ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 16 1955

Проф., доктор физико-математич. наук ***Я. Л. Геронимус***

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1

Рассмотрим голономную консервативную динамическую систему со стационарными связями, положение которой характеризуется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Если кинетическая энергия системы выражается формулой *

$$T = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \tag{1}$$

то, как известно, движение нашей системы можно рассматривать как движение точки с единичной массой в Римановом пространстве R_n, характеризуемом линейным элементом

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k; \tag{2}$$

при этом контравариантные компоненты скорости нашей точки будут

$$v^k = \dot{q}^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

а ковариантные компоненты совпадают с обобщенными импульсами

$$v_k = p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{3'}$$

контра- и ковариантные компоненты ускорения точки таковы [1, 2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} w^k &= \ddot{q}^k + \Gamma^k_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \\ w_k &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} \end{aligned} \right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где $\Gamma^k_{\alpha\beta} = \left\{ {\alpha\ \beta \atop k} \right\}$ — символ Кристоффеля II рода.

Рассмотрим следующую задачу:

Из всех возможных траекторий системы найти ту, для которой интеграл

$$\int \varphi(U + h)\, ds$$

будет минимальным; $\varphi(U + h)$ некоторая заданная функция, а U — силовая функция.

В частном случае при $\varphi(z) = \sqrt{z}$ мы получим по принципу наименьшего действия естественное движение; при $\varphi(z) = 1$ получим геодезические линии пространства R_n; наконец, при $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ получим движение за кратчайший промежуток времени, то есть так называемое брахистохронное движение.

---

* Мы всегда подразумеваем суммирование по каждому значку, входящему дважды.

Решив поставленную задачу, мы легко придем к обобщению известных теорем Эйлера и Бонне [4].

Условия минимума интеграла

$$\int \varphi(U+h) \sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}\, dt$$

приводят к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{g_{ik}\dot{q}^i \varphi(U+h)}{\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}}\right\} = \varphi'(U+h)\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}\frac{\partial U}{\partial q^k} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(U+h)\dot{q}^i\dot{q}^\nu \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^k}}{\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}}; \tag{5}$$

вводя переменное s, мы получим уравнение

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_\nu}\cdot\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^k}{ds}\varphi(U+h) + g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2}\varphi(U+h) + g_{ik}\frac{dq^i}{ds}\varphi'(U+h)\frac{\partial U}{\partial s} =$$

$$= \varphi'(U+h)\frac{\partial U}{\partial q^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^k}\cdot\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^\nu}{ds}\varphi(U+h),$$

что можно записать еще таким образом

$$g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2} + \Gamma_{k,i\nu}\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^\nu}{ds} = \frac{\varphi'(U+h)}{\varphi(U+h)}\left(\frac{\partial U}{\partial q^\nu} - g_{ik}\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{\partial U}{\partial s}\right), \tag{6}$$

где

$$\Gamma_{k,i\nu} = \left[{i\ \nu \atop k}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\nu k}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial q^k}\right)$$

символ Кристоффеля I рода.

Умножая обе части уравнения (6) на $g^{k\alpha}$ и суммируя по k, мы получим

$$\frac{d^2q^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{i\nu}\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^\nu}{ds} = \frac{\varphi'(U+h)}{\varphi(U+h)}\left\{F^\alpha - \frac{\partial U}{\partial s}\cdot\frac{dq^\alpha}{ds}\right\}, \tag{7}$$

так как символы Кристоффеля I и II рода связаны зависимостью

$$\Gamma^\alpha_{ik} = g^{\alpha\nu}\Gamma_{\nu,ik};$$

F^α — контравариантные компоненты силы, связанные с ковариантными компонентами $F_k = \frac{\partial U}{\partial q^k}$ соотношением

$$F^\alpha = g^{k\alpha}F_k.$$

§ 2

Обозначим через $\bar{\xi}$ единичный вектор, идущий по касательной к кривой

$$\xi^\alpha = \frac{dq^\alpha}{ds}, \qquad g_{ik}\xi^i\xi^k = 1;$$

как известно [6], единичный вектор $\bar{\eta} = \frac{d\bar{\xi}}{ds}\cdot\rho$ идет по главной нормали к кривой и имеет компоненты

$$\eta^\alpha = \rho\left\{\frac{d^2q^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{i\nu}\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^\nu}{ds}\right\}, \qquad g_{ik}\eta^i\eta^k = 1, \tag{8}$$

где ρ радиус кривизны кривой в данной точке. Отсюда вытекает, что направление главной нормали экстремальной кривой в любой точке пространства не зависит от вида функции $\varphi(U+h)$.

Обозначая через ρ_0 радиус кривизны в естественном движении, то есть при $\varphi(U+h) = \sqrt{U+h}$, мы находим

$$\frac{2(U+h)\varphi'(U+h)}{\varphi(U+h)} = \frac{\rho_0}{\rho}; \tag{9}$$

отсюда ясно, что радиусы кривизны траекторий принужденного и естественного движений пропорциональны друг другу

$$\rho = \frac{\rho_0}{k} \tag{10}$$

в случае

$$\varphi(U+h) = (U+h)^{\frac{k}{2}}. \tag{11}$$

Рассмотрим, наконец, ту дополнительную силу, которую, необходимо приложить для осуществления нашего принужденного движения. Пользуясь соотношениями

$$\dot{q}^i = v\frac{dq^i}{ds}, \qquad \ddot{q}^i = \dot{v}\frac{dq^i}{ds} + v^2\frac{d^2q^i}{ds^2}, \tag{12}$$

перепишем формулу (7) в таком виде

$$w^\alpha = \ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k = F^\alpha + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\left(F^\alpha - \frac{\partial U}{\partial s}\cdot\frac{dq^\alpha}{ds}\right).$$

Рассмотрим вектор

$$\overline{\Phi} = \overline{F} - \frac{\partial U}{\partial s}\cdot\overline{\xi};$$

как видно из уравнения (8), он идет по главной нормали нашей кривой; ввиду того, что величина

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial q^\nu}\cdot\frac{dq^\nu}{ds} = F_\nu\xi^\nu = \overline{F}\cdot\overline{\xi} = F\cos(\overline{F}, \overline{\xi}) = F_s$$

является проекцией силы $\overline{F}$ на направление касательной, ясно, что вектор $\overline{\Phi}$ является компонентой нашей силы $\overline{F}$ по главной нормали. Таким образом, дополнительная сила $\overline{N}$, которую надо приложить для осуществления нашего принужденного движения, связана с компонентой силы по главной нормали соотношением

$$\overline{N} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\overline{\Phi};$$

в частности, при $\varphi(U+h) = (U+h)^{\frac{k}{2}}$ получим

$$\overline{N} = (k-1)\overline{\Phi}.$$

Мы приходим, таким образом, к теореме, являющейся обобщением известной теоремы Эйлера о брахистохронах.

Теорема 1. Принужденное движение, обращающее в минимум интеграл $\int\varphi(U+h)\,ds$,

$$ds^2 = g_{ik}dq^idq^k,$$

обладает следующими свойствами:

а) направление главной нормали в каждой точке экстремальной кривой не зависит от функции φ;

б) радиусы кривизны траекторий принужденного и естественного движения связаны зависимостью

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{2(U+h)\varphi'(U+h)}{\varphi(U+h)},$$

они пропорциональны друг другу в случае

$$\varphi(U+h) = (U+h)^{\frac{k}{2}}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{k};$$

в) дополнительная сила $\overline{N}$ связана с компонентой $\overline{\Phi}$ силы по главной нормали соотношением

$$\overline{N} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\overline{\Phi}.$$

Отсюда получается теорема Эйлера о движении точки по брахистохроне в трехмерном Эвклидовом пространстве.

§ 3

Пусть теперь

$$\varphi(U+h) = (U+h)^k.$$

Докажем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы Бонне [4, 2].

Теорема 2. Пусть точка движется в пространстве R_n по кривой A, обращая в минимум интеграл

$$\int (U+h)^k ds,$$

причем пусть сперва силовая функция равна U_1 и начальная скорость равна v_{01}, затем U_2 и v_{02} и т. д.; если же заставить точку двигаться по той же кривой A под действием сил, производных от силовой функции

$$\widetilde{U} = \alpha_i U_i, \qquad \alpha_i = \mathrm{const}, \tag{13}$$

то реакция направлена по главной нормали и равна

$$\widetilde{N} = \alpha_i N_i + \frac{C}{\rho}. \tag{14}$$

Для доказательства отметим прежде всего соотношение

$$w^\alpha = \ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k = v^2\left(\frac{d^2q^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{ik}\frac{dq^i}{ds}\cdot\frac{dq^k}{ds}\right) + \dot{v}\frac{dq^\alpha}{ds},$$

вытекающее из (4) и (12). Его можно переписать в такой форме

$$w^\alpha = \dot{v}\xi^\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cdot\eta^\alpha, \qquad \overline{w} = \frac{v^2}{\rho}\overline{\eta} + \dot{v}\overline{\xi},$$

откуда следует, что проекции ускорения на касательную и главную нормаль находятся так же, как в трехмерном Эвклидовом пространстве (см. [2] § 186).

Таким образом, мы имеем для каждого из наших движений

$$\frac{1}{2}\frac{dv_i^2}{ds} = F_s^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial s}, \quad \frac{v_i^2}{\rho} = 2k\Phi_i = \Phi_i + N_i,$$

где $N_i = (2k-1)\Phi_i$.

Отсюда мы находим

$$\frac{1}{2}\alpha_i^2\frac{dv_i^2}{ds} = \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\widetilde{v^2}}{ds}, \qquad \widetilde{v^2} = \alpha_i v_i^2 + C.$$

Дальше мы имеем

$$\frac{\widetilde{v^2}}{\rho} = \widetilde{N} + \widetilde{\Phi} = \widetilde{N} + \alpha_i\Phi_i = \frac{C}{\rho} + 2k\alpha_i\Phi_i,$$

то есть

$$\widetilde{N} = \frac{C}{\rho} + (2k-1)\alpha_i\Phi_i = \frac{C}{\rho} + \alpha_i N_i.$$

В каждом из наших составляющих движений сила Ф направлена по главной нормали; ускорение дает проекции только на касательную и главную нормаль — поэтому проекции каждой силы на $n-2$ остальных направления, перпендикулярные к касательной и к главной нормали, равны нулю — следовательно, и сила, производная от силовой функции $\widetilde{U}$, дает проекцию только на касательную и главную нормаль, а поэтому реакция $\widetilde{N}$ направлена по главной нормали.

Постоянная C имеет значение

$$C=\widetilde{v}_0^2-\alpha_i v_{0i}^2.$$

При $k=\frac{1}{2}$ наши r движений являются естественными — реакции N_i равны нулю и, таким образом, $\widetilde{N}=\frac{C}{\rho}$ — в этом заключается теорема Бонне.

§ 4

Рассмотрим теперь движение гироскопа.

Как известно, движение симметричного гироскопа можно заменить движением его апекса* по сфере, рассматривая апекс как материальную точку, находящуюся под действием заданных сил и некоторых дополнительных сил [7, 8]. Этот результат можно рассматривать как частный случай применения общего метода сведения движения системы к движению точки в пространстве R_n.

Пусть ось Oz является осью вращения симметричного гироскопа; в таком случае проекции угловой скорости на подвижные оси выразятся в зависимости от Эйлеровых углов формулами

$$\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},$$

а кинетическая энергия гироскопа будет иметь величину

$$2T=A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2,$$

где $A=B=J_x=J_y,\qquad C=J_z$.

Таким образом, движение гироскопа можно заменить движением одной точки в трехмерном пространстве R_3 с линейным элементом

$$ds^2=A(d\psi^2\sin^2\theta+d\theta^2)+C(d\psi\cos\theta+d\varphi)^2$$

под действием сил, производных от силовой функции $U=U(\varphi,\ \theta,\ \psi)$.

Рассмотрим тот частный случай, когда

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0,$$

и, следовательно, координата φ является циклической. В этом случае задачу можно свести к движению точки в R_2. Действительно, применим известное преобразование Раузса

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})=Cn=\text{const}.$$

$$R=T-\dot{\varphi}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{A}{2}(\dot{\psi}\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+Cn\dot{\psi}\cos\theta+\text{const}.$$

* Апексом гироскопа называется конец единичного вектора, отложенного по оси гироскопа.

После этого преобразования уравнения движения напишутся, как известно, следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^k}\right)-\frac{\partial R}{\partial q^k}=\frac{\partial U}{\partial q^k}.$$

В нашем случае имеем

$$R=T_1+Cn\dot{\psi}\cos\theta, \qquad T_1=\frac{A}{2}(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2),$$

где T_1 можно рассматривать, как кинетическую энергию точки массой A, движущейся по единичной сфере.

Обозначая

$$\psi=q^1, \quad \theta=q^2,$$

мы находим ковариантные компоненты ускорения

$$Aw_1=\frac{\partial U}{\partial q^1}+Cn\sin\theta\cdot\dot{\theta}, \quad Aw_2=\frac{\partial U}{\partial q^2}-Cn\sin\theta\cdot\dot{\psi};$$

легко видеть, что дополнительная сила Φ с ковариантными компонентами

$$\Phi_1=Cn\sin\theta\cdot\dot{\theta}, \quad \Phi_2=-Cn\sin\theta\cdot\psi$$

имеет величину

$$\Phi^2=g^{ik}\Phi_i\Phi_k=\frac{C^2n^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2}{\sin^2\theta}+C^2n^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2=(Cn\times v)^2;$$

она перпендикулярна скорости $\bar{v}$, ибо $\bar{\Phi}\cdot\bar{v}=\Phi_i v^i=0$ и отклонена от нее на 90° влево, если итти по направлению v (при $n>0$); таким образом, ее величина и направление даются формулой

$$\bar{\varphi}=C\bar{n}\times\bar{v},$$

Эта дополнительная сила есть следствие «скрытого движения» гироскопа вокруг своей оси.

Итак, апекс симметричного гироскопа под действием сил, не дающих момента вокруг его оси, движется так же, как двигалась бы по поверхности гладкой единичной сферы материальная точка массой A под действием обобщенных сил, приложенных к гироскопу, и дополнительной гироскопической силы $C\bar{n}\times\bar{v}$, где $\bar{n}$ вектор угловой скорости гироскопа вокруг его оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Картан Э. Геометрия Римановых пространств, М — Л, ОНТИ, 1936, гл. 2, стр. 44.

2. Уиттекер Е. Аналитическая динамика, М—Л,, ОНТИ, 1937 г., стр. 110, 457.

3. Синдж Дж. Л. Тензорные методы в динамике. М, изд. И. Л., 1947, стр. 14.

4. Аппель П. Руководство теоретической (рациональной) механики, том 1, Москва, 1911, стр. 496, 475.

5. Геронимус Я. Л. Узагальнення теореми Ейлера про брахістохрони. Записки Харк. матем. тов., сер. 4, т. 3, 1929 г., стор. 35—36.

6. Рашевский П. К. Введение в Риманову геометрию и тензорный анализ. М—Л, ОНТИ, 1936, стр. 80—86.

7. Розе Н. В. Динамика твердого тела Л., «Кубуч», 1932, стр. 173.

8. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов. Изд. АН СССР, Ленинград, 1932, стр. 297—8.