ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 16 1955

Канд. физико-матем. наук, доцент ***М. С. Шун***
ассистент ***М. Д. Гройсер***

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ НА ОКРУЖНОСТИ

С. М. Лозинский [1], рассматривая интерполяционный процесс с кратными узлами на единичной окружности, показал его расходимость для $f(x) \in C$. С другой стороны, если «ядро» интерполяционного процесса имеет вид $L^2_{k,n}(x)$, то есть не отрицательно, то имеет место равномерная сходимость такого процесса в случае отрезка для любой непрерывной функции, (например, интерполяционный процесс Фейера [2]).

Мы рассмотрим аналогичный интерполяционный процесс для единичной окружности $|z| = 1$.

Пусть $$H^{(n)}_k(z) \equiv H_k(z) = \left\{\frac{z_k}{n} \cdot \frac{z^n - 1}{z - z_n}\right\}^2 \tag{1}$$

$$z_k = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{2}$$

Очевидно, что $H_k(z_s) = \delta_{k,s}$

Рассмотрим интерполяционный многочлен:

$$P_{2(n-1)}(f;\ z) \equiv P_{2(n-1)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(z) f(z_k) \tag{3}$$

Имеет место следующая асимптотическая формула:

$$P_{2(n-1)}(z) \sim z^n f(z) \tag{4}$$

если $f(z)$ — непрерывная на окружности $|z| = 1$ функция.

Для доказательства заметим, что для $z = e^{i\theta}$

$$|H_k(z)| = \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2 \frac{n\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} = \varphi_k(\theta) = \varphi_{n-k}(2\pi - \theta)$$

и тогда $$\sum_{|\theta_k - \theta| > \delta} |H_k(z)| \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{\theta_k - \theta > \delta} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} <$$

$$< \frac{2\pi^2}{n^2} \sum_{k > \frac{n(\theta+\delta)}{2\pi}} \frac{1}{\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k > \frac{n(\theta+\delta)}{2\pi}} \frac{1}{\left(k - \frac{n\theta}{2\pi}\right)^2} \to 0. \tag{5}$$

Представим интерполяционный многочлен $P_{2(n-1)}(z)$ в виде:

$$P_{2(n-1)}(z) = \sum_{|\theta - \theta_k| > \delta} |H_k(z)| f(z_k) +$$

$$+ \sum_{|\theta - \theta_k| \leqslant \delta} H_k(z) [f(z_k) - f(z)] + \sum_{|\theta - \theta_k| \leqslant \delta} H_k(z) f(z) =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + f(z) \sum\nolimits_3.$$

Из (5) следует, что $\sum_1 \to 0$

Далее воспользуемся тождествами:

$$\frac{\sin^2 \pi\tau}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s-\tau)^2} = 1; \tag{6}$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + 0\,(1).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{|\theta_k-\theta|\leqslant\delta} H_k(z) = \frac{e^{in\theta}\sin^2\frac{n\theta}{2}}{n^2} \sum_{|\theta_k-\theta|\leqslant\delta} \frac{e^{i(\theta_k-\theta)}}{\sin^2\frac{\theta_k-\theta}{2}} =$$

$$= \frac{e^{in\theta}\sin^2\frac{n\theta}{2}}{n^2}(A+Bi),$$

где

$$A = \sum_{|\theta_k-\theta|\leqslant\delta} \frac{\cos(\theta_k-\theta)}{\sin^2\frac{\theta_k-\theta}{2}} =$$

$$= \sum_{|\theta_k-\theta|\leqslant\delta} \frac{1}{\left(\frac{\theta_k-\theta}{2}\right)^2} + \sum O(1) =$$

$$= \frac{n^2}{\pi^2} \sum_{\left[\frac{n(\theta-\delta)}{2\pi}\right]}^{\left[\frac{n(\theta+\delta)}{2\pi}\right]} \frac{1}{\left(k-\frac{n\theta}{2\pi}\right)^2} + \sum O(1) =$$

$$= \frac{n^2}{\pi^2}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{n\theta}{2\pi}\right)^2} + \varepsilon n\right\} = n^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{n\theta}{2}} + \varepsilon_n\right).$$

Далее

$$|B| = \left|\sum_{|\theta_k-\theta|\leqslant\delta} \frac{\sin(\theta_k-\theta)}{\sin^2\frac{\theta_k-\theta}{2}}\right| <$$

$$< 4\sum \frac{1}{|\theta_k-\theta|} < 4\sqrt{\sum \frac{1}{(\theta_k-\theta)^2}\cdot n} = \frac{4n^{\frac{3}{2}}}{\sin\frac{n\theta}{2}}(1+\varepsilon_n').$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_3 = \frac{e^{in\theta}\sin^2\frac{n\theta}{2}}{n^2}\left\{\frac{n^2}{\sin^2\frac{n\theta}{2}}(1+\varepsilon_n) + i\,O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)\right\} \to e^{in\theta} = z^n. \tag{7}$$

Но, определив по заданному $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, что для $|\theta_k - \theta| < \delta$ будет выполнено $|f(z_k) - f(z)| < \varepsilon$, получим для $\sum_2$ следующую оценку:

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant \sum_{|\theta-\theta_k|\leqslant\delta} |H_k(z)|\,|f(z_k)-f(z)| < \varepsilon \sum_{|\theta-\theta_k|\leqslant\delta} |H_k(z)| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{n^2}\sin^2\frac{n\theta}{2} \sum_{|\theta-\theta_k|\leqslant\delta} \frac{1}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}} < \frac{\varepsilon}{n^2}\sin^2\frac{n\theta}{2}\cdot\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{n\theta}{2\pi}\right)^2} = \varepsilon$$

Значит, $P_{2(n-1)}(z) = f(z) \cdot z^n + \varepsilon_n' + \varepsilon$, что доказывает асимптотическую формулу (4).

Из полученной формулы легко получаются следствия:

1. Для каждого фиксированного $z = e^{i\theta}$ существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\lim\limits_{n_k \to \infty} P_{2(n_k-1)}(z) = f(z)$.

2. Последовательность рациональных дробей $R_n(z) = z^{-n} P_{2(n-1)}(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ всюду в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ для любой регулярной в этом круге функции.

Первое утверждение следует из того, что для любого $\frac{\theta}{2\pi}$ можно указать сходящуюся к нему последовательность рациональных дробей $\left\{\frac{m_k}{n_k}\right\}$, тогда $z^{n_k} \to 1$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что при $|z| = 1$, очевидно, $R_n(z) \rightrightarrows f(z)$ и, если $|\zeta| < 1$, то

$$R_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{R_n(z)}{z - \zeta} dz - \sum f(z_k) \cdot \alpha_k, \tag{8}$$

где

$$\alpha_k \text{ — вычет } \frac{1}{z^n} \left\{\frac{z^n - 1}{z - z_k} \cdot \frac{z_k}{n}\right\}^2$$

в точке $z = 0$.

Непосредственный подсчет дает

$$\alpha_k = \frac{z_k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z - z_k)^2}\bigg|_{z=0} = \frac{z_k}{n}.$$

Так как

$$\Delta z = z_{k+1} - z_k = z_k \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1\right) = z_k \left[\frac{2\pi i}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

то

$$\frac{z_k}{n} = \frac{\Delta z_k}{2\pi i} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и тогда (8) принимает вид:

$$R_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{R_n(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k + \sum f(z_k) O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

значит,

$$\lim_{n \to \infty} R_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c f(z)\, dz = f(\zeta).$$

Сходимость здесь равномерная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозинский С. М. ДАН СССР, т. 24, № 4, 1939.

2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гос. тех.-теоретическое издательство, Москва — Ленинград, 1934.