ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 16 1955

Канд. физико-матем. наук, доцент **С. М. Бронштейн**
Канд. физико-матем. наук, доцент **М. С. Шун**

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ — произвольная (R) — интегрируемая на отрезке $[-1, +1]$ функция и пусть

$$P_{2n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} h_k^{(n)}(x) f(x_k), \tag{1}$$

где

$$h_k^{(n)}(x) \equiv h_k(x) = \left[\frac{T_n(x)}{n(x - x_k)}\right]^2 (1 - xx_k)$$

её интерполяционный многочлен Фейера с чебышевскими узлами [1].

Целью этой заметки является доказательство теоремы:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} P_{2n-1}(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Для этого положим $x = \cos\theta$, $x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi$, после чего подлежащее доказательству равенство (2) принимает вид:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} P_{2n-1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \tag{2_1}$$

Из (1) следует:

$$\int_0^{\pi} P_{2n-1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} f(\cos\theta_k), \tag{3}$$

где

$$\lambda_k^{(n)} = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \sin\theta \frac{1 - \cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2} d\theta. \tag{4}$$

Пусть

$$U(\alpha) = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \sin\theta \frac{1 - \cos\theta\cos\alpha}{(\cos\theta - \cos\alpha)^2} d\theta. \tag{4_1}$$

Легко видеть, что

$$U(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}(I_n \sin\alpha), \tag{4_2}$$

где

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 n\theta \sin\theta d\theta}{\cos\theta - \cos\alpha} = \ln \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} A_n(\alpha). \tag{4_3}$$

Здесь

$$A_n(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2n\theta \sin\theta\, d\theta}{\cos\theta - \cos\alpha} \tag{4_4}$$

и интеграл понимается в смысле главного значения.

$A_n(\alpha)$ удовлетворяет следующему уравнению в конечных разностях:

$$A_{n+1}(\alpha) - 2A_n(\alpha)\cos 2\alpha + A_{n-1}(\alpha) = -\frac{8\cos\alpha}{4n^2-1}. \tag{5}$$

Решение этого уравнения дает:

$$A_n(\alpha) = c_1(\alpha)\cos 2n\alpha + c_2(\alpha)\sin 2n\alpha - \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 2(n-k)\alpha}{4k^2-1}$$

и так как из (4_4) следует:

$$A_0(\alpha) = 2\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad A_1(\alpha) = 4\cos\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

то окончательно имеем:

$$A_n(\alpha) = 2\cos 2n\alpha \ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2(n-k)\alpha}{4k^2-1} + \frac{2}{\sin\alpha}\sin 2n\alpha. \tag{5_1}$$

Теперь (4_2) дает:

$$U(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin 2(1+\cos 2n\alpha)\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2n\alpha - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2(n-k)\alpha}{4k^2-1}\right\}.$$

Так как $\lambda_k^{(n)} = U(\theta_k)$ и учитывая, что $\cos n\theta_k = 0$, $\sin 2n\theta_k = 0$, $\cos 2n\theta_k = -1$, то получаем:

$$\lambda_k^{(n)} = 2n - 4\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{\cos 2k\theta_k}{4k^2-1} =$$

$$= 2n - 4n\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k\theta_k}{4k^2-1} + 4\sum_{k=1}^{n}k\frac{\cos 2k\theta_k}{4k^2-1}.$$

Но, при $n \to +\infty$, $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k\alpha}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\alpha}{4k^2-1} + \varepsilon_n =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \frac{1}{2} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0$$

и так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k\theta_k}{4k^2-1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^2-1} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}\right) = 0(\ln n),$$

то

$$\lambda_k^{(n)} = n\pi(\sin\theta_k + \varepsilon_n'), \quad \varepsilon_n' \to 0. \tag{6}$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} P_{2n-1}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\cos\theta_k)\sin\theta_k + \frac{\varepsilon_n'}{n}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Теорема доказана.

Легко теперь получить следующее обобщение этой теоремы:

$$\int_{-1}^{x} P_{2n-1}[f, t]\, dt \rightrightarrows \int_{-1}^{x} f(t)\, dt \tag{7}$$

для любого $x \in [-1, 1]$

Идея нижеследующего рассуждения принадлежит С. М. Бронштейн [2].

Пусть
$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & -1 \leqslant t < x \\ 0 & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $f^*(x)$ и $f(x)$ одновременно интегрируемы.

Так как (1)
$$P_{2n-1}[f^*, t] \rightrightarrows 0 \qquad x \leqslant t \leqslant 1,$$
то
$$\int_{-1}^{1} P_{2n-1}[f^*, t]\, dt = \int_{-1}^{x} P_{2n-1}[f, t]\, dt + \varepsilon_n = \int_{-1}^{1} f^*(t)\, dt + \varepsilon_n' = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt + \varepsilon_n'$$

Таким образом, (7) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гос. технич.-теор. издательство, Москва — Ленинград, 1934.

2. Бронштейн С. М. О многочленах С. Н. Бернштейна для интегрируемых функций. Труды Харьковского авиационного института, выпуск 16, 1954.