УДК 621.396.96

А.Д.Абрамов, канд.техн.наук.

В.А.Ананьев, канд.техн.наук

Тест для определения числа пространственно-распределенных источников излучения шумовых сигналов.

Оптимальные процедуры оценивания числа неразрешаемых по Релею шумовых сигналов по совокупности пространственно-временных выборок требуют вычисления собственных значений ковариационной матрицы вектора наблюдений, размер которой определяется числом элементов антенной решетки (АР) /I/. При решении двумерных задач (плоская АР) число элементов возрастает, что вызывает сложности реализации средствами вычислительной техники оптимальных тестов.

Цель настоящей работы – синтезировать проще реализуемые алгоритмы оценки числа упомянутых сигналов.

Пусть эквидистантная АР содержит в плоскости ХОУ $L = M \times K$ одинаковых приемных элемента. Фазовые центры их расположены в узлах прямоугольной сетки с координатами $x_{m\ell} = d_x(m-1)$, $y_{m\ell} = d_y(\ell-1)$, $m = \overline{1,M}$, $\ell = \overline{1,K}$, d_x и d_y – расстояние между соседними элементами вдоль осей ОХ и ОУ соответственно. При заданной конфигурации АР задача определения числа двумерных сигналов для пассивных систем формулируется так. Для некоторой совокупности N шумовых источников излучения с угловыми координатами Θ_p, Φ_p ($p = \overline{1,N}$) выборка комплексных огибающих в τ-й момент времени ($\tau = \overline{1,W}$) на выходах приёмных трактов АР определяется ($M \times K$)-матрицей $U(\tau)$ наблюдений

$$U(\tau) = \left\| U_{m\ell}(\tau) \right\| = \Lambda E_N(\tau) B + \mathcal{E}(\tau) \qquad (1)$$

Здесь элементы a_p и b_p ($p = \overline{1,N}$) пеленгационных матриц Λ и B

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{M-1} & a_2^{M-1} & \cdots & a_N^{M-1} \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^{K-1} & b_2^{K-1} & \cdots & b_N^{K-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

связаны с угловыми координатами Q_p и Φ_p источников соотношениями

$$a_p = \exp(j2\pi d_x \sin Q_p \cos\Phi_p/\lambda),$$
$$b_p = \exp(j2\pi d_y \sin Q_p \sin\Phi_p/\lambda), \qquad (3)$$

λ - рабочая длина волны, $\mathcal{E}(\tau) = \| \mathcal{E}_{m\ell}(\tau) \|$ -гауссовский случайный процесс(шум,вносимый каналами решетки) с характеристиками

$$\langle \mathcal{E}(\tau) \rangle = 0, \ \langle \mathcal{E}(\tau)\, \mathcal{E}^+(h) \rangle = 2\sigma_0^2\, \delta_\tau^h\, I_M, \qquad (4)$$

где I_M - единичная матрица размера ($M \times M$), δ_τ^h -символ Кронике-ра, $2\sigma_0^2$ - мощность помехи, $\mathcal{E}^+(\tau)$ - транспонированная матрица, сопряженная с $\mathcal{E}(\tau)$, $\langle \mathcal{E}(\tau)\, \mathcal{E}^+(h) \rangle$ - ($M \times M$)-размерная ковариационная матрица статистически независимого от сигнала аддитивного шума, $U_{m\ell}(\tau)$ - комплексная огибающая на выходе элемента АР с номером $m\ell$

$$U_{m\ell}(\tau) = \sum_{p=1}^{N} E_p(\tau)\, a_p^{m-1}\, b_p^{\ell-1} + \mathcal{E}_{m\ell}(\tau) \qquad (5)$$

Комплексные амплитуды $E_p(\tau)$ ($p = 1, N$)-взаимонезависимые случайные величины с нулевым средним и дисперсиями $2\sigma_p^2 = \langle E_p(\tau) E_p^+(\tau) \rangle$,а $E(\tau)$ - диагональная матрица $E(\tau) = \mathrm{diag}(E_1(\tau), E_2(\tau), \ldots, E_N(\tau))$.Из приведенных соотношений вытекает, что $\langle U(\tau) \rangle = 0$, а ($M \times M$) - размерная ковариационная матрица R_N гауссовской статистики $U(\tau)$ связана с Λ равенством

$$R_N = \Lambda \Psi_N \Lambda^+ + 2\sigma_0^2\, I_M \qquad (6)$$

где $\Psi_N = \langle E(\tau)\, B B^+ E^+(\tau) \rangle$.

Требуется разработать процедуру оценивания неизвестного N при отсутствии априорных сведений о Q_p, Φ_p, $2\delta_p^2$, $2\delta_o^2$, $p=\overline{1,N}$.

Пусть H_c : $R_c = 2\delta_o^2 I_M + \Lambda \Psi_c \Lambda^+$ - гипотеза о наличии в наблюдаемом процессе (I) C сигналов. Стратегия оптимального по критерию отношения правдоподобия (ОП) теста принятия решения предписывает формирование последовательности критических статистик $l_c = \ln L_c$ (L_c - отношение правдоподобия)для фиксированных R_c соответствующих выдвигаемой гипотезе H_c /I / :

$$l_c = W\left[tr\, S_M R_c^{-1} + \ln|S_M| - \ln R_c - M \right] \tag{7}$$

где $tr\,T$ и $|T|$ -след и определитель матрицы T , а

$$S_M = \frac{1}{W} \sum_{r=1}^{W} U(r) U^+(r) \tag{8}$$

Для дальнейшего решения запишем разложение эрмитовой матрицы R_c по собственным значениям ν_g и собственным векторам V_g ($g = \overline{1,M}$) /2/ :

$$R_c = \sum_{g=1}^{c} \nu_g V_g V_g^+ + \sum_{g=c+1}^{M} \nu_{c+1} V_g V_g^+ \tag{9}$$

Как следствие разложения : если справедлива гипотеза H_c , то (M-C) собственных значений ν_g ($g = \overline{C+1,M}$) равны между собой. Альтернатива : среди корней ν_g ($g = \overline{C+1,M}$) есть хотя бы один,существенно отличающийся по величине от остальных. При таком подходе l_c (7) можно рассматривать,во-первых,как достаточную для проверки значимости разности между (M- C) наименьшими собственными значениями φ_g ($g = \overline{C+1,M}$) выборочной ковариационной матрицы S_M. Во-вторых, определение числа N ,используя результаты работы /I/ ,свести к формированию статистики ОП $l_c = \mathcal{M}_c^{(M)}$

$$\mathcal{M}_c^{(M)} = (W-1)\left[(M-c)\ln\sum_{g=c+1}^{M}\varphi_g - \ln\prod_{g=c+1}^{M}\varphi_g - (M-c)\ln(M-c)\right] \tag{10}$$

и сравнению её с порогом $\chi^2_{\alpha,\omega_c^{(M)}}$,который выбран из таблиц χ^2 - распределения по заданному уровню значимости α и степеням свободы $\omega_c^{(M)} = 0{,}5(M-C)(M-C+1)-1$

Идентичные выкладки могут быть приведены, если в качестве исходных данных задавать ($K \times M$) - размерную пространственно-временную выборку $V(\tau)=U^{T}(\tau)$ (где " т " над символом - знак транспонирования), ковариационная матрица R_N которой определяется так

$$R_N = B\Phi_N B^{+} + 2\delta_0^2 I_K$$

$$\Phi_N = \langle E(\tau)\Lambda\Lambda^{+}E^{+}(\tau)\rangle \qquad (11)$$

Несложно показать, что при выполнении гипотезы H_c ($C = N < K$) критическая статистика $\mathcal{M}_c^{(K)}$ расчитывается из соотношения

$$\mathcal{M}_c^{(K)} = (W-1)\left[(K-c)\ln\sum_{g=c+1}^{K}\varphi_g - \ln\prod_{g=c+1}^{K}\varphi_g - (K-c)\ln(K-c)\right] \qquad (12)$$

Здесь φ_g ($g = \overline{C+1,K}$) - собственные числа выборочной ковариационной матрицы S_K выборки $V(\tau)$

$$S_K = \frac{1}{W}\sum_{\tau=1}^{W} V(\tau)V^{+}(\tau) \qquad (13)$$

Для устранения эффектов " замирания" - появления линейной зависимости между столбцами Λ при соответствующих значениях Q_p, Φ_p ($p \in \overline{1,N}$) в результате чего нарушается условие равенства рангов пеленгационных матриц, целесообразно провести объединение $\mathcal{M}_c^{(M)}$ и $\mathcal{M}_c^{(K)}$. Воспользовавшись известным свойством суммы двух величин, распределенных как χ^2 /3/ получаем, что критическая статистика $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_c^{(M)} + \mathcal{M}_c^{(K)}$ имеет χ^2 - распределение с $\omega_c = \omega_c^{(M)} + \omega_c^{(K)}$ степенями свободы.

Анализ приведенного решения показывает, что использование выборки $U(\tau)$ вместо МК-размерного вектора $\overline{U(\tau)}$ наблюдений упрощает реализацию синтезированного теста за счет сокращения .

размерности ковариационных матриц S_M и S_K, и, соответственно, уменьшения числа вычисляемых собственных значений.

Кроме того, из вышеизложенного вытекает, что синтезированное правило определения количественного состава шумовых сигналов, во-первых, отвечает критерию максимума отношения правдоподобия, а, во-вторых, не требует предварительной оценки мощности помех.

Полученный тест основан на декомпозиции по собственным значениям ковариационных матриц наблюдений, а следовательно оперативен и совместим с известными алгоритмами оценок координат источников излучения.

Литература

I. Абрамов А.Д. Определение числа шумовых пространственно-временных сигналов методом проверки сложных гипотез по критерию отношения правдоподобия. // Авиационно-космическая техника и технология. - Харьков.: Харьковский авиационный институт, 1996, с. 407 - 411.

2. Марпл.-мл.С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер.с англ. под ред. И.С.Рыжака. - М.: Мир, 1990 г., - 584 с.

3. Корн Г.,Корн Т. Справочник по математике. 2 -М.: Наука, 1973. -832 с.