

Доцент, кандидат технических наук А. И. Борисенко

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Известный метод графического построения профилей Н. Е. Жуковского (например, 1), может быть применён и для построения профилей очень близких к обобщённым профилям Н. Е. Жуковского. Он также даёт возможность довольно просто определить скорость и давление в любой точке на профиле.

Функция, конформно отображающая окружность на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, в обобщённый профиль Н. Е. Жуковского на плоскости $z = x + iy$ имеет вид:

$$\frac{z - nc}{z + nc} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^n, \quad (1)$$

где:

$n = \frac{2\pi - \omega}{\pi} = 2 - \frac{\omega}{\pi}$ угол между касательными к профилю в ребре схода и c — аффикс точки на окружности, соответствующей ребру схода (рис. 1).

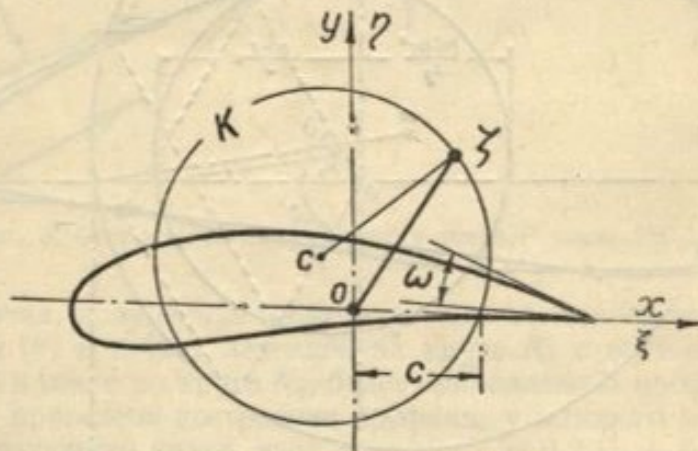


Рис. 1. Обобщённый профиль Н. Е. Жуковского и преобразующий круг.

Определяя z из (1) имеем:

$$z = \frac{(\zeta + c)^n + (\zeta - c)^n}{(\zeta + c)^n - (\zeta - c)^n} nc = \zeta + \frac{n^2 - 1}{3} \frac{c^2}{\zeta} + \frac{9n^2 - (n^2 + 2)^2}{45} \frac{c^4}{\zeta^3}. \quad (2)$$

При $n = 2$ все члены правой части, начиная с третьего, обращаются в нуль. Обычно n весьма близко к 2, так как $n = 2 - \frac{\omega}{\pi}$ и угол ω для профилей, имеющих практическое значение невелик ($15-20^\circ$). Поэтому можно ожидать, что будет невелика погрешность, если в правой части (2) удерживать небольшое число членов.

Расчёты показывают, что для практических приложений можно ограничиться сохранением в ряде (2) только первых двух членов, то есть взять преобразующую функцию в виде:

$$z = \zeta + \frac{n^2 - 1}{3} \frac{c^3}{\zeta}. \quad (3)$$

В случае необходимости особенно точного определения формы профиля, можно внести затем поправку в профиль, получаемый из (2), при помощи:

$$\Delta z = \frac{9n^2 - (n^2 + 2)^2}{45} c \left(\frac{c}{\zeta} \right)^3. \quad (4)$$

Для графического построения отображения (3) обозначим

$$\frac{n^2 - 1}{3} c^2 = s^2$$

и получим, что

$$z = z_1 + z_2,$$

где:

$$z_1 = \zeta; \quad z_2 = \frac{n^2 - 1}{3} c^2 \frac{1}{\zeta} = \frac{s^2}{\zeta}. \quad (5)$$

Первое преобразование, $Z_1 = \zeta$, отображает исходный круг K на плоскости ζ в такой же круг K_1 на плоскости z .

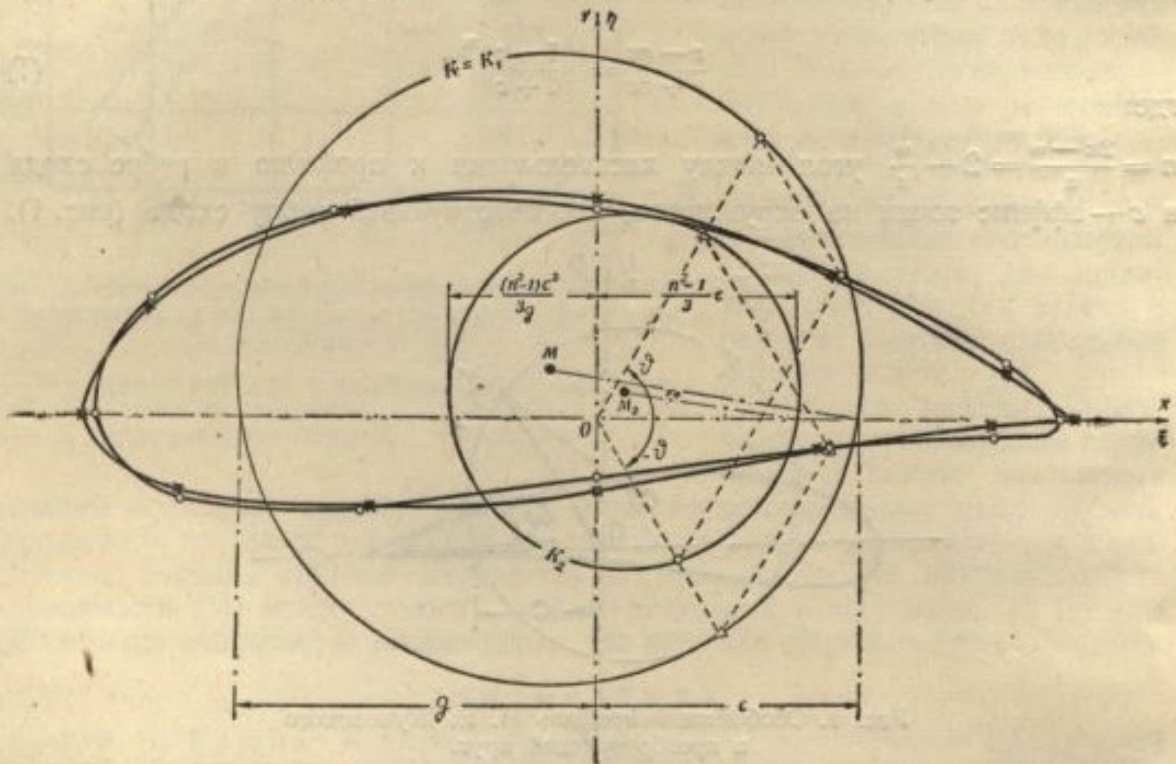


Рис. 2. Геометрический способ построения обобщённого профиля Н. Е. Жуковского $\omega = 36^\circ$, $n = 1,8$.

Второе преобразование $z_2 = s^2 : \zeta$, как дробно-линейное, также отображает исходный круг K на плоскости ζ в круг K_2 на плоскости z . Для определения положения второго круга K_2 заметим, что s^2 величина действительная и положительная ($n > 1$). Следовательно, величина z_{2c} соответствующая $\zeta = c$ будет также величиной действительной и равной

$$z_{2c} = \frac{n^2 - 1}{3} c (= x_{2c}; \quad Y_{2c} = 0).$$

Соответствующая точка будет лежать на действительной оси. В силу конформности отображения, окружность K_2 будет пересекать действительную ось под тем же углом, что и K . Следовательно, центр круга K_2 будет лежать на прямой, проходящей через z_{2c} и параллельной прямой, соединяющей центр исходного круга K с точкой $\zeta = c$.

Для определения второй точки окружности K_2 проще всего вычислить вторую точку пересечения окружности с действительной осью.

Если абсцисса пересечения K с действительной осью (g), то абсцисса пересечения K_2 будет:

$$z_{2g} = \frac{n^2 - 1}{3} \frac{c^2}{g} = \frac{s^2}{g}.$$

Теперь центр второго круга K_2 найдётся без труда.

Точки профиля получаются геометрическим сложением z и z_2 . Для этого удобно привести лучи из начала координат через равные интервалы

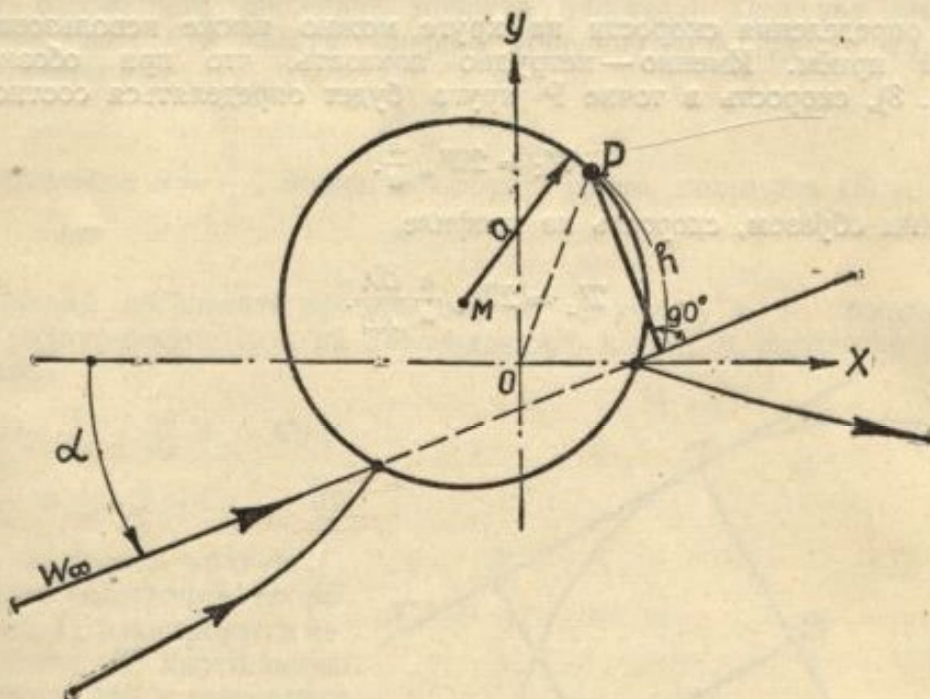


Рис. 3. Скорость на окружности в точке P равна $2W_{\infty} h : a$.

углов. Тогда точка, полученная геометрическим сложением вектора, проведенного под углом (ϑ) к точке, лежащей на круге K_1 с вектором, проведенным под углом ($-\vartheta$) к точке на круге K_2 , будет принадлежать профилю.

На рис. 2 приведено построение профиля, у которого $\omega = 36^\circ$ ($n = 1,8$) и центр преобразующего круга взят в точке $\zeta_0 = 0,2(1 + i)c$. Точки, полученные отображением (2), помечены (0).

Для уточнения формы профиля можно ввести поправку по уравнению (4). Это проще всего сделать непосредственным вычислением величины

$$\Delta z = B \frac{c^3}{\zeta^3} = B \frac{c^3}{\rho^3} e^{-i3\vartheta}; \quad \left(B = \frac{9n^2 - (n^2 + 2)^2}{45} c; \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta} \right)$$

и прибавлением её в соответствующих точках профиля. На рис. 2 эти точки отмечены X. Точки, полученные точным расчётом по соотношению

$$\frac{z - nc}{z + nc} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^n$$

на рис. 2 помечены (·)

Для графического определения скорости на профиле заметим, что

$$W_z = W_\zeta \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|, \quad (6)$$

где:

W_ζ скорость на круге, определяемая соотношением

$$W_\zeta = -2W_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}.$$

Из (2) имеем:

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left| 1 - \frac{s^2}{\zeta^2} \right| = \left| \frac{1}{\zeta} \left| \zeta - \frac{s^2}{\zeta} \right| \right| \quad (7)$$

и

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{|\zeta|}{\left| \zeta - \frac{s^2}{\zeta} \right|} = \frac{\overline{OA}}{AB}. \quad (8)$$

Для определения скорости на круге можно также использовать графический приём. Именно — нетрудно показать, что при обозначениях (см. рис. 3), скорость в точке Р круга будет определяться соотношением

$$W_\zeta = 2W_\infty \frac{h}{a}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость на профиле

$$W_z = 2W_\infty \frac{h}{a} \frac{\overline{OA}}{AB}. \quad (10)$$

