д. Численное решение уравнения для функции тока в случае трансзвуковых скоростей// Аэрокосмич. техн. - 1983.- т.1. - N 11.-с.63-73.

2. Бойко Л.Г., Ковалев М.А. К расчету осесимметричного течения в проточной части турбомашин// Авиационно- космическая техника и технология.- Тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н.Е. Жуковского 1995 г.- Харьков. - 1996г. - с. 88-92.

3. Саульев В.К.. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток.- М.: ГИФМЛ. - 1960. - 324с.

4. Быркин А.П., Кудрявцева Л.И., Пономарев С.П., Якушева В.Л. Теоретическое и экспериментальное исследование течения газа в коллекторах (соплах) при малых дозвуковых скоростях// Уч. зап. ЦАГИ.- 1983.- т.14.- N5.- с.100-103.